Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Barbora Lebdušková

Kopule a modelování závislosti

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Zdeněk Hlávka Ph.D.

Studijní program: Matematika

2006

Na tomto místě bych chtěla poděkovat vedoucímu práce Mgr. Zdeňku Hlávkovi Ph.D. za trpělivost a cenné rady.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 16.5.2006 Barbora Lebdušková

Barbora Lebdušková

Obsah

1 Úvod **5**

2 Kopule **6**
2.1 Označení 6
2.2 Kopule 6
2.3 Fréchet-Hoeffdingovy meze a Sklarova věta 8
2.3.1 Fréchet-Hoeffdingovy meze 8
2.3.2 Sklarova věta 10

3 Vlastnosti kopulí **11**
3.1 Náhodné veličiny 11
3.1.1 Fréchet-Hoeffdingovy meze pro spojité distribuční funkce náhodných veličin 12
3.2 Funkce kopulím blízké 13
3.2.1 Kopule přežití 13
3.2.2 Duální a opačné kopule 14
3.3 Symetrie 15
3.4 Uspořádání 17
3.5 Archimedovy kopule 18

4 Přehled kopulí **21**
4.1 Dvourozměrné kopule 23
4.1.1 Mardia 23
4.1.2 Gumbel-Hougaard 25
4.1.3 Ali-Mikhail-Haq 27
4.1.4 Fréchet 29
4.1.5 Cuadras-Augé 31
4.2 Vícerozměrné kopule 33

5 Odhady parametrů kopulí **34**

6 Závěr **36**

Literatura **37**

Název práce: Kopule a modelování závislosti
Autor: Barbora Lebdušková
Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Zdeněk Hlávka Ph.D.
e-mail vedoucího: hlavka@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V první části této práce je definován pojem dvourozměrné kopule a je vyslovena Sklarova věta. Tyto pojmy jsou následovně rozšířeny pro náhodné veličiny. Dále jsou uvedeny vlastnosti kopulí (Frechét-Hoeffdingovy meze, uspořádání, symetrie), kopule přežití a Archimedovy kopule. Třetí část obsahuje několik konkrétních příkladů dvourozměrných kopulí spolu s grafickým znázorněním a jednu ukázku vícerozměrné kopule. V závěrečné části jsou zmíněny možnosti odhadování parametrů kopulí (parametricky, neparametricky a semiparametricky).

Klíčová slova: Kopule, Sklarova věta, Odhady parametrů kopulí.

Title: Copulas and modelling dependence
Author: Barbora Lebdušková
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: Mgr. Zdeněk Hlávka Ph.D.
Supervisor's e-mail address: hlavka@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the first part of this work we define the term 'two-dimensional copula' and give Sklar's theorem. These ideas are then extended for random variables. Next, we summarize the basic properties of copulas (Fréchet-Hoeffding boundaries, order, symmetry), survival copulas and Archimedean copulas. The third part contains several examples of two-dimensional copulas with their graphs and one multivariate copula. In the last part, we shortly describe several possibilities of estimation of copula parameters (parametric, non-parametric and semi-parametric).

Keywords: Copulas, Sklar's theorem, Estimations of copula parameters.

Kapitola 1

Úvod

Cílem této práce je zadefinovat pojem *kopule*, seznámit se se základními vlastnostmi těchto funkcí a vytvořit jejich přehled. Budeme se zabývat hlavně dvourozměrnými kopulemi. První část práce tvoří teorie obsahující definici kopulí.

Ve druhé části uvedeme jejich elementární vlastnosti, které jsem se snažila demonstrovat na konkrétních příkladech. Zmíníme funkce, které s kopulemi úzce souvisí. Odvodila jsem pro ně vyjádření pomocí pravděpodobnosti a vypočítala je pro konkrétní rodinu kopulí. Na konci druhé části se seznámíme s význačnou skupinou Archimedových kopulí. Jedná se o kopule, které mají v určitém smyslu dobré vlastnosti, například jsem ukázala, že jsou symetrické.

Ve třetí části jsou uvedeny některé konkrétní rodiny kopulí, jejich grafy a charakteristika. U těchto kopulí jsem ověřovala vlastnosti definované v první části. Jelikož v literatuře je těchto funkcí uvedeno velké množství, snažila jsem se vybírat takové rodiny kopulí, aby byly zastoupeny základní typy.

V poslední části jsem zmínila způsob odhadu parametrů kopulí. Pro hlubší zájem uvádím literaturu, ve které je možné se dozvědět více.

Kapitola 2

Kopule

V této kapitole definujeme, co to vlastně kopule jsou a povíme si něco o Fréchet-Hoeffdingových mezích a Sklarově větě. Následně tuto teorii upřesníme pro náhodné veličiny a zmíníme základní vlastnosti kopulí.

2.1 Označení

Na úvod uvedeme značení, které je v následujícím textu použito.

- $\mathbb{R} = (+\infty, -\infty)$
- $\overline{\mathbb{R}} = [+\infty, -\infty]$
- $\overline{\mathbb{R}}^2 = [+\infty, -\infty] \times [+\infty, -\infty]$
- *obdélník* v $\overline{\mathbb{R}}^2$ je kartézský součin dvou uzavřených intervalů $[x_1, y_1] \times [x_2, y_2]$
- body (x_1, y_1) a (x_2, y_2) budeme nazývat *vrcholy* obdélníku
- $I = [0, 1]$ a *jednotkovým čtvercem* nazveme $I^2 = I \times I$
- D_F...definiční obor funkce F
- R_F...obor hodnot funkce F

2.2 Kopule

Dříve než přistoupíme k vlastní definici pojmu *kopule*, zadefinujeme si několik pomocných pojmů, které nám usnadní další práci.

Definice 2.2.1. Nechť S_1 a S_2 jsou neprázdné podmnožiny $\overline{\mathbb{R}}$ a H je funkce definovaná na $S_1 \times S_2$. Nechť $B = [x_1, y_1] \times [x_2, y_2]$ je obdélník s vrcholy náležícími do D_H. Potom definujeme *H-objem* B jako

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1). \tag{2.1}$$

$\triangle$

Funkce z $\overline{\mathbb{R}}$ do $\overline{\mathbb{R}}$ můžeme charakterizovat pomocí pojmů *rostoucí, klesající, nerostoucí* a *neklesající*, ale funkce z $\overline{\mathbb{R}}^2$ do $\overline{\mathbb{R}}$ mohou v jednom bodě v určitém směru růst, a v jiném směru klesat, proto zavedeme pojem *2-rostoucí*.

Definice 2.2.2. Řekneme, že funkce $H : \overline{\mathbb{R}}^2 \to \mathbb{R}$ je *2-rostoucí* pokud pro všechny obdélníky B ležící v D_H platí $V_H(B) \geq 0$.

$\triangle$

Příklad 2.2.1. Mějme funkci $H(x, y) = (x-1)(y-1)$ definovanou na I^2. Pokud se na H budeme dívat jako na funkci proměnné x, pak pro všechna $y \in (0, 1)$ je tato funkce klesající. Podobně to platí, když budeme H uvažovat jako funkci proměnné y a $x \in (0, 1)$. Ale zároveň platí, že $V_H(I^2) = 1$. Je tedy zřejmé, že H je 2-rostoucí.

$\blacksquare$

Uvedeme ještě jeden příklad, který je možné najít v [6]. Je na něm vidět, že funkce neklesající v každém argumentu nemusí být 2-rostoucí.

Příklad 2.2.2. Mějme funkci $H(x, y) = \max(x, y)$ definovanou na I^2. Tato funkce je zřejmě neklesající v každém svém argumentu. Pokud spočítáme její H-objem I^2 dostaneme

$$V_H(I^2) = \max(1, 1) - \max(0, 1) - \max(1, 0) + \max(0, 0) = -1$$

Funkce H nemůže být 2-rostoucí.

$\blacksquare$

Nyní již můžeme definovat *kopule*. Provedeme to pomocí poněkud obecnější skupiny funkcí, kterým budeme říkat *subkopule*.

Definice 2.2.3. *Dvourozměrná subkopule (2-subkopule)* je funkce C' s vlastnostmi:

1. $D_{C'} = S_1 \times S_2$, kde S_1, S_2 jsou podmnožiny I obsahující 0 a 1;

2. C' je 2-rostoucí a pro všechna $(x, y) \in D_{C'}$ platí

$$C'(x, 0) = 0 = C'(0, y); \tag{2.2}$$

3. pro $\forall u \in S_1$ *a* $\forall v \in S_2$ platí

$$C'(u,1) = u \quad \text{a} \quad C'(1,v) = v. \tag{2.3}$$

△

Všimněme si, že pro každé $(u,v) \in D_{C'}$ platí, že $0 \leq C'(u,v) \leq 1$.

Definice 2.2.4. *Dvourozměrná kopule (2-kopule, kopule)* je dvourozměrná subkopule C s definičním oborem I^2.

△

V celém tomto textu se budeme zabývat hlavně dvourozměrnými kopulemi, takže je budeme označovat pouze jako *kopule.* Většina pojmů se dá rozšířit do více dimenzí, tuto teorii je možné najít v [6].

2.3 Fréchet-Hoeffdingovy meze a Sklarova věta

2.3.1 Fréchet-Hoeffdingovy meze

Z předchozího textu víme, že funkční hodnoty libovolné kopule leží v intervalu $(0,1)$. V této kapitole tento odhad zpřesníme. Ukážeme si, že existuje jakási nejmenší a největší kopule, kterým se říká Fréchet-Hoeffdingovy meze.

Věta 2.3.1. *Nechť C' je subkopule, potom pro každé (u,v) z jejího definičního oboru platí*

$$\max(u+v-1,0) \leq C'(u,v) \leq \min(u,v). \tag{2.4}$$

*Důkaz.*Viz [6, str. 8]

□

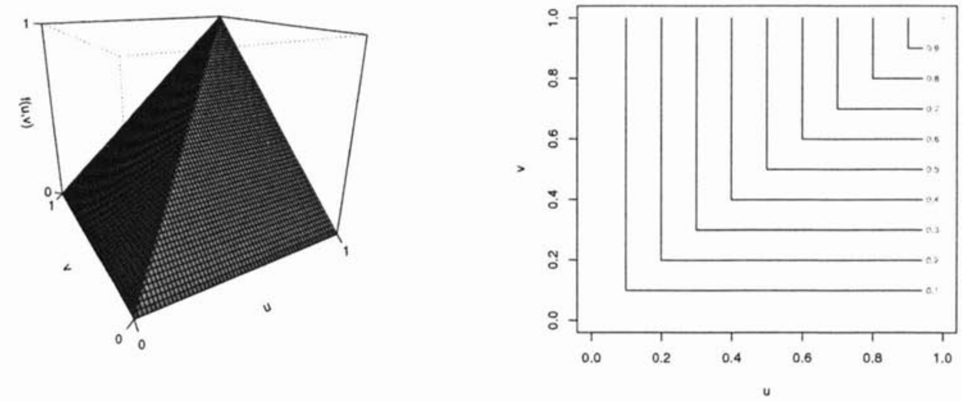
V dalším textu budeme používat značení

$$M(u,v) = \min(u,v) \tag{2.5}$$
$$W(u,v) = \max(u+v-1,0) \tag{2.6}$$

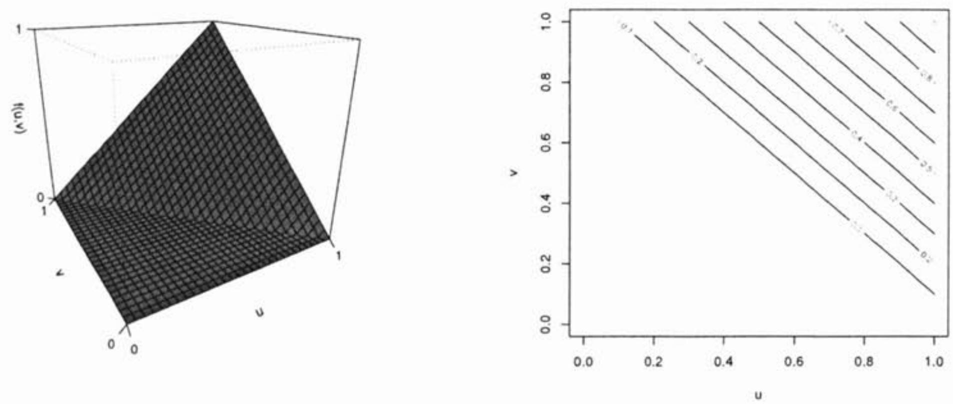
Všimneme si, že každá z těchto funkcí je také kopulí. Tedy pro každou kopuli C a každý bod (u,v) z I^2 platí $W(u,v) \leq C(u,v) \leq M(u,v)$. Ještě zmíníme jednu význačnou kopuli, tzv. *součinovou kopuli*

$$\Pi(u,v) = uv \tag{2.7}$$

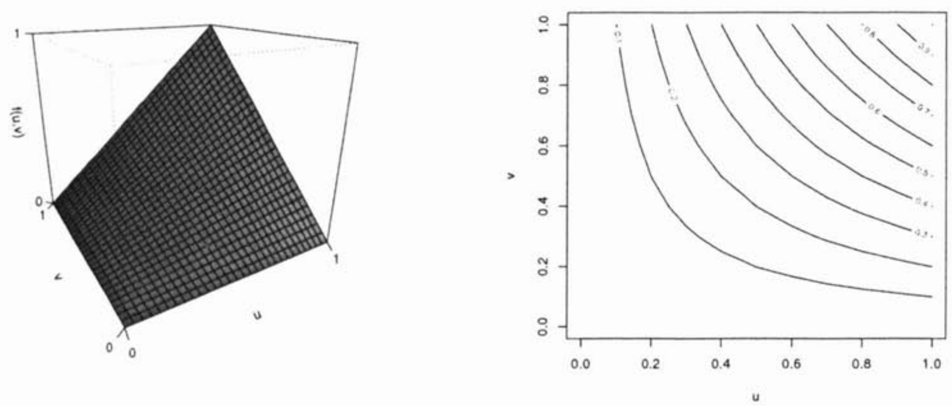
Tyto tři kopule (Fréchet-Hoeffdingovy meze a součinová kopule) jsou znázorněny na obrazcích 2.1 - 2.3. Pro zobrazení je použit 3D graf a pro lepší představu ještě tzv. *contour plot* stejné hustoty.



Obrázek 2.1: $M(u, v)$



Obrázek 2.2: $W(u, v)$



Obrázek 2.3: $\Pi(u, v)$

2.3.2 Sklarova věta

Nyní zadefinujeme distribuční funkci, a to zatím bez zavedení náhodných veličin.

Definice 2.3.1. Funkce F s definičním oborem $\overline{\mathbb{R}}$, pro kterou platí

1. F je neklesající na svém definičním oboru
2. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$
3. $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

se nazývá *distribuční funkce.*

△

Definice 2.3.2. Funkce H s definičním oborem $\overline{\mathbb{R}}^2$, pro kterou platí

1. H je 2-rostoucí na svém definičním oboru
2. $\lim_{x\to-\infty} H(x,y) = \lim_{y\to-\infty} H(x,y) = 0$
3. $\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} F(x) = 1$

se nazývá *sdružená distribuční funkce. Marginální distribuční funkce* jsou F a G takové, že

$$\begin{aligned} F(x) &= H(x,+\infty) && (2.8)\\ G(y) &= H(+\infty,y). && (2.9) \end{aligned}$$

△

Následující věta popisuje vztah mezi kopulí, distribuční funkcí a marginálními distribučními funkcemi. Dala by se nazvat základní větou teorie kopulí.

Věta 2.3.2 (Sklarova). *Buď H dvourozměrná distribuční funkce mající jednorozměrné marginální distribuční funkce F a G. Pak existuje taková kopule C, že pro všechna reálné x a y platí*

$$H(x,y) = C(F(x), G(y)). \tag{2.10}$$

Důkaz. Viz [6, str. 15]

□

Kapitola 3

Vlastnosti kopulí

V této kapitole se budeme zabývat vztahem mezi kopulemi a náhodnými veličinami, definujeme si některé funkce od kopulí odvozené a blíže se podíváme na vlastnosti kopulí. Vlastnosti budou demonstrovány na vhodných parametrických rodinách kopulí, které podrobně představíme ve čtvrté kapitole.

3.1 Náhodné veličiny

Pro porozumění následujících odstavců je nutné mít základní znalosti z teorie míry. Předpokládejme, že $(\Omega, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Prvky množiny Ω budeme nazývat *elementární jevy* a značit ω; prvky σ-algebry $\mathcal{A}$ budeme nazývat *jevy* a značit velkými písmeny z počátku abecedy.

Definice 3.1.1. *Pravděpodobnost* P je definována jako míra na $\mathcal{A}$ s vlastnostmi:

1. $\mathsf{P}(A) \geq 0, A \in \mathcal{A}$
2. $\mathsf{P}(\Omega) = 1, \ \mathsf{P}(\emptyset) = 0$
3. $\mathsf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n)$, je-li $\{A_n\}$ posloupnost po dvou disjunktních jevů.

Trojice $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ se nazývá *pravděpodobnostní prostor*.

$\triangle$

Definice 3.1.2. Měřitelná reálná funkce $X : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, kde $\mathcal{B}$ značí systém borelovských množin z $\mathbb{R}$, se nazývá *náhodná veličina*.

$\triangle$

Náhodné veličiny budeme značit velkými písmeny z konce abecedy, malá písmena budou značit jejich hodnoty. Každé borelovské množině $B \in \mathcal{B}$ můžeme přiřadit její vzor $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ a pravděpodobnostní míru $Q(B) = P[X^{-1}(B)]$, kterou budeme nazývat *zákon rozdělení náhodné veličiny* nebo stručně *rozdělení*.

Definice 3.1.3. Funkce F s definičním oborem $\overline{\mathbb{R}}$ se nazývá *distribuční funkce náhodné veličiny* X, jestliže pro všechna x z definičního oboru platí

$$F(x) = \mathsf{P}[X \leq x]. \tag{3.1}$$

(Jedná se o speciální případ $Q(B)$, kdy $B = (-\infty, x)$.)

$\triangle$

Dále uvedeme variantu Sklarovy věty pro distribuční funkce náhodných veličin X a Y.

Věta 3.1.1. *Nechť X a Y jsou náhodné veličiny s distribučními funkcemi F a G a sdruženou distribuční funkcí H. Potom existuje kopule C, pro kterou platí*

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)). \tag{3.2}$$

Obráceně, pokud C je kopule, F a G jsou distribuční funkce, pak H definovaná vztahem (2.12) *je sdružená distribuční funkce s marginálními distribučními funkcemi F a G.*

Důkaz. Analogický s důkazem věty 2.3.2

$\square$

Kopuli z předcházející věty budeme nazývat *kopule X a Y* a značit C_{XY}. Připomeňme, že dvě náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé právě, když pro jejich sdruženou distribuční funkci $H(x, y)$ a marginální distribuční funkce $F(x)$ a $G(y)$ platí $H(x, y) = F(x)G(y)$. Následující věta dává do souvislosti nezávislost se součinovou kopulí Π.

Věta 3.1.2. *Nechť X a Y jsou spojité náhodné veličiny. X a Y jsou nezávislé právě, když $C_{XY} = \Pi$.*

Důkaz. Tvrzení je zřejmé.

$\square$

3.1.1 Fréchet-Hoeffdingovy meze pro spojité distribuční funkce náhodných veličin

S obecným tvarem Fréchet-Hoeffedingových mezích jsme se seznámili dříve. Nyní předpokládejme, že X a Y jsou náhodné veličiny se sdruženou distribuční funkcí H a marginálními distribučními funkcemi F a G. Potom pro všechna $x \in \overline{\mathbb{R}}$, $y \in \overline{\mathbb{R}}$ platí

$$\max(F(x) + G(y) - 1, 0) \leq H(x, y) \leq \min(F(x), G(y)). \tag{3.3}$$

3.2 Funkce kopulím blízké

3.2.1 Kopule přežití

Náhodné veličiny často reprezentují délku života jednotlivce v populaci. Pravděpodobnost, že délka života života překročí hodnotu x se dá vyjádřit pomocí *funkce přežití*

$$\overline{F}(x) = P[X > x] = 1 - F(x), \tag{3.4}$$

kde F značí distribuční funkci náhodné veličiny X. Hodnoty náhodné veličiny X bereme z $\overline{\mathbb{R}}$. Mějme dvojici náhodných veličnin (X, Y) s distribuční funkcí H. *Sdruženou funkci přežití* definujeme, jako $\overline{H}(x, y) = P[X > x, Y > y]$. Marginály $\overline{H}$ jsou $\lim_{y\to-\infty} \overline{H}(x, y)$ a $\lim_{x\to-\infty} \overline{H}(x, y)$. Jsou to fukce $\overline{F}$ a $\overline{G}$. Otázkou je, zda existuje nějaký vztah mezi sdruženou funkcí přežití a jejími marginálami, analogický se situací popsanou ve Sklarově větě. Předpokládejme, že C je kopule X a Y.

$$\begin{aligned}\overline{H}(x, y) &= 1 - F(x) - G(y) + H(x, y)\\ &= \overline{F}(x) + \overline{G}(y) - 1 + C(F(x), G(y))\\ &= \overline{F}(x) + \overline{G}(y) - 1 + C\left(1 - \overline{F}(x), 1 - \overline{G}(y)\right)\end{aligned}$$

Jestliže definujeme funkci $\hat{C} : I^2 \longrightarrow I$ jako

$$\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v), \tag{3.5}$$

dostaneme

$$\overline{H}(x, y) = \hat{C}\left(\overline{F}(x), \overline{G}(y)\right). \tag{3.6}$$

Všimněme si, že $\hat{C}$ je kopule. Budeme ji označovat jako *kopuli přežití* X a Y. Jestliže X a Y jsou náhodné veličiny, pak kopuli a kopuli přežití můžeme vyjádřit jako

$$C(F(x), G(y)) = P[X \le x, Y \le y] \tag{3.7}$$

$$\hat{C}\left(\overline{F}(x), \overline{G}(y)\right) = P[X > x, Y > y]. \tag{3.8}$$

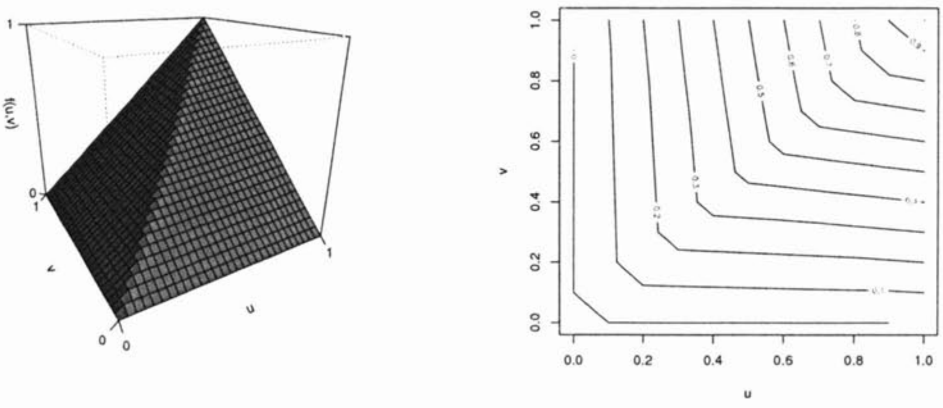
Příklad 3.2.1. Spočítáme kopuli přežití pro Mardiovu rodinu kopulí (viz podkapitola 4.1) danou vzorcem

$$C_\theta(u, v) = \frac{\theta^2(1+\theta)}{2} M(u, v) + \left(1 - \theta^2\right)\Pi(u, v) + \frac{\theta^2(1-\theta)}{2} W(u, v)$$

$$\theta \in [-1, 1].$$

$$\begin{aligned}\hat{C}(u, v) &= u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v)\\ &= u + v - 1 + \tfrac{\theta^2(1+\theta)}{2} M(1 - u, 1 - v) + (1 - \theta^2)\Pi(1 - u, 1 - v)\\ &\quad + \tfrac{\theta^2(1-\theta)}{2} W(1 - u, 1 - v).\end{aligned}$$

Na obrázku 3.1 je znázorněna Mardiova kopule přežití pro $\theta = 0.9$.



Obrázek 3.1: Mardiova kopule přežití pro $\theta = 0.9$

■

3.2.2 Duální a opačné kopule

Ještě zmíníme dvě skupiny funkcí, které jsou kopulím blízké. Tou první jsou *duální kopule*. Jestliže C je kopule, pak

$$\tilde{C}(u,v) = u + v - C(u,v) \tag{3.9}$$

je duální kopule.

Druhou skupinu tvoří *opačná kopule*. Nechť C je kopule pak

$$C^*(u,v) = 1 - C(1-u, 1-v) \tag{3.10}$$

je opačná kopule.

Podobný vztah, jako existuje mezi kopulí a kopulí přežití, odvodíme i pro duální kopuli a opačnou kopuli kopuli. Když do definice duální kopule dosadíme za u mariginální distribuční funkci $F(x)$ a za v mariginální distribuční funkci $G(y)$, dostaneme

$$\begin{aligned} \tilde{C}(F(x), G(y)) &= F(x) + G(y) - C(F(x), G(y)) \\ &= P[X \le x] + P[Y \le y] - P[X \le x, Y \le y] \\ &= P[X \le x \text{ nebo } Y \le y]. \end{aligned}$$

Obdobně pro opačnou kopuli a marginální distribuční funkce přežití $\overline{F}(x)$ a $\overline{G}(y)$ je vidět, že

$$\begin{aligned} C^*\left(\overline{F}(x), \overline{G}(y)\right) &= 1 - C\left(1 - \overline{F}(x), 1 - \overline{G}(y)\right) \\ &= 1 - C(F(x), G(y)) \\ &= 1 - P[X \le x, Y \le y] \\ &= P[X > x \text{ nebo } Y > y]. \end{aligned}$$

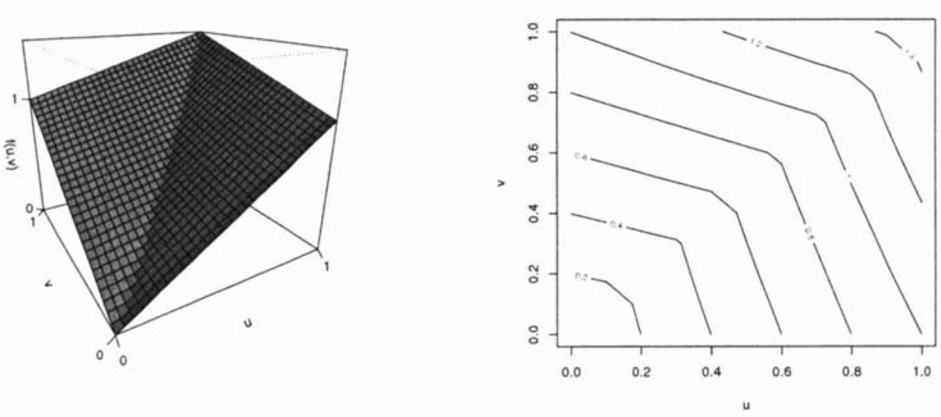
Takže vyjádření duální a opačné kopule pomocí pravděpodobnosti vypadá takto:

$$\begin{aligned} \tilde{C}(F(x), G(y)) &= P[X \leq x \text{ nebo } Y \leq y] \qquad (3.11)\\ C^*\left(\overline{F}(x), \overline{G}(y)\right) &= P[X > x \text{ nebo } Y > y]. \qquad (3.12) \end{aligned}$$

Příklad 3.2.2. Spočítáme duální a opačnou kopuli pro Mardiovu rodinu kopulí (viz podkapitola 4.1) z příkladu 3.2.1

$$\begin{aligned} \tilde{C}(u,v) &= u + v - C(u,v) \\ &= u + v - \tfrac{\theta^2(1+\theta)}{2} M(u,v) - (1-\theta^2)\Pi(u,v) - \tfrac{\theta^2(1-\theta)}{2} W(u,v) \end{aligned}$$

Mardiova duální kopule pro $\theta = 0.9$ je vykreslena na obr. 3.2.



Obrázek 3.2: Mardiova duální kopule pro $\theta = 0.9$

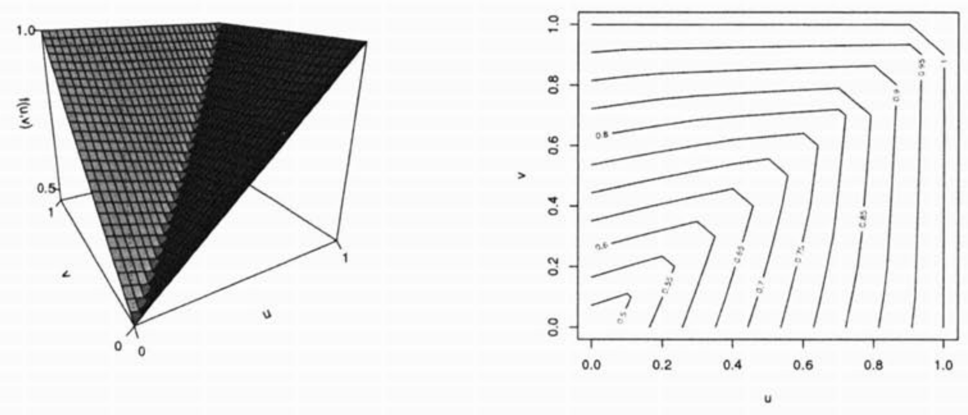
$$\begin{aligned} C^*(u,v) &= 1 - C(1-u, 1-v) \\ &= 1 - \tfrac{\theta^2(1+\theta)}{2} M(1-u, 1-v) - (1-\theta^2)\Pi(1-u, 1-v) - \\ &\quad - \tfrac{\theta^2(1-\theta)}{2} W(1-u, 1-v). \end{aligned}$$

Mardiova opačná kopule pro $\theta = 0.9$ je vykreslena na obr. 3.3.

■

3.3 Symetrie

Začneme definicí symetrie náhodné veličiny.



Obrázek 3.3: Mardiova opačná kopule pro $\theta = 0.9$

Definice 3.3.1. Jestliže X je náhodná veličina a a je reálné číslo, říkáme, že X je *symetrická okolo* a, jestliže distribuční funkce veličin $X - a$ a $a - X$ jsou stejné. To znamená, že pro libovolné x z $\mathbb{R}$ je

$$P\left[X - a \leq x\right] = P\left[a - X \leq x\right]. \tag{3.13}$$

Jestliže X je spojitá náhodná veličina můžeme to zapsat jako

$$F\left(a + x\right) = \overline{F}\left(a - x\right). \tag{3.14}$$

$\triangle$

Nyní uvažujme dvojici náhodných veličin (X, Y). Máme několik možností, jak definovat symetrii této dvojice náhodných veličin okolo bodu (a, b).

Definice 3.3.2. Nechť X a Y jsou náhodné veličiny a nechť (a, b) je bod v $\mathbb{R}^2$.

1. (X, Y) je *marginálně symetrická* kolem bodu (a, b), jestliže X je symetrická okolo a a Y je symetrická okolo b.

2. (X, Y) je *radiálně symetrická* okolo (a, b), jestliže sdružená distribuční funkce náhodných veličin $X - a$ a $Y - b$ je shodná se sdruženou distribuční funkcí náhodných veličin $a - X$ a $b - Y$.

3. (X, Y) je *sdruženě symetrická* okolo bodu (a, b), jestliže následující čtyři dvojice náhodných veličin mají shodnou sdruženou distribuční funkci: $(X - a, Y - b)$, $(X - a, b - Y)$, $(a - X, Y - b)$, $(a - X, b - Y)$.

$\triangle$

Definice 3.3.3. Kopule C je *symetrická*, jestliže pro všechna (u, v) z I^2 platí

$$C\left(u, v\right) = C\left(v, u\right). \tag{3.15}$$

$\triangle$

Příklad 3.3.1. Mezi symetrické kopule patří například Mardiova rodina kopulí z příkladu 3.2.1. Je vidět, že kopule Π, M a W jsou symetrické a tudíž platí následující rovnost.

$$\begin{aligned} C_\theta(u,v) &= \tfrac{\theta^2(1+\theta)}{2} M(u,v) + (1-\theta^2)\Pi(u,v) + \tfrac{\theta^2(1-\theta)}{2} W(u,v) \\ &= \tfrac{\theta^2(1+\theta)}{2} M(v,u) + (1-\theta^2)\Pi(v,u) + \tfrac{\theta^2(1-\theta)}{2} W(v,u) \end{aligned}$$

■

3.4 Uspořádání

V následujícím odstavci se pokusíme zavést uspořádání na kopulích.

Definice 3.4.1. Jestliže C_1 a C_2 jsou kopule, říkáme, že C_1 je *menší* než C_2 (nebo C_2 je *větší* než C_1), jestliže

$$C_1(u,v) \le C_2(u,v) \text{ pro všechna } (u,v) \in I^2.$$

Značení: $C_1 \prec C_2$ nebo $(C_2 \succ C_1)$.

△

Toto uspořádání je pouze částečné, protože ne každé dvě kopule můžeme porovnat.

Příklad 3.4.1. Součinová kopule Π a kopule definovaná jako průměr Frechét-Hoeffdingových mezí nejsou porovnatelné. Jestliže

$$C(u,v) = \frac{W(u,v)+M(u,v)}{2},$$

potom $C\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) > \Pi\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ a $C\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right) < \Pi\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$. Proto neplatí ani $C \prec \Pi$, ani $C \succ \Pi$.

■

Definice 3.4.2. Řekneme, že úplně uspořádaná parametrická rodina kopulí $\{C_\theta\}$ je *pozitivně uspořádaná*, jestliže pro každé $\alpha \le \beta$ platí $C_\alpha \prec C_\beta$, a *negativně uspořádaná*, jestliže pro každé $\alpha \le \beta$ platí $C_\alpha \succ C_\beta$.

△

Příklad 3.4.2. Vezměme rodinu kopulí Cuadras-Augé (viz podkapitola 4.1).

$$C_\theta(u,v) = [\min(u,v)]^\theta [uv]^{1-\theta} = \begin{cases} uv^{1-\theta}, & u \le v \\ u^{1-\theta}v, & u \ge v \end{cases}$$

Tato rodina je pozitivně uspořádaná, protože pro $0 \le \alpha \le \beta \le 1$ a $u \in (0,1)$, $v \in (0,1)$ platí

$$\frac{C_\alpha(u,v)}{C_\beta(u,v)} = \left(\frac{uv}{\min(u,v)}\right)^{\beta-\alpha} \le 1$$

Z toho je hned vidět, že $C_\alpha \prec C_\beta$.

■

Mezi kopule, které nejsou uspořádané patří Mardiova rodina kopulí.

Příklad 3.4.3. Mardiova rodina kopulí (viz příklad 3.2.1) je dána vzorcem

$$C_\theta(u,v) = \frac{\theta^2(1+\theta)}{2} M(u,v) + \left(1-\theta^2\right)\Pi(u,v) + \frac{\theta^2(1-\theta)}{2} W(u,v)$$

$$\theta \in [-1,1]$$

Snadno se ověří, že $C_0\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right) \le C_{\frac{1}{4}}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$, ale zároveň $C_{\frac{1}{4}}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right) \ge C_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$.

■

3.5 Archimedovy kopule

Ještě zmíníme jednu velice zajímavou skupinu kopulí, Archimedovy kopule. Jedná se o velmi širokou skupinu, kam patří mnoho rodin kopulí. Nebudeme se jimi zabývat do hloubky, spokojíme se s definicí a uvedeme je do souvislosti s výše uvedenými vlastnostmi. Podrobnější informace je možné nalézt v [6].

Definice 3.5.1. Nechť φ je spojitá, ryze klesající funkce z I do $[0,+\infty]$ taková, že $\varphi(1) = 0$. *Pseudoinverze funkce* φ je funkce $\varphi^{[-1]}$ s $D_{\varphi^{[-1]}} = [0,+\infty]$ a $H_{\varphi^{[-1]}} = I$ daná předpisem

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \le t \le \varphi(0), \\ 0, & \varphi(0) \le t \le +\infty. \end{cases} \tag{3.16}$$

△

Všimeme si, že $\varphi^{[-1]}$ je spojitá a nerostoucí na $[0,+\infty]$, na $[0,\varphi(0)]$ je dokonce ryze klesající.

Definice 3.5.2. Nechť kopule $C(u,v)$ z I^2 do I lze zapsat ve tvaru

$$C(u,v)=\varphi^{[-1]}(\varphi(u)+\varphi(v)), \tag{3.17}$$

kde φ je spojitá, ryze klesající funkce z I do $[0,+\infty]$ taková, že $\varphi(1)=0$ a $\varphi^{[-1]}$ je pseudoinverze funkce φ. Pak kopuli C nazveme *Archimedovou kopulí* a funkci φ jejím *generátorem*. Pokud $\varphi(0)=+\infty$, nazveme φ *striktní generátor*.

$\triangle$

Nyní zmíníme některé základní vlastnosti Archimedových kopulí.

Věta 3.5.1. *Nechť C je Archimedova kopule s generátorem φ, potom*

1. *C je symetrická;*
2. *C je asociativní, tj. $C(C(u,v),w)=C(u,C(v,w))$ pro všechna u,v,w z I;*
3. *Jestliže $c>0$ je libovolná konstanta, pak $c\varphi$ je také generátorem C.*

Důkaz.

1. $C(u,v)=\varphi^{[-1]}(\varphi(u)+\varphi(v))=\varphi^{[-1]}(\varphi(v)+\varphi(u))=C(v,u)$
2. Nejprve budeme uvažovat, že $0\le\varphi(u)+\varphi(v)\le\varphi(0)$:

$$\begin{aligned}
C(C(u,v),w) &= C\left(\varphi^{[-1]}(\varphi(u)+\varphi(v)),w\right)\\
&= \varphi^{[-1]}\left(\varphi\left(\varphi^{[-1]}(\varphi(u)+\varphi(v))\right)+\varphi(w)\right)\\
&= \varphi^{[-1]}(\varphi(\varphi^{-1}(\varphi(u)+\varphi(v)))+\varphi(w))\\
&= \varphi^{[-1]}(\varphi(u)+\varphi(v)+\varphi(w))\\
&= \varphi^{[-1]}(\varphi(u)+\varphi(\varphi^{-1}(\varphi(v)+\varphi(w))))\\
&= \varphi^{[-1]}\left(\varphi(u)+\varphi\left(\varphi^{[-1]}(\varphi(v)+\varphi(w))\right)\right)\\
&= C\left(u,\varphi^{[-1]}(\varphi(v)+\varphi(w))\right)\\
&= C(u,C(v,w)).
\end{aligned}$$

Nyní uvažujme že $\varphi(0)\le\varphi(u)+\varphi(v)\le+\infty$:

$$\begin{aligned}
C(C(u,v),w) &= C\left(\varphi^{[-1]}(\varphi(u)+\varphi(v)),w\right)\\
&= C(0,w)\\
&= 0\\
&= C(u,0)\\
&= C\left(u,\varphi^{[-1]}(\varphi(v)+\varphi(w))\right)\\
&= C(u,C(v,w)).
\end{aligned}$$

3. Nejprve budeme uvažovat, že $0 \leq c\varphi(u) + c\varphi(v) \leq c\varphi(0)$:

$$\begin{aligned}(c\varphi)^{[-1]}(c\varphi(u) + c\varphi(v)) &= (c\varphi)^{-1} c(\varphi(u) + \varphi(v)) \\ &= (c\varphi)^{-1} c\varphi(\varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))) \\ &= C(u,v)\end{aligned}$$

Nyní uvažujme že $c\varphi(0) \leq c\varphi(u) + c\varphi(v) \leq +\infty$:

$$\begin{aligned}(c\varphi)^{[-1]}(c\varphi(u) + c\varphi(v)) &= 0 \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) \\ &= C(u,v)\end{aligned}$$

□

Archimedovy kopule můžeme rozdělit na dvourozměrné a vícerozměrné a na kopule s jedním parametrem a více parametry. Konkrétní příklady uvedeme v kapitole 4. Hlouběji zde tuto speciální skupinu kopulí rozebírat nebudeme.

Kapitola 4

Přehled kopulí

Kopule můžeme rozdělit na dvourozměrné a vícerozměrné, dále pak podle počtu parametrů (budeme se věnovat jednorozměrným kopulím s jedním parametrem a se dvěma parametry). Cílem této kapitoly je uvést některé konkrétní rodiny kopulí. Vždy uvedeme název rodiny, vzorec, literaturu, kde ho můžeme nalézt, vlastnosti této rodiny a grafy pro několik hodnot parametru. Pro zobrazování budeme používat trojrozměrný a dvourozměrný graf. Do toho druhého zakreslíme navíc příslušnou Fréchet-Hoeffdingovu mez nebo součinovou kopuli, pokud by se pro danou hodnotu parametru kopule k některé z těchto funkcí blížila. Grafy jsou nakresleny v programu R.

Zde je skript pro obrázek Mardiovy rodiny kopulí s parametrem $\theta = 0.9$

```
postscript('mardia1p.ps', width = 5, height = 5, horizontal = FALSE, onefile = TRUE)
a <- 0.3
x <- seq(0, 1, length= 30)
y <- x
f <- function(x,y) (a ^ 2*(1+a))/2 * pmin(x,y)+(1-a ^ 2)*x*y+(a ^ 2*(1-a))/2*pmax(x+y-1,0)
z <- outer(x,y,f)
op <- par(bg = 'white')
persp(x, y, z, theta = -30, phi = 20, expand = 0.9, col = 'lightblue',
ltheta = 50, shade = 0.9, box = TRUE, ticktype ='detailed',nticks = 2,
xlab = 'u', ylab = 'v', zlab = 'f(u,v)')

postscript('mardia1c.ps', width = 5, height = 5, horizontal = FALSE, onefile = TRUE)
x<-seq(0,1,by=0.1)
y<-seq(0,1,by=0.1)
a<-0.3
f<-function(x,y)(a ^ 2*(1+a))/2 * pmin(x, y)+(1-a ^ 2)*x*y+(a ^ 2*(1-a))/2*pmax(x+y-1,0)
contour(outer(x,y,f),axes=T,xlab='u',ylab='v')
contour(outer(x,y,'pmin'),add=T,col='grey50',drawlabels=F)
```

Ještě než se s některými vybranými kopulemi seznámíme blíže, rozdělíme si je podle počtu parametrů. V tabulce jsou uvedeny pouze kopule zmiňované v této práci.

Kopule	**Jeden parametr**	**Více parametrů**	**Archimedova**
Mardia	✓	-	-
Gumbel-Hougaard	✓	-	✓
Ali-Mikhail-Haq	✓	-	✓
Fréchet	-	✓	-
Cuadras-Augé	-	✓	-

Tabulka 4.1: Rozdělení kopulí podle počtu parametrů

Rodiny jsem vybírala tak, aby bylo zastoupeno co nejvíc výše uvedených vlastností. To znamená, že zde jsou rodiny jednoparametrické, ale i rodiny s více parametry. Kromě symetrických Archimedových kopulí jsou zde zastoupeny i symetrické rodiny, které k Archimedovým řadit nemůžeme a navíc i rodina, která není obecně symetrická. Podobně je to i s uspořádáním, jsou uvedeny různé možnosti a to jak pro jednoparametrické kopule, tak i pro kopule s více parametry.

Kopulí však existuje daleko více, mnoho dalších příkladů je možné nalézt například v [6].

4.1 Dvourozměrné kopule

4.1.1 Mardia

Literatura: [6]

Vzorec:

$$C_\theta(u,v) = \frac{\theta^2(1+\theta)}{2} M(u,v) + \left(1-\theta^2\right)\Pi(u,v) + \frac{\theta^2(1-\theta)}{2} W(u,v) \tag{4.1}$$

$$\theta \in [-1,1]$$

Speciální případy:

$$\begin{aligned} C_0(u,v) &= \Pi(u,v) \\ C_1(u,v) &= M(u,v) \\ C_{-1}(u,v) &= W(u,v) \end{aligned}$$

Vlastnosti:

- Je symetrická.
- Není ani pozitivně, ani negativně uspořádaná.
- Kopule přežití:

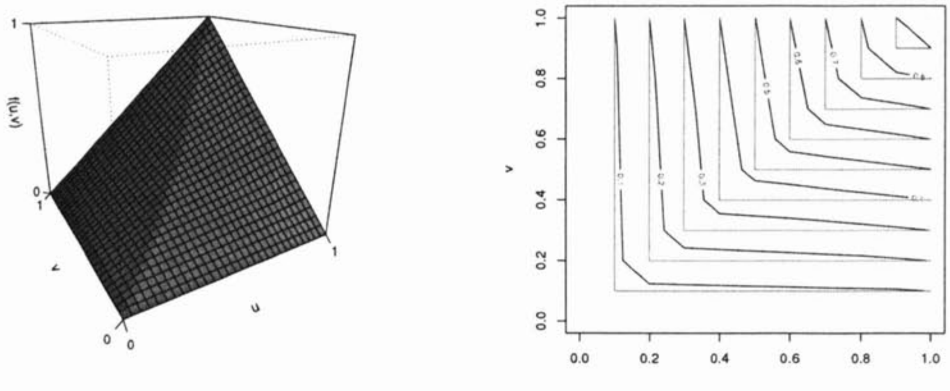
$$\begin{aligned} \hat{C}(u,v) &= u+v-1+\tfrac{\theta^2(1+\theta)}{2} M(1-u,1-v) + (1-\theta^2)\Pi(1-u,1-v) \\ &+ \tfrac{\theta^2(1-\theta)}{2} W(1-u,1-v). \end{aligned}$$

- Duální kopule:

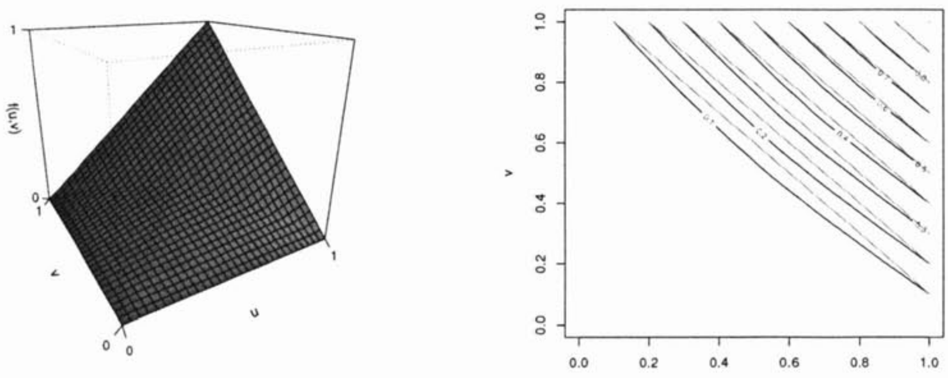
$$\tilde{C}(u,v) = u+v-\tfrac{\theta^2(1+\theta)}{2} M(u,v) - (1-\theta^2)\Pi(u,v) - \tfrac{\theta^2(1-\theta)}{2} W(u,v).$$

- Opačná kopule:

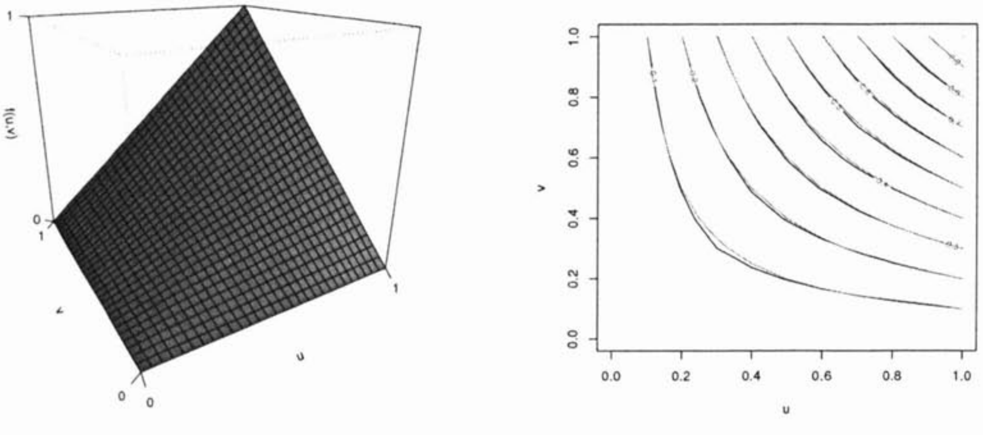
$$\begin{aligned} C^*(u,v) &= 1-\tfrac{\theta^2(1+\theta)}{2} M(1-u,1-v) - (1-\theta^2)\Pi(1-u,1-v) \\ &- \tfrac{\theta^2(1-\theta)}{2} W(1-u,1-v). \end{aligned}$$



Obrázek 4.1: Mardiova rodina pro $\theta = 0.9$. Šedou barvou $M = \min(u, v)$.



Obrázek 4.2: Mardiova rodina pro $\theta = -0.9$. Šedou barvou $W = \max(u + v - 1, 0)$.



Obrázek 4.3: Mardiova rodina pro $\theta = 0.3$. Šedou barvou $\Pi = (uv)$.

4.1.2 Gumbel-Hougaard

Literatura: [6]

Vzorec:

$$C_\theta(u,v) = e^{-\left[(-lnu)^\theta + (-lnv)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}} \tag{4.2}$$

$$\theta \in [1, +\infty)$$

Speciální případy:

$$C_1(u,v) = \Pi(u,v)$$

$$C_{+\infty}(u,v) = M(u,v)$$

Vlastnosti:

- Kopule je Archimedova, tudíž je i symetrická. Její generátor má tvar $(-\ln t)^\theta$ a jedná se dokonce o striktní generátor.
- Není uspořádaná. (Například $C_2(0.5, 0.5) > C_3(0.5, 0.5)$, ale $C_2(2,2) < C_3(2,2)$).
- Kopule přežití:

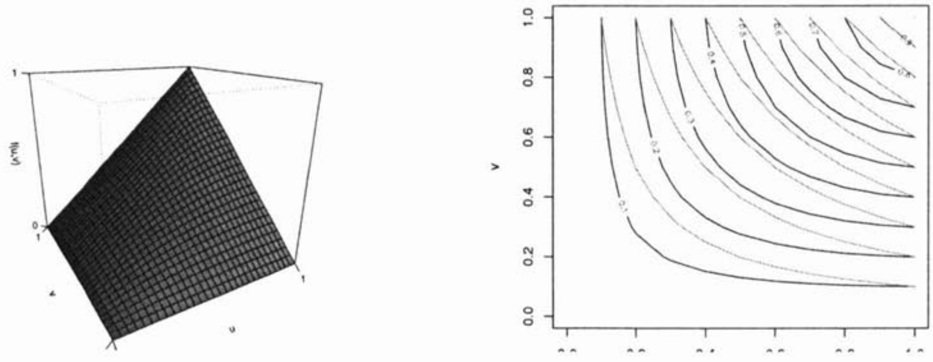
$$\hat{C}(u,v) = u + v - 1 + e^{-\left[(-ln(1-u))^\theta + (-ln(1-v))^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}}.$$

- Duální kopule:

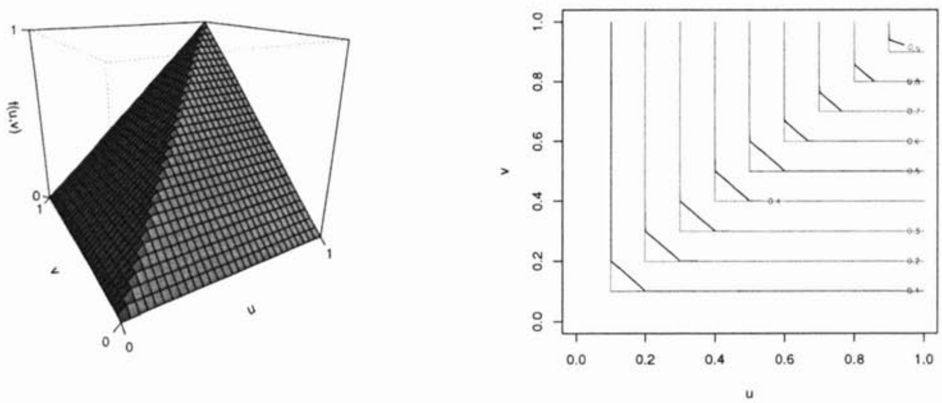
$$\tilde{C}(u,v) = u + v - e^{-\left[(-lnu)^\theta + (-lnv)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}}.$$

- Opačná kopule:

$$C^*(u,v) = 1 - e^{-\left[(-ln(1-u))^\theta + (-ln(1-v))^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}}.$$



Obrázek 4.4: Gumbel-Hougaardova rodina pro $\theta = 1.5$. Šedou barvou $\Pi = (uv)$.



Obrázek 4.5: Gumbel-Hougaardova rodina pro $\theta = 100$. Šedou barvou $W = \max(u + v - 1, 0)$.

4.1.3 Ali-Mikhail-Haq

Literatura: [6]

Vzorec:

$$C_\theta(u,v) = \frac{uv}{1-\theta(1-u)(1-v)} \tag{4.3}$$

$$\theta \in [-1,1)$$

Speciální případy:

$$C_0(u,v) = \Pi(u,v)$$

$$C_1(u,v) = \frac{\Pi(u,v)}{u+v+\Pi(u,v)}$$

Vlastnosti:

- Kopule je Archimedova, tudíž je i symetrická. Její generátor má tvar $\ln \frac{1-\theta(1-t)}{t}$ a jedná se dokonce o striktní generátor.

- Je pozitivně uspořádaná.

- Kopule přežití:

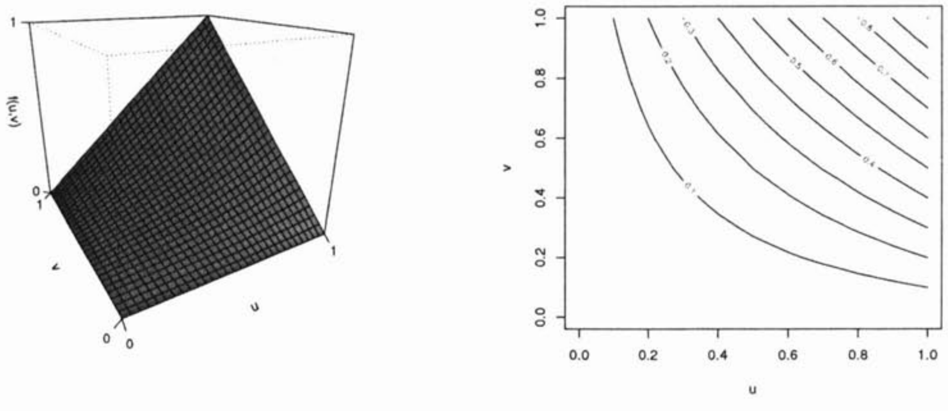
$$\hat{C}(u,v) = u+v-1+\frac{(1-u)(1-v)}{1-\theta uv}.$$

- Duální kopule:

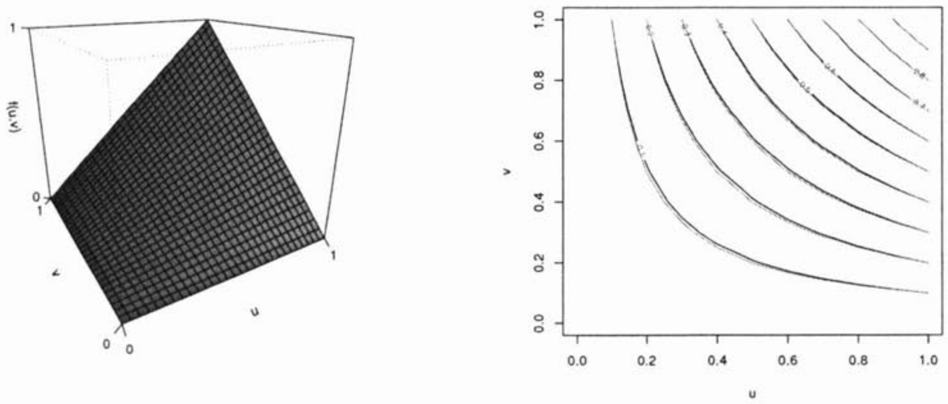
$$\tilde{C}(u,v) = u+v-\frac{uv}{1-\theta(1-u)(1-v)}.$$

- Opačná kopule:

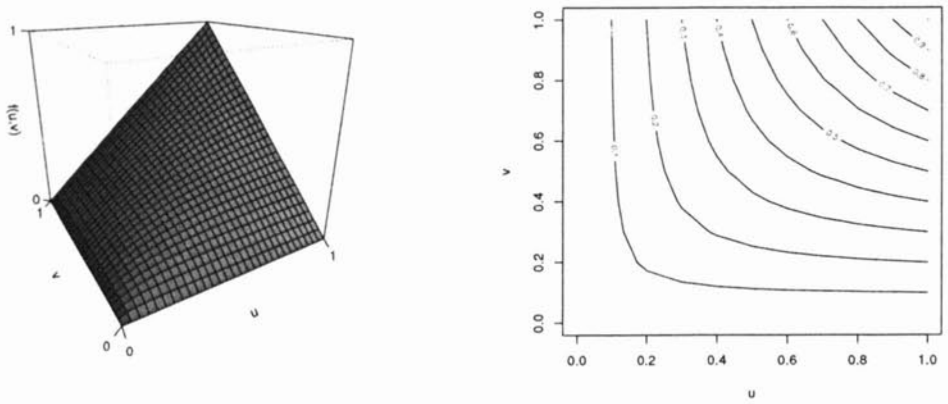
$$C^*(u,v) = 1-\frac{(1-u)(1-v)}{1-\theta uv}.$$



Obrázek 4.6: Ali-Mikhail-Haq rodina pro $\theta = -1$.



Obrázek 4.7: Ali-Mikhail-Haq rodina pro $\theta = -0.1$. Šedou barvou $\Pi = (uv)$.



Obrázek 4.8: Ali-Mikhail-Haq rodina pro $\theta = 0.999$.

4.1.4 Fréchet

Literatura: [6]

Vzorec:

$$C_{\alpha,\beta}(u,v) = \alpha M(u,v) + (1-\alpha-\beta)\Pi(u,v) + \beta W(u,v) \tag{4.4}$$

$$\alpha, \beta \in [0,1],\ \alpha+\beta \leq 1$$

Speciální případy:

$$C_{0,0}(u,v) = \Pi(u,v)$$
$$C_{0,1}(u,v) = W(u,v)$$
$$C_{1,0}(u,v) = M(u,v)$$

Vlastnosti:

- Je symetrická.

- S uspořádáním je to trochu složitější, protože tu máme dva parametry. Pokud β vezmeme pevné, tak podle α je tato rodina pozitivně uspořádaná. V opačném případě je uspořádaná negativně.

- Kopule přežití:

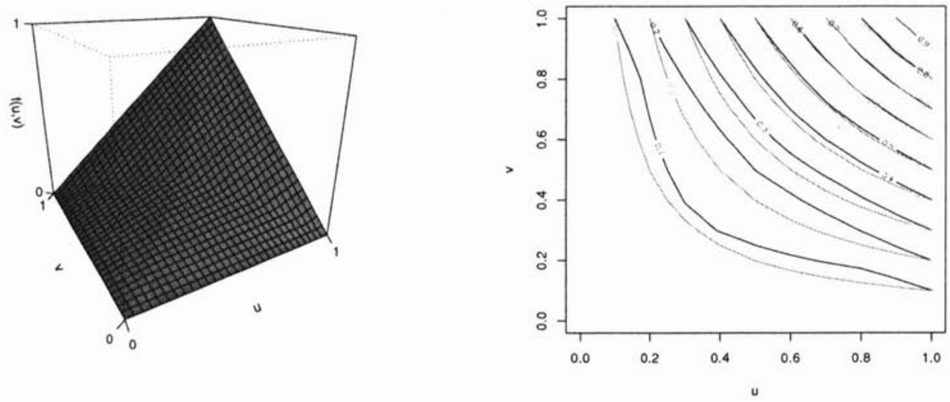
$$\begin{aligned}\hat{C}(u,v) &= u+v-1+\alpha M(1-u,1-v)+(1-\alpha-\beta)\Pi(1-u,1-v) \\ &\quad +\beta W(1-u,1-v).\end{aligned}$$

- Duální kopule:

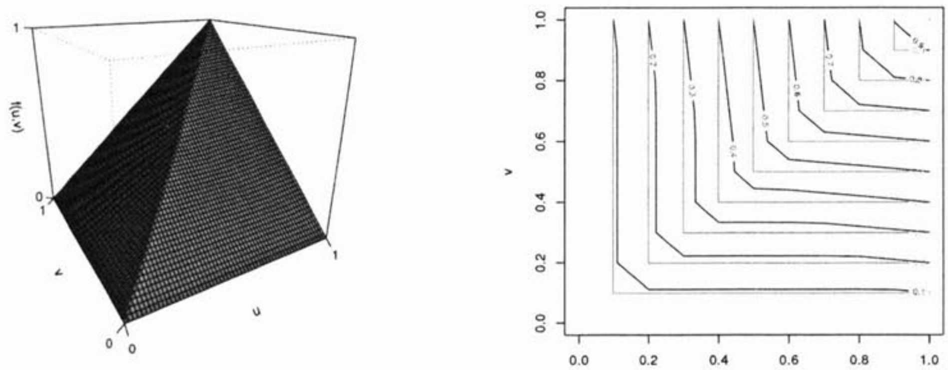
$$\tilde{C}(u,v) = u+v-\alpha M(u,v)-(1-\alpha-\beta)\Pi(u,v)-\beta W(u,v).$$

- Opačná kopule:

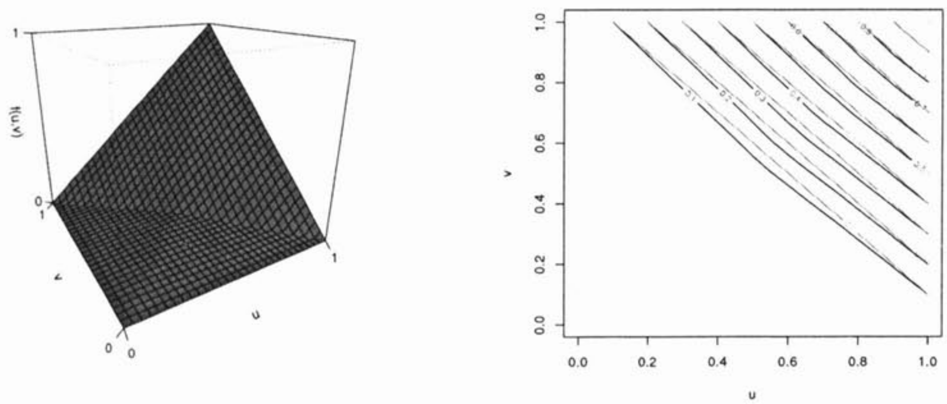
$$C^*(u,v) = 1-\alpha M(1-u,1-v)-(1-\alpha-\beta)\Pi(1-u,1-v)-\beta W(1-u,1-v).$$



Obrázek 4.9: Fréchetova rodina pro $a = 0.1$ a $b = 0.3$. Šedou barvou $\Pi = (uv)$.



Obrázek 4.10: Fréchetova rodina pro $a = 0.9$ a $b = 0.1$. Šedou barvou $M = \min(u, v)$.



Obrázek 4.11: Fréchetova rodina pro $a = 0.1$ a $b = 0.9$.
Šedou barvou $W = \max(u + v - 1, 0)$.

4.1.5 Cuadras-Augé

Literatura: [7]

Vzorec:

$$C_{\alpha,\beta}(u,v) = \min\left(u^{1-\alpha}v, uv^{1-\beta}\right) \tag{4.5}$$

$$\alpha \in [0,1], \quad \beta \in [0,1]$$

Speciální případy:

$$C_{\alpha,0}(u,v) = C_{0,\beta}(u,v) = \Pi(u,v)$$

$$C_{1,1}(u,v) = M(u,v)$$

Vlastnosti:

- Kopule je symetrická pouze v případě, že $a = b$.

- Pro $a = b$ je pozitivně uspořádaná.

- Kopule přežití:

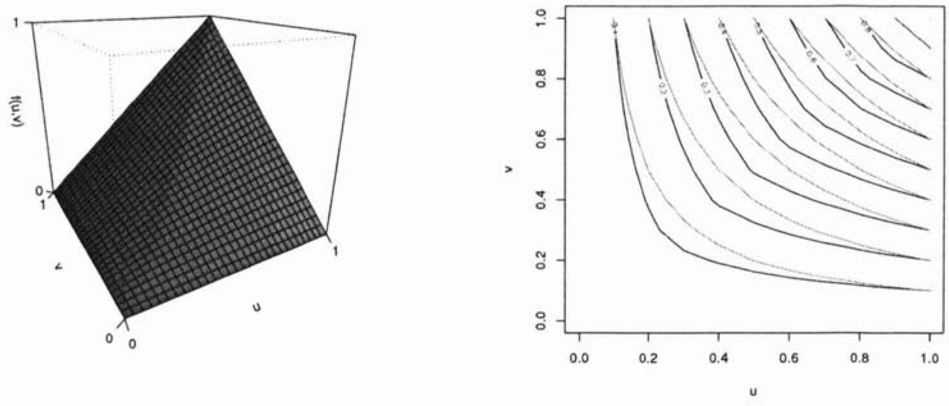
$$\hat{C}(u,v) = u + v - 1 + \min\left((1-u)^{1-\alpha}(1-v), (1-u)(1-v)^{1-\beta}\right).$$

- Duální kopule:

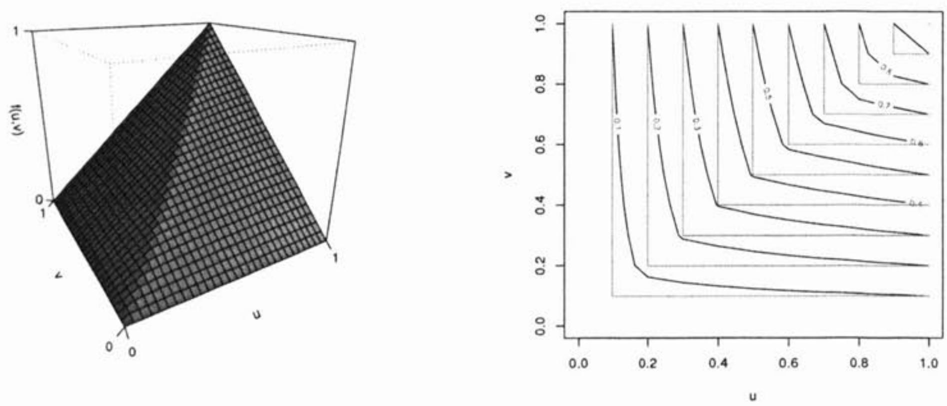
$$\tilde{C}(u,v) = u + v - \min\left(u^{1-\alpha}v, uv^{1-\beta}\right).$$

- Opačná kopule:

$$C^*(u,v) = 1 - \min\left((1-u)^{1-\alpha}(1-v), (1-u)(1-v)^{1-\beta}\right).$$



Obrázek 4.12: Cuadras-Augé rodina pro $\alpha = \beta = 0.3$. Šedou barvou $\Pi = (uv)$.



Obrázek 4.13: Cuadras-Augé rodina pro $\alpha = \beta = 0.7$. Šedou barvou $M = \min(u, v)$.

4.2 Vícerozměrné kopule

Teorie vícerozměrných kopulí je do jisté míry analogická s dvourozměrným případem, více informací lze nalézt například v [6]. Jen pro ilustraci uvedeme vícerozměrnou variantu Gumbelovy rodiny kopulí

$$C_n\left(\mathbf{u},\theta\right)=\exp\left(-\left(\sum_{i=1}^{n}\left(-\log u_i\right)^a\right)^{1/a}\right), \tag{4.6}$$

kde $\mathbf{u}=(u_1\dots u_n)$, $a\geq 1$ a pro $a=1$ jsou veličiny $u_1\dots u_n$ vzájemně nezávislé. Tuto kopuli najdeme v [5].

Kapitola 5

Odhady parametrů kopulí

K odhadování parametrů kopulí existují tři různé přístupy. První *parametrický* předpokládá znalost marginálních distribučních funkcí. Potom můžeme aplikovat metodu maximální věrohodnosti popsanou např. v [1], protože sdružená distribuční funkce se dá vyjádřit pomocí vhodné kopule a marginálních distribučních funkcí.

Druhým možným přístupem jsou *neparametrické* metody. V tomto případě není třeba znát marginální distribuční funkce, ale odhady získané touto cestou nejsou obecně ani eficientní, ani konzistentní. Neparametrická metoda založená na Kendallově τ je popsána v [4].

Třetí možnost je kompromisem mezi oběma předešlými a používá se pro ní označení semiparametrická metoda. Nepracuje s marginálními distribučními funkcemi, ale s marginálními empirickými distribučními funkcemi. Odhad, který dostaneme sice není obecně eficientní, ale je konzistentní a asymtoticky normální. Důkaz tohoto tvrzení i popis této metody je možné nalézt v [3]. Můžeme ji provést ve dvou krocích: Předpokládejme, že $C_\theta(u)$, $u \in \mathbb{R}^n$ je kopule a $F_n(x_n)$ jsou spojité marginální distribuční funkce. Ze Sklarovy věty můžeme sdruženou distribuční funkci $F(\mathbf{x})$, $x \in \mathbb{R}^n$ vyjádřit jako

$$F(\mathbf{x}) = C_\theta(F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_N(x_N)).$$

Odpovídající hustota bude mít tvar

$$f(\mathbf{x}) = c_\theta(F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_N(x_N)) \prod_{n=1}^{N} f_n(x_n),$$

kde $f_n(x_n)$ jsou hustoty příslušných $F_n(x_n)$ a

$$c_\theta(\mathbf{u}) = \frac{\partial C_\theta(u_1, u_2, \ldots, u_N)}{\partial u_1, \partial u_2, \ldots, \partial u_N}$$

- Odhadneme marginální distribuční funkci pomocí empirické distribuční funkce

$$\hat{F}_n(x_n) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} I\left(x_n^t \leq x_n\right). \tag{5.1}$$

- Budeme předpokládat, že data přetransformována empirickou distribuční funkcí tvoří náhodný výběr z rozdělení kopule, jejíž parametr odhadneme pomocí metody maximální věrohodnosti.

$$\hat{\theta} = \arg\max \sum_{t=1}^{T} \ln c\left(\hat{F}_1\left(x_1\right), \ldots, \hat{F}_N\left(x_N\right); \theta\right). \tag{5.2}$$

Ještě dříve než budeme odhadovat parametr kopule, musíme vědět, která kopule je pro naše data vhodná. K tomu lze využít například GOF test pro kopule, který je popsán v [2] nebo v [8].

Kapitola 6

Závěr

Kopule jsou velmi užitečné při modelování závislosti, protože umožňují místo sdružené distribuční funkce pracovat s často daleko jednoduššími marginálními distribučními funkcemi. Úzce souvisí se Spearmanovým ρ a Kendallovým τ, které jsou vhodné pro vyjádření závislosti i v případech, kde kovariance selhává.

V této práci jsem definovala, co vlastně kopule jsou, a uvedla některé jejich vlastnosti. Třetí kapitola obsahuje některé konkrétní rodiny. Snažila jsem se vybírat takové funkce, aby byly zastoupeny různé kombinace vlastností. Je vidět, že si jednotlivé kopule jsou dost podobné. Z obrázků je dobře patrné, jak se pro vhodné parametry blíží k Fréchet-Hoeffdingovým mezím, popřípadě k součinové kopuli Π. Na závěr jsem shrnula možnosti odhadu parametru kopulí.

Literatura

[1] J. Anděl.:*Základy matematické statistiky*, MATFYZPRESS, vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze (2005).

[2] J.-D. Fermanian.:*Goodness-of-fit tests for copulas*, Journal of Multivariate Analysis 95 (2005)119 –152.

[3] C.Genest, K.Ghoudi, C.Rivest.:*A semiparametric estimation porcedure of dependence parameters in multivariate families of distributions*, Biometrika 82 (1995)543 –552.

[4] C.Genest,C.Rivest.:*Statistical inference procedures for bivariate archimedean copulas*, Journal of the American Statistical Association 88 (1993)1034 –1043.

[5] E. Kole, K. Koedijk, M. Verbeek.:*Testing copulas to model Financial dependence.*, Dept. of Financial Management, RSM Erasmus University, Rotterdam, The Netherlands (2005).

[6] R. B. Nelsen.:*An Introduction to Copulas.*, Springer-Verlag New York (1999).

[7] R. B. Nelsen.:*Properties and applications of copulas: A brief survey.*, Proceedings of the First Brazilian Conference on Statistical Modelling in Insurance and Finance, Institute of Matemathics and Statistics, Universite of Sao Paulo (2003).

[8] V. Panchenko.:*Goodness-of-fit tests for copulas*, Physica A 355 (2005)176 –182.

PŘIJATO K OBHAJOBĚ

30 -05- 2006

PŘEDSEDA KOMISE PRO BSZZ
STUDIJNÍ PROGRAM MATEMATIKA