Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Hana Havlíčková

Iterovaný logaritmus. Od zákonů velkých čísel k centrální limitní větě

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D.
Studijní program: Matematika,Obecná matematika

2006

Speciální poděkování patří vedoucímu práce RNDr. Danielu Hlubinkovi, Ph.D. za ochotu, trpělivost a profesionalitu, s jakou korigoval vývoj této práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 30.5.2006 Hana Havlíčková

Hana Havlíčková

Obsah

Název práce: Iterovaný logaritmus. Od zákonů velkých čísel k centrální limitní větě
Autor: Hana Havlíčková
Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D.
e-mail vedoucího: hlubinka@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme různé varianty zákona iterovaného logaritmu pro nezávislé náhodné veličiny včetně jeho důkazu. Zákon je postupně předváděn v různých stupních obecnosti, počínaje Chinčinovým zákonem iterovaného logaritmu pro nezávislé náhodné veličiny s alternativním rozdělením, přes zákon iterovaného logaritmu pro součty stejně a nestejně rozdělených nezávislých náhodných veličin, a konče zákonem iterovaného logaritmu pro Wienerův proces. V úvodní kapitole je studován historický vývoj tohoto zákona, dále jeho vztah k zákonu velkých čísel a hlavně vztah zákona iterovaného logaritmu a centrální limitní věty.

Klíčová slova: Zákon iterovaného logaritmu

Title: Iterated logarithm. From Laws of large numbers to the Central limit theorem
Author: Hana Havlíčková
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: hlubinka@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In present work we study different variants of the law of the iterated logarithm for independent random variables including its proof. The law is progressively introduced in some degrees of commonness, beginning with the Chinčin's law of the iterated logarithm for sequences of independent random variables with alternative distribution, followed by the law of iterated logarithm for sums of identically and nonidentically distributed independent random variables, and finally, by the law of iterated logarithm for Wiener process. In the first chapter, we study historical progress of the law of the iterated logarithm, its relation to the law of large numbers and particularly its relation to the central limit theorem.

Keywords: The law of the iterated logarithm

Kapitola 1

Úvod

Tato práce je zaměřena na takzvaný zákon iterovaného logaritmu, slavnou limitní větu v teorii pravděpodobnosti. V práci nejprve stručně připomeneme zásadní historické výsledky související s tímto zákonem a poté se ve třech kapitolách budeme věnovat postupnému dokazovaní zákona iterovaného logaritmu za různých předpokladů pro součty nezávislých náhodných veličin a také pro Wienerův proces. Na závěr uvedeme zajímavou konverzi k zákonu iterovaného logaritmu.

Není-li uvedeno jinak, jsou uvedená tvrzení a jejich důkazy převzaty z učebnic a monografií Prokhorov, Statulevičius (2000), Lesigne (2005), Galen (2000), Tucker (1967) a Karatzas, Shreve (1991).

1.1 Historie

Různé varianty zákona iterovaného logaritmu pro posloupnost náhodných veličin X_n obsahují podmínky, za jejich platnosti $\limsup_{n\to+\infty} \frac{|S_n|}{a_n} = 1$ s.j. nebo $\limsup_{n\to+\infty} \frac{|S_n|}{a_n} \leq 1$ s.j., kde $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ a $\{a_n\}$ je posloupnost kladných čísel. Tyto vztahy upřesňují odhady získané pomocí zákona velkých čísel.

V této kapitole uvedeme historický vývoj dvou nejdůležitějších vět obsahujících zákon iterovaného logaritmu. První z nich je Kolmogorovova věta, kterou bude následovat věta Hartmanova-Winterova.

Věta 1.1 (Kolmogorov) *Nechť X_n je posloupnost nezávislých náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a konečným rozptylem. Položme $B_n :=$*

$\sum_{k=1}^{n} EX_k^2$. *Nechť* $B_n \to +\infty$ *pro* $n \to +\infty$. *Dále předpokládejme, že existuje posloupnost kladných čísel* $\{M_n\}$ *tak, že*

$$|X_n| \leq M_n \tag{1.1}$$

a

$$M_n = o\left(\left(\frac{B_n}{\ln\ln B_n}\right)^{1/2}\right). \tag{1.2}$$

Potom

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2B_n \ln\ln B_n}} = 1 \quad s.j. \tag{1.3}$$

Jestliže posloupnost $\{X_n\}$ splňuje podmínky věty, pak je splňuje i posloupnost $\{-X_n\}$. Tudíž získáváme i tvrzení:

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2B_n \ln\ln B_n}} = -1 \quad \text{s.j.}$$

Celkově tedy můžeme tvrzení Kolmogorovovy věty shrnout následujícím výrazem:

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2B_n \ln\ln B_n}} = 1 \quad \text{s.j.} \tag{1.4}$$

Kolmogorovova věta je první obecný výsledek týkající se zákona iterovaného logaritmu. Již dříve dokázal Chinčin vztah (1.4) pro posloupnosti nezávislých stejně rozdělených veličin, které nabývají pouze dvou hodnot.

Podmínka (1.2) Kolmogorovovy věty nemůže být nijak oslabena. Marcinkiewicz a Zygmund (1937) zkonstruovali posloupnost nezávislých náhodných veličin nabývajících pouze dvou hodnot, pro kterou $B_n \to +\infty$, $M_n = O\left(\left(\frac{B_n}{\ln\ln B_n}\right)^{1/2}\right)$, ale

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2B_n \ln\ln B_n}} < 1 \quad \text{s.j.}$$

Weiss (1959) a Egorov (1972) zkonstruovali posloupnosti nezávislých náhodných veličin, pro které jsou splněny předpoklady (1.1) a (1.2) , ale

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2B_n \ln\ln B_n}} > 1 \quad \text{s.j.}$$

Věta 1.2 (Hartman-Winter) *Nechť $\{X_n\}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených veličin, pro které $EX_1 = 0$ a $EX_1^2 = \sigma^2 < +\infty$. Potom*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \ln\ln n}} = \sigma \quad s.j.$$

Strassen (1966) dokázal, že je-li $\{X_n\}$ posloupnost nezávislých stejně rozdělených veličin s $EX_1^2 = +\infty$, potom

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n \ln\ln n}} = +\infty \quad \text{s.j.}$$

Optimálnost tohoto výsledku ukázal v následující větě Berkes (1972).

Věta 1.3 (Berkes) *Je-li $f(n)$ libovolná funkce, pro kterou je $\lim_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$, potom existuje posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin $\{X_n\}$ taková, že $EX_1 = 0$, $EX_1^2 = +\infty$ a*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{S_n}{f(n)\sqrt{n \ln\ln n}} = 0 \quad s.j.$$

Martikainen (1980), Rosalsky (1980) a Pruitt (1981) dokázali konverzi k zákonu iterovaného logaritmu:

Je-li $\{X_n\}$ posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin a

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \ln\ln n}} = 1 \quad s.j.,$$

potom $EX_1 = 0$ a $EX_1^2 = 1$.

1.2 Od zákona velkých čísel k centrální limitní větě

Nejprve uvedeme všechna tři tvrzení, která budeme srovnávat. Již z nadpisu plyne, že co do obecnosti leží zákon iterovaného logaritmu mezi zákonem velkých čísel a centrální limitní větou.

Věta 1.4 (Zákon velkých čísel) *Je-li $\{X_n\}$ posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s konečnou střední hodnotou (bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $EX_1 = 0$), pak pro $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n} = 0 \quad s.j$$

Věta 1.5 (Zákon iterovaného logaritmu) *Nechť $\{X_n\}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin. Označme $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \in \mathbb{N}$. Jestliže $EX_1 = 0$ a $var X_1 = \sigma^2 < +\infty$, pak*

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \ln \ln n}} = \sigma \ s.j. \ a \ \liminf_{n \to +\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \ln \ln n}} = -\sigma \ s.j.$$

Věta 1.6 (Centrální limitní věta) *Nechť $\{X_n\}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin. Označme $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \in \mathbb{N}$. Je-li $EX_1 = 0$ a $var X_1 = \sigma^2 < +\infty$, pak platí*

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}\sigma} < x\right) = \Phi(x),$$

kde Φ je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení.

Zákon velkých čísel nám dává konvergenci posloupnosti $\frac{S_n}{n}$ s.j. pro $n \to +\infty$ k jednomu jedinému bodu. Tato věta má také nejslabší předpoklady (konečná střední hodnota, žádný požadavek na rozptyl). Zákon iterovaného logaritmu už nám prozrazuje o něco více. Jeho pomocí již získáváme interval, do kterého spadají hodnoty posloupnosti $\frac{S_n}{\sqrt{2n \ln \ln n}}$ s.j. pro $n \to +\infty$. Pro stejně rozdělené nezávislé náhodné veličiny se jeho předpoklady shodují s předpoklady centrální limitní věty, která nám dává nejsilnější výsledek, kterým je konvergence posloupnosti $\frac{S_n}{\sqrt{n}\sigma}$ v distribuci k normálnímu rozdělení. Zákon iterované logaritmu je tedy jakýmsi mezistupněm mezi zákonem velkých čísel a centrální limitní větou.

1.3 Zákon iterovaného logaritmu versus centrální limitní věta

Podmínky v Hartmanově-Winterově větě se shodují s podmínkami Lévyho centrální limitní věty. Tudíž pro posloupnosti nezávislých stejně rozdělených veličin s konečným rozptylem platí jak zákon iterovaného logaritmu, tak i centrální limitní věta.

V tomto okamžiku vyvstává přirozená otázka, jak je to s aplikací zákonu iterovaného logaritmu a centrální limitní věty pro posloupnosti nestejně rozdělených náhodných veličin s nekonečnými rozptyly. Již se podařilo ukázat, že posloupnost s těmito vlastnostmi, pro kterou je splněna centrální limitní věta, nemusí ještě nutně splňovat zákon iterovaného logaritmu, a naopak.

Marcinkiewicz a Zygmund (1937) zkonstruovali posloupnosti nezávislých omezených nestejně rozdělených náhodných veličin, pro které platí centrální limitní věta, ale neplatí pro ně zákon iterovaného logaritmu. Ačkoli tedy náhodné veličiny vyhovují silnějším podmínkám, za jejichž platnosti lze aplikovat centrální limitní větu, neplatí pro ně zákon iterovaného logaritmu. Další výsledek dokázal Petrov (1966):

Nechť X_n je posloupnost nezávislých náhodných veličin s nulovými středními hodnotami a konečnými rozptyly. Položme

$$B_n := \sum_{k=1}^{n} EX_k^2 \quad a \quad R_n := \sup_x |P(S_n < x\sqrt{B_n}) - \Phi(x)|.$$

Jestliže

$$B_n \to +\infty, \frac{B_{n+1}}{B_n} \to 1 \quad a \quad R_n = O((\ln B_n)^{-1-\delta})$$

pro nějaké $\delta > 0$, potom platí vztah (1.3).

Tvrzení věty také platí v případě, že $\liminf\limits_{n\to+\infty} \frac{B_n}{n} > 0$ a

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} EX_k^2 |\ln |X_k||^{1+\delta} < +\infty$$

pro nějaké $\delta > 0$. Lze ukázat i jiné podmínky vyhýbající se předpokladům o existenci momentů řádů vyšších než dva, za nichž tvrzení (1.3) platí.

Egorov (1969) dokázal, že není možné nahradit v předchozí větě kladné číslo δ nulou. Ukázal, že existuje posloupnost nezávislých náhodných veličin s nulovými středními hodnotami a konečnými rozptyly, pro kterou $EX_n^2 \asymp 1$ a $R_n = O((\ln B_n)^{-1})$, avšak tvrzení (1.3) neplatí. Z toho plyne, že posloupnost nezávislých náhodných veličin splňující centrální limitní větu (tj. je-li $R_n \to 0$ pro $n \to +\infty$), ještě nemusí splňovat zákon iterovaného logaritmu.

Tomkins (1991) dokázal následující větu:

Nechť $\{X_n\}$ *je posloupnost nezávislých náhodných veličin s nulovými středními hodnotami a konečnými rozptyly,* $B_n := \sum_{k=1}^{n} EX_k^2 \to +\infty$, $\frac{EX_n^2}{B_n} \to 0$ *a* $X_n = o\left(\sqrt{\frac{B_n}{\ln\ln B_n}}\right)$ *s.j. Platí-li pro posloupnost* $\{X_n\}$ *centrální limitní věta, pak pro ni platí i zákon iterovaného logaritmu.*

V jednotlivých dalších kapitolách se budeme zabývat různými verzemi zákona iterovaného logaritmu pro součty nezávislých náhodných veličin a jejich důkazy.

Kapitola 2

Chinčinův zákon iterovaného logaritmu pro veličiny s alternativním rozdělením

2.1 Úvod

Mějme náhodnou veličinu X s alternativním rozdělením, kde pravděpodobnost úspěchu v každém pokusu je p a počet úspěchů v n nezávislých pokusech označíme S_n. Borelův silný zákon velkých čísel nám říká, že

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n - np}{n} = 0 \text{ s.j.},$$

centrální limitní věta nám dává

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{p(1-p)}}\right),$$

kde Φ je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení. Chinčinův zákon iterovaného logaritmu přidává značnou informaci k silnému zákonu velkých čísel. Poskytuje velmi přesný odhad mezí, mezi kterými se posloupnost $S_n - np$ pohybuje skoro jistě. To znamená, že skoro jistě pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje nekonečně mnoho n tak, že

$$S_n - np > (1-\varepsilon)\sqrt{2p(1-p)n \ln \ln n}$$

a pro všechna n dost velká je

$$S_n - np < (1+\varepsilon)\sqrt{2p(1-p)n \ln \ln n}.$$

Toto tvrzení obsahuje iterovaný logaritmus $\ln\ln n$, který je výborným příkladem funkce, která jde pro rostoucí n do nekonečna extrémně pomalu.

Ukážeme si několik tvrzení vedoucích k zákonu iterovaného logaritmu v chronologickém pořadí a ty budeme dokazovat.

(1) Hausdorffův odhad: Pro každé $\varepsilon > 0$:

$$S_n - np = o(n^{\varepsilon+\frac{1}{2}}) \text{ s.j. pro } n \to +\infty.$$

(2) Hardyův-Littlewoodův odhad:

$$S_n - np = O(\sqrt{n \ln n}) \text{ s. j. pro } n \to +\infty.$$

(3) Chinčinův zákon iterovaného logaritmu.

Mějme prostor s pravděpodobnostní mírou (Ω, P), kde $\Omega = \{\omega = (\omega_n)_{n\geq 1} : \omega_n = 0 \text{ nebo } \omega_n = 1 \text{ pro každé } \omega \geq 1\}$ je množina nekonečných posloupností nul a jedniček. Pro každé n je $\omega_n = 1$ s pravděpodobností p a $\omega_n = 0$ s pravděpodobností $1 - p$. Položme

$$X_n(\omega) = \omega_n - p \text{ a } R_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) = S_n(\omega) - np,$$

kde $\omega = (\omega_n)_{n\geq 1} \in \Omega$. Tudíž $\{X_n\}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených veličin s nulovou střední hodnotou. Společně s *Dodatky 3 a 7* to je vše, co potřebujeme k našemu důkazu.

2.2 Hausdorffův odhad

Tvrzení 2.1 *Pro každé $\varepsilon > 0$ je $S_n - np = o(n^{\varepsilon+\frac{1}{2}})$ s.j. pro $n \to +\infty$.*

Důkaz: Nejprve si uvědomme, že $S_n - np = \sum_{k=1}^{n} X_k = R_n(\omega)$. A protože $S_n - np = o(n^{\varepsilon+\frac{1}{2}})$ právě tehdy, existuje-li pro každé $\delta > 0$ $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ je $S_n - np < \delta n^{\varepsilon+\frac{1}{2}}$, stačí nám dokázat, že $\lim_{n\to+\infty} n^{-\varepsilon-\frac{1}{2}} R_n = 0$ s.j.

Nechť $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \mathbb{N}$. Potom $E[X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_k}] \leq 1$. Je-li alespoň jedno i_j různé od ostatních, pak $E[X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_k}] = 0$, protože $\{X_n\}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin.

Nechť $k \in \mathbb{N}$. Pak

$$E[R_n^{2k}] = E[\sum_{l=1}^{n} X_l(\omega)]^{2k} = \sum_{1\leq i_1, i_2, \ldots, i_{2k} \leq n} E[X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_{2k}}] \leq N(k, n),$$

kde $N(k,n)$ je počet funkcí z množiny $\{1,2,\dots,2k\}$ do množiny {1,2,...,n}, kde se každé z dosažených hodnot nabývá nejméně dvakrát. Nechť $M(k)$ je počet rozkladů množiny $\{1,2,\dots,2k\}$ do podmnožin obsahujících nejméně dva prvky.
Je-li P takovýto rozklad, pak P obsahuje nejvýše k prvků a počet funkcí z $\{1,2,\dots,2k\}$ do $\{1,2,\dots,n\}$, které jsou konstantní v každém prvku z P, je maximálně n^k. Z toho plyne, že $N(k,n) \leq n^k M(k)$.

Nechť $\varepsilon > 0$. Pak

$$E[(n^{-\varepsilon-\frac{1}{2}}R_n)^{2k}] \leq n^{-2k\varepsilon-k}N(k,n) \leq n^{-2k\varepsilon}M(k).$$

Když zvolíme $k > \frac{1}{2\varepsilon}$, pak

$$\sum_{n\geq 1} E[(n^{-\varepsilon-\frac{1}{2}}R_n)^{2k}] < +\infty.$$

Z *Dodatku 1* dostáváme, že posloupnost $\{(n^{-\varepsilon-\frac{1}{2}}R_n)^{2k}\}$ konverguje skoro jistě k nule pro n jdoucí do nekonečna, ale z toho již snadno vyplývá i konvergence posloupnost $\{n^{-\varepsilon-\frac{1}{2}}R_n\}$ k nule s.j.

Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje množina míry nula, mimo níž $n^{-\varepsilon-\frac{1}{2}}R_n$ konverguje k nule. K dokončení důkazu uvažujme libovolnou spočetnou rodinu hodnot ε. Pro každé ε_i z této rodiny existuje množina $\Omega_i \in \Omega$ taková, že $\Omega_i = \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to+\infty} \mid \frac{R_n(\omega)}{n^{\varepsilon_i+1/2}} \mid > 0\}$. Každá z těchto množin Ω_i má však míru nula, tudíž i jejich sjednocení má míru nula, a my můžeme psát, že $n^{-\varepsilon-1-2}R_n$ konverguje k nule pro každé $\varepsilon > 0$ až na množinu míry nula. □

2.3 Hardyův-Littlewoodův odhad

Tvrzení 2.2 *$S_n - np = O(\sqrt{n \ln n})$ skoro jistě pro $n \to +\infty$.*

Důkaz: Toto tvrzení plyne z *Dodatku 3*. Dostáváme, že

$$P(R_n > \sqrt{n \ln n}) \leq \exp\left\{-nh_+\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right)\right\},$$

kde

$$h_+(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2p(1-p)} + O(\varepsilon^3) \qquad \text{pro } \varepsilon \to 0.$$

Pro n jdoucí do nekonečna je

$$h_+\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right) = \frac{\ln n}{2p(1-p)n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

a

$$\exp\left\{-nh_+\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right)\right\} \sim \exp\left\{-\frac{\ln n}{2p(1-p)}\right\} = n^{-\frac{1}{2p(1-p)}},$$

kde $\sim$ znamená, že $\lim_{n\to+\infty} \frac{\exp\left\{-nh_+\left(\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right)\right\}}{n^{-\frac{1}{2p(1-p)}}} = 1$. Protože $\frac{1}{2p(1-p)} \geq 2$, je tedy $n^{-\frac{1}{2p(1-p)}}$ obecným členem konvergentní řady. Tudíž

$$\sum_{n\geq 1} P(R_n > \sqrt{n \ln n}) \leq \sum_{n\geq 1} n^{-\frac{1}{2p(1-p)}} < +\infty.$$

Dodatek 5 pak implikuje, že $R_n \leq \sqrt{n \ln n}$ pro velká n skoro jistě. □

2.4 Chinčinův zákon iterovaného logaritmu

Věta 2.3 (Chinčinův zákon iterovaného logaritmu) *Skoro jistě*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{S_n - np}{\sqrt{2p(1-p)n \ln\ln n}} = 1 \text{ a } \liminf_{n\to+\infty} \frac{S_n - np}{\sqrt{2p(1-p)n \ln\ln n}} = -1.$$

Ještě před začátkem důkazu Chinčinova zákona iterovaného logaritmu si ukážeme dvě lemmata, která k němu využijeme. Nejprve ale pro každé číslo $n > 1$ definujeme $\alpha(n) := \sqrt{2p(1-p)n \ln\ln n}$.

Lemma 2.4 *Pro všechna kladná čísla a a δ a dost velká n je*

$$(\ln n)^{-a^2(1+\delta)} < P(R_n \geq a\alpha(n)) < (\ln n)^{-a^2(1-\delta)}.$$

Lemma 2.5 *Předpokládejme, že $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a rozptylem σ^2. Nechť $T_n := Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$. Pak*

$$P(\max_{1\leq k\leq n} T_k \geq b) \leq \frac{4}{3} P(T_n \geq b - 2\sigma\sqrt{n})$$

pro každé $b \in \mathbb{R}$.

Důkaz Lemmatu 2.4: *Dodatek 3* nám říká, že

$$P(R_n \geq a\alpha(n)) \leq \exp\left\{-nh_+\left(\frac{a\alpha(n)}{n}\right)\right\} \text{ a,} \tag{2.1}$$

protože posloupnost $\{\alpha(n)/n\}$ konverguje k nule, z *Dodatku* 4 plyne, že

$$h_+\left(\frac{a\alpha(n)}{n}\right) = \frac{a^2}{2p(1-p)} \cdot \left(\frac{\alpha(n)}{n}\right)^2 + O\left(\left(\frac{\alpha(n)}{n}\right)^3\right).$$

Tudíž

$$h_+\left(\frac{a\alpha(n)}{n}\right) = a^2 \cdot \frac{\ln\ln n}{n} + O\left(\left(\frac{\ln\ln n}{n}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$$

a

$$nh_+\left(\frac{a\alpha(n)}{n}\right) \geq a^2(1-\delta)\ln\ln n$$

pro dost velká n. Kombinací tohoto a nerovnosti (2.1) dostaneme, že

$$P(R_n \geq a\alpha(n)) \leq (\ln n)^{-a^2(1-\delta)}$$

pro dost velká n. *Dodatek* 7, který můžeme použít, protože $\sqrt{\ln\ln n} = o(n^{\frac{1}{6}})$, nám dává

$$P(R_n \geq a\alpha(n)) = P\left(\frac{S_n}{n} - p \geq \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \cdot a \cdot \sqrt{2\ln\ln n}\right) \sim$$

$$\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}a\sqrt{2\ln\ln n}} \cdot \exp(-a^2\ln\ln n) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi\ln\ln n}} \cdot (\ln n)^{-a^2}.$$

Protože $\sqrt{\ln\ln n} = o((\ln n)^{a^2\delta})$, dostaneme, že $P(R_n \geq a\alpha(n)) \geq (\ln n)^{-a^2(1+\delta)}$ pro dostatečně velká n. □

Důkaz Lemmatu 2.5: Protože náhodné veličiny Y_n jsou nezávislé, platí $var(T_n - T_k) = (n-k)\sigma^2$ pro každé $1 \leq k \leq n$. Z Čebyevovy nerovnosti pak plyne

$$P(\mid T_n - T_k \mid \leq 2\sigma\sqrt{n}) \geq 1 - \frac{var(T_n - T_k)}{4\sigma^2 n} = 1 - \frac{n-k}{4n} \geq \frac{3}{4}.$$

Z vlastností pravděpodobnosti plyne, že

$$P(\max_{1\leq k\leq n} T_k \geq b) = \sum_{k=1}^{n} P(T_1 < b, T_2 < b, \ldots, T_{k-1} < b \text{ a } T_k \geq b),$$

což je shora omezeno výrazem

$$\frac{4}{3}\sum_{k=1}^{n} P(T_1 < b, T_2 < b, \ldots, T_{k-1} < b \text{ a } T_k \geq b) \cdot P(\mid T_n - T_k \mid\leq 2\sigma\sqrt{n}).$$

Náhodná veličina $T_n - T_k$ a vektor $(T_1, T_2, \ldots, T_k)$ jsou zřejmě nezávislé, proto můžeme tento výraz přepsat do tvaru

$$\frac{4}{3}\sum_{k=1}^{n} P(T_1 < b, T_2 < b, \ldots, T_{k-1} < b \text{ a } T_k \geq b \text{ a } \mid T_n - T_k \mid\leq 2\sigma\sqrt{n}).$$

Protože jev

$$[T_1 < b, T_2 < b, \ldots, T_{k-1} < b \text{ a } T_k \geq b \text{ a } T_n \geq b - 2\sigma\sqrt{n}]$$

obsahuje jev

$$[T_1 < b, T_2 < b, \ldots, T_{k-1} < b \text{ a } T_k \geq b \text{ a } \mid T_n - T_k \mid\leq 2\sigma\sqrt{n}],$$

dostáváme nerovnost

$$P(\max_{1\leq k\leq n} T_k \geq b) \leq \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{n} P(T_1 < b, T_2 < b, \ldots, T_{k-1} < b, T_k \geq b \text{ a } T_n \geq b - 2\sigma\sqrt{n}).$$

Tudíž

$$P(\max_{1\leq k\leq n} T_k \geq b) \leq \frac{4}{3} P(T_n \geq b - 2\sigma\sqrt{n}).$$

□

Nyní se pustíme do důkazu Chinčinova zákona iterovaného logaritmu. Stačí nám dokázat, že

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{S_n - np}{\alpha(n)} = +1,$$

protože výpočet lim inf dostaneme snadno z lim sup následujícím způsobem:

$$1 = \limsup_{n\to+\infty} \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)\ln\ln n}} = \limsup_{n\to+\infty} \frac{S_n - n(1-p)}{\sqrt{np(1-p)\ln\ln n}} =$$

$$= \liminf_{n\to+\infty} \frac{n - S_n - n(1-p)}{\sqrt{np(1-p)\ln\ln n}} = \liminf_{n\to+\infty} \frac{-S_n + np}{\sqrt{np(1-p)\ln\ln n}} =$$

$$= -\liminf_{n\to+\infty} \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)\ln\ln n}}.$$

Důkaz provedeme ve dvou krocích. Pro každé $\eta > 0$ ukážeme, že
(i) limes superior je skoro jistě menší než $1 + \eta$,
(ii) limes superior je skoro jistě větší než $1 - \eta$.
Z těchto dvou bodů dostaneme očekávaný výsledek, když necháme jít η k nule: spojíme jev skoro jistý s každým η, budeme uvažovat posloupnost hodnot η jdoucí k nule a využijeme faktu, že spočetné sjednocení množin míry nula je opět míry nula.

Důkaz Chinčinova zákona iterovaného logaritmu: Vol $\eta > 0$. Pro reálné číslo $\gamma > 1$ (bude vybráno později) a každé $k \in \mathbb{N}$ položme $n_k := \lfloor \gamma^k \rfloor$, kde $\lfloor \gamma^k \rfloor$ je celá část γ^k. Ukážeme, že

$$\sum_{k\geq 0} P(\max_{n\leq n_{k+1}} R_n \geq (1+\eta)\alpha(n_k)) < +\infty. \tag{2.2}$$

Lemma 2.5 říká, že

$$P\left(\max_{n\leq n_{k+1}} R_n \geq (1+\eta)\alpha(n_k)\right) \leq \frac{4}{3} P\left(R_{n_{k+1}} \geq (1+\eta)\alpha(n_k) - 2\sqrt{n_{k+1}p(1-p)}\right).$$

Protože $\sqrt{n_{k+1}} = o(\alpha(n_k))$ pro $k \to +\infty$, je

$$2\sqrt{n_{k+1}p(1-p)} < \frac{1}{2}\eta\alpha(n_k)$$

pro všechna k dost velká. Pro taková k je

$$P\left(\max_{n\leq n_{k+1}} R_n \geq (1+\eta)\alpha(n_k)\right) \leq \frac{4}{3} P\left(R_{n_{k+1}} \geq (1+\frac{\eta}{2})\alpha(n_k)\right).$$

Víme, že $\alpha(n_{k+1}) \sim \sqrt{\gamma}\alpha(n_k)$, kde $\sim$ značí, že $\lim_{k\to+\infty} \frac{\alpha(n_{k+1})}{\sqrt{\gamma}\alpha(n_k)} = 1$. V tomto okamžiku vybereme $\gamma > 1$ zmiňované v úvodu důkazu a to takové, které splňuje

$$\left(1 + \frac{\eta}{2}\right) > \left(1 + \frac{\eta}{4}\right)\sqrt{\gamma}.$$

Potom pro dost velká k

$$\left(1 + \frac{\eta}{2}\right)\alpha(n_k) > \left(1 + \frac{\eta}{4}\right)\alpha(n_{k+1}),$$

a proto

$$P\left(\max_{n \leq n_{k+1}} R_n \geq (1+\eta)\alpha(n_k)\right) \leq \frac{4}{3}P\left(R_{n_{k+1}} \geq (1 + \frac{\eta}{4})\alpha(n_{k+1})\right).$$

Nyní použijeme *Lemma 2.4* (pro $a = (1-\delta)^{-1} = (1 + \frac{\eta}{4})$), abychom našli horní mez pro tento výraz. Dostaneme

$$P\left(\max_{n \leq n_{k+1}} R_n \geq (1+\eta)\alpha(n_k)\right) \leq \frac{4}{3}(\ln n_{k+1})^{-(1+\frac{\eta}{4})}$$

pro dost velká k. Nakonec

$$(\ln n_{k+1})^{-(1+\frac{\eta}{4})} \sim (k \ln \gamma)^{-(1+\frac{\eta}{4})},$$

což je obecný člen konvergentní řady. Máme tedy dokázáno (2.2).
Z *Dodatku* 5 plyne, že

$$\max_{n \leq n_{k+1}} R_n < (1+\eta)\alpha(n_k) \text{ s.j. pro dost velká } k$$

a tedy

$$\max_{n_k \leq n < n_{k+1}} R_n < (1+\eta)\alpha(n_k) \text{ s.j. pro dostatečně velká } k.$$

Teď již dostáváme, že skoro jistě

$$R_n < (1+\eta)\alpha(n)$$

pro dostatečně velká n, což nám dává (i).

Abychom dokázali (ii), potřebujeme ukázat, že s pravděpodobností jedna jev $R_n \geq (1-\eta)\alpha(n)$ nastává pro nekonečně mnoho n. K tomuto účelu najdeme posloupnost $\{n_k\}$ takovou, že $P(R_{n_k} \geq (1-\eta)\alpha(n_k)) = 1$ pro nekonečně mnoho k. Vybereme podposloupnost splňující $n_k = \gamma^k$, kde γ je dost velké číslo (bude vybráno později). Ukážeme, že

$$\sum_{k\geq 1} P\left(R_{\gamma^k} - R_{\gamma^{k-1}} \geq (1-\frac{\eta}{2})\alpha(\gamma^k)\right) = +\infty, \tag{2.3}$$

a že skoro jistě

$$R_{\gamma^{k-1}} \geq -\frac{\eta}{2}\alpha(\gamma^k) \tag{2.4}$$

pro dostatečně velká k.

Využijeme toho, že náhodná veličina $R_{\gamma^k} - R_{\gamma^{k-1}}$ má stejné rozdělení jako náhodná veličina $R_{\gamma^k - \gamma^{k-1}}$. Tedy

$$P\left(R_{\gamma^k} - R_{\gamma^{k-1}} \geq (1-\frac{\eta}{2})\alpha(\gamma^k)\right) = P\left(R_{\gamma^k-\gamma^{k-1}} \geq (1-\frac{\eta}{2})\alpha(\gamma^k)\right).$$

Jestliže k roste nade všechny meze, pak

$$\frac{\alpha(\gamma^k - \gamma^{k-1})}{\alpha(\gamma^k)} \sim \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Kdy vybereme γ tak, aby $(1-\frac{\eta}{2})\sqrt{\gamma} < (1-\frac{\eta}{4})\sqrt{\gamma-1}$, pak

$$\left(1-\frac{\eta}{2}\right)\alpha\left(\gamma^k\right) < \left(1-\frac{\eta}{4}\right)\alpha\left(\gamma^k - \gamma^{k-1}\right)$$

pro dost velká k. Pro taková k dostáváme

$$P\left(R_{\gamma^k} - R_{\gamma^{k-1}} \geq (1-\frac{\eta}{2})\alpha(\gamma^k)\right) \geq P\left(R_{\gamma^k-\gamma^{k-1}} \geq (1-\frac{\eta}{4})\alpha(\gamma^k - \gamma^{k-1})\right).$$

Nyní použijeme *Lemma 2.4* (pro $a = (1+\delta)^{-1} = (1-\frac{\eta}{4})$) k nalezení dolní meze pro tento výraz. Tak získáváme

$$P\left(R_{\gamma^k} - R_{\gamma^{k-1}} \geq (1-\frac{\eta}{2})\alpha(\gamma^k)\right) \geq \left(\ln\left(\gamma^k - \gamma^{k-1}\right)\right)^{-1+\frac{\eta}{4}}$$

pro dost velká k. Protože $(\ln(\gamma^k - \gamma^{k-1}))^{-1+\frac{\eta}{4}} \sim (k\ln(\gamma))^{-1+\frac{\eta}{4}}$ je obecným členem divergentní řady, dostáváme (2.3).

Pro k jdoucí do nekonečna platí $\alpha(\gamma^k) \sim \sqrt{\gamma}\alpha(\gamma^{k-1})$. Nyní vybereme γ tak, aby platilo $\eta\sqrt{\gamma} > 4$. Pro taková γ a dost velká k pak získáváme nerovnost $\eta\alpha(\gamma^k) > a\alpha(\gamma^{k-1})$. Pro taková k, pro která platí předchozí nerovnost, platí

$$[R_{\gamma^{k-1}} \leq -\frac{\eta}{2}\alpha(\gamma^k)] \subset [-R_{\gamma^{k-1}} \geq 2\alpha(\gamma^{k-1})].$$

Nyní použijeme (i) ($R_n < (1+\eta)\alpha(n)$) na posloupnost $\{-R_n\}$. Dostaneme tak skoro jistě, že $-R_{\gamma^{k-1}} < 2\alpha(\gamma^{k-1})$ pro dost velká k. To dokazuje (2.4).

Protože $\{R_{\gamma^k} - R_{\gamma^{k-1}}\}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin a součet (2.3) diverguje, dostáváme z *Dodatku* 6, že skoro jistě existuje nekonečně mnoho $k \in \mathbb{N}$ tak, že $R_{\gamma^k} - R_{\gamma^{k-1}} > (1-\frac{\eta}{2})\alpha(\gamma^k)$. Tento výsledek společně s nerovností (2.4) implikuje, že existuje nekonečně mnoho $k \in \mathbb{N}$ tak, že $R_{\gamma^k} > (1-\eta)\alpha(\gamma^k)$. Tímto jsme dokázali (ii). $\square$

Kapitola 3

Zákon iterovaného logaritmu pro součty nezávislých náhodných veličin

3.1 Zákon iterovaného logaritmu pro stejně rozdělené náhodné veličiny

Věta 3.1 (Hartman-Winter, Strassen) *Nechť $X_1, X_2, \ldots$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny. Označme $S_n := X_1+X_2+\ldots+X_n$. Jestliže $EX = 0$ a $varX = \sigma^2 < +\infty$, pak*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \ln\ln n}} = \sigma \text{ } s.j. \text{ } a \text{ } \liminf_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \ln\ln n}} = -\sigma \text{ } s.j.$$

Důkaz: Tvrzení dokážeme pro stejně rozdělené nezávislé náhodné veličiny s normovaným normálním rozdělením $N(0,1)$. K důkazu použijeme následující nerovnosti:

$$\exp\left\{-(1+\varepsilon)\lambda^2/2\right\} \leq P(S_n/\sqrt{n} \geq \lambda) \leq \exp\{-(1-\varepsilon)\lambda^2/2\} \qquad (3.1)$$

pro všechna $\lambda > \lambda_\varepsilon$ pro nějaké λ_ε a
Lévyho nerovnost:

$$P(\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq \lambda) \leq 2P(S_n \geq \lambda) \qquad (3.2)$$

pro všechna $\lambda > 0$.
Nyní označme $b_n := \sqrt{2\ln\ln n}$ a $n_k := \lfloor a^k \rfloor$ pro nějaké $a > 1$ (dostatečně malé a bude vybráno později). Dále pro jevy A_k platí:

$$\begin{aligned} A_k &:= \bigcup_{n_{k-1}\le m\le n_k} [S_m \ge \sqrt{m}(1+2\varepsilon)b_n] \subset \\ &\subset \left[\max_{n_{k-1}\le m\le n_k} S_m \ge (1+2\varepsilon)\sqrt{\frac{n_{k-1}}{n_k}} b_{n_{k-1}}\sqrt{n_k}\right], \end{aligned} \qquad (3.3)$$

protože $\{\sqrt{n}\}$ a $\{b_n\}$ jsou rostoucí posloupnosti. Proto pro dostatečně velká k dostáváme:

$$\begin{aligned} P(A_k) &\le 2P\left(\tfrac{S_{n_k}}{\sqrt{n_k}} \ge (1+2\varepsilon)\sqrt{\tfrac{n_{k-1}}{n_k}} b_{n_{k-1}}\right) \le && \text{z (3.2)} \\ &\le 2\exp\left\{-\tfrac{1}{2}(1-\varepsilon)(1+2\varepsilon)^2\tfrac{1-\varepsilon}{a}2\ln k\right\} \le && \text{z (3.1)} \\ &\le 2\exp\{-(1+\varepsilon)\ln k\} = && \text{pro } a \text{ dost blízké } 1 \\ &= \tfrac{2}{k^{1+\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Jelikož $\frac{2}{k^{1+\varepsilon}}$ je obecný člen konvergentní řady, získáváme důležitý odhad: $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(A_k) < +\infty$ a tedy z *Dodatku* 5 plyne, že $P(\limsup\limits_{n\to+\infty} A_k) = 0$. Díky libovolné volbě $\varepsilon > 0$ pak musí platit, že $\limsup\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}b_n} \le 1$ s.j.

Ještě musíme ukázat, že $\limsup\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}b_n} \ge 1$ s.j. Zůstaneme tedy ještě u značení $n_k := \lfloor a^k \rfloor$, kde ale a vybereme později dostatečně velké. Nyní si rozepíšeme $S_{n_k} = S_{n_{k-1}} + (S_{n_k} - S_{n_{k-1}})$. Dále můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} \frac{S_{n_k}}{\sqrt{n_k}b_{n_k}} &= \sqrt{\frac{n_{k-1}}{n_k}} \cdot \frac{b_{n_{k-1}}}{b_{n_k}} \cdot \frac{S_{n_{k-1}}}{\sqrt{n_{k-1}}b_{n_{k-1}}} + \frac{S_{n_k} - S_{n_{k-1}}}{\sqrt{n_k}b_{n_k}} \sim \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot 1 \cdot \frac{S_{n_{k-1}}}{\sqrt{n_{k-1}}b_{n_{k-1}}} + \frac{S_{n_k} - S_{n_{k-1}}}{\sqrt{n_k}b_{n_k}}. \end{aligned} \qquad (3.4)$$

V tomto okamžiku využijeme nezávislosti náhodných veličin X_n. Díky tomu budou níže definované jevy B_k také nezávislé a bude pro ně platit

$$\begin{aligned} B_k &:= [S_{n_k} - S_{n_{k-1}} \ge (1-2\varepsilon)\sqrt{n_k}b_{n_k}] = \\ &= \left[\frac{S_{n_k} - S_{n_{k-1}}}{\sqrt{n_k - n_{k-1}}} \ge \frac{(1-2\varepsilon)\sqrt{n_k}b_{n_k}}{\sqrt{n_k - n_{k-1}}}\right] \end{aligned} \qquad (3.5)$$

máme

$$\begin{aligned}
P(B_k) &\geq \exp\left\{-\tfrac{1}{2}(1+\varepsilon)(1-2\varepsilon)^2\tfrac{n_k}{n_k-n_{k-1}}b_{n_k}^2\right\} \geq && \text{z (3.1)}\\
&\geq \exp\left\{-\tfrac{1}{2}(1+\varepsilon)(1-2\varepsilon)^2\tfrac{(1+\varepsilon)a}{a-1}2\ln k\right\} \geq \\
&\geq \exp\{-(1-\varepsilon)\ln k\} = && \text{pro } a \text{ dost velké}\\
&= \tfrac{1}{k^{1-\varepsilon}}.
\end{aligned}$$

Jelikož $\frac{1}{k^{1-\varepsilon}}$ je obecný člen divergentní řady, pak nám *Dodatek* 6 implikuje, že $P(\limsup_{n\to+\infty} B_k) = 1$. Ale protože $P(\limsup_{n\to+\infty} A_k) = 0$ a $P(\limsup_{n\to+\infty} B_k) = 1$, získáváme, že $P(\limsup_{n\to+\infty}(A_k^c \cap B_k)) = 1$. Navíc pro $A_k^c \cap B_k$, užitím (3.4), (3.5) a symetrické verze (3.3), dostáváme, že

$$\frac{S_{n_k}}{\sqrt{n_k}b_{n_k}} \geq -\frac{(1+2\varepsilon)(1+\varepsilon)}{\sqrt{a}} + (1-2\varepsilon) \geq (1-3\varepsilon)$$

pro vybrané a dost velké. Tedy pro libovolné $\varepsilon > 0$ a podposloupnost $\{n_k\}$ dostáváme, že $\limsup\limits_{n\to+\infty} \frac{S_{n_k}}{\sqrt{n_k}b_{n_k}} \geq 1$ s.j. Tímto jsme již dokázali rovnost $\limsup\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}} = 1$ s.j. A protože

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}} = \limsup_{n\to+\infty} \frac{-S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}},$$

získáváme tak i rovnost $\liminf\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}} = -1$. □

3.2 Zákon iterovaného logaritmu pro nestejně rozdělené nezávislé náhodné veličiny

Ještě před uvedením samotného Kolmogorovova zákona iterovaného logaritmu si připomeneme několik lemmat, která nám pomohou při jeho dokazování.

Lemma 3.2 *Nechť X je náhodná veličina s konečným druhým momentem. Potom $|\widetilde{X} - EX| \leq \sqrt{2varX}$ pro každý medián $\widetilde{X}$.*

Důkaz: Pro každé $\delta > 0$ dostáváme z Čebyevovy nerovnosti, že

$$P\left(|X - EX| \leq \sqrt{(2+\delta)varX}\right) \geq 1 - \frac{1}{2+\delta} > \frac{1}{2}.$$

Tudíž

$$\begin{array}{l} P\left(X \geq EX - \sqrt{(1+\delta)varX}\right) > \frac{1}{2} \qquad \text{a} \\ P\left(X \leq EX - \sqrt{(1+\delta)varX}\right) > \frac{1}{2}. \end{array}$$

Z definice mediánu plyne, že

$$EX - \sqrt{(2+\delta)varX} \leq \widetilde{X} \leq EX + \sqrt{(2+\delta)varX}.$$

Ale protože můžeme volit $\delta > 0$ libovolně malé, získáváme očekávaný výsledek.
□

Lemma 3.3 *Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je n nezávislých náhodných veličin, $S_k := X_1 + \ldots + X_k$ a ε libovolná konstanta. Pak*

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq n} (S_k - \mu(S_k - S_n)) \geq \varepsilon\right) \leq 2P(S_n \geq \varepsilon),$$

kde μ značí medián.

Důkaz: Položme $S_0 := 0$, $S_k^* := \max_{1 \leq j \leq k} (S_j - \mu(S_j - S_n))$ pro $1 \leq k \leq n$. Nechť dále

$$\begin{array}{lll} A_k & := & [S_{k-1}^* < \varepsilon] \cap [S_k - \mu(S_k - S_n) \geq \varepsilon] \qquad \text{a} \\ B_k & := & [S_n - S_k - \mu(S_n - S_k) \geq 0]. \end{array}$$

Také víme, že $\mu(S_n - S_k) = -\mu(S_k - S_n)$. Je zřejmé, že $A_1, \ldots, A_n$ jsou disjunktní a $[S_n^* \geq \varepsilon] = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Pro každé k tedy máme:

$$B_k A_k \subset [S_n \geq S_k - \mu(S_k - S_n)] \cap [S_k - \mu(S_k - S_n) \geq \varepsilon] \subset [S_n \geq \varepsilon].$$

Tudíž $[S_n \geq \varepsilon] \supset \bigcup_{k=1}^{n} A_k B_k$. Protože $\{A_1, \ldots, A_n\}$ jsou disjunktní, jsou disjunktní i jevy $\{A_1 B_1, \ldots, A_n B_n\}$. Navíc z definice mediánu plyne, že $P(B_k) > \frac{1}{2}$. Pro každé k jsou tedy A_k a B_k nezávislé. Tudíž

$$\begin{array}{lll} P(S_n \geq \varepsilon) & \geq & P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k B_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k B_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) P(B_k) \\ & \geq & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \frac{1}{2} P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \frac{1}{2} P(S_n^* \geq \varepsilon). \end{array}$$

Tím je důkaz dokončen. □

Lemma 3.4 *Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny s konečnými druhými momenty, $EX_k = 0$ pro $1 \leq k \leq n$ a $S_k := X_1 + \ldots + X_k$. Potom* $P\left(\max\limits_{1\leq k\leq n} S_k \geq \varepsilon\right) \leq 2P\left(S_n \geq \varepsilon - \sqrt{2varS_n}\right)$.

Důkaz: Protože $E(S_k - S_n) = 0$, pak z *Lemmatu* 3.2 dostáváme, že

$$|\mu(S_k - S_n)| \leq \sqrt{2var(S_k - S_n)} \leq \sqrt{2varS_n}$$

a tedy $-\mu(S_k - S_n) \geq -\sqrt{2varS_n}$. Z *Lemmatu* 3.3 potom plyne následující sérii rovností a nerovností:

$$\begin{aligned} P\left(\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq \varepsilon\right) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{n} [S_k \geq \varepsilon]\right) \leq \\ &\leq P\left(\bigcup_{k=1}^{n} [S_k - \mu(S_k - S_n) \geq -\varepsilon - \sqrt{2varS_n}]\right) = \\ &= P\left(\max_{1\leq k\leq n} (S_k - \mu(S_k - S_n)) \geq \varepsilon - \sqrt{2varS_n}\right) \leq \\ &\leq 2P\left(S_n \geq \varepsilon - \sqrt{2varS_n}\right). \end{aligned}$$

Tím je tvrzení lemmatu dokázáno. □

Lemma 3.5 *Nechť b_n je neklesající posloupnost kladných čísel, pro kterou $b_n \to +\infty$ a $\frac{b_{n+1}}{b_n} \to 1$ pro $n \to +\infty$. Potom pro každé $c > 1$ existuje rostoucí posloupnost $\{n_k\}$ přirozených čísel taková, že $b_{n_k} \sim c^k$ (tj. $\frac{b_{n_k}}{c^k} \to 1$ pro $n \to +\infty$).*

Důkaz: Nejprve poznamenejme, že existuje přirozené číslo k_0 takové, že každý interval tvaru $[c^k; c^{k+1})$ obsahuje nejméně jedno b_n pro každé $k > k_0$, jinak by bylo $\limsup\limits_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} \geq c > 1$, což je ale v rozporu s předpokladem, který říká, že $\frac{b_{n+1}}{b_n} \to 1$ pro $n \to +\infty$.
Nechť tedy $n_1 = n_2 = \ldots = n_{k_0} = 1$. Pro $j > k_0$ definujme n_j jako nejmenší přirozené číslo, pro které $b_{n_j} \geq c^j$. Potom $n_j < n_{j+1}$ pro všechna $j > k_0$, takže $\{n_j\}$ je rostoucí posloupnost. Pro $j > k_0$ je tedy $\frac{b_{n_j-1}}{b_{n_j}} < \frac{c^j}{b_{n_j}} \leq 1$.
Protože ale $\frac{b_{n_j-1}}{b_{n_j}} \to 1$, získáváme, že $b_{n_j} \sim c^j$. □

Lemma 3.6 *Nechť $0 < b_n$, $b_n \to +\infty$ pro $n \to +\infty$ a $\frac{b_n}{b_{n_1}} \sim c \geq 1$. Potom $\frac{\ln b_n}{\ln b_{n-1}} \to 1$ pro $n \to +\infty$.*

Důkaz: Rozepišme si výraz, pro který chceme najít limitu:

$$\frac{\ln b_n}{\ln b_{n-1}} = \frac{\ln\left(\frac{b_n}{b_{n-1}}\right) + \ln b_{n-1}}{\ln b_{n-1}}.$$

Jelikož $\ln \frac{b_n}{b_{n-1}} \to \ln c$ a $\ln b_n \to +\infty$ pro $n \to +\infty$, dostáváme tvrzení lemmatu. □

Definice 3.1 *Nechť* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *je měřitelný prostor a nechť* $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Esenciální supremum *funkce* f *definujeme jako nejmenší číslo* $a \in \mathbb{R}$ *takové, pro než je* $P(\{x \in \Omega : f(x) > a\}) = 0$.

Věta 3.7 (Kolmogorov) *Nechť* $\{X_n\}$ *je posloupnost nezávislých náhodných veličin splňující následující předpoklady:*
$d_n := ess\sup|X_n| < +\infty$, $EX_n = 0$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$, $s_n^2 := varS_n \to +\infty$, *kde* $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, *a* $d_n = o\left(\sqrt{\frac{s_n^2}{\ln\ln s_n^2}}\right)$ *pro* $n \to +\infty$
Potom $\limsup\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2s_n^2 \ln\ln s_n^2}} = 1$ *s.j.*

Důkaz: Nejprve si povšimněme, že $varX_n = EX_n^2 \le d_n^2 = o\left(\frac{s_n^2}{\ln\ln s_n^2}\right)$. Tudíž

$$\frac{s_{n+1}^2}{s_n^2} = 1 + \frac{varX_{n+1}}{s_n^2} = 1 + \frac{s_{n+1}^2}{s_n^2} \cdot \frac{o(1)}{\ln\ln s_{n+1}^2}.$$

Tuto rovnost můžeme také přepsat jako

$$\frac{s_{n+1}^2}{s_n^2}\left(1 - \frac{o(1)}{\ln\ln s_{n+1}^2}\right) = 1.$$

Protože $\ln\ln s_n^2 \to +\infty$ pro $n \to +\infty$ dle předpokladu, dostáváme z poslední rovnice, že $\frac{s_{n+1}^2}{s_n^2} \to 1$ pro $n \to +\infty$.
Nyní volme ε a δ libovolně tak, aby byla splněna nerovnost $1 > \varepsilon > \delta > 0$. Označme $t_n := \sqrt{2\ln\ln s_n^2}$. K důkazu věty nám stačí postačí ukázat platnost následujících tvrzení:

$$P\left(\limsup_{n\to+\infty}(S_n > (1+\delta)s_n t_n)\right) = 0 \tag{3.6}$$

a

$$P\left(\limsup_{n\to+\infty}(S_n > (1-\varepsilon)s_n t_n)\right) = 1. \tag{3.7}$$

Nejprve ukážeme (3.6). Zvolme pevné c splňující nerovnost $1+\delta > c > 1$. Nyní můžeme použít *Lemma* 3.5, protože jsme již dokázali, že posloupnost $\{s_n\}$ splňuje jeho předpoklady. Pro tuto posloupnost tedy existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}$ taková, že $s_{n_k} \sim c^k$. Tudíž z *Lemmatu* 3.6 dostáváme, že

$$(1+\delta)s_{n_{k-1}}t_{n_{k-1}} \sim \frac{1+\delta}{c}s_{n_k}t_{n_k}. \tag{3.8}$$

Označme si $S^*_{n_k} := \max\limits_{1\le j\le n_k}\{S_j\}$, $k(n) := \max\limits_{n_k\le n}\{k\}$ a $n_{k(n)} := \max\limits_{n_k\le n}\{n_k\}$. Potom, protože $\{s_n t_n\}$ je rostoucí posloupnost v n, je

$$\begin{aligned}\left[\limsup_{n\to+\infty}(S_n > (1+\delta)s_n t_n)\right] &\subset \left[\limsup_{n\to+\infty}\left(S_n > (1+\delta)s_{n_{k(n)}}t_{n_{k(n)}}\right)\right] \subset \\ &\subset \left[\limsup_{n\to+\infty}\left(S^*_{n_{k+1}} > (1+\delta)s_{n_k}t_{n_k}\right)\right].\end{aligned}$$

Protože $1+\delta > c > 1$, můžeme vybrat $\xi > 0$ takové, že $\frac{1+\delta}{c} > 1+\xi$. Z (3.8) plyne následující inkluze:

$$\left[\limsup_{n\to+\infty}\left(S^*_{n_{k+1}} > (1+\delta)s_{n_k}t_{n_k}\right)\right] \subset \left[\limsup_{n\to+\infty}\left(S^*_{n_k} \ge (1+\xi)s_{n_k}t_{n_k}\right)\right].$$

Dokážeme-li, že

$$P\left(\limsup_{n\to+\infty}(S^*_{n_k} \ge (1+\xi)s_{n_k}t_{n_k})\right) = 0, \tag{3.9}$$

je důkaz (3.6) hotov. Díky *Dodatku* 5 stačí dokázat, že

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P\left(S^*_{n_k} \ge (1+\xi)s_{n_k}t_{n_k}\right) < +\infty. \tag{3.10}$$

Díky *Lemmatu* 3.4 platí pro všechna dost velká k následující nerovnosti:

$$\begin{aligned}P\left(S^*_{n_k} \ge (1+\xi)s_{n_k}t_{n_k}\right) &\le 2P\left(S_{n_k} \ge (1+\xi)s_{n_k}t_{n_k} - \sqrt{2}s_{n_k}\right) = \\ &= 2P\left(S_{n_k} \ge s_{n_k}t_{n_k}(1+\xi-\tfrac{\sqrt{2}}{t_{n_k}})\right) \le \\ &\le 2P\left(S_{n_k} \ge s_{n_k}t_{n_k}(1+\tfrac{\xi}{2})\right).\end{aligned}$$

Nyní máme již všechno připraveno pro aplikaci *Dodatku* 8. Označme $\varepsilon_k := t_{n_k}(1+\frac{\xi}{2})$ a $c_{n_k} := \max_{1\le j\le n_k} ess\sup \frac{|X_j|}{s_{n_k}} = o\left(\frac{1}{\sqrt{\ln\ln s_{n_k}^2}}\right)$. Protože $\varepsilon_k c_{n_k} = t_{n_k}(1+\frac{\xi}{2})o(\frac{1}{t_{n_k}}) \to 0$ pro $k \to +\infty$, dostáváme, že pro všechna dost velká k je $0 < \varepsilon_k c_{n_k} < 1$. Tudíž

$$\begin{aligned} P\left(S_{n_k} \ge s_{n_k} t_{n_k}(1+\tfrac{\xi}{2})\right) &< \exp\left\{-\tfrac{t_{n_k}^2(1+\frac{\xi}{2})^2}{2}\left(1-\tfrac{\varepsilon_k c_{n_k}}{2}\right)\right\} = \\ &= \exp\left\{-(1+\tfrac{\xi}{2})^2(1-\tfrac{\varepsilon_k c_{n_k}}{2})\ln\ln s_{n_k}^2\right\}. \end{aligned}$$

Protože, jak bylo ukázáno výše, $\varepsilon_k c_{n_k} \to 0$ pro $k \to +\infty$, existuje $\zeta > 0$ takové, že pro všechna dost velká k platí:

$$\left(1+\frac{\zeta}{2}\right)^2\left(1-\frac{\varepsilon_k c_{n_k}}{2}\right) > 1+\zeta,$$

a tedy

$$P\left(S_{n_k} > s_{n_k} t_{n_k}\left(1+\frac{\zeta}{2}\right)\right) \le \exp\left\{-(1+\zeta)\ln\ln c^{2k}\right\} = \frac{1}{(2k\ln c)^{1+\zeta}}.$$

Jelikož $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{1+\zeta}} < +\infty$, dostáváme z *Dodatku* 5 tvrzení (3.6).

Nyní dokážeme (3.7). Nechť $\{n_k\}$, δ a c zůstávají stejné jako v důkazu (3.6). Protože $1 > \varepsilon > \delta > 0$, a protože $c > 1$, existuje přirozené číslo r, pro něž platí nerovnost

$$1 > (1-\delta)\left(1-\frac{1}{c^{2r}}\right) - \frac{2}{c^r} > 1-\varepsilon. \tag{3.11}$$

Pro pevné r definujeme posloupnost přirozených čísel $\{m_k\}$ jako $m_k := n_{rk}$. Poznamenejme, že

$$\frac{s_{m_{k+1}}}{s_{m_k}} = \frac{s_{n_{rk+r}}}{s_{n_{rk}}} = \prod_{j=1}^{r}\left(\frac{s_{n_{kr+j}}}{s_{n_{kr+j-1}}}\right) \sim c^r \qquad (\text{pro } k \to +\infty).$$

Tudíž $\ln\frac{s_{m_k}^2}{s_{m_{k-1}}^2} \sim \ln c^{2r}$. Snadno si všimneme, že

$$\begin{aligned} \ln s_{m_k}^2 &= \ln\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{s_{m_j}^2}{s_{m_{j-1}}^2}\right) = k\cdot\left\{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\ln\left(\frac{s_{m_j}^2}{s_{m_{j-1}}^2}\right)\right\} \sim \\ &\sim k\ln c^{2r} = \ln c^{2kr} \qquad (\text{pro k} \to +\infty). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Nyní označme

$$\begin{aligned} u_k^2 &:= s_{m_k}^2 - s_{m_{k-1}}^2 = s_{m_k}^2 \left(1 - \frac{s_{m_{k-1}}^2}{s_{m_k}^2}\right) \sim s_{m_k}^2 \left(1 - \frac{1}{c^{2r}}\right), \\ v_k^2 &:= 2 \ln \ln u_k^2 \sim 2 \ln \left(\ln s_{m_k}^2 + \ln \left(1 - \frac{1}{c^{2r}}\right)\right) \sim 2 \ln \ln s_{m_k}^2 = t_{m_k}^2. \\ A_k &:= [S_{m_k} - S_{m_{k-1}} > (1-\delta) u_k v_k]. \end{aligned}$$

Všimněme si, že náhodné veličiny $S_{m_k} - S_{m_{k-1}}$ jsou nezávislé pro všechna k (zde jsme využili předpoklad nezávislosti náhodných veličin X_k) a tudíž i jevy $[A_k]$ musejí být nezávislé pro všechna k. Nyní bychom chtěli dokázat, že $P\left(\limsup\limits_{k\to+\infty} A_k\right) = 1$. Z *Dodatku* 6 nám stačí ukázat, že $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} P(A_k) = +\infty$. Jelikož $0 < \delta < 1$, pak pro $\varepsilon_k := (1-\delta)\, v_k$ platí, že $\varepsilon_k \to +\infty$ pro $k \to +\infty$. Dále položme

$$c_k := \max\left\{ ess \sup \frac{|X_n|}{u_k} ; m_{k-1} < n \leq m_k \right\}.$$

Z definice u_k můžeme pro některá $j_k \in \{m_{k-1}+1, \ldots, m_k\}$ psát:

$$\begin{aligned} c_k &= ess \sup \frac{|X_{j_k}|}{u_k} \sim \left(1 - \frac{1}{c^{2r}}\right)^{-\frac{1}{2}} ess \sup \frac{|X_{j_k}|}{s_{m_k}} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{c^{2r}}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{s_{j_k}}{s_{m_k}} ess \sup \frac{|X_{j_k}|}{s_{j_k}} \to 0 \qquad \text{pro } n \to +\infty. \end{aligned}$$

Dále si označme $\gamma := \frac{1}{1+\delta} - 1$. Pro dost velká k díky *Dodatku* 9 a (3.12) platí

$$\begin{aligned} P(A_k) &> \exp\left\{-\tfrac{1}{2}(1-\delta)^2 v_k^2 (1+\gamma)\right\} = \exp\left\{-(1-\delta) \ln \ln u_k^2\right\} = \\ &= \exp\left\{-\ln(\ln u_k^2)^{1-\delta}\right\} = \frac{1}{\left(\ln u_k^2\right)^{1-\delta}} \sim \frac{1}{\left(\ln c^{2kr}\right)^{1-\delta}} = \frac{1}{(2k \ln c^r)^{1-\delta}}. \end{aligned}$$

Jelikož $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{1-\delta}} = +\infty$, pak i $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} P(A_k) = +\infty$ a tedy $P(\limsup\limits_{k\to+\infty} A_k) = 1$. Dále označme $B_k := [|S_{m_{k-1}}| \leq 2 s_{m_{k-1}} t_{m_{k-1}}]$. Díky volbě $0 < \delta < 1$, získáváme z důkazu (3.6) i důkaz rovnosti $P(\limsup\limits_{k\to+\infty} B_k^c) = 0$, protože $\{m_k\} \subset \{n_k\}$. Dostáváme tak, že

$$P(\limsup_{n\to+\infty} A_k B_k) = 1. \tag{3.13}$$

V dalším kroku důkazu ukážeme sérii užitečných inkluzí.

$$\begin{aligned}A_kB_k &= \left[S_{m_k} - S_{m_{k-1}} > (1-\delta)u_kv_k\right]\left[|S_{m_{k-1}}| \le 2s_{m_{k-1}}t_{m_{k-1}}\right] \subset \\ &\subset \left[S_{m_k} > (1-\delta)u_kv_k + S_{m_{k-1}}\right]\left[S_{m_{k-1}} \ge -2s_{m_{k-1}}t_{m_{k-1}}\right] \subset \\ &\subset \left[S_{m_k} > (1-\delta)u_kv_k - 2s_{m_{k-1}}t_{m_{k-1}}\right].\end{aligned}$$

Využijeme toho, že $u_k^2 \sim s_{m_k}(1-\frac{1}{c^{2r}})$, $v_k \sim t_{m_k}$ a z *Lemmatu* 3.6 $s_{m_{k-1}}t_{m_{k-1}} \sim \frac{1}{c^r}s_{m_k}t_{m_k}$. Díky těmto již známým výsledkům můžeme dále pokračovat:

$$\begin{aligned}(1-\delta)u_kv_k - 2s_{m_{k-1}}t_{m_{k-1}} &\sim (1-\delta)s_{m_k}t_{m_k}(1-\tfrac{1}{c^{2r}})^{\frac{1}{2}} - 2s_{m_{k-1}}t_{m_{k-1}} \sim \\ &\sim s_{m_k}t_{m_k}\left\{(1-\delta)(1-\tfrac{1}{c^{2r}})^{\frac{1}{2}} - \tfrac{2}{c^r}.\right\}\end{aligned}$$

Pro dost velká k pak, díky speciálnímu výběru r, který jsme provedli (splňuje (3.11)), platí inkluze

$$A_kB_k \subset [S_{m_k} > (1-\varepsilon)s_{m_k}t_{m_k}]. \tag{3.14}$$

Z (3.13) a (3.14) nakonec plyne, že

$$P\left(\limsup_{k\to+\infty}(S_{m_k} > (1-\varepsilon)s_{m_k}t_{m_k})\right) = 1,$$

čímž jsme dokázali (3.7). □

Kapitola 4

Zákon iterovaného logaritmu pro Wienerův proces

4.1 Wienerův proces

Zákon iterovaného logaritmu lze zavést jak pro součty náhodných veličin, tak i pro spojité procesy. Jedním z nejznámějších reprezentantů je Wienerův proces, pro který také zákon iterovaného logaritmu zformulujeme a dokážeme. Zde si můžeme ještě povšimnout hlavních rozdílů oproti předešlé kapitole. První odlišností je přechod od náhodné posloupnosti ke spojitému procesu a druhou z nich je předpoklad nezávislosti. Kapitola 3 totiž předpokládá nezávislost náhodných veličin X_n, $n \in \mathbb{N}$, kdežto u Wienerova procesu (viz. *Definice 4.1*) je tato podmínka jaksi modifikována. Definice Wienerova procesu nevyžaduje totiž nezávislost náhodných veličin W_t, $t \geq 0$, ale nezávislost přírůstků $W_t - W_s$, $0 \leq s < t < +\infty$.

Ještě než se pustíme do samotného zákona, uvedeme si několik užitečných definic a tvrzení.

Definice 4.1 Wienerovým procesem *nazveme spojitý proces* $W = \{W_t, \mathfrak{F}_t; 0 \leq t < +\infty\}$ *definovaný na nějakém pravděpodobnostním prostoru* $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$*, pro který platí:*

1. $W_0 = 0$ *s.j.*

2. $W_t - W_s$ *jsou nezávislé přírůstky s normálním rozdělením* $N(0, t-s)$ *na* $\mathfrak{F}$ *pro* $0 \leq s < t$,

3. W_t *je měřitelná náhodná veličina pro všechna* $t > 0$,

4. $W_t - W_s$ *jsou nezávislé na* $\mathfrak{F}_s$ *pro všechna* $0 \leq s < t < +\infty$.

Dodejme ještě, že $\mathfrak{F}_t$ *je tzv.* filtrace náhodného procesu W, *tj. neklesající posloupnost* $\sigma-$*algeber* $\{\mathfrak{F}_t; t \geq 0\}$ *z* $\mathfrak{F}$ *takových, že* $\mathfrak{F}_s \subseteq \mathfrak{F}_t \subseteq \mathfrak{F}$ *pro* $0 \leq s < t < +\infty$.

Lemma 4.1 *Je-li* $W = \{W_t, \mathfrak{F}_t; 0 \leq t < +\infty\}$ *Wienerův proces, pak i procesy získané následujícími transformacemi jsou Wienerovy:*

1. $Y = \{Y_t, \mathfrak{F}_t^Y; 0 \leq t < +\infty\}$ *definovaný jako*
   $Y_t = tW_{1/t}; \quad 0 < t < +\infty$
   $Y_t = 0; \quad t = 0,$
   kde $\mathfrak{F}_t^Y$ *je filtrace generovaná samotným procesem* Y, *tj.* $\mathfrak{F}_t^Y := \sigma(Y_s; 0 \leq s \leq t)$, *nejmenší* $\sigma-$*algebra, vzhledem ke které je* X_s *měřitelná pro všechna* $s \in [0, t]$.

2. $-W = \{-W_t, \mathfrak{F}_t; 0 \leq t < +\infty\}$

Definice 4.2 *Proces* $\{X_t, \mathfrak{F}_t; 0 \leq t < +\infty\}$ *se nazývá* submartingal *(resp.* supermartingal*), jestliže pro všechna* $0 \leq t < +\infty$ *je* X_t *integrovatelná a pro každé* $0 \leq s < t < +\infty$ *platí s.j.:*

$$E(X_t|\mathfrak{F}_s) \geq X_s \qquad (\text{ resp.} E(X_t|\mathfrak{F}_s) \leq X_s).$$

Proces $\{X_t, \mathfrak{F}_t; 0 \leq t < +\infty\}$ *se nazývá* martingal, *jestliže platí obě podmínky zároveň, tj.* $E(X_t|\mathfrak{F}_s) = X_s$.

4.2 Zákon iterovaného logaritmu pro Wienerův proces

Věta 4.2 (ZIL pro Wienerův proces) *Pro skoro všechna* $\omega \in \Omega$ *platí:*

$$(i) \quad \limsup_{t \searrow 0} \frac{W_t(\omega)}{\sqrt{2t \ln \ln(1/t)}} = 1, \qquad (ii) \quad \liminf_{t \searrow 0} \frac{W_t(\omega)}{\sqrt{2t \ln \ln(1/t)}} = -1$$

$$(iii) \quad \limsup_{t \to +\infty} \frac{W_t(\omega)}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1, \qquad (iv) \quad \liminf_{t \to +\infty} \frac{W_t(\omega)}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = -1$$

Poznámka 4.1 *Díky symetrii (*Lemma 4.1(2)*) plyne vlastnost (ii) z vlastnosti (i) a z inverze času (*Lemma 4.1(1)*) dostáváme z vlastností (i) a (ii) i vlastnosti (iii) a (iv).*

Důkaz Věty 4.2: Aplikujme *Dodatek 10* na martingal $\{X_t, \mathfrak{F}_t; 0 \leq t < +\infty.\}$, kde $X_t = \exp\left\{\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\right\}$ pro $0 \leq t < +\infty$. Dostáváme pro $\lambda > 0$, $\beta > 0$:

$$P\left(\max_{0\leq s\leq t}(W_s - \frac{\lambda}{2}s) \geq \beta\right) = P\left(\max_{0\leq s\leq t} X_s \geq e^{\lambda\beta}\right) \leq e^{-\lambda\beta}. \tag{4.1}$$

Označme $h(t) := \sqrt{2t\ln\ln(1/t)}$ a volme $\theta, \delta \in (0,1)$. Dále budeme volit $\lambda = (1+\delta)\theta^{-n}h(\theta^n)$, $\beta = \frac{1}{2}h(\theta^n)$ a $t = \theta^n$ v (4.1), z čeho získáme

$$P\left(\max_{0\leq s\leq \theta^n}(W_s - \frac{\lambda}{2}s) \geq \beta\right) \leq \frac{1}{(n\ln(1/\theta))^{1+\delta}} \text{ pro } n \geq 1.$$

Protože $\frac{1}{(n\ln(1/\theta))^{1+\delta}}$ je obecný člen konvergentní řady, dostáváme z *Dodatku 5*, že existuje jev $\Omega_{\theta\delta} \in \mathfrak{F}$ s pravděpodobností jedna a náhodná veličina $N_{\theta\delta}$ nabývající hodnot z množiny přirozených čísel taková, že pro všechna $\omega \in \Omega_{\theta\delta}$ platí

$$\max_{0\leq s\leq \theta^n}\left(W_s(\omega) - \frac{1+\delta}{2}s\theta^{-n}h(\theta^n)\right) < \frac{1}{2}h(\theta^n) \qquad \text{pro } n \geq N_{\theta\delta}(\omega).$$

Tudíž pro každé $t \in (\theta^{n+1}, \theta^n]$ je

$$W_t(\omega) \leq \max_{0\leq s\leq \theta^n} W_s(\omega) \leq \left(1+\frac{\delta}{2}\right)h(\theta^n) \leq \left(1+\frac{\delta}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\theta}}h(t).$$

Proto

$$\sup_{\theta^{n+1}<t\leq\theta^n} \frac{W_t(\omega)}{h(t)} \leq \left(1+\frac{\delta}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\theta}} \qquad \text{pro } n \geq N_{\theta\delta}(\omega) \text{ a všechna } \omega \in \Omega_{\theta\delta}.$$

Pro n jdoucí do nekonečna pak dostaneme nerovnost

$$\limsup_{t\searrow 0} \frac{W_t(\omega)}{h(t)} \leq \left(1+\frac{\delta}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\theta}} \qquad \text{s.j.}$$

Pro $\delta \searrow 0$ a $\theta \nearrow 1$ přes množinu racionálních čísel potom platí, že

$$\limsup_{t\searrow 0} \frac{W_t}{h(t)} \leq 1 \qquad \text{s.j.} \tag{4.2}$$

Abychom dostali opačnou nerovnost, musíme použít *Dodatek 6*, který předpokládá nezávislost. Použijeme tedy nezávislost jevů $A_n := [W_{\theta^n} -$

$W_{\theta^{n+1}} \geq \sqrt{1-\theta}h(\theta^n)]$ pro $n = 1, 2, \ldots$ a pevné $0 < \theta < 1$. *Dodatek 11* použitý pro $x = \sqrt{2\ln n + 2\ln\ln(1/\theta)}$ říká, že

$$P(A_n) = P\left(\frac{W_{\theta^n} - W_{\theta^{n+1}}}{\sqrt{\theta^n - \theta^{n+1}}} \geq x\right) \geq \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}(x + \frac{1}{x})} \geq \frac{konst.}{n\sqrt{\ln n}} \text{ pro } n > \left|\frac{1}{\ln\theta}\right|.$$

Protože $\frac{konst.}{n\sqrt{\ln n}}$ je obecný člen divergentní řady, dostaneme z *Dodatku 6*, že existuje jev $\Omega_\theta \in \mathfrak{F}$ s $P(\Omega_\theta) = 1$ tak, že pro každé $\omega \in \Omega_\theta$ a $k \geq 1$ existuje přirozené číslo $m = m(k, \omega) \geq k$ takové, že

$$W_{\theta^m}(\omega) - W_{\theta^{m+1}}(\omega) \geq \sqrt{1-\theta}h(\theta^m). \tag{4.3}$$

Navíc nerovnost (4.2) aplikovaná na Wienerův proces $-W$ implikuje existenci jevu $\Omega^* \in \mathfrak{F}$ s pravděpodobností jedna a náhodné veličiny N^* nabývající hodnot z množiny přirozených čísel tak, že pro každé $\omega \in \Omega^*$ je

$$-W_{\theta^{n+1}}(\omega) \leq 2h(\theta^{n+1}) \leq 4\sqrt{\theta}h(\theta^n) \qquad \text{pro } n \geq N^*(\omega). \tag{4.4}$$

Z (4.3) a (4.4) můžeme shrnout, že pro každé $\omega \in \Omega_\theta \cap \Omega^*$ a každé $k \leq 1$ existuje přirozené číslo $m = m(k, \omega) \geq k$ v $N^*(\omega)$, pro ně je

$$\frac{W_{\theta^m}(\omega)}{h(\theta^m)} \geq \sqrt{1-\theta} - 4\sqrt{\theta}.$$

Necháme-li růst m nade všechny meze, platí nerovnost

$$\limsup_{t\searrow 0} \frac{W_t}{h(t)} \geq \sqrt{1-\theta} - 4\sqrt{\theta} \qquad \text{s.j.}$$

Necháme-li navíc konvergovat θ k nule přes množinu racionálních čísel, dostáváme očekávaný výsledek, tedy

$$\limsup_{t\searrow 0} \frac{W_t}{h(t)} \geq 1 \qquad \text{s.j.}$$

□

Kapitola 5

Konverze k zákonu iterovaného logaritmu

V poslední kapitole si ukážeme ještě jeden zajímavý výsledek spojený se zákonem iterovaného logaritmu a tím je jeho konverze, kterou uvedl Strassen(1966). Pro úplnost ještě srovnejme zákon iterovaného logaritmu se zákonem velkých čísel a centrální limitní větou.

Nechť $\{X_n\}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin a $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Existují tři klasické výsledky týkající se posloupnosti $\{S_n\}$:

- zákon velkých čísel, který říká, že $\frac{1}{n}S_n \to 0$ s.j. právě tehdy, kdy $X_1 \in L^1$ a $EX_1 = 0$.

- centrální limitní věta, jež tvrdí, že $\frac{1}{\sqrt{n}}S_n \xrightarrow{d} N(0,1)$ právě tehdy, když $X_1 \in L^2$, $EX_1 = 0$ a $EX_1^2 = 1$.

- zákon iterovaného logaritmu, který říká, že $\limsup\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \ln\ln n}} = 1$ a $\liminf\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \ln\ln n}} = -1$ s.j., jestliže $X_1 \in L^2$, $EX_1 = 0$ a $EX_1^2 = 1$.

Profesor Freedman uvedl na své přednášce v roce 1963 domněnku, že původní implikace v zákonu iterovaného logaritmu může být nahrazena ekvivalencí, stejně tak jak je tomu u zákona velkých čísel a centrální limitní věty. K důkazu této využijeme Skorochodových poznatků.

Věta 5.1 *Je-li s kladnou pravděpodobností*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2n\ln\ln S_n}} < +\infty, \tag{5.1}$$

potom $EX_1^2 < +\infty$ *a* $EX_1 = 0$.

Důkaz: Protože jev (5.1) leží ve zbytkové σ-algebře (tj. v $\bigcap_n \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$), platí (5.1) s.j., speciálně je pak $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} S_n = 0$ s.v., tedy z Kolmogorovova zákona velkých čísel je $X_1 \in L^1$ a $EX_1 = 0$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že rozdělení X_1 je symetrické kolem nuly. Nyní použijeme Skorochodovu větu, která říká, že existuje pravděpodobnostní prostor, na kterém je separabilní jednorozměrný Wienerův proces $\{\zeta_t\}_{t\geq 0}$ definovaný zároveň s posloupností $\tau_1, \tau_2, \ldots$ nezávislých stejně rozdělených nezáporných náhodných veličin takových, že $\alpha_n = \sum_{j=1}^{n} \tau_j$, kde:

(i) posloupnosti $S_1, S_2, \ldots$ a $\zeta_{\alpha_1}, \zeta_{\alpha_2}, \ldots$ mají stejné rozdělení,
(ii) $E\tau_1 = E(X_1^2)$ (obě strany mohou být nekonečné),
(iii) $|\zeta_t - \zeta_{\alpha_{n-1}}| \leq |\zeta_{\alpha_n} - \zeta_{\alpha_{n-1}}|$ s.v. pro všechna n a $\alpha_{n-1} \leq t \leq \alpha_n$.

Díky (ii) můžeme dokázat, že z (5.1) plyne, že $\tau_1 \in L^1$. Pro spor předpokládejme, že $E\tau_1 = +\infty$. Potom

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\alpha_n = +\infty \quad \text{s.v.} \quad \text{(použili jsme zákon velkých čísel).} \tag{5.2}$$

Ze zákona iterovaného logaritmu je

$$\limsup_{k\to+\infty} \frac{\zeta_k}{\sqrt{2k\ln\ln k}} = 1 \qquad s.v. \tag{5.3}$$

Z (iii) máme

$$\zeta_k \leq \zeta_{\alpha_{n-1}} + |\zeta_{\alpha_n} - \zeta_{\alpha_{n-1}}| \leq 2|\zeta_{\alpha_{n-1}}| + |\zeta_{\alpha_n}| \quad \text{s.v.}$$

pro $\alpha_{n-1} \leq k \leq \alpha_n$, tedy

$$\begin{aligned}
\limsup_{k\to+\infty} \frac{\zeta_k}{\sqrt{2k\ln\ln k}} &\leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{2|\zeta_{\alpha_{n-1}}| + |\zeta_{\alpha_n}|}{\sqrt{2\alpha_{n-1}\ln\ln\alpha_{n-1}}} = \\
&= \limsup_{n\to+\infty} \frac{2|\zeta_{\alpha_{n-1}}| + |\zeta_{\alpha_n}|}{\sqrt{2n\ln\ln n}} \cdot \sqrt{\frac{2n\ln\ln n}{2\alpha_{n-1}\ln\ln\alpha_{n-1}}}.
\end{aligned}$$

Ale

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{2n\ln\ln n}{2\alpha_{n-1}\ln\ln\alpha_{n-1}}}=0 \quad \text{s.v.} \qquad \text{z (5.2)}$$

a

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{2|\zeta_{\alpha_{n-1}}|+|\zeta_{\alpha_n}|}{\sqrt{2n\ln\ln n}}<+\infty \quad \text{s.v.},$$

protože $\zeta_{\alpha_n}-$proces simuluje S_n-proces. Tedy

$$\limsup_{k\to+\infty}\frac{\zeta_k}{\sqrt{2k\ln\ln k}}=0 \quad \text{s.v.},$$

což je ale ve sporu s (5.3). □

Důsledek 5.2 $\limsup\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}}=1$ *a* $\liminf\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}}=-1$ *právě tehdy, když* $X_1\in L^2$, $EX_1=0$ *a* $EX_1^2=1$.

Dodatek A

Použitá tvrzení

Dodatek 1 *Nechť* $\{X_n\}_{n\geq 0}$ *je posloupnost náhodných veličin. Je-li*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} E \mid X_n \mid < +\infty,$$

pak $X_n \to 0$ *skoro jistě pro* $n \to +\infty$.

Dodatek 2 *Pro každé* $\varepsilon \in (0; 1-p)$ *definujeme*

$$h_+(\varepsilon) := (p+\varepsilon)\ln\frac{p+\varepsilon}{p} + (1-p-\varepsilon)\ln\frac{1-p-\varepsilon}{1-p}.$$

Dodatek 3 *Pro každé* $\varepsilon \in (0; 1-p)$ *a* $n \geq 1$, *je* $h_+(\varepsilon) > 0$ *a*

$$P_n\left(\frac{S_n}{n} \geq p+\varepsilon\right) \leq e^{-nh_+(\varepsilon)}.$$

Dodatek 4 *Pro* $\varepsilon \to 0$ *je* $h_+(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2p(1-p)} + O(\varepsilon^3)$.

Dodatek 5 (První Borelovo-Cantelliho lemma.) *Nechť* $\{A_n\}_{n\geq 1}$ *je posloupnost jevů. Je-li*

$$\sum_{n\geq 1} P(A_n) < +\infty, \text{ pak } P(\limsup_{n\to+\infty} A_n) = 0.$$

Dodatek 6 (Druhé Borelovo-Cantelliho lemma.) *Nechť* $\{A_n\}_{n\geq 1}$ *je posloupnost nezávislých jevů. Je-li*

$$\sum_{n\geq 1} P(A_n) = +\infty, \text{ pak } P(\limsup_{n\to+\infty}(A_n)) = 1.$$

Dodatek 7 *Nechť* $\{a_n\}_{n\geq 1}$ *je posloupnost reálných čísel takových, že*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \ \text{a} \ \lim_{n\to+\infty} a_n n^{-1/6} = 0.$$

Potom

$$P_n(\frac{S_n}{n} - p \geq \sqrt{p(1-p)}\frac{a_n}{\sqrt{n}}) \sim \frac{1}{a_n\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{a_n^2}{2}).$$

Dodatek 8 *Nechť* $X_1, \ldots, X_n$ *jsou nezávislé omezené náhodné veličiny, pro které* $EX_k = 0$ *pro* $1 \leq k \leq n$. *Označme* $S_n := X_1 + \ldots + X_n$, $s_n^2 := varS_n$, $s_n := \sqrt{s_n^2}$ *a* $c_n := \max\{ess\sup\frac{|X_k|}{s_n}; 1 \leq k \leq n\}$. *Potom pro* $0 < \varepsilon < \frac{1}{c_n}$ *platí*

$$P\left(\frac{S_n}{s_n} > \varepsilon\right) < \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon c_n}{2}\right)\right\}.$$

Dodatek 9 *Nechť* $X_1, \ldots, X_n$ *jsou nezávislé omezené náhodné veličiny, pro které* $EX_k = 0$ *pro* $1 \leq k \leq n$. *Označme* $S_n := X_1 + \ldots + X_n$, $s_n^2 := varS_n$, $s_n := \sqrt{s_n^2}$ *a* $c_n := \max\{ess\sup\frac{|X_k|}{s_n}; 1 \leq k \leq n\}$. *Je-li* $\gamma > 0$ *libovolné,* $c_n = c_n(\gamma)$ *dostatečně malé a* $\varepsilon = \varepsilon(\gamma)$ *dostatečně velké, potom*

$$P\left(\frac{S_n}{s_n} > \varepsilon\right) > \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2(1+\gamma)}{2}\right\}.$$

Dodatek 10 *Nechť* $\{X_t, \mathfrak{F}_t; 0 \leq t < +\infty\}$ *je supermartingal, pro nějž je každá trajektorie zprava spojitá. Nechť* $[\sigma, \tau]$ *je podinterval* $[0, +\infty)$ *a nechť* $\alpha < \beta$, $\lambda > 0$ *jsou reálná čísla. Potom platí:*

$$\lambda \cdot P\left(\sup_{\sigma\leq t\leq\tau} X_t \geq \lambda\right) \leq E(X_\tau^+).$$

Dodatek 11 *Pro každé* $x > 0$ *platí nerovnost*

$$\frac{x}{1+x^2}e^{-x^2/2} \leq \int_x^{+\infty} e^{-u^2/2}du \leq \frac{1}{x}e^{-x^2/2}.$$

Literatura

[1] Berkes, I.: *A remark to the law of the iterated logarithm*, Studia Sci. Math. Hungar. 7, 1972, No. 1-2, 189-197.

[2] Egorov, V.A.: *On The law of the iterated logarithm*, Teor. Veroyatn. Primen. 14, 1969, No. 4, 722-729.

[3] Egorov, V.A.: *On Kolmogorov's theorem on the law of the iterated logarithm*, Vestn. Leningr. Univ. Ser I 13, 1972, 140-142.

[4] Karatzas, Ioannis a Shreve, Steven E.: *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[5] Lesigne Emmanuel: *Head or Tails; An Introduction to Limit Theorems in Probability*, AMS, 2005.

[6] Marcinkiewicz, J. a Zygmund, A.: *Remarque sur la loi du logarithme itéré*, Fundam. Math. 29, 1937, 215-222.

[7] Martikainen, A.I.: *A converse to the law of the iterated logarithm for a random walk*, Teor. Veroyatn. Primen. 25, 1980, No. 2, 364-366.

[8] Petrov, V. V.: *On a relation between an estimate of the remainder in the central limit theorem and the law of the iterated logarithm*, Teor. Veroyatn. Primen. 11, 1966, No. 3, 514-518.

[9] Prokhorov, Yu.V. a Statulevičius V.: *Limit Theorems of Probability Theory*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg , 2000.

[10] Pruitt, W.E.: *General one-sided laws of the iterated logarithm*, Ann. Probab. 9, 1981, No. 1, 1-48.

[11] Rosalsky, A.: *On the converse to the iterated logarithm law*, Sankhya A42, 1980, No. 1-2, 103-108.

[12] Shorack, R. Galen: *Probability for Statisticians*, Springer-Verlag, New York, 2000.

[13] Strassen, V.: *A converse to the law of the iterated logarithm*, Z. Wahrsch. verw. Geb. 4, (1966), 265-268.

[14] Tomkins, R. J.: *Refinements of Kolmogorov's law of the iterated logarithm*, Stat. Probab. Lett. 14, 1991, No. 4,321-325.

[15] Tucker, Howard G.: *A Graduate Course in Probability*, Academic Press, New York, 1967.

[16] Weiss, M.: *On the law of the iterated logarithm*, J. Math. Mech. 8, 1959, No. 1, 121-132.

PŘIJATO K OBHAJOBĚ

29 -05- 2006

PŘEDSEDA KOMISE PRO BSZZ
STUDIJNÍ PROGRAM MATEMATIKA