Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DISERTAČNÍ PRÁCE

Eva Ulrychová

Lineární algebra na školách netechnického směru

Matematický ústav UK

Vedoucí disertační práce:	prof. RNDr. Josef Málek, CSc., DSc.
Studijní program:	matematika
Studijní obor:	4M8 Obecné otázky matematiky a informatiky

Praha 2013

Je mi potěšením poděkovat svému školiteli prof. RNDr. Josefu Málkovi, CSc., DSc. za cenné rady a připomínky, které přispěly ke zkvalitnění této disertační práce, a především za nezměrnou trpělivost, s jakou mě vedl v průběhu celého mého studia.

Neméně děkuji předsedovi Rady doktorského studijního oboru Obecné otázky matematiky a informatiky 4M8 doc. RNDr. Jindřichu Bečvářovi, CSc. za nekompromisní, avšak laskavý dohled nad dodržováním studijních povinností a za hlavní podíl na vytvoření mimořádně přátelské a kolegiální atmosféry mezi doktorandy oboru 4M8.

Dále velice děkuji Mgr. Janu Voříškovi za vypracování statistických modelů, jejichž výsledky jsem použila v této práci.

Prohlašuji, že jsem tuto disertační práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle 60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Eva Ulrychová

Název práce: Lineární algebra na školách netechnického směru

Autor: RNDr. Eva Ulrychová

Katedra: Matematický ústav UK

Vedoucí disertační práce: prof. RNDr. Josef Málek, CSc., DSc.

Abstrakt: Práce sestává ze dvou rovnocenných částí – z části zabývající se didaktickými aspekty výuky lineární algebry, a z netradičně pojatého učebního textu *Základy lineární algebry*, který je připojen jako samostatná příloha. Didaktická část se zabývá výukou matematiky, speciálně lineární algebry, na Vysoké škole ekonomické v Praze, a to jak z hlediska historického, tak metodologického. Součástí je i podrobné vyhodnocení testů znalostí studentů. Závěry jsou do značné míry přenositelné i na ostatní vysoké školy netechnického směru. Učební text má dvě úrovně obtížnosti, je psán formou přístupnou i studentům s horšími předpoklady pro studium matematiky. Je určen především studentům vysokých škol, kde matematika není hlavním oborem, může však sloužit i zájemcům z řad středoškoláků jako úvod do hlubšího studia lineární algebry.

Klíčová slova: lineární algebra, výuka matematiky, učební text, motivační a aplikační příklady

Title: Linear Algebra at Business Universities and High Schools

Author: RNDr. Eva Ulrychová

Department: Mathematical Institute of Charles University

Supervisor: RNDr. Josef Málek, CSc., DSc.

Abstract: The thesis consists of two equal parts – of a part dealing with didactic aspects of teaching linear algebra, and of an unconventionally approached textbook *Fundamentals of Linear Algebra*, which is appended as a separate attachment. The didactic part deals with teaching mathematics, especially linear algebra, at the University of Economics in Prague, namely from the historical and methodological point of view. The thesis also includes a detailed evaluation of students' knowledge tests. The conclusions are largely portable to other non-technically oriented universities. The textbook is designed with respect to two levels of difficulty; it is written in the form accessible for students with lighter assumptions for the study of mathematics. The textbook is designed especially for students of universities where mathematics is not the main focus; it may also serve to interested high schools students as an introduction to a more advanced study of linear algebra.

Keywords: linear algebra, teaching mathematics, textbook, motivational and application examples

Obsah

Úvod

Cíle práce

Práce se zabývá výukou lineární algebry na školách netechnického směru. Hlavním cílem práce je vytvoření učebního textu z lineární algebry, který by měl být srozumitelný i čtenářům s horšími předpoklady pro studium matematiky. Učební text vychází z dlouholetých zkušeností autorky s výukou matematiky na Vysoké škole ekonomické v Praze (VŠE), proto je v práci věnována pozornost výuce matematiky na této škole. Závěry jsou do značné míry přenositelné i na jiné vysoké školy netechnického směru.

Práce je koncipována do dvou částí. Část I se zabývá výukou matematiky (a speciálně lineární algebry) na VŠE, v části II je popsán netradičně pojatý učební text Základy lineární algebry, který je připojen jako samostatná příloha.

V první kapitole části I je stručně připomenut vývoj výuky matematiky na VŠE od jejího založení po současnost, a to jak z hlediska hodinových dotací základního kurzu matematiky (lineární algebra je vedle matematické analýzy součástí tohoto kurzu), tak z hlediska učebních textů určených jako literatura k základnímu kurzu. Z učebních textů je patrná obsahová náplň výuky lineární algebry v jednotlivých obdobích i rozdílné metodické postupy výkladu.

V druhé kapitole části I jsou uvedeny metodické připomínky k výuce lineární algebry na VŠE, které vycházejí jednak ze zkušeností s výukou základního kurzu matematiky, jednak z výsledků testů, zadaných studentům v rámci tohoto kurzu.

Ve třetí kapitole části I jsou vyhodnoceny výsledky testů znalostí některých základních pojmů lineární algebry, a to i ve vazbě na znalost příslušných početních postupů.

V první kapitole části II je popsán učební text Základy lineární algebry, v druhé kapitole části II jsou uvedeny a okomentovány motivační a aplikační příklady použité v tomto učebním textu.

Pro studenty VŠE, a stejně tak pro studenty dalších vysokých škol netechnického zaměření, není matematika hlavním studijním předmětem. Je však nutné, aby si studenti osvojili určité základní matematické pojmy a zvládli početní postupy potřebné pro výuku odborných předmětů. Studenti těchto vysokých škol však nejen že o studium matematiky nemají zájem, jejich vztah k matematice je spíše negativní. Výuka matematiky by v ideálním případě měla probíhat tak, aby studenti zájem o matematiku získali (to se však stává spíše jen výjimečně), nebo aby je alespoň způsob výkladu neodrazoval.

V podmínkách, jaké jsou v současné době nastoleny pro výuku matematiky na VŠE (jednosemestrální základní kurz s poměrně širokým programem a malou hodinovou dotací), není reálné předpokládat, že by si studenti osvojili či prohloubili logické myšlení, přesnost vyjadřování, a určitou matematickou kulturu vůbec. Studenti nemají dobře zvládnuty ani základy středoškolské matematiky, jejichž znalost je pro další studium matematiky nezbytná. Např. na vysoké školy ekonomického zaměření přicházejí často absolventi obchodních akademií – rozdíl ve znalosti základů středoškolské matematiky oproti studentům gymnázií je značný.

Studenti navíc nejsou znalí ani základní struktury matematiky, nerozlišují věty a definice (častý dotaz i po semestru či dvou studia matematiky: "Musíme znát důkazy definic?").

Na VŠE přestaly být vyučovány důkazy matematických vět, a to nejen z časových důvodů. Zatímco pro matematicky zaměřené studenty může důkaz přispět k hlubšímu pochopení tvrzení (a zejména pak osvětlit nutnost všech předpokladů), pro nematematicky smýšlející studenty představují důkazy jen další zátěž – studenti se je učí nazpaměť bez jakékoliv snahy o pochopení, a důkazy v nich vyvolávají téměř odpor k matematice. I znění vět a definic se často studenti učí nazpaměť, aniž by v nich shledávali jakýkoliv smysl. Naproti tomu studenti poměrně s chutí řeší příklady, kde stačí zvládnout rutinní postupy.

Je určitě nutné přizpůsobit nejen osnovy kurzu, ale i způsob výkladu studentům, pro něž je kurz určen – zejména s přihlédnutím k tomu, jaké znalosti matematiky studenti potřebují pro zvládnutí výuky odborných předmětů. Studenti bezpochyby potřebují zvládnout určité početní postupy; otázkou je, do jaké míry od studentů vyžadovat bezchybné citace definic a vět – nakolik musí být vyjádření přesné. Vzhledem k tomu, že podmínky výuky často nedovolují přímo vést studenty ke kultuře vyjadřování, k akceptování faktu, že každé slovo v matematické větě má svůj význam atd., jeví se jako přínosnější, aby studenti získali alespoň víceméně intuitivní představu o daném pojmu (i kdyby pojem neuměli zcela přesně definovat), než aby příslušnou definici bezchybně citovali bez nejmenšího pochopení. V této otázce však nepanuje shoda ani mezi vyučujícími matematiky.

Pro studenty VŠE byl vydán kromě jiných učebnic matematiky (viz odstavec 1.2 kapitoly 1) i učební text (viz [12]) určený pro v té době nově na jeden semestr zkrácený základní kurz matematiky. Cílem tohoto textu bylo podat vykládanou látku formou co nejpřístupnější nematematicky zaměřeným studentům. Text nemá standardní strukturu "definice, věta, důkaz"; definované pojmy jsou v textu zvýrazněny, tvrzení jsou v některých případech formulována poněkud volněji (při maximální možné míře zachování přesnosti). Navíc jsou formální zápisy, které matematikům zjednodušují vyjadřování, pro nematematicky zaměřené studenty však často představují nesrozumitelná sdělení, ve vhodných případech nahrazeny slovními formulacemi.

Zjednodušený způsob výkladu užitý v tomto učebním textu studentům vyhovoval, text se stal ze strany studentů vyhledávaným. Pořizovali si jej i studenti v té době dobíhajícího dvousemestrálního kurzu (viz odstavec 1.1 kapitoly 1) jako určitou průpravu pro studium podle náročnější učebnice určené pro dvousemestrální kurz (psané standardním způsobem). Idea průpravného textu pro studium textu náročnějšího se stala inspirací pro koncepci dvouúrovňového učebního textu Základy lineární algebry, který je součástí této disertační práce.

Učební text Základy lineární algebry (viz část II a samostatná příloha) vychází po formální stránce z výše zmíněného učebního textu[1], po obsahové stránce partie lineární algebry výrazně rozšiřuje. Text je zamýšlen pro studenty, kteří potřebují získat základní znalosti z lineární algebry, může sloužit i jako příprava ke studiu náročnějších textů z lineární algebry. Formou přístupnou i čtenářům s horšími

[1]Kapitoly věnované lineární algebře v zmíněném učebním textu (viz [12]) zpracovala autorka této disertační práce.

předpoklady pro studium matematiky přibližuje poměrně širokou oblast lineární algebry (podrobnější charakteristika viz kapitola 1 části II).

Učební text je rozdělen do dvou částí.

První část obsahuje pouze nejnutnější pojmy, umožňující naučit se především zacházet s maticemi, řešit soustavy lineárních rovnic atd.

Druhá část je mnohem obšírnější, seznamuje čtenáře s pojmy vektorových prostorů konečné dimenze, rozšiřuje i znalosti o pojmech z první části. Místy se na první část odvolává (zejména na početní postupy).

Text obsahuje kromě standardních řešených příkladů i nenáročné příklady aplikační a motivační (viz kapitola 2 části II), které poukazují na souvislost matematického aparátu s praxí. Každá kapitola je doplněna řadou neřešených příkladů (s výsledky) a otázkami, jejichž zodpovězením se čtenáři mohou utvrdit ve správném pochopení nastudované látky.

Text je možno využít následujícím způsobem:

Čtenářům, kteří potřebují jen naprosté základy, stačí první část (text je však psán v naději, že se i mezi těmito čtenáři najdou tací, které nějaké pasáže z první části zaujmou natolik, že nahlédnou i do části pro ně nadstandardní).

Čtenáři, kteří potřebují i látku obsaženou v druhé části, mohou podle svých schopností postupovat dvěma způsoby. Buď se mohou nejdříve seznámit s pojmy a postupy uvedenými v první části a získat tak základní představu, a pak studovat část druhou, nebo mohou studovat přímo druhou část – s tím, že jsou v některých partiích odkázáni na příslušné partie části první.

Dosažené výsledky

- popis a rozbor vývoje výuky matematiky na Vysoké škole ekonomické v Praze
- vypracování metodických připomínek k výuce lineární algebry
- vyhodnocení výsledků testů z lineární algebry
- vytvoření koncepce výkladu lineární algebry pro studenty, jejichž hlavním studijním oborem není matematika
- vytvoření nestandardně koncipovaného učebního textu Základy lineární algebry

Část I

VÝUKA LINEÁRNÍ ALGEBRY

1. Vývoj výuky matematiky na VŠE v Praze

1.1 Hodinové dotace základního kurzu

1.1.1 Úvod

Vyučování matematiky na vysokých školách má dlouholetou tradici. Na některých školách, kde matematika není hlavním předmětem, se však projevuje tendence výuku matematiky zredukovat, a to jak snížením počtu vyučovacích hodin, tak s tím spojeným omezením rozsahu probíraného učiva. Také na Vysoké škole ekonomické v Praze (VŠE) byla postupně snižována hodinová dotace výuky matematiky, nejvýrazněji pak v souvislosti s přechodem na kreditní systém ECTS[1] v letech 2005 – 2006 (hodinové dotace základního kurzu matematiky v jednotlivých obdobích jsou přehledně uvedeny na závěr v pododstavci 1.1.4). Je proto zajímavé podívat se, jakým vývojem vyučování matematiky na VŠE prošlo.

1.1.2 Historie (1953–2005)

Vysoká škola ekonomická v Praze byla založena v roce 1953, do současnosti prošla několika reorganizacemi, týkajícími se počtu fakult, organizace a náplně studia (podrobněji viz [16], [17], [24]).

Přesné údaje o hodinové dotaci matematiky ani osnovy učiva z počátečního období se nepodařilo zjistit – v archivu VŠE nebyly nalezeny žádné dokumenty, které by tyto údaje poskytovaly.

Podle informační brožury o VŠE z roku 1968 (viz [25]) byla matematika (pro studenty povinná) vyučována na jedné ze tří fakult po dobu tří semestrů (v 1. a 2. ročníku) v rozsahu 4 vyučovacích hodin přednášek a 2 hodin cvičení týdně (dále jen 4+2), na ostatních fakultách po dobu dvou semestrů v rozsahu 4+2. Každý semestr byl zakončen zápočtem a zkouškou.[2]

Na počátku 70. let prošla VŠE reorganizací – ke stávajícím třem fakultám přibyla další fakulta a studium bylo z dosavadního pětiletého zkráceno na čtyřleté. Výuka matematiky ve 3. semestru byla zrušena, ale na fakultě, které se to týkalo, byl zvýšen počet hodin cvičení (na 4+4). Stejný rozsah (4+4) byl i na nově vzniklé fakultě; na ostatních fakultách zůstal rozsah nezměněný (tj. 4+2).[3]

Ve školním roce 1981/1982 byl na dvou fakultách[4] ve 2. semestru rozšířen počet hodin matematiky na 6+4; současně byla na těchto fakultách rozšířena i obsahová náplň – ta se pro jednotlivé obory lišila (na oborech s větším počtem hodin byly např. vykládány některé numerické metody atd.).

---

[1] European Credit Transfer and Accumulation System

[2] V 60. letech sestávala VŠE Praha ze tří fakult: 1. Národohospodářská, 2. Výrobně ekonomická, 3. Obchodní. Nejvíce vyučovacích hodin matematiky (4+2) bylo na 1. fakultě – viz Tabulka 1 v pododstavci 1.1.4.

[3] Nově vznikla 4. fakulta – Fakulta řízení. Na všech čtyřech fakultách byl základní kurz matematiky dvousemestrální, nejvíce vyučovacích hodin matematiky (4+4) bylo na 1. a 4. fakultě – viz Tabulka 2 v pododstavci 1.1.4.

[4] Na 1. a 4. fakultě – viz Tabulka 2 v pododstavci 1.1.4.

Ve školním roce 1984/1985 byl pro jeden z oborů zaveden předmět Matematika 3; byl vyučován ve 4. semestru v rozsahu 2+2, zakončen zápočtem a zkouškou. Obsah rozšiřoval základy matematiky o základy logiky, teorii algoritmů atd.

Součástí výuky matematiky (zajišťované katedrou matematiky) byly v 80. letech i základy teorie pravděpodobnosti.

Na počátku 90. let prošla VŠE reorganizací – od té doby sestává v Praze z pěti fakult.[5] Základní kurz matematiky nebyl nadále diferencován podle oborů – počet vyučovacích hodin základního kurzu matematiky byl na všech oborech v 1. semestru 4+2 a v 2. semestru 2+2. Výuku základů teorie pravděpodobnosti převzala katedra statistiky. Od školního roku 1993/1994 byla hodinová dotace snížena na 2+2 po oba semestry. Každý semestr byl zakončen zápočtem a zkouškou. V roce 1995/1996 došlo ke změně v organizaci zkoušek – každý semestr byl zakončen zápočtem, celý předmět pak bakalářskou zkouškou za oba jednosemestrální předměty (akreditované pod zkratkou MAT101 a MAT102) dohromady.

Katedra matematiky zajišťovala výuku základů matematické analýzy a lineární algebry ve dvou povinných jednosemestrálních kurzech (MAT101 a MAT102). V náplni těchto kurzů docházelo k postupné menší redukci učiva a k ústupu od přednášení důkazů matematických vět. Výklad byl ovšem po celou dobu strukturován klasicky – "definice, věta".

Počátkem 90. let byly navíc akreditovány různé výběrové přednášky (zakončené zkouškou), navazující na MAT101 a MAT102; největšímu zájmu se těšila numerická matematika a později i historie matematiky.

V roce 2002 byly akreditovány předměty Calculus A a Calculus B (2 hodiny týdně), které měly sloužit jako příprava k bakalářské zkoušce z matematiky. Calculus A náplní učiva odpovídal předmětu MAT101, Calculus B předmětu MAT102; oba předměty byly zakončeny zápočtem. Předměty si studenti zapisovali buď paralelně s povinným předmětem MAT101, resp. MAT102 – jako zintenzivnění výuky, nebo až po absolvování těchto povinných předmětů jako opakování před zkouškou. O oba kurzy – Calculus A i Calculus B – byl ze strany studentů vždy velký zájem.

1.1.3 Současnost (od r. 2005/2006)

V souvislosti s přechodem školy na kreditní systém ECTS došlo ve školním roce 2005/2006 rozhodnutím vedení školy na dvou fakultách[6] ke snížení hodinové dotace na polovinu: místo dvou semestrů (2+2) byla výuka matematiky zkrácena na jeden semestr (2+2). Od r. 2006/2007 bylo k této úpravě přistoupeno na všech fakultách; jednosemestrální kurz matematiky byl akreditován pod označením 4MM101. Předmět je zakončen zkouškou, zápočty za cvičení se neudělují. Současně byl akreditován předmět Calculus 121, zaměřením odpovídající předmětu Calculus A, resp. B (čili jako příprava ke zkoušce), obsahem odpovídající

[5] V Praze jsou fakulty: 1. Financí a účetnictví, 2. Mezinárodních vztahů, 3. Podnikohospodářská, 4. Informatiky a statistiky, 5. Národohospodářská. Od roku 1998 spadá pod VŠE navíc Fakulta managementu v Jindřichově Hradci, která do té doby byla součástí Jihočeské univerzity. V této práci je věnována pozornost pouze výuce matematiky, kterou zajišťuje pražská katedra matematiky.

[6] Na 3. a 5. fakultě – viz Tabulka 3 v pododstavci 1.1.4. V r. 2008/2009 přestala výuku matematiky na 5. fakultě zajišťovat katedra matematiky – výuku si zajišťuje 5. fakulta samostatně.

předmětu 4MM101. V současnosti je vyučován v rozsahu 1 vyučovací hodiny týdně, je zakončen zkouškou.

Toto znatelné snížení počtu vyučovacích hodin s sebou nutně neslo i redukci rozsahu vyučované látky. I přes tuto poměrně rozsáhlou redukci byl ponechaný objem učiva oproti původnímu víc než poloviční – v polovičním časovém rozpětí těžko zvládnutelný. Bylo proto nutno přistoupit k celkové změně koncepce výuky – nejen po obsahové stránce, ale i po stránce metodologické. Po zkušenostech s výukou předmětu 4MM101 v roce 2005/2006 došlo k dalším změnám – nejen v náplni učiva, ale i ve formě výkladu. Bylo nutno respektovat požadavky odborných kateder na VŠE – nezatěžovat studenty zbytečnými pojmy, učinit výklad co nejsrozumitelnějším "populárnější formou", s důrazem především na početní postupy. Za vzor byly dávány zahraniční vysoké školy podobného zaměření a jejich způsob výkladu matematických základů. Bylo proto ze strany některých vyučujících ustoupeno od formy výkladu "definice, věta", symbolická vyjádření byla často nahrazena slovními. Matematické pojmy byly vykládány co nejjednodušším způsobem při maximálním možném zachování přesnosti. V tomto duchu byly vypracovány příslušné učební texty (viz odstavec 1.2. kapitoly 1).

Při zkoušce nebyly od studentů vždy požadovány přesné formulace pojmů, ale byl kladen důraz na pochopení a schopnost aplikace (např. místo vyslovení definice pojmu limita posloupnosti stačilo grafické znázornění posloupnosti s předepsanou limitou apod.).

Podle zkušeností s výukou a zkouškami se výsledky takto koncipované výuky jevily vcelku příznivě.

I po redukci obsahu a změně formy však poměrně velký objem učiva probíraného v krátkém časovém intervalu, bez možnosti důkladného procvičení a "vstřebání" nových pojmů, činí předmět 4MM101 pro studenty dost náročným. Ve výhodě jsou v tomto směru absolventi gymnázií, kteří některé přednášené pojmy znají už ze střední školy. Na VŠE se ovšem často hlásí i studenti s horšími základy, pro ty je pak tempo výuky těžko akceptovatelné. Nicméně se zdá, že způsob výkladu se přiblížil představám odborných kateder na VŠE a že studenti jsou tak schopni v dostatečné míře zvládnout alespoň základní matematický aparát potřebný při výuce odborných předmětů.

Míra zjednodušení výkladu je však diskutabilní a názory na tuto problematiku jsou do značné míry subjektivní. Proto v tomto směru nepanuje shoda ani mezi vyučujícími na katedře matematiky. Současné vedení katedry prosadilo návrat ke koncepci "definice", "věta", u zkoušky mají být od studetů vyžadovány přesné formulace bez ohledu na pochopení látky. V souladu s touto koncepcí vedoucí katedry vypracoval nový učební text (viz [10]), který je ovšem oproti dřívějším učebním textům určeným pro dvousemestrální kurz do určité míry jednodušší a studentům přístupnější.

1.1.4 Přehled hodinových dotací základního kurzu matematiky v jednotlivých obdobích

V následujících tabulkách jsou přehledně shrnuty údaje o hodinových dotacích základního kurzu matematiky na VŠE v jednotlivých obdobích. Např. údaj 4+2, 4+2, 4+2 znamená, že matematika byla vyučována po dobu tří semestrů, v každém 4 vyučovací hodiny přenášek a 2 vyučovací hodiny cvičení týdně; údaj 4+2, 2+2 znamená, že matematika byla vyučována po dobu dvou semestrů, v prvním semestru 4 vyučovací hodiny přenášek a 2 vyučovací hodiny cvičení týdně, v druhém semestru 2 vyučovací hodiny přenášek a 2 vyučovací hodiny cvičení týdně, apod.

	1. fakulta	2. fakulta	3. fakulta
60. léta	4+2, 4+2, 4+2	4+2, 4+2	4+2, 4+2
70. léta	2 obory: 4+4, 6+2, 2+2; ostatní: 4+2, 2+2	4+2, 4+2	4+2, 4+2

Tabulka 1. Přehled hodinových dotací do r. 1974

	1. fakulta	2. fakulta	3. fakulta	4. fakulta
1974–1981	4+4, 4+4	4+2, 4+2	4+2, 4+2	4+4, 4+4
1981–1991	4+4, 6+4	4+2, 4+2	4+2, 4+2	4+4, 6+4

Tabulka 2. Přehled hodinových dotací 1974 – 1991

	1. fakulta	2. fakulta	3. fakulta	4. fakulta	5. fakulta
1991–1993	4+2, 2+2	4+2, 2+2	4+2, 2+2	4+2, 2+2	4+2, 2+2
1993–2005	2+2, 2+2	2+2, 2+2	2+2, 2+2	2+2, 2+2	2+2, 2+2
2005–2006	2+2, 2+2	2+2, 2+2	2+2	2+2, 2+2	2+2
2006–	2+2	2+2	2+2	2+2	2+2 $*$

Tabulka 3. Přehled hodinových dotací od r. 1991

$*$ Od roku 2008/2009 si zajišťuje výuku matematiky 5. fakulta samostatně, a to v rozsahu 4+2.

1.2 Literatura k základnímu kurzu matematiky

1.2.1 Úvod

Základní kurz matematiky na VŠE prošel od založení školy v r. 1953 po současnost mnoha změnami, a to nejen co do počtu vyučovacích hodin a obsahové náplně, ale i formy výkladu. Tyto změny se odrazily i na příslušných učebních textech určených jako literatura pro studium matematiky na VŠE. V této části práce je uveden přehled základní literatury společně se stručnou charakteristikou jednotlivých učebních textů.

Uvedena je pouze základní literatura k povinnému kurzu matematiky na VŠE, není přitom rozlišováno, jedná-li se o učebnici či skripta. V případě vícerých (i pozměněných, odlišně nazvaných) vydání učebního textu téhož autora (nebo kolektivu) je uvedeno jen první a poslední vydání s případným vyznačením změn v posledním vydání oproti prvnímu.

V některých případech byly základní učební texty doplněny samostatnými sbírkami příkladů nebo skripty rozšiřujícími učivo pro obory s rozšířenou výukou matematiky či skripty pro výběrové přednášky. Tyto texty zde nejsou uvedeny.

Součástí obsahu učebních textů byla ve všech případech i matematická analýza, zde je věnována pozornost pouze lineární algebře (podrobný popis učebních textů viz [18]). Uveden je výčet vykládaných pojmů; tyto údaje však mohou poskytnout jen rámcovou představu – kromě obsahových rozdílů se texty odlišují i rozsahem věnovaným jednotlivým tématům, podrobností vysvětlujících komentářů, pořadím vykládaných pojmů, náročností příkladů apod. Proto jsou jednotlivé učebnice nejprve stručně charakterizovány. Aby byly alespoň částečně přiblíženy rozdíly ve výkladu pojmů v průběhu let, jsou v závěru této kapitoly uvedeny ukázky způsobu výkladu některých pojmů.

V počátečním období nebyla lineární algebra vyučována, v učebním textu se poprvé objevuje v r. 1962. Přesto je zde uvedena i literatura z období před počátkem vyučování lineární algebry – pro porovnání charakteru učebních textů.

1.2.2 Učební texty pro vícesemestrální kurz (1953–2005)

V následujícím výčtu základních učebních textů je u každého titulu uvedena jeho stručná charakteristika. Pozornost je věnována m.j. i zařazení aplikačních příkladů[7] (podrobněji viz [19]). U titulů, jejichž součástí je lineární algebra, jsou kromě výčtu vykládaných pojmů z lineární algebry uvedeny i obsahové rozdíly oproti osnovám současného kurzu.

< 1 > *Veselý F.: Úvod do počtu infinitesimálního, 1954*, viz [20]

162 str. A4. Obsahuje definice, věty (i pomocné k důkazům), důkazy, řadu řešených příkladů, cvičení (neřešené příklady i důkazy tvrzení) bez výsledků, neužívá kvantifikátory, obsahuje obrázky. V textu podrobná vysvětlení, ilustrováno na příkladech. Aplikační příklady ojediněle a pouze ve cvičeních (poloměr filtru na svítiplyn, ujetá vzdálenost lokomotivy při dané spotřebě uhlí).

Lineární algebra není obsažena.

< 2 > *Veselý F.: Úvod do počtu infinitesimálního II, 1955*, viz [21]

173 str. A4. Stejný charakter jako < 1 >. Aplikační příklady pouze ve cvičeních, ne ekonomického charakteru (rozměry románského okna, rozměry krabice, dráha čety tanků, výška, ze které je vrženo těleso apod.).

Lineární algebra není obsažena.

< 3 > *Veselý F., Rychlý R.: Matematika – díl první, 1959*, viz [22]

212 str. A4. V Úvodu řečeno: látka v podstatě ve stejném rozsahu jako < 1 >, omezeny některé obtížnější partie, přidána další kapitola; snaha látku více přiblížit chápavosti posluchačů. Obsahuje definice, věty (i pomocné k důkazům), důkazy, řadu řešených příkladů, nejsou cvičení, neužívá kvantifikátory, obrázky jako samostatná příloha. Aplikační příklady (délka tyče jako funkce její teploty, závislost počtu výrobků na čase).

Lineární algebra není obsažena.

[7] Za aplikační příklady jsou považovány příklady, které nějakým způsobem poukazují na využití matematického aparátu mimo oblast matematiky. Z oblasti lineární algebry nebyly příklady aplikačního charakteru do učebních textů zařazovány téměř vůbec; ve větší míře se vyskytují jen v učebních textech [12] a [1], kam je zařadila autorka této práce.

< 4 > *Veselý F., Rychlý R.: Matematika – druhý díl, 1959*, viz [23]

168 str. A4. Stejný charakter jako < 3 >. Aplikační příklady (minimalizace ceny dopravy, fyzikální aplikace).

Lineární algebra není obsažena.

< 5 > *Rychlý R.: Základy vyšší matematiky, díl první, 1962*, viz [14]

170 str. A4. Obsahuje definice, věty, důkazy, řadu řešených příkladů, cvičení i s výsledky, neužívá kvantifikátory, obsahuje obrázky. Omezena matematická analýza – vynechány složitější důkazy a méně důležité pojmy, poprvé základy lineární algebry. Aplikační příklady pouze ojediněle ve cvičení (vektor výroby, cenový vektor).

Z lineární algebry je obsaženo:

I. Vektory

Vektor (= uspořádaná n-tice), n-členný vektorový prostor. Operace s vektory. Lineární kombinace, lineární závislost a nezávislost vektorů, konvexní lineární kombinace. Vektorový modul (ne obecně: jako množina vektorů, tj. n-tic, uzavřená vzhledem ke sčítání a násobení), určující skupina, báze, dimenze.

II. Matice

Matice. Hodnost matice. Operace s maticemi.

III. Determinanty

Dvě třídy permutací. Definice determinantu, Sarrusovo pravidlo. Vlastnosti determinantů, úpravy determinantu. Determinant jako lineární funkce prvků r-tého řádku. Doplňky A_{rk} k prvkům a_{rk}. Inverzní matice. Hodnost matice a determinant.

IV. Řešení soustavy lineárních rovnic

Řešení soustavy lineárních rovnic, ekvivalentní soustavy, Frobeniova věta, postup řešení (slovní popis postupu, odpovídajícího Gaussově metodě), geometrická interpretace. Vlastnosti řešení soustavy lineárních rovnic, homogenní soustava, vlastnosti řešení soustav. Řešení soustavy rovnic pomocí determinantu, pomocí inverzní matice.

V. Lineární substituce

Rozdíly oproti osnovám současného základního jednosemestrálního kurzu:

Navíc: Určující skupina, báze. Geometrická interpretace soustav lineárních rovnic. Determinanty – permutace, definice determinantu pomocí permutací, výpočet inverzní matice užitím determinantu, souvislost hodnosti a determinantu. Lineární substituce.

Není obsaženo: Jordanova eliminační metoda, maticové rovnice

< 6 > *Rychlý R.: Základy vyšší matematiky, díl druhý, 1962*, viz [15]

165 str. A4. Stejný charakter jako < 5 >. Aplikační příklady (okamžitá rychlost jako derivace dráhy podle času, poměrný přírůstek výroby, náklady na dopravu uhlí).

Lineární algebra není obsažena (je součástí prvního dílu).

V letech 1968 až 1987 byly vydávány učebnice Z. Horského:

< 7 > *Horský Z.: Učebnice matematiky pro posluchače VŠE, 1968*, viz [5]

258 str. B5. Obsahuje definice (nejsou označeny), věty, důkazy, cvičení (neřešené příklady i důkazy tvrzení) bez výsledků, neužívá kvantifikátory, obsahuje

obrázky. Stručný text (nepříliš podrobná vysvětlení), obecné formulace, málo řešených příkladů. Aplikační příklady ojediněle (vektor výroby, elastičnost funkce).

Z lineární algebry je obsaženo:

I. Vektory

Vektory. Axiomy pro vektory, vektorový modul, n-rozměrný prostor. Lineární kombinace, určující skupina. Lineární závislost a nezávislost. Báze. Hodnost. Souřadnice vektorů vzhledem k bázi. Vektorový zápis soustavy lineárních rovnic.

II. Matice

Matice. Hodnost matice. Transponované matice.

III. Soustavy lineárních rovnic

Lineární rovnice. Soustavy lineárních rovnic. Frobeniova podmínka. Změna báze prostoru V_n. Lineární formy. Homogenní soustava.

IV. Analytická geometrie lineárních útvarů

Prostor n-rozměrný. Podprostor vyjádřený soustavou lineárních rovnic. Skalární součin. Délka vektoru, vzdálenost bodů. Vzdálenost bodu od podprostoru. Lineární kombinace bodů. Konvexní množiny. Poloprostory. Souřadnicový systém.

V. Maticová algebra

Rovnost matic. Modul matic. Násobení matic. Inverzní matice. Vlastnosti regulárních matic. Regulární matice a změny báze. Rozdělení matic na pole.

VI. Determinanty

Permutace. Definice determinantu. Rozvoj determinantu podle jedné řady[8]. Lineární forma příslušná k dané řadě determinantu. Výpočet determinantů. Determinanty vybrané z dané matice, hodnost matice. Cramerovo pravidlo.

Rozdíly oproti osnovám současného základního jednosemestrálního kurzu:

Navíc: Lineární vektorový prostor (modul) a podprostor, určující skupina, báze, hodnost prostoru, souřadnice vzhledem k bázi, vektorový zápis soustavy. Lineární formy. Analytická geometrie. Rozdělení matic na pole. Determinanty – permutace, definice determinantu pomocí permutací, souvislost hodnosti matice a determinantu.

Není obsaženo: Jordanova eliminační metoda

$<8>$ *Horský Z.: Učebnice matematiky pro posluchače VŠE I*[9]*, 1987*, viz [6]

7. vydání. 310 str. B5. Stejný charakter jako $<7>$, ještě více od obecného ke speciálnímu.

Z lineární algebry je obsaženo:

I. Lineární vektorové prostory (moduly)

Úvod, prvky množiny opatřené strukturou linearity – vektory. Struktura linearity, lineární vektorový prostor (množina, která vzhledem k sčítání tvoří komutativní grupu (pojem grupa zaveden v 0. kapitole); pro násobení skalárem (=reálným číslem) výčet axiomů). Příklad vektorového prostoru: množina funkcí (s hodnotami v tělese reálných čísel) definovaných na pevně zvolené množině. Podprostory, lineární kombinace. Lineární obaly, určující skupina. Lineární závislost a nezávislost. Báze. Hodnost (dimenze) modulu. Aritmetická interpretace

[8] Řada determinantu je souhrnné označení pro řádky i sloupce matice.

[9] Druhý díl (jiných autorů) byl určen pro obory s rozšířenou výukou matematiky.

modulu konečné dimenze: n-rozměrný aritmetický prostor, vektor souřadnic vektoru vzhledem k bázi. Vektorové moduly nad tělesem.

II. Lineární rovnice

Lineární zobrazení. Lineární rovnice. Lineární algebraická rovnice. Matice. Hodnost matice. Souvislost hodnosti matic s diskusí soustav lineárních rovnic.

III. Geometrické interpretace

Euklidovské prostory. Lineární afinní prostory (lineály). Vyjádření lineárního prostoru soustavou lineárních rovnic. Délka vektoru, vzdálenost bodů. Kolmost. Soustava souřadnic. Lineární kombinace bodů. Konvexní množiny. Lineární formy definované na konvexních obalech. Poloprostory vyťaté nadrovinou.

IV. Maticová algebra

Funkční pojetí matic. Násobení matic. Regulární, singulární matice. Inverzní matice. Vlastnosti regulárních matic. Maticový zápis soustavy lineárních rovnic: řešení soustav užitím inverzní matice. Rozdělení matic na pole

V. Determinanty

Permutace. Definice determinantu. Rozvoj determinantu podle jedné řady. Lineární forma příslušná řadě determinantu. Výpočet determinantu. Determinanty vybrané z dané matice, hodnost matice. Cramerovo pravidlo.

VI. Polynomy a kvadratické formy

Funkce v algebře. Polynomy. Kvadratické formy. Pozitivně a negativně definitní formy. Nutná a postačující podmínka definitnosti kvadratické formy.

Rozdíly oproti osnovám současného základního jednosemestrálního kurzu:

Navíc: Lineární vektorový prostor a podprostor, lineární obal, určující skupina, báze, dimenze. Lineární zobrazení. Geometrické interpretace. Rozdělení matic na pole. Determinanty – permutace, definice determinantu pomocí permutací, souvislost hodnosti a determinantu. Kvadratické formy.

Není obsaženo: Jordanova eliminační metoda

V letech 1994 až 2003 byly vydávány dvojdílné učebnice dvojic autorů J. Klůfa, J. Coufal a M. Kaňka, J. Henzler:

$<9>$ *Coufal J., Klůfa J.: Matematika I (pro Vysokou školu ekonomickou), 1994*, viz [2]

230 str. A4. Obsahuje definice, věty, důkazy, řadu řešených příkladů, cvičení (i důkazy) bez výsledků, užívá kvantifikátory, neobsahuje obrázky (ani k pojmům spojitost, limita), jen příloha grafů základních funkcí. V textu podrobná vysvětlení, ilustrováno na příkladech. Ekonomické aplikace jen z matematické analýzy (funkce nabídky, nákladová funkce). Obsahuje příklady řešené programem MATHEMATICA.

Z lineární algebry je obsaženo:

I. Lineární prostory

Lineární prostor nad $\mathbb{R}$ (axiomatická definice), příklady prostorů. Aritmetický lineární prostor. Podprostor, lineární kombinace, lineární obal. Určující skupina. Lineární závislost a nezávislost. Báze. Hodnost prostoru. Lineární prostor se skalárním součinem – obecně, Gram-Schmidtův ortogonalizační proces, ortogonální doplněk.

II. Matice

Matice. Maticové operace $A + B$, cA. Prostor matic. Hodnost matice. Transponované matice.

III. Soustavy lineárních rovnic

Soustava lineárních rovnic, matice a rozšířená matice soustavy. Řešitelnost soustavy, Frobeniova věta. Gaussova a Jordanova metoda. Homogenní soustava.

IV. Maticová algebra

Součin matic. Regulární, singulární matice. Inverzní matice. Symetrické matice. Maticové rovnice. Maticový zápis soustavy, řešení soustavy pomocí inverzní matice. Pseudoinverzní matice. Lineární transformace Diagonální matice, redukce symetrických matic na diagonální, elementární matice.

V. Determinanty

Determinant – permutace, znaménko dle počtu inverzí. Rozvoj determinantu. Úpravy determinantu. Užití determinantů – Cramerovo pravidlo, výpočet inverzní matice, Wronského determinant. Vlastní čísla – jen jako řešení rovnice $\det(A - \lambda I) = 0$ (není rovnice $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$, nejsou vlastní vektory). Kvadratické formy a jejich typy, kanonický tvar, Sylvesterova věta.

Rozdíly oproti osnovám současného základního jednosemestrálního kurzu:

Navíc: Operace, grupa, těleso (v Úvodu). Lineární prostory – axiomatická definice, podprostor, určující skupina, báze, hodnost prostoru, prostory se skalárním součinem, ortogonální a ortonormální báze. Matice – prostor matic. Symetrické matice, lineární transformace, redukce symetrických matic na diagonální, elementární matice. Determinanty – permutace, definice determinantu pomocí permutací, výpočet inverzní matice užitím determinantů, Wronského determinant. Charakteristická čísla. Kvadratické formy.

$< 10 >$ *Kaňka M., Henzler J.: Matematika II (pro VŠE), 1995*, viz [8]

355 str. A4. Stejný charakter jako $< 9 >$, některá cvičení i s výsledky, obsahuje obrázky, neobsahuje příklady řešené programem MATHEMATICA.

Lineární algebra není obsažena (je součástí prvního dílu).

$< 11 >$ *Klůfa J., Coufal J.: Matematika 1, 2003*, viz [11]

222 str. B5. Oproti $< 9 >$ nejsou důkazy, cvičení jsou s výsledky.

Obsahové změny oproti $< 9 >$:

Není operace, grupa, těleso, lineární prostor se skalárním součinem.

Navíc je geometrická interpretace soustav lineárních rovnic, konvexní množiny, poloprostory.

$< 12 >$ *Kaňka M., Henzler J.: Matematika 2, 2003*, viz [9]

214 str. B5. Oproti $< 10 >$ nejsou důkazy, cvičení jsou s výsledky, více ekonomických aplikací.

Lineární algebra není obsažena (je součástí prvního dílu).

1.2.3 Učební texty pro jednosemestrální kurz (od r. 2006)

V letech 2005 – 2006 došlo k výrazné změně základního kurzu matematiky – v rámci přechodu školy na ECTS byl postupně na všech jejích fakultách zkrácen základní kurz matematiky z dvousemestrálního na jednosemestrální, při stejné týdenní hodinové dotaci (2 hodiny přednášek a 2 hodiny cvičení). Tato razantní změna s sebou přinesla nejen nutnou redukci obsahu učiva, ale na žádost odborných kateder i změnu způsobu výkladu – co nejjednodušší formulaci pojmů a důraz zejména na početní postupy. Tomu byla přizpůsobena i literatura určená pro základní kurz matematiky.

Podle výsledků studentské ankety pořádané vedením školy stoupla vydáním zjednodušeně psané literatury spokojenost studentů s literaturou určenou pro kurz matematiky. Oproti školnímu roku 2005/2006, kdy měli studenti předmětu 4MM101 k dispozici pouze literaturu psanou klasickým způsobem, výrazně stoupl ve školním roce 2006/2007, kdy byla nově k dispozici i zjednodušeně psaná skripta, podíl studentů, kteří hodnotili literaturu jako výbornou či velmi dobrou (viz Tabulka 4). Je ale nutno brát na zřetel, že v roce 2005/2006 byla k dispozici pouze literatura určená původně pro dvousemestrální kurz, která byla i obsáhlejší, a studenti se v ní tudíž možná hůře orientovali. Avšak to, že se i studenti, kteří ještě měli složit bakalářskou zkoušku z matematiky (tj. z nezredukované látky dvousemestrálního kurzu MAT101 a MAT102), často připravovali z učebních textů určených pro předmět 4MM101, svědčilo o tom, že studentům zjednodušená forma výkladu vyhovovala.

	ZS 05/06 celkem 199		**LS 05/06** celkem 68		**ZS 06/07** celkem 479	
	počet	%	**počet**	%	**počet**	%
nevím	9	5	5	7	50	10
výborná	19	10	12	18	136	28
velmi dobrá	50	25	15	22	170	35
dostatečná	99	50	27	40	100	21
nedostatečná	22	11	9	13	23	5

Tabulka 4. Výsledky studentské ankety – hodnocení literatury

< 13 > *Kolektiv[10]katedry matematiky: Matematika pro 4MM101, 2006*, viz [12]

144 str. A4. Nejsou označeny definice – zaváděné pojmy podtrženy; místo vět tvrzení uvedená slovem "Platí"; neobsahuje důkazy, neužívá kvantifikátory, užívá zjednodušené formulace, často slovní místo symbolických zápisů, jednodušší příklady. Řada řešených příkladů, cvičení (neřešené příklady) s výsledky, obsahuje obrázky. V textu podrobná vysvětlení, ilustrováno na příkladech. Neobsahuje aplikační příklady.

Z lineární algebry je obsaženo:

Lineární závislost vektorů, hodnost matice – aritmetické vektory, operace s vektory, lineární kombinace, lineární závislost a nezávislost, matice, hodnost matice. Soustavy lineárních rovnic – Frobeniova věta, Gaussova a Jordanova eliminační metoda, homogenní soustava. Maticová algebra – operace s maticemi, regulární matice, inverzní matice, maticové rovnice, řešení soustav užitím inverzní matice. Determinanty – rekurentní definice, rozvoj, úpravy v matici, Cramerovo pravidlo.

[10]Kolektiv autorů: Batíková B., Henzler J., Hladíková H., Nešverová E., Otavová M., Sýkorová I., Ulrychová E., Valentová E. Kapitolu z lineární algebry vypracovala E. Ulrychová.

< 14 > *Kaňka M., Coufal J., Klůfa J.: Učebnice matematiky pro ekonomy, 2007*, viz [7]

198 str. B5. Podobný charakter jako < 13 >, poněkud exaktnější formulace, obecnější odvozování, věty nejsou poznačeny. Neobsahuje aplikační příklady.

Obsahově odpovídá < 13 >.

< 15 > *Batíková B. a kol.[11]: Učebnice matematiky pro ekonomické fakulty, 2009*, viz [1]

206 str. B5. Stejný charakter jako < 13 >, oproti < 13 > obsahuje aplikační příklady z ekonomie.

Obsahově odpovídá < 13 >. Oproti < 13 > z lineární algebry navíc v dodatku vlastní čísla a vlastní vektory[12].

< 16 > *Klůfa J.: Matematika pro studenty VŠE, 2011*, viz [10]

188 str. B5. Obsahuje definice, věty (bez důkazů), řadu řešených příkladů, cvičení (neřešené příklady) s výsledky, neužívá kvantifikátory, obsahuje obrázky. V textu podrobná vysvětlení, ilustrováno na příkladech. Neobsahuje aplikační příklady.

Obsahově odpovídá < 13 >.

1.2.4 Ukázky způsobu výkladu některých pojmů

Stručná charakteristika učebních textů, uvedená v předchozím odstavci, umožňuje jen rámcovou představu o těchto textech. Texty se kromě obsahových rozdílů odlišují i metodickými postupy výkladu – způsobem definování pojmů, vysvětlujícími poznámkami, množstvím ilustrativních příkladů atd. Připomínáme, že pro studenty s horšími předpoklady pro studium matematiky hraje důležitou roli pro pochopení mimo jiné i způsob formulování či zápisu, a to i v detailech, které pro matematika příliš podstatné být nemusí (formální zápisy či slovní formulace, užití kvantifikátorů, sumační symboliky apod.). Proto jsou v tomto odstavci uvedeny ukázky způsobu výkladu některých pojmů[13].

Jednotlivé učební texty jsou v tomto odstavci očíslovány ve shodě s předchozím odstavcem.

Uvedeny jsou ukázky výkladu pojmů lineární kombinace vektorů a lineární závislost vektorů. Zatímco pojem lineární kombinace vektorů je téměř ve všech uvedených textech definován v podstatě stejně (liší se formou zápisu a množstvím vysvětlujících komentářů a příkladů), definice lineární závislosti vektorů je prezentována v různých formách (zajímavé je porovnat pojetí definice ve dvou vydáních učebnice téhož autora – viz < 7 > a < 8 >).

Dále je pro porovnání uvedena rozdílná koncepce výkladu řešení soustav lineárních rovnic v učebnici < 8 > a ostatních výše uvedených učebních textech (včetně učebnice < 7 > od téhož autora jako < 8 >).

Pro zestručnění jsou některé pasáže jen informativně popsány. Citované ukázky jsou odlišeny od ostatního textu italikou.

[11] Stejný kolektiv autorů jako < 13 >.

[12] Pojmy obsažené v dodatku se v základním kurzu nevyučují – pouze jako studijní materiál pro studenty oborů, k jejichž výuce je těchto pojmů potřeba.

[13] Markantní rozdíly jsou zejména ve způsobu zavedení pojmu limita posloupnosti; tento pojem však vybočuje ze zaměření této práce na lineární algebru.

Lineární kombinace vektorů

$<5>$ *Rychlý R.: Základy vyšší matematiky, díl první, 1962*

Vektorem se rozumí uspořádaná n-tice reálných čísel.

Lineární kombinace vektorů $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\ldots$, $\bar{a}_r$ *je vektor, který vznikne z daných vektorů tím, že vektory násobíme po řadě libovolnými čísly* c_1, c_2, $\ldots$, c_r *a násobky sečteme.*

Lineární kombinace daných vektorů je vektor $\bar{a} = c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2 + \ldots + c_r\bar{a}_r$.

Následně jsou složky vektorů očíslovány dvěma indexy – s vysvětlujícím komentářem – a lineární kombinace je popsána po složkách:

Lineární kombinace vektorů $\bar{a} = c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2 + \ldots + c_r\bar{a}_r$ *má složky*

$(c_1a_{11}+c_2a_{21}+\ldots+c_ra_{r1},\ c_1a_{12}+c_2a_{22}+\ldots+c_ra_{r2},\ \ldots,\ c_1a_{1n}+c_2a_{2n}+\ldots+c_ra_{rn})$.

Následuje poznámka (s vysvětlením), že *každý vektor je lineární kombinací skupiny vektorů, která tento vektor obsahuje*, dále že *nulový vektor je lineární kombinací každé skupiny vektorů* (je zaveden pojem triviální lineární kombinace), a že součet, rozdíl a násobek vektoru jsou lineární kombinace.

Následuje příklad lineární kombinace daných dvou čtyřsložkových vektorů.

$<7>$ *Horský Z.: Učebnice matematiky pro posluchače VŠE, 1968*

Vektorem se rozumí prvek axiomaticky definovaného vektorového prostoru.

Nechť jsou dány vektory $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\ldots$, $\mathbf{a}_r$. *Každý vektor tvaru*

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \ldots + c_r\mathbf{a}_r$$

se nazývá lineární kombinace vektorů $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\ldots$, $\mathbf{a}_r$. *Čísla* c_i *se nazývají koeficienty této lineární kombinace.*

Následuje příklad – *např. vektor* $\mathbf{a} = (3, -1)$ *je lineární kombinací vektorů* $\mathbf{a}_1 = (4, 0)$ *a* $\mathbf{a}_2 = (5, 1)$, *neboť je* $\mathbf{a} = 2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$.

Následuje důkaz tvrzení, že množina všech lineárních kombinací daných vektorů je vektorový modul. Dále je zaveden pojem určující skupina modulu, lineární kombinací se další výklad nezabývá.

$<8>$ *Horský Z.: Učebnice matematiky pro posluchače VŠE I, 1987*

Vektorem se rozumí prvek axiomaticky definovaného vektorového prostoru. Definice lineární kombinace je vyslovena bez předchozího úvodu v následujícím kontextu:

S každými vektory $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\ldots$, $\mathbf{a}_r$ *obsahuje podmodul* M' *modulu* M *i každou jejich lineární kombinaci, tj. vektor* $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \ldots + c_r\mathbf{a}_r$, *kde* c_i *jsou libovolné skaláry [koeficienty této lineární kombinace].*

Následuje poznámka, že *jsou-li všechny koeficienty* c_i *rovny nule, potom lineární kombinace* $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \ldots + c_r\mathbf{a}_r$ *libovolných vektorů* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\ldots$, $\mathbf{a}_r$ *je nulový vektor.*

Není připojen žádný příklad ani další komentář.

$<9>$ *Coufal J., Klůfa J.: Matematika I (pro Vysokou školu ekonomickou), 1994*

Vektorem se rozumí prvek axiomaticky definovaného vektorového prostoru.

Nechť $\mathbf{x}$ *a* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ *jsou vektory z lineárního prostoru* L *(*$r \in \mathbb{N}$ *je pevně dané). Říkáme, že vektor* $\mathbf{x}$ *je lineární kombinací vektorů* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$, *jestliže existují reálná čísla* $c_1, \ldots, c_r$, *taková, že platí* $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r} c_i\mathbf{x}_i$. *Čísla* c_1, $\ldots$, c_r *se nazývají koeficienty lineární kombinace.*

Následuje příklad (s vysvětlením) – *nulový vektor je lineární kombinací libovolné skupiny vekotrů z daného prostoru*, a je zaveden pojem triviální lineární kombinace.

Další příklady řeší problém, zda daný třísložkový vektor je lineární kombinací jiných tří daných třísložkových vektorů, resp. zda daný polynom je lineární kombinací jiných tří daných polynomů.

< 11 > *Klůfa J., Coufal J.: Matematika 1, 2003*
viz < 9 >

< 13 > *Kolektiv katedry matematiky: Matematika pro 4MM101, 2006*
Vektorem se rozumí uspořádaná n-tice reálných čísel. Jako úvod k zavedení pojmu lineární kombinace jsou zadány tři dvousložkové vektory, a je řečeno, že *vynásobíme-li každý z těchto vektorů nějakým (libovolným) reálným číslem a tyto násobky sečteme, dostaneme tzv. lineární kombinaci těchto vektorů*; následuje příklad lineární kombinace těchto vektorů. Dále je řečeno, že jsou-li dány vektory $\bar{a}$, $\bar{b}$, pak *jejich lineární kombinací je např. vektor* $2\bar{a}+5\bar{b}$, podobně pro tři vektory.

Následuje zavedení pojmu lineární kombinace: *Lineární kombinací vektorů* $\bar{a}_1, \ \ldots, \bar{a}_p$ *nazveme libovolný vektor* $k_1\bar{a}_1 + \ldots + k_p\bar{a}_p$ $(k_1, \ldots, k_p \in \mathbb{R})$. *Čísla* $k_1, \ \ldots, k_p$ *se nazývají koeficienty lineární kombinace.*

Následuje komentář, že *pokud jsou všechny koeficienty lineární kombinace nulové, je výsledkem lineární kombinace libovolných vektorů nulový vektor:*
$0\cdot\bar{a}_1 + \ldots + 0\cdot\bar{a}_p = \bar{o}$, a je zaveden pojem triviální a netriviální lineární kombinace.

Následuje příklad – dány tři třísložkové vektory a jejich různé lineární kombinace: s nenulovými koeficienty, výsledkem je nenulový vektor; s nulovými koeficienty; s nenulovými koeficienty, výsledkem je nulový vektor. Je připojen komentář, že *zatímco výsledkem triviální lineární kombinace je (vždy) nulový vektor, výsledkem netriviální lineární kombinace může být nenulový vektor, ale v některých případech i nulový vektor. Toto ovšem neplatí pro libovolnou skupinu vektorů – např. z jednotkových vektorů nelze vytvořit netriviální lineární kombinaci, která by byla rovna nulovému vektoru*, a je poukázáno na souvislost s vlastností vektorů, která bude zavedena později.

< 14 > *Kaňka M., Coufal J., Klůfa J.: Učebnice matematiky pro ekonomy, 2007*
Vektorem se rozumí uspořádaná n-tice reálných čísel.

Říkáme, že vektor $\mathbf{x}$ *je lineární kombinací vektorů* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$, *jestliže existují reálná čísla* $c_1, \ldots, c_r$ *taková, že platí* $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + \ldots, +c_r\mathbf{x}_r$. *Čísla* $c_1, \ \ldots, \ c_r$ *se nazývají koeficienty lineární kombinace. Lineární kombinace vektorů, ve které jsou všechny koeficienty rovny nule, se nazývá triviální.*

V poznámce je řečeno, že *nulový vektor je triviální lineární kombinací libovolné skupiny vektorů.*

Následují dva příklady – rozhodnutí, zda daný třísložkový (resp. dvousložkový) vektor je lineární kombinací daných tří vektorů; v prvním případě není, v druhém ano.

< 15 > *Batíková B. a kol.: Učebnice matematiky pro ekonomické fakulty, 2009*
viz < 13 >

< 16 > *Klůfa J.: Matematika pro studenty VŠE, 2011*
viz < 14 >

Lineární závislost vektorů

< 5 > <u>*Rychlý R.: Základy vyšší matematiky, díl první, 1962*</u>

Vektorem se zde rozumí uspořádaná n-tice reálných čísel.

Vektory $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_r$ *jsou lineárně nezávislé, jestliže jejich lineární kombinací dostaneme vektor nulový, pouze tehdy, když lineární kombinace je triviální.*

Jsou-li vektory lineárně nezávislé, znamená to, že vektorová rovnice $c_1\bar{a}_1 + c_2\bar{a}_2 + \ldots + c_r\bar{a}_r = \bar{o}$ *je splněna pouze tehdy, když* $c_1 = c_2 = \ldots = c_r = 0$.

Jsou-li vektory lineárně závislé, je aspoň jeden z nich lineární kombinací ostatních. Toto tvrzení je následně dokázáno.

Následuje poznámka (s vysvětlením), že *každá skupina vektorů, která obsahuje vektor nulový, je skupinou vektorů lineárně závislých*, a že *nulový vektor sám o sobě je lineárně závislý.*

Není připojen žádný příklad.

Vektory jsou tedy lineárně nezávislé, jestliže jejich netriviální lineární kombinací dostaneme vektor nulový.

< 7 > <u>*Horský Z.: Učebnice matematiky pro posluchače VŠE, 1968*</u>

Vektorem se rozumí prvek axiomaticky definovaného vektorového prostoru.

Buďtež dány vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$. *Pravíme, že tyto vektory jsou lineárně závislé, když alespoň jeden z nich je lineární kombinací vektorů ostatních. V opačném případě se vektory nazývají lineárně nezávislými.*

Následuje příklad třísložkových vektorů $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, které jsou lineárně závislé, neboť je $\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$, a příklad – vysvětlení, proč tři třísložkové jednotkové vektory jsou lineárně nezávislé, s dodatkem, že analogicky lze dokázat existenci n lineárně nezávislých vekotrů v prostoru V_n.

Dále je vysloveno tvrzení, že *existuje-li soustava čísel* c_i *tak, že alespoň jedno z nich je nenulové a přesto rovnice* $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \ldots + c_r\mathbf{a}_r = \mathbf{o}$ *platí, potom vekotry* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ *jsou lineárně závislé.* Toto tvrzení je následně dokázáno.

Následuje příklad – ověření lineární závislosti vektorů z výše uvedeného příkladu podle tohoto tvrzení.

Následuje poznámka (s vysvětlením), že *je-li rovnice* $c_1\mathbf{a}_1+c_2\mathbf{a}_2+\ldots+c_r\mathbf{a}_r = \mathbf{o}$ *splněna, pouze když všechny koeficienty* c_i *volíme nulové, potom jsou vektory* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ *lineárně nezávislé*, a příklad – ověření lineární nezávislosti jednotkových vekotrů podle této poznámky.

Dále jsou uvedeny poznámky: definice lineární závislosti rozšířena na závislost jediného vektoru. Je uveden odkaz na odstavec, kde bude závislost zjišťována pomocí hodnosti matice. Je uvedeno tvrzení (s vysvětlením), že *jsou-li vektory lineárně nezávislé, jsou všechny nenulové.*

< 8 > <u>*Horský Z.: Učebnice matematiky pro posluchače VŠE I, 1987*</u>

Vektorem se rozumí prvek axiomaticky definovaného vektorového prostoru.

Budiž S *skupina vektorů* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$. *Pro každé* $i = 1, 2, \ldots, r$ *označme symbolem* S_i *skupinu, která vznikne ze skupiny* S *vynecháním vektoru* $\mathbf{a}_i$. *Pravíme, že* S *je lineárně závislá skupina, je-li* $[|S_i|] = [|S|]$ *alespoň pro jedno* i. *Skupina, která není lineárně závislá, se nazývá lineárně nezávislá.*

V poznámce je uvedeno, že *skupina vektorů je lineárně závislá, když a jen když mezi jejími vektory je alespoň jeden lineární kombinací ostatních vektorů skupiny.*

Následují tvrzení (i s důkazy), že *je-li skupina lineárně nezávislá, potom neobsahuje nulový vektor a všechny její vektory jsou navzájem různé*, a že *skupina*

$\mathbf{a}_1, \ \ldots, \mathbf{a}_r$ *je lineárně závislá, když a jen když lze podmínku* $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \ldots +$ $+c_r\mathbf{a}_r = \mathbf{o}$ *splnit netriviálně, tj. skaláry* c_i*, z nichž alespoň jeden je různý od nuly.* V poznámce je uvedeno, že *skupina* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ *je lineárně nezávislá, když a jen když lze podmínku* $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \ldots + c_r\mathbf{a}_r = \mathbf{o}$ *splnit pouze triviálně, tj. plyne-li z podmínky* $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \ldots + c_r\mathbf{a}_r = \mathbf{o}$*, že* $c_i = 0$ *pro všechna* $i = 1, 2, \ldots, r$.

Není připojen žádný příklad.

< 9 > *Coufal J., Klůfa J.: Matematika I (pro Vysokou školu ekonomickou), 1994*

Vektorem se rozumí prvek axiomaticky definovaného vektorového prostoru.

Nechť $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ *jsou vektory z lineárního prostoru* L ($r \in \mathbb{N}$ *je pevně dané). Vektory* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ *se nazývají lineárně závislé, jestliže existují reálná čísla* $c_1, \ldots, c_r$*, z nichž alespoň jedno je různé od nuly, taková, že* $\sum_{i=1}^{r} c_i\mathbf{x}_i = \mathbf{o}$*. V opačném případě se nazývají lineárně nezávislé.*

Poznámka: *Jeden vektor je lineárně závislý právě tehdy, když je nulový.*

V další poznámce je definice popsána slovně – s užitím termínů triviální a netriviální lineární kombinace. Připojen je formální zápis:

$$\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r \text{ jsou lineárně nezávislé} \iff \left(\sum_{i=1}^{r} c_i\mathbf{x}_i = \mathbf{o} \implies c_1 = \ldots = c_r = 0 \right).$$

Následuje příklad – rozhodnout o lineární závislosti vekotrů $e^{\lambda x}$ a $xe^{\lambda x}$, a poznámka, že posoudit závislost či nezávislost funkcí lze též pomocí Wronského determinantu, který bude uveden později.

V dalším příkladu je podle definice rozhodnuto o lineární závislosti tří třísložkových vekotrů. Následuje poznámka o rozhodování pomocí hodnosti matice.

Dále je uvedena věta (i s důkazem) – *Nechť* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ *jsou vektory z lineárního prostoru* L, $r \geq 2$ *je pevně dané. Vektory* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ *jsou lineárně závislé tehdy a jen tehdy, když alespoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních.*

Následuje poznámka – *každá skupina vekotrů, obsahující nulový vektor, je lineárně závislá*, a poznámka o lineární závislosti dvou vektorů.

V příkladu je ukázána lineární závislost čtyř pětisložkových vektorů – jeden z nich je násobkem jiného.

< 11 > *Klůfa J., Coufal J.: Matematika 1, 2003*

viz < 9 >

< 13 > *Kolektiv katedry matematiky: Matematika pro 4MM101, 2006*

Vektorem se rozumí uspořádaná n-tice reálných čísel.

Skupina vektorů se nazývá lineárně závislá, nebo vektory se nazývají lineárně závislé, jestliže aspoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních. V opačném případě se nazývají lineárně nezávislé. Jediný vektor je lineárně závislý, právě když je nulový.

Následuje tvrzení – *Vektory jsou lineárně závislé, právě když existuje jejich netriviální lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru. Vektory jsou lineárně nezávislé, právě když pouze jejich triviální lineární kombinace je rovna nulovému vektoru.*

Následuje poznámka, že z výše uvedeného příkladu (viz lineární kombinace) vyplývá lineární závislost daných vektorů (jejich netriviální lineární kombinace je rovna nulovému vektoru).

Dále je uvedeno tvrzení, že *obsahuje-li skupina vektorů nulový vektor, je lineárně závislá.*

Následují příklady (s vysvětlujícími komentáři): lineární kombinace dvou vektorů je rovna třetímu vektoru – tyto tři vektory jsou lineárně závislé; dva vektory jsou nezávislé – jeden není násobkem druhého; dva vektory jsou závislé – jeden je násobkem druhého; skupina tří vektorů, z nichž jeden je nulový, je lineárně závislá.

Následuje poznámka o určování lineární závislosti pomocí hodnosti matice.

< 14 > *Kaňka M., Coufal J., Klůfa J.: Učebnice matematiky pro ekonomy, 2007*

Vektorem se rozumí uspořádaná n-tice reálných čísel.

Vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ *se nazývají lineárně závislé, jestliže existuje jejich netriviální lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru, tj. jestliže existují reálná čísla* $c_1, \ldots, c_r$*, z nichž alespoň jedno je různé od nuly, taková, že* $c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_r\mathbf{x}_r = \mathbf{o}$*. V opačném případě jsou lineárně nezávislé. Jeden vektor je lineárně závislý, právě tehdy, když je nulový.*

V poznámce je řečeno, že *vektory jsou lineárně nezávislé, jestliže každá jejich netriviální lineární kombinace je různá od nulového vektoru, tj. když nulovému vektoru je rovna pouze jejich triviální lineární kombinace:*

$$\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r \text{ jsou lineárně nezávislé} \Longleftrightarrow$$
$$(c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_r\mathbf{x}_r = \mathbf{o} \Longrightarrow c_1 = \ldots = c_r = 0)\,.$$

V příkladu je podle definice rozhodnuto o lineární závislosti tří trísložkových vekotrů. V dalším příkladu je řečeno, že jednotkové vektory jsou lineárně nezávislé.

Následuje poznámka o rozhodování pomocí hodnosti matice nebo podle následujícího tvrzení:

Vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ *jsou lineárně závislé tehdy a jen tehdy, když alespoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních.*

Následuje poznámka – *každá skupina vekotrů, obsahující nulový vektor, je lineárně závislá*, a poznámka o lineární závislosti dvou vektorů.

V příkladu je ukázána lineární závislost čtyř pětisložkových vektorů – jeden z nich je násobkem jiného.

< 15 > *Batíková B. a kol.: Učebnice matematiky pro ekonomické fakulty, 2009*

viz < 13 >

< 16 > *Klůfa J.: Matematika pro studenty VŠE, 2011*

viz < 14 >

Soustava lineárních rovnic

Výklad soustav lineárních rovnic je s výjimkou < 8 > ve veškeré výše uvedené literatuře (zahrnující lineární algebru) koncipován následovně: v předchozím jsou zavedeny pojmy matice a hodnost matice, soustava lineárních rovnic (daná výčtem jednotlivých lineárních rovnic), matice soustavy a rozšířená matice soustavy. Je vyslovena Frobeniova podmínka (soustava má řešení, právě když hodnost matice soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy), tvrzení o počtu řešení řešitelné soustavy v závislosti na hodnosti matice a počtu neznámých, a je popsána Gaussova eliminační metoda (případně i Jordanova). Jednotlivé texty se liší počtem příkladů a mírou podrobnosti vysvětlujících poznámek.

Odlišná koncepce je volena v učebnici < 8 >, a to nejen ve výkladu soustav lineárních rovnic. Proto je zde této učebnici věnována větší pozornost.

Sám autor v předmluvě píše: *Toto vydání je dosud nejradikálněji přepracovaná verze Učebnice matematiky pro posluchače VŠE*[14]*, která poprvé vyšla před dvaceti lety. Text jsem oprostil od mnohých detailů, aby více vynikla harmonie mezi obecnými strukturami a jejich interpretacemi. Doufám, že tyto úpravy přispějí k hlubšímu pochopení vykládané látky, usnadní snazší osvojení faktologie, umožní další studium některých partií matematiky potřebných k aplikacím a otevřou cestu k poznávání zákonitostí metodami a jazykem matematiky.*

Celá učebnice je psána velmi úsporným způsobem, vzorce a vztahy jsou číslovány, text je plný odkazů[15]. Učebnice obsahuje minimum vysvětlujících poznámek a příkladů. Např. v celé kapitole o vektorových prostorech, která obsahuje axiomatickou definici vektorového prostoru (využívající na rozdíl od ostatních zde uvedených učebních textů pojmu grupa), pojmy podprostor, lineární obal, určující skupina, lineární závislost (definována způsobem viz výše), báze, dimenze atd., je obsažen jen jediný příklad: *množina všech funkcí (s hodnotami v tělese reálných čísel) definovaných na pevně zvolené množině* tvoří vektorový prostor, nulovým vektorem je nulová funkce.

Soustavy lineárních rovnic jsou v učebnici $< 8 >$ vykládány následovně: v předchozím je zaveden pojem lineární zobrazení mezi dvěma vektorovými prostory, lineární rovnice, spec. lineární algebraická rovnice (jakožto *rovnice* $f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, *kde* $f : V_n$ *do* V_m, *tedy rovnice* $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + ... + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$, *kde* $\mathbf{a}_i$ *a* $\mathbf{b}$ *jsou pevně zvolené vektory modulu* V_m *a skaláry* x_i *jsou souřadnice hledaného vektoru* $\mathbf{x}$*:* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$). Není obsažen žádný příklad ilustrující tyto pojmy.

Dále je uvažováno zobrazení $f : V_n$ do V_m a příslušná rovnice $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + ... + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$. Je označeno: $\mathbf{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj})$ a $\mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_m)$, a je řečeno, že *z rovnosti aritmetických vektorů plyne, že rovnice je ekvivalentní současnému splnění m podmínek*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ... & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array} \tag{$*$}$$

– soustava lineárních rovnic o n neznámých. Dále je řečeno, že *symbolicky lze soustavu zapsat schématem*

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}, \tag{$**$}$$

kterému říkáme matice (první výskyt pojmu matice). *Souřadnice vektorů* $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}$ *se nazývají prvky matice. Matici lze chápat jako skupinu vektorů* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$, *kterým říkáme sloupce matice, nebo jako skupinu vektorů* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$, *kde* $\mathbf{u}_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}, b_i)$, *kterým říkáme řádky matice.*

Dále je uvažován *lineární obal řádků matice, tedy modul* $[| \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_m |]$, a jsou dokázána dvě tvrzení:

Každému vektoru modulu $[| \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_m |]$ *odpovídá rovnice, které vyhovuje každé řešení soustavy* $(*)$.

[14] Učebnice téhož autora – viz $< 7 >$

[15] Zde některé odkazy nahrazujeme plným zněním vzorců.

Každé určující skupině modulu $[|\, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m \,|]$ odpovídá soustava ekvivalentní se soustavou $(*)$, *tj. soustava, jejíž množina všech řešení je identická s množinou všech řešení soustavy* $(*)$.

Následují tři příklady:

Příklad 1

Určeme množinu všech řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & & + & x_5 & = & 3 \\ & & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & & & = & 1 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \end{array} \qquad (***)$$

o neznámých x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Bez podrobnějších komentářů je řečeno, že *tvar soustavy ukazuje, že volitelné neznámé jsou např. neznámé x_4, x_5*, a soustava je dosazením parametrů za x_4, x_5 postupně vyřešena. Je uvedeno, že *všechna řešení jsou tvaru $\mathbf{x} = \mathbf{r} + t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2$, kde t_1, t_2 jsou libovolné skaláry*, a že *vektor $\mathbf{r}$ je jedním řešením dané soustavy*, a *všechna řešení příslušné homogenizované soustavy jsou tvaru $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2$, tedy tvoří lineární obal $[|\, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \,|]$.*

V Poznámce je uvedeno: *Při řešení soustavy lineárních rovnic* $(*)$ *lze postupovat tak, že v lineárním obalu řádků matice* $(**)$ *nalezneme určující skupinu, které by odpovídala soustava typu* $(***)$, *jejíž řešení je zřejmé* (odkaz na druhé z výše uvedených tvrzení). Připomínáme, že dosud nebyly zavedeny pojmy diagonála matice, trojúhelníková matice apod., ani hodnost matice, a že tato Poznámka je jediným komentářem k postupu řešení soustav rovnic.

Příklad 2

V příkladu je řešena soustava čtyř rovnic o třech neznámých pomocí úprav rozšířené matice soustavy (tento termín ještě není zaveden). Jednotlivé úpravy (přičítání násobků řádků k jiným řádkům) jsou podrobně popsány, není ale zdůrazněna souvislost s předchozí Poznámkou (k jakému tvaru matice se směřuje). Výsledkem úprav je rozšířená matice s trojúhelníkovou maticí (typu 3×3) soustavy. Poté je uvedena soustava reprezentovaná touto maticí, a je řečeno, že je ekvivalentní se zadanou soustavou. Bez dalších vysvětlení je řečeno, že *soustava má právě jedno řešení (postup "zdola nahoru")*, a výsledný vektor řešení je (bez výpočtů) uveden.

Příklad 3

Je dána soustava tří rovnic o čtyřech neznámých, a je řečeno, že *matici soustavy lze dvěma kroky ukázanými v příkladu 2* (postup uveden není) převést na matici, která je žádaného tvaru (je uvedena), a která vede k soustavě (je uvedena), jejíž poslední rovnice je $0 = 1$. Je poznamenáno, že poslední rovnice nemá řešení, a tudíž ani daná soustava.

V dalším odstavci je definována hodnost matice (jako hodnost lineárního obalu jejích řádků), a je uvedeno, že postup úprav matic uvedený v předchozích příkladech je současně postupem vedoucím k určení hodnosti dané matice (hodnost matic z předchozích příkladů není uvedena, ani žádný jiný příklad na výpočet hodnosti).

Dále je zaveden pojem matice soustavy a rozšířená matice soustavy, a je vyslovena Frobeniova podmínka a tvrzení o počtu řešení soustavy.

Následuje homogenní soustava – zadání a výsledek (obecné řešení), a je řečeno, že *množina všech řešení homogenní soustavy je modul, jehož hodnost je rovna počtu volitelných neznámých soustavy.*

2. Metodické připomínky k výuce základních pojmů lineární algebry

2.1 Úvod

Lineární algebra není na VŠE vyučována jako samostatný předmět – je součástí základního kurzu matematiky, který kromě lineární algebry obsahuje i základy matematické analýzy (limity posloupností a funkcí jedné proměnné, diferenciální počet funkcí jedné a dvou proměnných, integrální počet, diferenciální rovnice). Tento kurz je jednosemestrální, s hodinovou dotací 2 vyučovací hodiny přednášek a 2 vyučovací hodiny cvičení týdně[1]. Tempo výkladu je vzhledem k poměrně obsáhlé náplni kurzu a nízké hodinové dotaci pro studenty i vyučující nepříjemně vysoké. Odborné katedry navíc požadují zařazení ekonomických aplikací do výuky matematiky, to je však jen velmi obtížně realizovatelné nejen z důvodu časové tísně, ale i proto, že základní kurz matematiky je vyučován v 1. ročníku a předchází tak výuku odborných předmětů – studenti tak ještě nejsou obeznámeni s příslušnými ekonomickými pojmy.

Obsahová náplň kurzu by měla odpovídat požadavkům odborných kateder – kurz by měl poskytnout základy potřebné k výuce odborných předmětů. V oblasti lineární algebry však nebyly požadavky odbornými katedrami příliš specifikovány. Navíc je základní kurz matematiky společný všem studijním oborům VŠE, na kterých výuku katedra matematiky zajišťuje, a výuka tak není podle oborů nijak diferencována. Všeobecně však ze strany odborných kateder zaznívá požadavek nezatěžovat příliš studenty teorií, zaměřit se na výuku početních postupů. Proto přestaly být vyučovány důkazy vět.

Mezi vyučujícími katedry matematiky však nepanuje shoda v názoru na to, zda od studentů požadovat přesné formulace vět a definic (bez ohledu na pochopení jejich obsahu) či zda upřednostňovat alespoň intuitivní představu studentů (např. zda vyžadovat přesnou definici limity posloupnosti či zda postačí náčrtek posloupnosti se zadanou limitou apod.). Současné vedení katedry prosazuje první přístup, tedy požaduje, aby se studenti naučili přesné formulace pojmů a matematických tvrzení (i jako pouhé procvičování paměti).

Na VŠE zpravidla nepřicházejí studenti, kteří by měli zájem o studium matematiky, a ani jejich znalosti středoškolské matematiky nebývají na dostatečné úrovni. Nízká hodinová dotace přednášek a cvičení z matematiky neumožňuje procvičovat studenty v přesných formulacích. Bez nácviku precizního vyjadřování ovšem studenti nejsou schopni zcela správně formulovat znění definic a vět, a obvykle si neuvědomují, jak zdánlivě malé opomenutí může zcela změnit význam tvrzení. Pokud jsou studenti v tomto směru odkázáni na samostudium, shledávají jako nejschůdnější cestu učit se definice a věty nazpaměť. Přínos takového studia teorie je přinejmenším sporný.

Proto je žádoucí vykládat teorii způsobem co nejjednodušším. Je třeba si

[1] Lineární algebra se v současnosti vyučuje v celkovém rozsahu 7 hodin přednášek a 8 hodin cvičení.

uvědomit, že studentům dělá problém zorientovat se v obecných zápisech. Např. pro matematiky zcela běžná formulace "… čísla c_1, …, c_n, kde aspoň jedno c_i je nenulové…", činí studentům problém: "co je c_i, když v předchozím je c_n"? Naučit studenty těmto základům se vzhledem k časové tísni v hodinách matematiky daří jen do jisté míry. Některé chyby ve formulacích ze strany studentů jsou však natolik časté, že je vhodné na ně studenty upozornit už během výkladu látky. V tomto směru jsou kromě zkušeností při zkoušení dobře využitelné i výsledky testů (viz kapitola 3).

Výuka základů lineární algebry na VŠE má však výhodu v tom, že příliš nevyužívá středoškolské matematiky – většinou je k výpočtům potřeba jen základních početních operací. V tomto směru se tedy příliš neprojevuje nedostatečné zvládnutí základů středoškolské matematiky, a početní postupy poměrně dobře zvládají i absolventi jiných středních škol, než gymnázií.

2.2 Výklad jednotlivých pojmů

vektor

Pojem vektor je zaveden jako uspořádaná n-tice reálných čísel (aritmetický vektor), nikoliv obecně jako prvek axiomaticky definovaného vektorového prostoru. Je však vhodné studenty upozornit na možný obecnější význam tohoto pojmu, a na to, že vektor jakožto orientovaná úsečka – jak si studenti zpravidla vektor představují – je jen možná interpretace uspořádaných dvojic, resp. trojic reálných čísel. Tato představa může být zavádějící v tom smyslu, že studenti nechápou význam vektorů o více než třech složkách. Jako motivaci pro práci s vícesložkovými vektory lze uvést příklad (viz Příklad 1 v kapitole 2 části II) vektoru reprezentujícího např. počty různých druhů výrobků produkovaných daným podnikem. Na tomto příkladu lze také ilustrovat použití sčítání vektorů (celková produkce dvou či více podniků vyrábějících tytéž produkty), násobení vektoru reálným číslem (znásobení produkce), případně i skalární součin vektorů (celková cena všech výrobků jakožto skalární součin vektoru udávajícího počet jednotlivých výrobků a vektoru udávajícího jejich ceny).

lineární kombinace vektorů

Zvládnutí tohoto jednoduchého pojmu činí studentům překvapivé potíže. To může být způsobeno i méně vhodným způsobem zavedení tohoto pojmu, který je v některých učebnicích (viz pododstavec 1.2.4 kapitoly 1) užíván:

Nechť $\mathbf{x}$ *a* $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_r$ *jsou vektory z lineárního prostoru* L *(*$r \in \mathbb{N}$ *je pevně dané). Říkáme, že vektor* $\mathbf{x}$ *je lineární kombinací vektorů* $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_r$*, jestliže existují reálná čísla* $c_1, ..., c_r$*, taková, že platí* $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r} c_i \mathbf{x}_i$.

V novějších učebních textech z těch, kde je volen tento způsob formulování pojmu lineární kombinace, je pojem definován bez užití sumační symboliky. Je též vynechána informace, že r je pevně dané přirozené číslo – ta je pro studenty zbytečně zatěžující. To jistě přispívá k zpřehlednění definice.

Problémem však zůstává propojení definice s řešením úlohy, zda nějaký další daný vektor je lineární kombinací vektorů $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_r$. Studeti se pak domnívají, že je lineární kombinaci vektorů $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_r$ nutno porovnávat s jakýmsi vektorem $\mathbf{x}$, a že lineární kombinace vektorů $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_r$ případně ani nemusí existovat. Pokud studenti mají napsat jakoukoliv lineární kombinaci daných vektorů, neumí úkol splnit; domnívají se, že úloha není dostatečně zadána – potřebují ještě další vektor, jemuž se má lineární kombinace rovnat. Navíc studentům tato definice splývá s později zavedeným pojmem lineární závislosti vektorů.

Vhodnější je proto např. následující formulace:

Lineární kombinací vektorů $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_r$ *nazveme jakýkoliv vektor tvaru* $c_1\mathbf{x}_1 + ... + c_r\mathbf{x}_r$*, kde* $c_1, ..., c_r$ *jsou reálná čísla*,
případně doplněná slovním popisem:

Lineární kombinace vektorů je součet nějakých jejich násobků.

Často u studentů přetrvává představa redukující lineární kombinace na pouhé násobky vektorů. Je potřeba zdůrazňovat, že lineární kombinace je *součet* násobků vektorů.

lineární závislost a nezávislost vektorů

Zvládnutí tohoto pojmu je značně problematické. Studenti se později velmi dobře naučí posuzovat lineární závislost, resp. nezávislost vektorů pomocí hodnosti matice, jejich představa lineární závislosti se však většinou redukuje na to, že "nějaký řádek v matici vypadne" (ačkoliv to do jisté míry koresponduje se správnou představou určité "zbytečnosti" některých vektorů v lineárně závislé skupině). Mají-li studenti znalí výpočtu hodnosti matice definovat lineární závislost, resp. nezávislost vektorů, činí tak často porovnáním počtu vektorů s hodností příslušné matice. Že se v tom případě jedná o definici kruhem (hodnost matice je definována pomocí pojmu lineární nezávislost), studenti nezaznamenají.

Velmi často je představa studentů o lineární závislosti vektorů redukována pouze na to, že některý vektor je násobkem jiného.

Definice lineární závislosti je ve většině učebnic na VŠE používána ve dvou podobách (viz níže). Výjimkou je definice (viz $< 8 >$ v pododstavci 1.2.4 kapitoly 1) následujícího tvaru (i když i v tomto případě následují běžné dvě formulace lineární závislosti vektorů):

Budiž S *skupina vektorů* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$*. Pro každé* $i = 1, 2, ..., r$ *označme symbolem* S_i *skupinu, která vznikne ze skupiny* S *vynecháním vektoru* $\mathbf{a}_i$*. Pravíme, že* S *je lineárně závislá skupina, je-li* $[|S_i|] = [|S|]$ *alespoň pro jedno* i.

Vzhledem k tomu, že tato definice používá pojem lineární obal, jehož význam studenti většinou vůbec nechápou, není tato forma definice pro studenty VŠE vhodná, a používána byla jen ojediněle. V jednosemestrálním kurzu není pojem lineární obal součástí osnov, proto tato forma definice ani nepřichází v úvahu.

Běžné jsou definice tvaru:

(1) *Nechť* $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_r$ *jsou vektory z lineárního prostoru* V_n *(*$r \in N$ *je pevně dané). Vektory* $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_r$ *se nazývají lineárně závislé, jestliže existují reálná čísla* $c_1, ..., c_r$*, z nichž aspoň jedno je různé od nuly, taková, že* $\sum_{i=1}^{r} c_i\mathbf{x}_i = \mathbf{o}$,
nebo

(2) *Vektory se nazývají lineárně závislé, jestliže aspoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních.*

Formulaci (1) většinou studenti akceptují jen obtížně. Pokud se snaží tuto definici vyslovit, často neuvedou důležitý předpoklad nenulovosti některého z koeficientů, chybují v kvantifikaci (všechny koeficienty nenulové) nebo zapomenou položit lineární kombinaci rovnou nulovému vektoru. Problém příliš nezlepšuje ani zápis vektorové rovnice bez použití sumační symboliky.

Pro pochopení definice (1) je přijatelnější verbální formulace:

Vektory jsou lineárně závislé, jestliže existuje jejich netriviální lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru,
s vysvětlujícím popisem: triviální lineární kombinace vektorů je vždy rovna nulovému vektoru; lze z daných vektorů vytvořit i jinou lineární kombinaci (s jinými koeficienty), která by byla rovna nulovému vektoru? Přesto je zde představa významu lineární závislosti vektorů obtížnější.

Definici v této formě lze sice využít jako přímý návod k výpočtu lineární závislosti, resp. nezávislosti daných vektorů, úloha však vede na řešení soustavy lineárních rovnic. Tuto látku nemají studenti ze střední školy dobře zvládnutou – se systematickým řešením soustav lineárních rovnic budou seznámeni až po zavedení pojmu hodnost matice. Proto je určování lineární závislosti vektorů v této fázi výuky problematické.

Vhodnější pro vytvoření správné představy o významu pojmu lineární závislost (jakožto jakési "zbytečnosti" některých vektorů ve skupině) je formulace (2), i když pro řešení příkladů je nepraktická (zjištění, že jeden vektor není lineární kombinací ostatních vektorů ještě neindikuje lineární nezávislost vektorů). V počáteční fázi výkladu lineární závislosti vektorů je vhodné uvést speciální případy, kde je lineární závislost, resp. nezávislost patrná: předem vytvořit např. vektor $\bar{w}$ jako lineární kombinaci vektorů $\bar{u}$, $\bar{v}$ – pak je přímo podle definice skupina $\bar{w}$, $\bar{u}$, $\bar{v}$ lineárně závislá. Dále je třeba uvést případy, kdy lze lineární závislost, resp. nezávislost určit bez jakýchkoliv výpočtů (případ dvou vektorů, případ, kdy je ve skupině vektorů jeden vektor násobkem jiného či je součtem jiných vektorů, případ, kdy je ve skupině obsažen nulový vektor, skupinu vektorů tvořených jednotkovými vektory apod.), a výslovně upozornit, že není-li ve skupině vektorů žádný vektor násobkem či součtem jiných, neznamená to lineární nezávislost vektorů. V takovém případě je nutno lineární závislost, resp. nezávislost zjišťovat výpočtem.

Protože se pracuje výhradně s aritmetickými vektory, lze jejich lineární závislost, resp. nezávislost zjistit nejlépe pomocí hodnosti matice; v této fázi výkladu postačí odložit určování lineární závislosti vektorů na dobu, kdy budou studenti obeznámeni s pojmem hodnost matice a způsobem jejího výpočtu.

určující skupina vektorů (množina generátorů), lineární obal vektorů, báze prostoru, dimenze prostoru

Tyto pojmy se v jednosemestrálním kurzu nevyučují. V předchozím dvousemestrálním kurzu byly tyto pojmy součástí osnov, činily však studentům mimořádné obtíže. Pokud se studenti naučili řešit příslušné úlohy (např. nalezení báze prostoru generovaného danými vektory apod.), činili tak mechanicky bez jakéhokoliv pochopení podstaty, neměli ani intuitivní představu o významu pojmů.

Pro získání znalostí vyžadovaných odbornými katedrami jako základ pro výuku odborných předmětů na VŠE nejsou tyto pojmy nezbytné.

matice

Pojem matice ani základní pojmy s tímto pojmem spojené (typ matice, čtvercová matice, diagonála matice…) nečiní studentům potíže.

hodnost matice

Formulaci definice hodnosti matice (maximální počet jejích lineárně nezávislých řádků) obvykle studenti zvládají, představují si však pod tím pouze "počet řádků, které v matici zůstanou po převedení matice na trojúhelníkovou", neboť nezvládají pojem lineární nezávislost vektorů. Poměrně často studenti chybně definují hodnost matice jako počet jejích řádků (aniž by je překvapovalo, proč by se tento údaj musel zjišťovat pomocí převodu matice na matici speciálního tvaru). Praktický výpočet hodnosti matice Gaussovým algoritmem studenti zvládají dobře.

Poněkud problematický je způsob, jakým je v některých učebnicích zavedený pojem trojúhelníková matice:

Matice A typu $m \times n$ se nazývá trojúhelníková, když $m \leq n$ a pro $i = 1, ..., m$ je $a_{ii} \neq 0$ a $a_{ij} = 0$ pro $j < i$.

(pojem trojúhelníková matice je ovšem v odborné literatuře nejednotný). V učebnici uvedené tvrzení, že hodnost trojúhelníkové matice je rovna počtu řádků, není pak bez komplikací použitelné při určování hodnosti matic, vyskytujících se při řešení soustav lineárních rovnic. Je-li soustava reprezentovaná např. maticí $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$, není rozšířená matice soustavy, tj. matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ podle výše uvedené definice trojúhelníková. Studenti jsou vedeni k tomu, aby v takovém případě zaměnili pořadí sloupců tak, aby na diagonále nebyla nula; v případě matice, kde poslední sloupec představuje sloupec pravých stran soustavy, může být tato úprava zavádějící.

Vhodnější je proto pro výpočet hodnosti matice zavést pojem odstupňovaná matice (popř. v jiné používané terminologii, která ovšem také není jednotná), tj. *matice, v jejímž každém řádku je zleva aspoň o jednu nulu víc než v řádku předchozím.*

Hodnost takovéto matice je rovna počtu jejích nenulových řádků a s určováním hodností matic výše uvedeného typu není žádný problém.

soustavy lineárních rovnic, Gaussova a Jordanova eliminační metoda

Po zavedení pojmů matice soustavy a rozšířená matice soustavy je vyslovena Frobeniova podmínka a věta o počtu řešení řešitelné soustavy v závislosti na hodnosti matice a počtu neznámých. Studenti se často dopouštějí chyby, když z rovnosti hodností matice soustavy a matice rozšířené činí závěr, že soustava má právě jedno řešení.

Vhodné je upozornit studenty, že rozšířená matice soustavy vznikla přidáním jednoho sloupce k matici soustavy, a že tedy hodnost matice rozšířené (jakožto počet lineárně nezávislých sloupců) může být buď stejná nebo o jednu větší než hodnost matice soustavy (rozhodně ne menší, jak občas studenti uvádějí).

Eliminační metody nečiní studentům větší potíže, snad s výjimkou diskusí řešitelnosti soustav závislých na parametrech.

maticové operace

Praktické zvládnutí operací s maticemi nečiní studentům potíže. Obtížnější je pro studenty vyslovit definici součinu matic – všeobecně činí studentům problémy formální zápisy. Proto lépe než formální zápis $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ zvládají verbální popis prvku výsledné matice $C = AB$ na pozici (i, j) jakožto skalární součin i-tého řádku matice A a j-tého sloupce matice B. Pojem skalární součin vektorů jakožto součet součinů příslušných složek vektorů většinou studenti znají ze střední školy a lze ho snadno připomenout. Navíc je pak zřetelně viditelná nutnost shody počtu sloupců první matice a počtu řádků druhé matice (při skalárním součinu musí mít oba vektory stejný počet složek).

Pro studenty překvapivou skutečnost, že násobení matic obecně není komutativní, lze snadno ilustrovat na příkladech (typy matic, kde součin v obráceném pořadí není ralizovatelný, typy, kde součin lze provést v obou pořadích, ale výsledné matice jsou různých typů, čtvercové matice, které spolu nekomutují). Vhodné je uvést i příklad dvojice matic, které spolu v součinu komutují.

Je třeba upozornit studenty, že není zavedeno dělení matic, ale že s maticemi lze do jisté míry počítat jako s čísly, uvést vlastnosti operací, které jsou stejné pro "počítání s čísly" i pro "počítání s maticemi", a zdůraznit analogie (v souladu se značením používaným v kurzu matematiky na VŠE značí O nulovou matici a J jednotkovou matici; symbol pro násobení "$\cdot$" bývá zpravidla vynecháván, používá se většinou pro zdůraznění operace násobení): $a + 0 = a$ a $A + O = A$, $k \cdot 0 = 0$ a $k \cdot O = O$, $0 \cdot a = 0$ a $O \cdot A = O$, $a \cdot 0 = 0$ a $A \cdot O = O$, a zejména $1 \cdot a = a$ a $J \cdot A = A$, $a \cdot 1 = a$ a $A \cdot J = A$. Současně upozornit na úskalí vyplývající z nekomutativity násobení matic.

Vhodnou motivací k zavedení násobení matic způsobem, který se může jevit zbytečně komplikovaný a uměle vytvořený, může být příklad popisující např. nákup několika osob v různých obchodech (viz Příklad 8 v kapitole 2 části II). Do výuky na VŠE jsou však podobné příklady obtížně zařaditelné z časových důvodů.

inverzní matice

Studenti často zaměňují definici inverzní matice k dané matici ($A \cdot A^{-1} = J$) s postupem jejího výpočtu, nebo uvádějí nesmyslné vztahy typu $A^{-1} \cdot J = A$ a podobně. Pro lepší vybavení si definice je vhodné poukázat na analogii s "počítáním s čísly": $a \cdot a^{-1} = 1$ a $A \cdot A^{-1} = J$. Při definování inverzní matice studenti často opomíjejí předpoklad, že matice musí být čtvercová. Často také zavádějí pojem inverzní matice pouze pro regulární matice (nerozlišují, pro jaké matice není inverzní matice vůbec definována a pro jaké matice inverzní matice neexistuje).

Praktický výpočet inverzní matice nečiní studentům potíže.

maticové rovnice

Je třeba, aby si studenti zvykli na skutečnost, že násobení matic není komutativní, a na komplikace z této skutečnosti vyplývající, a dále na to, že není definováno dělení maticí, lze ale v určitých případech nahradit násobením maticí inverzní. Nejčastější chyby při obecném vyjadřování matice z maticové rovnice jsou: výskyt zlomků s maticí ve jmenovateli, násobení rovnice maticí z nesprávné strany ($AX = B \iff X = BA^{-1}$), vytýkání matice na nesprávnou stranu od závorky ($AX + BX = X(A + B)$), nesprávné vytýkání čísla $AX + 7X = (A + 7)X$ (v tomto případě studenti při dosazení matice A přičítají 7 ke každému jejímu prvku). Tyto chyby ale vznikají většinou nepozorností studentů nebo jejich nedostatečnou připraveností – nejedná se o problém, který by studenti těžko chápali.

Je třeba navíc zdůraznit, že je-li v rovnici $AX = B$ matice A singulární, neznamená to nutně, že rovnice $AX = B$ nemá řešení, a uvést postup zjištění, zda rovnice řešení nemá nebo jich má nekonečně mnoho, a jak v tomto případě řešení nalézt.

determinanty

Od definice determinantu užívající permutací bylo v jednosemestrálním kurzu upuštěno, neboť časová investice, kterou je do výkladu nutné vložit, není adekvátní dalšímu využití definice (podle definice se nadále nepočítá). Vzhledem k nízké hodinové dotaci kurzu je taková časová ztráta nemyslitelná.

Determinant je definován rekurentně – zavede se determinant řádu jedna a determinanty řádů vyšších se definují rozvojem např. podle 1. řádku (pomocí determinantu řádu o jedna nižšího). Následně se zavede rozvoj podle i-tého řádku nebo sloupce a vysloví se tvrzení, že hodnota determinantu nezávisí na volbě řádku, resp. sloupce v rozvoji.

Studenti jsou většinou schopni determinant rozvojem vypočítat, obecná formulace rozvoje (symbolický zápis) jim však činí problém – většinou se ji naučí nazpaměť jako vzorec, jehož význam příliš nechápou (vzorce při praktickém počítání ani nevyužívají – pracují podle mechanicky naučených postupů).

Kromě výpočtu determinantu rozvojem (a Sarrusovým pravidlem pro determinanty řádu 3) je vyučován i výpočet determinantu převodem matice na trojúhelníkovou. Studentům činí problém rozlišit úpravu "přičítání násobku řádku" (neměnící determinant) a úpravu "přičtení řádku k násobku jiného řádku" (měnící determinant) – tomu je potřeba při výkladu a procvičování věnovat zvýšenou pozornost.

V této oblasti se znovu projevuje nevhodnost definice trojúhelníkové matice, jakožto matice, která má na diagonále všechny prvky nenulové (a pod diagonálou samé nuly). Tvrzení, že determinant trojúhelníkové matice je roven součinu prvků na diagonále, se pak nevztahuje na singulární matici, a musí být samostatně vysloveno tvrzení, že determinant singulární matice je roven nule. Souvislost regularity (resp. singularity) s nenulovostí (resp. nulovostí) determinantu, která je jinak z trojúhelníkového tvaru matice dobře patrná, pak tímto poněkud zaniká. Sporné jsou pak také úlohy typu "užitím determinantu rozhodněte o regularitě či singularitě matice". Je-li v tomto případě determinant počítán převodem matice na trojúhelníkovou, a vyjde-li po úpravě některý řádek nulový, je nutno *nejdříve* užít tvrzení, že determinant singulární matice je roven nule, aby byl vůbec získán výsledek determinantu (tudíž se nerozhoduje o singularitě matice na základě výsledku determinantu, ale naopak).

Jako užití determinantu je uváděno Cramerovo pravidlo pro řešení soustav lineárních rovnic s regulární maticí. Studentům problémy nečiní.

V dvousemestrálním kurzu byl jako další využití determinantů uváděn výpočet inverzní matice, vlastních čísel matice a určování typů kvadratických forem pomocí Sylvesterovy věty. Určování typů kvadratických forem bylo následně využíváno při řešení extremálních úloh funkcí více proměnných. Z časových důvodů byla v jednosemestrálním kurzu výuka funkcí více proměnných redukována pouze na funkce dvou proměnných. Extremální úlohy jsou řešeny bez užití pojmu kvadratická forma (nevyučuje se). Protože se však v ekonomických aplikacích vyskytují často funkce více než dvou proměnných, je tato redukce učiva problematická.

3. Testy

3.1 Úvod

V letním semestru školního roku 2009/2010 bylo z iniciativy autorky této práce skupině studentů jednosemestrálního základního kurzu matematiky na VŠE v rámci průbežného testu (v polovině semestru) zadáno kromě ohlášených příkladů (nejen z lineární algebry) neohlášeně i 5 definic pojmů z lineární algebry, které měli studenti zformulovat. Výsledky této teoretické části nebyly do oficiálního hodnocení testu zahrnuty. Testy s definicemi zadali 3 vyučující 300 studentům ve studijních skupinách složených ze studentů různých oborů (základní kurz matematiky na VŠE je stejný pro všechny obory, pro které zajišťuje výuku katedra matematiky, úroveň matematických schopností studentů různých oborů se však odlišuje). Teoretickou část ve všech testech vyhodnotila autorka této práce.

Hodnocena byla správnost formulací, nejčastější chyby, a bylo zkoumáno, zda studenti zvládají i definice pojmů, na něž definovaný pojem navazuje. U studentů (v počtu 230), kteří měli v zadání testu příklad týkající se některého z pěti definovaných pojmů, byla navíc zkoumána souvislost mezi správným postupem řešení příkladu a znalostí definice příslušného pojmu.

Ve školním roce 2010/2011 byla z rozhodnutí vedoucího katedry matematiky do každého průběžného testu zařazena jedna definice nebo matematická věta (ne nutně z lineární algebry), jejíž znění měli studenti zformulovat. Studenti věděli předem, že se na teorii mají připravit, výsledky byly započítávány do celkového hodnocení testu. V rámci testu už nebylo možno zadat více než jednu definici, proto není možné ve všech aspektech provést odpovídající srovnání s rokem 2009/2010. Pro lepší možnost porovnání vazby "znalost definice – správný postup řešení příslušného příkladu" byly zadány typově stejné příklady a jim odpovídající definice jako v roce 2009/2010. Testy, které slouží k porovnání s rokem 2009/2010, zadali stejní tři vyučující jako v roce 2009/2010 stejnému počtu studentů (tj. 230).

Výsledky testů mohou být ovlivněny složením studijních skupin, v nichž test proběhl (různá úroveň studentů různých oborů). Veškeré testy byly zadávány v době vyučování dané studijní skupiny, tedy v různých dnech v týdnu a různou denní dobu. Na tyto okolnosti, které také částečně mohou ovlivnit výsledky testů, nebyl při vyhodnocování testů brán zřetel.

Navíc je nutno zdůraznit, že na rozdíl od ústního zkoušení není při vyhodnocování písemného zpracování definic ve všech případech možné s jistotou zjistit, zda se student nenaučil definici nazpaměť, aniž by měl o pojmu správnou představu. V některých případech naopak i nesprávná formulace působí dojmem, že student správnou představu má, ale neumí se správně vyjádřit. Celkově však výsledky testů odpovídají zkušenostem při ústním zkoušení, kdy zkoušející má možnost posoudit, nakolik student definici rozumí.

V dalších odstavcích bude skupina studentů, kteří neočekávali v testu teorii, označena jako S_1, a skupina studentů, kteří v testu teorii očekávali, jako S_2. V odstavci 3.6 budou z výsledků testů učiněny závěry.

3.2 Vyhodnocení testů ve skupině S_1

Skupina S_1 byla tvořena studenty, kteří ve školním roce 2009/2010 v testu s předem nahlášenými čtyřmi příklady (nejen z lineární algebry) neočekávaně dostali úkol zformulovat znění pěti definic (lineární kombinace vektorů, lineární závislost resp. nezávislost vektorů, hodnost matice, regulární resp. singulární matice, inverzní matice). Testování proběhlo v rámci průběžného testu, který je studentům jednosemestrálního základního kurzu matematiky pravidelně zadáván v půlce semestru, a jehož výsledky jsou započítávány ke zkoušce. Studentům byl oproti standardní době psaní testu čas prodloužen, a byli ujištěni, že vyhodnocení jejich znalostí teorie nebude mít žádný vliv na oficiální výsledek testu. Byli požádáni, aby se i přesto snažili test znalosti teorie vypracovat co nejlépe.

Celkem byla pětice definic zadána třemi vyučujícími z katedry matematiky 300 studentům různých studijních oborů. U jednotlivých pojmů bylo sledováno, jakých chyb se studenti nejčastěji dopouštějí. Hodnocení bylo velmi mírné, za správnou odpověď byly považovány i ne zcela bezchybně zformulované definice. Při rozlišení, kterou odpověď ještě uznat za správnou, bylo v některých případech obtížné stanovit přesnou hranici.

U pojmů hodnost matice a regularita matice, které jsou definovány pomocí pojmu lineární nezávislost vektorů, který je dále definován pomocí pojmu lineární kombinace vektorů, bylo sledováno, zda studenti znalí pojmu hodnost matice, resp. regularita matice, znají i pojmy, na něž pojem hodnost matice, resp. regularita matice navazuje.

Dále byla u studentů, kteří měli v zadání testu příklad využívající některého z definovaných pojmů, sledována souvislost mezi znalostí příslušné definice a správným postupem řešení příkladu. Studentů, kterým byl takový příklad zadán, bylo 230 (ostatní studenti z celkového počtu 300 měli v zadání příklady, které přímo nesouvisely s žádným z pěti pojmů – např. řešení soustavy Cramerovým pravidlem apod.).

3.2.1 Formulace jednotlivých definic

lineární kombinace vektorů

Správně (i s drobnějšími nepřesnostmi ve formulaci) vyslovilo z celkového počtu 300 studentů definici necelých 14%. Dalších cca 17% vyslovilo definici jen pro dva vektory. Pro další hodnocení je i tato formulace považována za správnou. Celkem tedy odpovědělo správně cca 31% studentů. Z odpovědí, které byly správné, byla většina formulována slovně (lineární kombinace vektorů je součet nějakých jejich násobků), při formálních zápisech převládaly formulace pouze pro dva vektory ($k\bar{a} + l\bar{b}$ apod.).

Nejčastější chybou byla formulace, že lineární kombinace vektorů jsou jejich násobky (viz ukázky formulací níže). Této chyby se dopustilo cca 16% studentů.

Přehled počtu správných odpovědí a nejčastějších chyb je v Tabulce 5. Počty odpovědí považovaných za správné (případně i s uvedenou chybou) jsou zvýrazněny tučně. Údaje uvedené v procentech jsou zaokrouhleny na dvě desetinná místa.

LINEÁRNÍ KOMBINACE	**počet**	**%**
celkem	300	100
správně	**41**	**13,67**
lin. kombinace dvou vektorů	**52**	**17,33**
násobek	49	16,33
jinak špatně	59	19,67
nic	99	33

Tabulka 5. Lineární kombinace – vyhodnocení správnosti (S_1)

Ukázky formulací:

- *Lineární kombinace vektorů je vektor, který získáme vynásobením jednotlivých vektorů a jejich sečtením.*
- *součet k-násobků různých vektorů*
- $\bar{x} = c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 + \ ... \ + c_n\bar{x}_n,\ c \in \mathbb{R}$
- *Ak existujú také dve čísla c_1, c_2, že ak nimi vynásobíme 2 rozdielne vektory, a sčítáme ich, budú sa rovnať tretiemu vektoru*
  $\bar{x} = c_1\bar{u} + c_2\bar{v}$
- *hledáme taková čísla, např. c_1, c_2, c_3, aby $c_1(u_1) + c_2(u_2) = u_3$ – pak budou vektory (u_1, u_2) lineární kombinací u_3*
- *je to skupina vektorov, kt. sa dajú zapísať pomocou násobku iného vektoru* $\Rightarrow$
  $a_3 = c_1a_1 + c_2a_2$
- *vektor $\bar{u}$ je lin. kombinací vektorů $\bar{u} = k\bar{u}_1 + k\bar{u}_2 + k \ldots k\bar{u}_n$, k-koeficient LK*
- $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = (u_1, u_2, u_3)$
- *o lineární kombinaci hovoříme, pokud existují čísla c_n a c_1 s jejíž pomocí lze vyjádřit 1 vektor dvěma jinými*
- $c_1(1, 2) + c_2(3, 5) + \ ... \ = (4, 8)$
- *LK = součin vektorů a jejich neznámých: $\bar{w} = l \cdot \bar{s} + k \cdot \bar{t} + k \cdot \bar{u}$*
- *Vektory v_1, v_2, v_3 tvoří lin. kombinaci právě tehdy, když $av_1 + bv_2 = cv_3$*
- $\bar{u}(u_1, u_2, u_3) \quad \bar{v}(v_1, v_2, v_3) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = \mathbb{R}$
- *Jsou dány vektory u, v, t. Jestliže existují reálná čísla k_1, k_2, k_3 tak, že $u \cdot k_1 + k_2 \cdot v + t \cdot k_3 = 0$, potom se jedná o lin. kombinaci.*
- *existují násobky daných vektorů*
- *Jestliže existují koeficienty, kterými lze jeden vektor vynásobit aby byl stejný jako 2. vektor.*
- *jestliže je vektor např. dvounásobkem jiného vektoru*
- *lineární kombinace vektorů je když vektory násobíme reálným číslem c*
- *Vynásobení vektorů nějakou konstantou*
- *vynásobení vektorů nenulovým reálným číslem*
- *členy dvou vektorů jsou si násobkem*
- *jeden vektor obsahuje stejné složky jako druhý nebo jejich násobky*
- *vektor $(1, 2, 3)$ je lin. komb. vektoru $(2, 4, 6)$*
- *mají-li odpovídající články vektorů společnou kombinaci (a, b, c); $(2a, 2b, 2c)$*
- *vektor je lin. kombinace jiného vektoru, když je násobkem tohoto vektoru*
- *udává, zda jsou vektory násobky jiných*
- *Pokud 1 vektor je k-násobky zbývajících vektorů (kde $k \in \mathbb{R}$), tvoří tyto vektory lineární kombinaci.*

- ○ *je uspořádání složek vektoru, násobených libovol. reál. číslem*
- ○ *jeden z vektorů je kombinací ostatních, tj. vzniká vynásobením vektorů nebo vynásobením vektoru číslem – je násobkem vektoru*
- ○ *existují koeficienty, kterými můžu vektory vynásobit tak, že vyjde jeden z nich (kromě triviálního řešení) např.* $c \cdot (a_1, a_2) + c_2(b_1, b_2) = (c_1, c_2)$
- ○ *Nastává, když lze jeden vektor vynásobit číslem k a vyjde nám vektor druhý.*
- ○ *jeden vektor můžeme vyjádřit kombinací jiných*
- ○ *když existují koeficienty které při násobení vektorů dají nulový vektor*
- ○ *taková kombinace vektorů jejíž výsledek se rovná nule*
- ○ *lineární kombinace vektorů znamená, že např. třetí vektor lze získat lineární kombinací ostatních dvou vektorů*
- ○ *pokud danou kombinaci vektorů lze vyjádřit vektorem dalším*
- ○ *jeden vektor je lin. kombinací ostatních*
- ○ *pokud se násobky vektorů rovnají nějakému číslu → libovolné násobky*
- ○ *pokud existují taková* $x_1, x_2...$, *kt. vyhovují řešení dané kombinaci vektorů*
- ○ *kombinace lineárně závislých a nezávislých vektorů*
- ○ $\bar{v} = v_1 v_2$
- ○ *vektory lze navzájem kombinovat aniž by se změnila hodnost matice*
- ○ *je libovolný počet vektorů, jejichž kombinací získáme matici*
- ○ *(vektory nemám ráda)*

lineární závislost (resp. nezávislost) vektorů

Správně (i s drobnějšími nepřesnostmi ve formulaci) vyslovilo z celkového počtu 300 studentů definici necelých 30% (u tohoto pojmu bylo hodnocení správnosti obzvlášť mírné – zcela správně formulovalo definici mizivé procento studentů). Z odpovědí, které byly správné, byla většina formulována slovně (vektory jsou lineárně závislé, je-li aspoň jeden z nich lineární kombinací ostatních).

Nejčastější chybou byla formulace, že vektory jsou lineárně závislé, jsou-li svými násobky apod. (viz ukázky formulací níže). Této chyby se dopustilo cca 34% studentů.

Přehled počtu správných odpovědí a nejčastějších chyb je v Tabulce 6.

LINEÁRNÍ ZÁVISLOST	**počet**	**%**
celkem	300	100
správně	**89**	**29,67**
násobky	102	34
pomocí hodnosti matice	13	4,33
jinak špatně	60	20
nic	36	12

Tabulka 6. Lineární závislost – vyhodnocení správnosti (S_1)

Ukázky formulací:

(Poznámka: při výuce standardně používané zkratky a označení: LZ – lineárně závislé, LN – lineárně nezávislé, LK – lineární kombinace, h_r – hodnost rozšířené matice soustavy lin. rovnic.)

- ○ *Jsou LZ pokud se dají napsat jako lineární kombinace těchto vektorů. U LN je to naopak.*

- *LZ – existují i jiná než triviální řešení soustavy* $(0,0,0) = a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2$
  LN – vektory jsou LN, existují-li pouze triviální řešení soustavy $(0,0,0) = a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2$
- *LZ – situácia, kedy aspoň 1 netriviálna kombinácia sa rovná 0*
  LN – netriviálna kombinácia je rozna od nuly
- *vektory jsou lineárně závislé, pokud existuje jejich netriviální lineární kombinace*
  –″– nezávislé – –″– triviální lineární kombinace
- *LZ – pokud existuje LK*
  LNZ – když neexistuje LK
- *vektory jsou lineárně závislé, pokud existuje jejich lineární kombinace (nezávislé vektory nemají lineární kombinaci)*
- *LZ – existuje-li aspoň 1* λ*, ktorým keď vynásobíme vektory, dostaneme nulový vektor.*
  LN – neexistuje –″– $\Rightarrow$ *resp. nulový vektor dostaneme len triviálnou komb., tj.* $\lambda = 0$
- *skupina vektorů je LZ, právě když libovolný vektor je LK ostatních vektorů. Nejsou-li vektory LZ jsou LN.*
- *LZ – jsou-li řádky lineární kombinací*
- *Vektory jsou LZ (LN) tehdy, pokud je lze (nelze) vyjádřit jako LK.*
- *LZ: jestliže je 1 vektor lineární kombinací druhého*
- *– pokud je vektor lineární kombinací jiného vektoru (v porovnávané skupině)*
- *Vektor je lineárně závislý ak je lineární kombinace jiného vektoru v matici.*
- *vektory jsou lineárně závislé, pokud jsou vzájemným násobkem*
- *alespoň 1 ze skupiny vektorů je násobkem ostatních – jsou LZ*
- *Vektory jsou lineárně závislé tehdy, když jsou společným násobkem – vzájemně.*
- *Jestliže jsou vektory LZ existuje reálné číslo, kterým když 1 vektor vynásobím, dostanu 2. U LNZ vektorů toto číslo neexistuje.*
- *LZ jsou vektory, které lze mezi sebou vydělit* $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$
- *Pakliže je mezi 2 či více řádky (vektory) matice vystopovatelný koeficient, kterým se dají všechny prvky vydělit, jsou vektory lineárně závislé.*
- *nezávislé = různé vektory*
  závislé = buď posunuté, nebo vynásobené stejné vektory
- *závislost je pokud jsou vektory po provedení úpravy (násobením, dělením) stejné*
- *lineární nezávislost znamená, že vektory nejsou násobkem, naopak LZ znamená, že vektory násobkem jsou*
- *Pokud lze (resp. nelze) vektor ze skupiny vektorů vyjádřit zbývající vektory pomocí reálného čísla k jsou vektory lin. závislé (resp. nezávislé)*
- *LZ* $v_1 = k(v_2)$
- $\Rightarrow$ *závislost* $\Rightarrow$ *počet neznámých je větší než počet řádků*
  $\Rightarrow$ *nezávislost* $\Rightarrow$ *–″– je stejný jako –″–*
- *ak sa* $h = h_r \rightarrow$ *LNZ, ak sa* $h \neq h_r \rightarrow$ *LZ*
- *LZ* $p = 0$ *aspoň jeden vektor se musí rovnat triviálnímu výsledku*

◦ *nezávislost → vektory se rovnají číslu 0*
závislost → aspoň jeden z vektorů se nerovná číslu 0

◦ *Vektory jsou lineárně závislé pokud platí* $x = a$

◦ *podle počtu společných bodů*

◦ *Vektory jsou lineárně nezávislé pokud* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = 0$.

◦ *Vektory jsou lineárně nezávislé, je-li mezi nimi nějaký vztah.*

hodnost matice

Správně (i s drobnějšími nepřesnostmi ve formulaci) vyslovilo z celkového počtu 300 studentů definici 62%.

Nejčastější chybou byla formulace, že hodnost matice je počet jejích řádků nebo počet jejích nenulových řádků (viz ukázky formulací níže). Této chyby se dopustilo celkem cca 16% studentů. Necelých 6% uvádělo, že hodnost matice je počet řádků v trojúhelníkové matici.

Přehled počtu správných odpovědí a nejčastějších chyb je v Tabulce 7.

HODNOST MATICE	**počet**	%
celkem	300	100
správně	**186**	**62**
počet řádků	23	7,67
počet nenulových řádků	23	7,67
počet řádků v trojúhelníkové matici	17	5,67
jinak špatně	35	11,67
nic	16	5,33

Tabulka 7. Hodnost matice – vyhodnocení správnosti (S_1)

Ukázky formulací:
(Poznámka: při výuce standardně používané zkratky a označení: LZ – lineárně závislé, LN – lineárně nezávislé, LK – lineární kombinace, h_r – hodnost rozšířené matice soustavy lin. rovnic.)

◦ = *lineárně nezávislé řádky*

◦ *udává nejmenší počet lineárně nezávislých řádků (sloupců) matice*

◦ *počet LN řádků po úpravě matice*

◦ *počet lineárně nezávislých řádků a sloupců*

◦ *počet lineárně nezávislých řádků (sloupců) – podle toho, čeho je míň*

◦ *pomocí hodnosti matice určujeme lineární závislost (nezávislost) řádků matice*

◦ *určuje, zda jsou vektory závislé či nezávislé*

◦ *počet řádků trojúhelníkové matice*

◦ *Jestliže je matice upravená na trojúhelníkový tvar a žádný řádek není nulový, odpovídá hodnost počtu řádků v matici.*

◦ *počet řádků v matici (po úpravě)*

◦ *počet řádků matice před a po úpravě na trojúhelníkový tvar matice*

◦ *Kolik řádků má upravená matice, taková je její hodnost. Slouží hlavně k výpočtu počtu řešení.*

◦ *počet nenulových řádků v trojúhelníkovém tvaru*

◦ *nejmenší počet řádků/sloupců matice v odstupňovaném tvaru*

- *vypočítáme tím, že docílíme trojúhelníkové matice, tím zjistíme hodnost matice*
- *výsledná matice s LN řádky*
- *počet řádků matice, co nejsou svým násobkem atd.*
- *hodnost matice = počet nenulových řádků, nebo řádků, které jsou násobkem jiného*
  hodnost nemůže být větší než n $\quad h \leq n$
- *počet nenulových řádků*
- *udává počet nulových vektorů v matici*
- *= počtu řádků matice, to je max. hodnost*
- *udává počet vektorů (řádků), kterých se nezbavíme, nevykrátíme a cokoliv jiného*
- *počet řádků*
- *je minimum počtu řádků matice a sloupců matice. Pokud je matice* (2×3) *tak maximální hodnost je 2.*
- *Nejnižší počet řádků, resp. sloupců matice.*
- *Zjišťujeme z počtu řádků a sloupců matice, je to vždy menší z těchto čísel*
- *Hodnost matice je maximální počet řádků (sloupců) v matici.*
- *vyjádření hodnoty matice – počet řádků a sloupců*
- *kolik matice má řádků (resp. sloupců)*
- *Hodnost matice udává počet LZ a LN řádků matice. V případě, že hodnost matice, kt. jsme převedli na odstupňovanou, je menší než původní matice* $\rightarrow$ *má LZ řádky*
- *počet řádků, které jsou lineárně závislé*
- *určuje počet řešení matice*
- *reálné číslo, výsledek matice*
- *součin členů trojúh. matice ležící na její diagonále*
- *Určuje, zda je matice lin. závislá nebo nezávislá*
  ($h < n \rightarrow$ *závislá*, $h = n \rightarrow$ *nezávislá*)
- *počet prvků (nenulových) na hl. diagonále*
- *vypovídá o počtu výsledků*
  - $h > n$ *nemá řešení*
  - $n > h$ *nekonečně řešení*
  - $h = n =$ *1 řešení*
- *Hodnost matice určujeme u výsledku matice, když je* $h = h_r =$ *počet řeš.* $\Longrightarrow$ *1 řešení*
  když je $h = h_r <$ *počet řeš.* $\Longrightarrow$ *nekonečně mnoho řešení,* $p - h \Longrightarrow$ *počet nezn. dosadím*
  $h \neq h_r \Longrightarrow$ *nemá řešení*
- *Pomocou hodnosti matice a samotných matic vieme určiť, či sú vekotry LZ/LN*
  $h =$ *počet riadkov … LN vektory*
  $h < p$ *… LZ vektory*

regulární (resp. singulární) matice

Správně (i s drobnějšími nepřesnostmi ve formulaci) vyslovilo z celkového počtu 300 studentů definici 38%. Dalších 30% vyslovilo definici bez předpokladu, že matice je čtvercová. Pro další hodnocení je i tato formulace považována za správnou. Celkem tedy odpovědělo správně cca 68% studentů.

Cca 10% studentů formulovalo pojem regularita pomocí nenulovosti determinantu; tato souvislost je ovšem v kurzu matematiky na VŠE uváděna jako tvrzení, nikoliv definice, a do správných odpovědí tak tato formulace nebyla započítána.

Přehled počtu správných odpovědí a nejčastějších chyb je v Tabulce 8.

REGULÁRNÍ/SINGULÁRNÍ MATICE	**počet**	**%**
celkem	300	100
správně	**114**	**38**
bez předpokladu: matice čtvercová	**91**	**30,33**
determinant nenulový/nulový	31	10,33
jinak špatně	36	12
nic	28	9,33

Tabulka 8. Regulární/singulární matice – vyhodnocení správnosti (S_1)

Ukázky formulací:
(Poznámka: při výuce standardně používané zkratky a označení: LZ – lineárně závislé, LN – lineárně nezávislé, LK – lineární kombinace, h_r (resp. h') – hodnost rozšířené matice soustavy lin. rovnic.)

- *čtvercová matice regulární LN; singulární LZ*
- *regulární je taková, která je čtvercová a lineárně nezávislá*
  singulární –″– závislá
- *regulární matice – čtvercová, kt. obsahuje LNZ vektory a existuje k ní inverzní matice*
  singulární čtvercová matice, kt. obsahuje LZ vektory
- *Regulární matice je čtvercová, po převedení na trojúhel. tvar nevypadnou řádky (LZ), je možné z ní vytvořit inverzní.*
  Singulární matice po převedení na trojúhel. tvar ztratí řádek(ky), tudíž ji nelze převést na inverzní.
- *Singulární m. obsahuje alespoň 1 závislý řádek.*
- *R – když žádný řádek není násobkem jiného*
  S – má LZ řádky
- *mat. reg* $\Longrightarrow$ *det.*$\neq 0$
  mat. sing $\Longrightarrow$ *det.*$= 0$
- *regulární – determinant je různý od 0, rovnice jsou lin. nezávislé*
  singulární – determinant je 0, rovnice jsou lin. závislé
- *regulární – když* $n = h$
  singulární – $h < n$
- *Regulární matice =* $\quad n = h \quad$ *= na hl. diagonále jsou nenulová čísla – lze k ní najít inverzní matici.*
  Singulární matice = $\quad n > h \quad$ *= na hl. diagonále je alespoň jedno číslo nulové – nelze k ní nalézt inverzní matici.*
- *regul. matice má na diagonále nenulová čísla,*
  singul. matice má na diagonále je i 0
- *reg. matice nezávislá* $h = n$
  sing. matice závislá $h > n$
- *regulární* $= h = n$
  singulární $h > n$
- *regulární* $h = h'$
  singulární $h \neq h'$
- *regulární* $h = h' = n$

singulární $h = h' \neq n$

- *Matica je regulárna ak* $h = h'$, *matica je singulárna ak* $h \neq h' \wedge h' = h + 1$
- *reg.* $h(A) = h(A') = n$
  singulární $h = h(A') < n$
- *regulární* $\rightarrow$ *na diagonále není nula*
  singulární matice $\rightarrow$ *na diagonále je 0* $\rightarrow$ *Determinant je taky 0*
- *Regulární matice má lineárně nezávislé řádky* $\Longrightarrow$ *hodnost se rovná počtu neznámých.*
  Singulární matice má lineárně závislé řádky $\Longrightarrow$ *hodnost matice je menší než počet neznámých.*
- *regulární – jedno řešení*
  singulární – žádné, nebo nekonečně řešení
- *regulární matice má nekonečně mnoho řešení*
  singulární pouze jedno řešení
- *Matice je regulární pokud existuje netriviální řešení*
  Matice je singulární pokud má triviální řešení
- *regulární – matice která má nenulové řešení*
  singulární – vyjdou samé nuly
- A *– singulární – není čtvercová, má LZ řádky,* $detA = 0$
  A *– regulární – matice je čtvercová a její řádky jsou LN,* $detA \neq 0$
- *pokud je matice čtvercová je regulární, jinak singulární*
- *Regulární matice, když se počet řádků rovná počtu vektorů.*
  Singulární – jeden řádek je stejný jako druhý nebo jeho násobkem $\quad h(A) \neq r$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *regulární matice* $\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *singulární matice*
- *– v závislosti na změně hodnosti matice*
- $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ *regulární matice* $\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ *singulární matice*
- *matice je singulární za předpokladu, že vyjde 0.*
  matice je regulární $-''-$ číslo různé od 0
- *regulární matice se nerovná nule.*
  singulární matice se rovná nule.
- *reg* $x \neq 0$
  sing $x = 0$
- *regulární matice – obsahuje nenulový vektor*
  singulární matice $\rightarrow$ *obsahuje nulový vektor*
- *regulární – není žádná LK*
  existuje LK vektorů (řádků)
- *:-)* $\quad \Rightarrow$ *ještě před chvílí jsem na to koukal do poznámek*

inverzní matice

Správně (i s drobnějšími nepřesnostmi ve formulaci) vyslovilo z celkového počtu 300 studentů definici více než 8%. Dalších více než 23% vyslovilo definici bez předpokladu, že matice je čtvercová. Pro další hodnocení je i tato formulace považována za správnou. Celkem odpovědělo správně necelých 32% studentů.

Nejčastější chybou bylo (správné i nesprávné) líčení postupu výpočtu inverzní matice – cca 18%, dále formulace, že inverzní maticí k dané matici je matice opačná, obrácená, převrácená – cca 11%, a chybné vztahy mezi maticemi A, A^{-1} a J (např. $AJ = A^{-1}$ apod.) – cca 9% (viz ukázky formulací níže).

Přehled počtu správných odpovědí a nejčastějších chyb je v Tabulce 9.

INVERZNÍ MATICE	**počet**	%
celkem	300	100
správně	**25**	**8,33**
bez předpokladu: matice čtvercová	**70**	**23,33**
líčení postupu	55	18,33
matice opačná apod.	34	11,33
$AJ = A^{-1}$apod.	27	9
jinak špatně	41	13,67
nic	48	16

Tabulka 9. Inverzní matice – vyhodnocení správnosti (S_1)

Ukázky formulací:
(Poznámka: při výuce standardně používané zkratky a označení: J – jednotková matice, LZ – lineárně závislé, LN – lineárně nezávislé)

- ○ $A \cdot A^{-1} = J$
- ○ *– když vynásobím matici a k ní inverzní matici, vyjde mi jednotková*
- ○ *je taková matice kterou pokud vynásobíme s její původní maticí dostaneme jednotkovou matici*
- ○ *je matice, která po vynásobení s maticí, ke které je inverzní, vyjde jednotková matice*
- ○ *matice, jejíž součin s původní maticí je jedna*
- ○ *Inverzní matice s normálnou maticou dávají jednotkovú matici.*
- ○ *Ak je matica A regulárna, existuje k nej práve 1 inverzná matica* A^{-1}.
- ○ *Matica A má inverznú maticu* A^{-1} *práve vtedy ak A je regulárna a zároveň A je štvorcová*
- ○ *matice A má inverzní matici* A^{-1}.
- ○ *Inverzní matici k matici A značíme: mat. A* $\rightarrow$ *mat.* A^{-1}. *Je možno ji vytvořit pouze z regulární matice, která musí být čtvercová.*
- ○ *Je matice* A^{-1} *sestrojená k regulární matici A.*
- ○ *invertovaná matice, např. k A by to byla* A^{-1}.
- ○ *Inverzní matice je matice inverzní k původní matici :-)*
- ○ *Inverzní matice může mít pouze matice čtvercová.*
- ○ *– je analogií dělení při výpočtu maticových rovnic*
- ○ *Vypočítám ji z matice původní pomocí jednotkové matice. Zkoušku provedu tím, že vynásobím půodní m. a inverzní a musím dostat jednotkovou matici.*
- ○ *= převrácená matice k určité matici, zjistíme ji pomocí toho, že z matice dané vytvoříme jednotkovou matici*
- ○ *získám ji když k matici přidám jednotkovou matici a tu původní na jednotkovou převedu*
- ○ A^{-1} *– za čáru dopíšeme jednotkovou matici a úpravami dojdeme k inverzní*
- ○ *Matice získaná pomocí jednotkové matice*
- ○ *každá čtvercová matice, u které se použije Jordanova metoda*
- ○ *Vznikne úpravami původní matice na jednotkové matici*
- ○ *inverzní matici dostaneme tak, že matici rozšíříme o jednotkovou matici a*

vypočítáme ji.

- *Výsledná matice čtvercové regulární matice položené vedle jednotkové matice.*
- *– vzniká úpravami, když z matice vypočítáme jednotkovou a z jednotkové tím vzniká inverzní*
  $AJ = JA'$
- $(A|J) \sim ... \sim (J|A^{-1})$
- *– matice opačná*
  – se tvoří $A \cdot J \rightarrow JA^{-1}$
- A^{-1} *matice převrácená k matici A*
  $J \cdot A = A^{-1}$
- *matice inverzní např. k matici A je součin jednotkové matice a matice A a platí, že součin jednotkové matice a inverzní matice A je rovna matici A.*
  $J \cdot A = A^{-1} \cdot J = A$
- $A^{-1} = [A|J]$
- $A = A^{-1}$, $A \cdot A^{-1} = 1$, *slovy vyjádřit neumím*
- $A^{-1} = A \cdot J$
- *Je to matice, kterou získáme po vynásobení základní matice maticí jednotkovou*
- *Každá regulární matice má svoji inverzní matici. Regulární matici vynásobíme maticí jednotkovou.*
- $(A) = (A') \cdot J$
  Inverzní matice k matici A je při součinu těchto 2 matic rovna jednotkové matici.
- $A' = A \cdot J$
- $A = A^{-1}$
- *Je to taková matice kde platí* $A \cdot A^{-1} = 0$
- $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*$
- $A \Longrightarrow A^{-1}$, *opačná, převrácená matice*
- *obrácená matice*
- *Matice převrácená podél hlavní diagonály.*
- $\Rightarrow$ *"opačná matice"*
  – podobně jako inverzní funkce = logaritmická k exponenciální
- *matice na* $(-1) \Longrightarrow \quad f(x) \Longrightarrow f(x)^{-1}$
  $\Longrightarrow$ *matice opačná k matici původní*
- *převrácená původní matice (užití při matic. rovnicích)*
- *matice opačná k matici regulární*
- *je matice opačného stupně nežli původní matice*
- *inverzní matice je maticí obrácenou, počítáme ji pomocí jednotkové matice. Nezaměňovat s maticí transponovanou.*
- *matice obrácená k té původní (řádky zaměněné za sloupce)*
- *matice opačná (znásobená troj. maticí) k matici původní*
- *opačná matice než původní kdy nedochází ke změně hodnosti*
- *matice opačná k základní matici* $\frac{1}{A} = A^{-1}$
- *inverzní matice od A je např.* A^{-1} *takže* $\frac{1}{A}$
- $\frac{1}{matice}$
- *matice mající stjnou hodnost jako původní*
- *je matice s nulovými prvky*
- *to vím ale nevím jak to říct*

Úspěšnost při formulování jednotlivých pojmů

lineární kombinace	31%
lineární závislost	29,67%
hodnost matice	62%
regulární/singulární matice	68,33%
inverzní matice	31,66%

Tabulka 10. Úspěšnost při formulování jednotlivých pojmů (S_1)

Z Tabulky 10 je patrné, že ve 3 případech (lineární kombinace, lineární závislost, inverzní matice) se úspěšnost pohybovala kolem 30%, v případě hodnosti matice a regularity matice byla úspěšnost více než dvojnásobná (62% resp. 68%). Paradoxní je, že pojmy hodnost matice a regularita matice jsou postaveny na pojmu lineární závislost, a tedy i na pojmu lineární kombinace, které studenti zvládali mnohem hůře. Souvislostmi mezi znalostí jednotlivých pojmů se zabývá následující pododstavec.

3.2.2 Souvislost mezi znalostí jednotlivých pojmů

Byla zkoumána souvislost mezi znalostí pojmu hodnost matice, resp. regularita matice, a pojmů, na nichž jsou pojmy hodnost a regularita postaveny, tzn. lineární závislost a lineární kombinace vektorů.

Ze 300 studentů 186 správně definovalo pojem hodnost matice, z nich 67 (tj. 36% z počtu 186) správně definovalo lineární závislost vektorů, a z nich 41 (tj. cca 22% z počtu 186) definovalo správně i lineární kombinaci vektorů. Tedy z celkového počtu těch, kteří správně definovali hodnost, pouze 22% definovalo správně oba pojmy, na nichž je definice hodnosti matice založena.

Ze 300 studentů 205 správně definovalo pojem regularita matice, z nich 71 (tj. cca 35% z počtu 205) správně definovalo lineární závislost vektorů, a z nich 40 (tj. cca 20% z počtu 205) definovalo správně i lineární kombinaci vektorů. Tedy z celkového počtu těch, kteří správně definovali pojem regularita matice, pouze 20% definovalo správně oba pojmy, na nichž je definice regularity matice založena.

Podrobnější přehledné údaje uvádí následující schéma (LZ = lineární závislost, LK = lineární kombinace).

SPRÁVNĚ HODNOST **186**
- SPRÁVNĚ LZ **67**
  - SPRÁVNĚ LK **41**
  - ŠPATNĚ LK 26
- ŠPATNĚ LZ 119
  - SPRÁVNĚ LK 29
  - ŠPATNĚ LK 90

SPRÁVNĚ REGULARITA **205**

- SPRÁVNĚ LZ **71**
  - SPRÁVNĚ LK **40**
  - ŠPATNĚ LK 31
- ŠPATNĚ LZ 134
  - SPRÁVNĚ LK 33
  - ŠPATNĚ LK 101

3.2.3 Souvislost mezi řešením příkladu a znalostí definice

Byla zkoumána souvislost mezi správným postupem řešení příkladu a znalostí příslušné definice. Části studentů byl zadán příklad – posoudit lineární závislost vektorů pomocí determinantu resp. pomocí hodnosti matice. U těchto studentů byla zkoumána vazba na znalost definice lineární závislosti vektorů. Při posuzování správnosti řešení příkladu ve vztahu k definici byla posuzována pouze správnost postupu řešení – na numerické chyby nebyl brán zřetel, a to ani v případě, že ovlivnily výsledek (pokud na základě výpočtu determinantu resp. hodnosti matice byl učiněn odpovídající správný závěr ohledně lineární závislosti vektorů).

Z celkového počtu 100 studentů, kteří měli řešit příklad výše uvedeného typu, mělo příklad správně 90 studentů, z toho 35 (tj. cca 39% z 90) mělo správně definici lineární závislosti vektorů. Pouze 1 student měl správně definici a neměl vyřešený příklad.

Další skupině studentů byla zadána úloha vyjádřit matici z maticové rovnice, resp. řešit soustavu $A\bar{x} = \bar{b}$ pomocí inverzní matice. U těchto studentů byla zkoumána vazba na znalost definice inverzní matice. Při posuzování správnosti příkladu byl hodnocen pouze krok, kdy je využíváno vztahu $AA^{-1} = J$ resp. $A^{-1}A = J$, na numerické chyby a vytknutí matice na nesprávnou stranu od závorky nebyl brán zřetel.

Z celkového počtu 130 studetů, kteří měli řešit příklad výše uvedeného typu, mělo příklad správně 97 studentů, z toho 39 (tj. cca 40% z 97) mělo správně definici inverzní matice. Pouze 4 studenti měli správně definici a neměli vyřešený příklad.

Tabulky 11 a 12 uvádějí počty studentů (a údaje v %), kteří měli správně jak příklad, tak definici (v tabulkách označeno jako ANO – ANO), kteří měli správně příklad a neměli správně definici (v tabulkách označeno jako ANO – NE), kteří neměli správně příklad a měli správně definici (v tabulkách označeno jako NE – ANO), a kteří neměli správně ani příklad ani definici (v tabulkách označeno jako NE – NE). Procentuální vyjádření je vztaženo k celkovému počtu studentů řešících příklad daného typu, tj. 100 studentů řešících příklad na lineární závislost vektorů a 130 studentů řešících maticovou rovnici.

LINEÁRNI ZÁVISLOST		
př. – def.	**počet**	**%**
celkem	100	100
ano – ano	35	35
ano – ne	55	55
ne – ano	1	1
ne – ne	9	9

Tabulka 11. Lineární závislost – správnost příkladu a definice (S_1)

INVERZNÍ MATICE		
př. – def.	**počet**	**%**
celkem	130	100
ano – ano	39	30
ano – ne	58	44,62
ne – ano	4	3,08
ne – ne	29	22,31

Tabulka 12. Inverzní matice – správnost příkladu a definice (S_1)

3.3 Vyhodnocení testů ve skupině S_2

Skupina S_2 byla tvořena jinými studenty než skupina S_1. Tvořili ji v roce 2010/2011 studenti, kteří byli předem obeznámeni s tím, že průběžný test bude obsahovat kromě 4 příkladů ještě úlohu zformulovat definici či matematickou větu (ne nutně z lineární algebry), a že výsledky této teoretické části budou započítány do celkového hodnocení testu. Této skupině už nebylo možné zadat v rámci testu více než jednu definici, nebylo proto možné testovat jako u skupiny S_1 souvislost správnosti definice pojmu s definicemi, na kterých je pojem postaven.

Stejní tři vyučující jako v roce předchozím zadali 230 studentům různých studijních oborů testy, v nichž bylo možné sledovat vazbu mezi správným postupem řešení příkladu a znalostí odpovídající definice. Zadané příklady byly typově stejné jako u skupiny S_1, a stejně jako u skupiny S_1 byly zkoumány výsledky testů 100 studentů, kteří měli posoudit lineární závislost vektorů pomocí determinantu resp. hodnosti matice a vyslovit definici lineární závislosti vektorů, a 130 studentů, kteří měli vyjádřit matici z maticové rovnice a vyslovit definici inverzní matice. Kromě souvislosti mezi správným postupem řešení příkladu a znalostí odpovídající definice byly jako u skupiny S_1 zjišťovány nejčastější chyby při formulacích. Celkový počet studentů ve skupině S_2 byl ale menší než ve skupině S_1 (230 studentů oproti 300), a z definic byly zadány pouze definice lineární závislosti vektorů (100 studentů) a inverzní matice (130 studentů). Kritéria posuzování správnosti příkladů a znění definic byla stejná jako u skupiny S_1.

3.3.1 Formulace jednotlivých definic

lineární závislost (resp. nezávislost) vektorů

Správně (i s drobnějšími nepřesnostmi ve formulaci) vyslovilo z celkového počtu 100 studentů definici cca 42% (u tohoto pojmu bylo hodnocení správnosti obzvlášť mírné – zcela správně formulovalo definici mizivé procento studentů).

Nejčastější chybou byla formulace, že vektory jsou lineárně závislé, jsou-li svými násobky apod. Této chyby se dopustilo cca 21% studentů.

Přehled počtu správných odpovědí a nejčastějších chyb je v Tabulce 13.

LINEÁRNÍ ZÁVISLOST	**počet**	**%**
celkem	100	100
správně	**42**	**42**
násobky	21	21
pomocí hodnosti matice	8	8
jinak špatně	27	27
nic	2	2

Tabulka 13. Lineární závislost – vyhodnocení správnosti (S_2)

inverzní matice

Správně (i s drobnějšími nepřesnostmi ve formulaci) vyslovilo z celkového počtu 130 studentů definici více než 45%. Dalších více než 22% vyslovilo definici bez předpokladu, že matice je čtvercová. Pro další hodnocení je i tato formulace považována za správnou. Celkem tedy odpovědělo správně necelých 68% studentů.

Nejčastější chybou bylo líčení postupu výpočtu inverzní matice – cca 11%, dále chybné vztahy mezi maticemi A, A^{-1} a J – cca 7%, a formulace, že inverzní maticí k dané matici je matice opačná, obrácená, převrácená – cca 3%.

Přehled počtu správných odpovědí a nejčastějších chyb je v Tabulce 14.

INVERZNÍ MATICE	**počet**	**%**
celkem	130	100
správně	**59**	**45,38**
bez předpokladu: matice čtvercová	**29**	**22,31**
líčení postupu	14	10,77
matice opačná apod.	4	3,08
$AJ = A^{-1}$apod.	9	6,92
jinak špatně	10	7,69
nic	5	3,85

Tabulka 14. Inverzní matice – vyhodnocení správnosti (S_2)

Úspěšnost při formulování jednotlivých pojmů

lineární závislost	42%
inverzní matice	67,69%

Tabulka 15. Úspěšnost při formulování jednotlivých pojmů (S_2)

3.3.2 Souvislost mezi řešením příkladu a znalostí příslušné definice

Stejně jako ve skupině S_1 byly 230 studentům zadány testy, v nichž bylo možné sledovat vazbu mezi správným postupem řešení příkladu a znalostí odpovídající definice; 100 studentů mělo posoudit lineární závislost vektorů pomocí determinantu resp. hodnosti matice a vyslovit definici lineární závislosti vektorů, 130 studentů mělo vyjádřit matici z maticové rovnice a vyslovit definici inverzní matice. Pravidla pro hodnocení správnosti příkladů i definic byla stejná jako u skupiny S_1.

Z celkového počtu 100 studentů, kteří měli rozhodnout o lineární závislosti vektorů, mělo příklad správně 88 studentů, z toho 40 (tj. cca 45% z 88) mělo správně definici lineární závislosti vektorů. Pouze 2 studenti měli správně definici a neměli vyřešený příklad.

Z celkového počtu 130 studetů, kteří měli vyjádřit matici z maticové rovnice, měli příklad správně 93 studenti, z toho 66 (tj. cca 71% z 93) mělo správně definici inverzní matice, 22 studenti měli správně definici a neměli vyřešený příklad.

Tabulky 16 a 17 uvádějí stejným způsobem jako u skupiny S_1 (viz pododstavec 3.2.3) údaje o propojení správného postupu řešení příkladu a znalostí příslušné definice. Procentuální vyjádření je opět vztaženo k celkovému počtu studentů řešících příklad daného typu, tj. 100 studentů řešících příklad na lineární závislost vektorů a 130 studentů řešících maticovou rovnici.

LINEÁRNI ZÁVISLOST		
př. – def.	**počet**	**%**
celkem	100	100
ano – ano	40	40
ano – ne	48	48
ne – ano	2	2
ne – ne	10	10

Tabulka 16. Lineární závislost – správnost příkladu a definice (S_2)

INVERZNÍ MATICE		
př. – def.	**počet**	**%**
celkem	130	130
ano – ano	66	50,77
ano – ne	27	20,77
ne – ano	22	16,92
ne – ne	15	11,54

Tabulka 17. Inverzní matice – správnost příkladu a definice (S_2)

3.4 Porovnání výsledků testů u skupin S_1 a S_2

	INVERZNÍ MATICE				LINEÁRNÍ ZÁVISLOST			
	bez přípravy (celkem 130)		s přípravou (celkem 130)		bez přípravy (celkem 100)		s přípravou (celkem 100)	
	počet	%	**počet**	%	**počet**	%	**počet**	%
příklad								
ano	97	74,62	93	71,54	90	90	88	88
ne	33	25,38	37	28,46	10	10	12	12
definice								
ano	43	33,08	88	67,69	36	36	42	42
ne	87	66,92	42	32,31	64	64	58	58
př. – def.								
ano–ano	39	30	66	50,77	35	35	40	40
ano–ne	58	44,62	27	20,77	55	55	48	48
ne–ano	4	3,08	22	16,92	1	1	2	2
ne–ne	29	22,31	15	11,54	9	9	10	10

Tabulka 18. Porovnání výsledků testů u skupin S_1 a S_2

3.5 Statistické vyhodnocení výsledků testů

Získané výsledky byly navíc statisticky vyhodnoceny s užitím loglineárních modelů[1] – modelu párové závislosti, podmíněné nezávislosti a sdružené nezávislosti. Těmito modely byla testována síla závislosti v každé dvojici "student má správně definici (ozn. D) – student má správně příklad (ozn. P)", "student se připravoval na teorii (ozn. T) – student má správně definici", "student se připravoval na teorii – student má správně příklad".

V modelu párové závislosti jsou ponechány všechny tyto dvojice (tedy dvojice DP, TD a TP).

V modelu podmíněné nezávislosti (podmodelu modelu párové závislosti) je vždy jedna z dvojic DP, TD, TP vynechána, a z těchto podmodelů je pak vybrán ten, který vykazuje nejlepší shodu se skutečností (i s modelem párové závislosti). V dvojici, jejímž vynecháním se shoda se skutečností nejméně poruší, je vztah nejslabší (oproti zbylým dvěma dvojicím).

V modelu sdružené nezávislosti (podmodelu modelu podmíněné nezávislosti) je ubrána další dvojice a opět je z těchto modelů vybrán ten, který se nejlépe shoduje se skutečností. Dvojice, která zůstane jako poslední, vykazuje nejsilnější vazbu mezi svými členy.

[1]Loglineární modely odhadl Mgr. Jan Voříšek.

V případě inverzní matice vychází z modelů podmíněné nezávislosti nejlépe model obsahující závislosti "student se připravoval na teorii – student má správně definici" a "student se připravoval na teorii – student má správně příklad" (tedy dvojice TD a TP), tzn. že vazba "student má správně definici – student má správně příklad" je nejslabší. Z modelů sdružené nezávislosti vychází nejlépe model obsahující dvojici "student se připravoval na teorii – student má správně definici" (tedy dvojici TD). To znamená, že z dvojic DP, TD, TP se jako nejsilnější ukázala závislost TD, tedy závislost mezi studiem teorie a úspěšností při formulování definice. V Tabulce 19 jsou uvedeny počty studentů, kteří mají správně příklad, resp. definici, s přípravou na teorii i bez přípravy, dále pak výsledky modelu párové závislosti (DP.TD.TP), podmíněné nezávislosti (TD.TP) a sdružené nezávislosti (TD).

Model sdružené nezávislosti navíc ukazuje (podrobnější údaje viz Příloha), že poměr šancí, že student bude mít správně definici, učil-li se teorii, je $\exp(1,4444) = 4,239$, tzn. studiem teorie se pravděpodobnost toho, že student bude mít správně definici, zvýší o cca 324% (neboť $4,239 = 1 + 3,239$).

INVERZNÍ MATICE						
př.	**def.**	**příprava**	**počet**	**DP.TD.TP**	**TD.TP**	**TD**
ano	ano	ne	39	37	32	31
ano	ne	ne	58	60	65	64
ne	ano	ne	4	6	11	12
ne	ne	ne	29	27	22	23
ano	ano	ano	66	68	63	64
ano	ne	ano	27	25	30	31
ne	ano	ano	22	20	25	24
ne	ne	ano	15	17	12	11

Tabulka 19. Inverzní matice – statistické modely

V případě lineární závislosti vychází z modelů podmíněné nezávislosti nejlépe model obsahující závislosti "student má správně definici – student má správně příklad", "student se připravoval na teorii – student má správně příklad" (tedy dvojice DP a TP), tzn. nejslabší vazba je ve dvojici "student se připravoval na teorii – student má správně definici". Z modelů sdružené nezávislosti nejlépe vychází model obsahující dvojici "student má správně definici – student má správně příklad" (tedy dvojici DP). Z dvojic DP, TD, TP se jako nejsilnější ukázala závislost DP, tedy závislost mezi správným řešením příkladu a správnou formulací definice. Tato závislost ukazuje na jakousi "matematickou způsobilost" studentů – student schopný dobře řešit příklad je i schopen dobře formulovat definici (a naopak – student schopný dobře formulovat definici je i schopen dobře řešit příklad), bez ohledu na to, zda se učil teorii nebo ne. V Tabulce 20 jsou opět porovnány se skutečností modely párové závislosti (DP.TD.TP), podmíněné nezávislosti (DP.TP) a sdružené nezávislosti (DP).

Model sdružené nezávislosti navíc ukazuje (podrobnější údaje viz Příloha), že poměr šancí, že student bude mít správně příklad, má-li správně definici (a stejně tak poměr šancí, že bude mít správně definici, má-li správně příklad), je

$\exp(1,529) = 4,614$, tzn. že studenti, kteří mají správně vyřešený příklad, mají cca 4,6-krát větší šanci, že budou mít i správně zformulovanou definici oproti studentům, kteří příklad správně nemají, a stejně tak studenti, kteří mají správně zformulovanou definici, mají 4,6-krát větší šanci, že budou mít i správně vyřešený příklad oproti studentům, kteří definici správně nemají.

LINEÁRNÍ ZÁVISLOST						
př.	**def.**	**příprava**	**počet**	**DP.TD.TP**	**DP.TP**	**DP**
ano	ano	ne	35	35	38	37
ano	ne	ne	55	55	52	52
ne	ano	ne	1	1	1	2
ne	ne	ne	9	9	9	9
ano	ano	ano	40	40	37	37
ano	ne	ano	48	48	51	52
ne	ano	ano	2	2	2	2
ne	ne	ano	10	10	10	9

Tabulka 20. Lineární závislost – statistické modely

Zatímco u pojmu inverzní matice je (dle očekávání) nejsilnější vazba mezi správností formulace definice a tím, zda se student připravoval na teorii, je tato vazba u pojmu lineární závislost nejslabší. U pojmu lineární závislost se jako nejsilnější ukázala vzájemná vazba mezi správností řešení příkladu a správností formulace definice.

Výsledky statistického zkoumání jsou v souladu se zkušeností z výuky a zkoušení – že zatímco definice inverzní matice je snadno osvojitelná (a studiem teorie se tak úspěšnost při formulování definice inverzní matice zvýší), je definice lineární závislosti pro studenty obtížná, a spíše než studiem teorie je úspěšnost při jejím formulování ovlivněna úrovní matematických schopností studenta.

3.6 Závěry z vyhodnocení testů

Výsledky testů odpovídají zkušenostem s výukou matematiky a zkoušením na VŠE.

Studenti při formulacích nerozlišují strukturu definice a věty (např. definice inverzní matice: *Je dána čtvercová matice A. Matice A^{-1} je k ní inverzní a platí $AA^{-1} = J$.*).

Problémy činí obecné vyjadřování, časté jsou formulace např. se dvěma vektory nebo s vektory o dvou, resp. třech složkách (např. definice lineární nezávislosti vektorů:*vektory jsou lineárně nezávislé, existují-li pouze triviální řešení soustavy $(0,0,0) = a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2$*).

Chybí kvantifikátory (např. definice lineární závislosti vektorů: *Vektory jsou lineárně nezávislé, právě když nejsou lineární kombinací ostatních, a vektory jsou lineárně závislé, když jsou lineární kombinací ostatních.*).

Často je zřetelné, že studenti nevnímají obsah, naučená slovní spojení řadí do leckdy nesmyslných celků (např. definice lineární závislosti vektorů: *Vektor je lineárně závislý právě tehdy, existuje-li netriviální lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru. Vektor je lineárně nezávislý právě tehdy, existuje-li pouze triviální lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru.*).

Některé formulace jsou naprosto nesmyslné (např. definice inverzní matice: *Matice je inverzní k původní matici* $\Longleftrightarrow m \times n = n_i \times m_i$.)

V některých případech působí formulace dojmem, že student má správnou představu, ale neumí definici pojmu řádně zformulovat.

Zcela ojedinělé jsou případy, kdy student formuluje definici správně (i když třeba poněkud kostrbatě) vlastními slovy (např. definice lineární závislosti vektorů: *Vektory jsou lineárně nezávislé pokud vektor, který je jejich lineární kombinací má být nulový, tak to lze pouze triviální kombinací, tudíž všechny složky* (zde snad jde jen o přepis místo správného "koeficienty") *nulové. Vektory jsou lineárně závislé pokud vektor, který vznikne jejich lineární kombinací má být nulový, tak toho lze dosáhnout i netriviální kombinací:* $-1(3,2) + \frac{1}{2}(6,4) = (0,0)$.).

Při vyhodnocování testu bylo hodnocení správnosti formulací velmi mírné, zejména u definice lineární závislosti vektorů [2] (např. formulace *Vektory sú lineárne závisle, keď existuje ich netriviálna kombinácia rovna nule:* $c_1x_1+c_2x_2+ \ldots +$ $+c_nx_n = 0$, *koeficienty nie sú rovné nule* byla vyhodnocena jako správná, ačkoliv chybí kvantifikátor a místo nuly má být nulový vektor). Pokud by jako správné byly uznány pouze zcela bezchybné formulace, počet správných odpovědí by se dramaticky snížil.

U studentů ze skupiny S_2 (tzn. těch, kteří očekávali, že v testu budou mít za úkol vyslovit definici) sice vzrostl podíl formulací uznaných za správné, nezlepšila se ale kultura vyjadřování – zcela správných formulací se vyskytlo i u skupiny S_2 minimálně. Chyby, kterých se studenti při formulacích dopouštěli, byly stejného charakteru jako u skupiny S_1.

Zcela v souladu se zkušenostmi s ústním zkoušením se ukázala skutečnost, že studenti dobře zvládají definice hodnosti matice a regularity matice (jejichž formulace jsou stručné a bez použití symbolických zápisů), nemají však představu o pojmech lineární závislost a lineární kombinace, na nichž jsou pojmy hodnost matice a regularita matice postaveny. Lineární závislost studentům často splývá s postupem jejího zjišťování pomocí hodnosti matice, nebo se představa redukuje na násobky vektorů – stejně jako pojem lineární kombinace. Pod pojmem lineární kombinace nemají často studenti ani intuitivní představu. Stojí za povšimnutí, že ve skupině S_1 celých 33% se vůbec nepokusilo pojem zformulovat (v případě ostatních pojmů je toto procento znatelně nižší). Těmto závěrům odpovídají i výsledky statistického vyhodnocení (viz odstavec 3.5) – zatímco u pojmu inverzní matice se ukázala silná závislost mezi studiem teorie a správností formulace definice, u pojmu lineární závislost byla tato vazba nejslabší. U pojmu lineární závislost se jako nejsilnější faktor ukázala "celková matematická způsobilost" studenta, tedy vazba mezi správností příkladu a správností definice.

[2] V některých učebnicích pro studenty VŠE je definice formulována: Vektory jsou lineárně závislé, právě když aspoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních. V jiných učebnicích (případně s využitím symbolického zápisu): Vektory jsou lineárně závislé, pokud existuje jejich netriviální lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru. Proto jsou obě tyto možnosti v testech vyhodnoceny jako správné.

Porovnáním výsledků testů ve skupinách S_1 a S_2 lze dojít k následujícímu závěru: úspěšnost ve formulaci definic se přípravou zvýšila, u definice lineární závislosti méně (z 36% na 44%), u definice inverzní matice podstatně více (z 33% na 68%). Menší úspěšnost u definice lineární závislosti je pravděpodobně dána tím, že je na pochopení i vyslovení komplikovanější. U pojmu lineární závislost se zvýšením podílu studentů úspěšných při formulování definice téměř nezvýšil počet studentů, kteří měli správně definici a neměli správně příklad (z 1 studenta na 2, tzn. z 1% na 2%), zvýšil se podíl studentů, kteří měli správně příklad i definici (z 35% na 40%). Naproti tomu u pojmu inverzní matice došlo zvýšením podílu studentů úspěšných při formulování definice jak ke zvýšení podílu těch, kteří měli správně definici i příklad (z 30% na 51%), výrazně se ale zvýšil i podíl těch, kteří měli správně definici a neměli správně příklad (ze 3% na 17%). Je otázkou, jestli v tomto případě bylo nastudování definice přínosem.

Porovnáním výsledků teoretické části s řešením odpovídajícího příkladu se ukázala očekávaná skutečnost, že studenti k vyřešení příkladu teorii celkem nepotřebují. Naučí se mechanické postupy, pomocí nichž dojdou k výsledku. To ale v podstatě odpovídá požadavkům některých odborných kateder na VŠE – nezatěžovat studenty příliš teorií, naučit je početním postupům, které později využijí v odborných předmětech.

K zajímavému (ale očekávanému) závěru lze dospět porovnáním úspěšnosti řešení příkladů ve skupinách S_1 a S_2. Z výsledků testů vyplývá, že studiem teorie se úspěšnost řešení příkladů nezvýšila (naopak se snížila, ale jen zanedbatelně). To dokládá skutečnost, že při způsobu nastudovávání teorie, jaký často volí studenti VŠE (učit se definice nazpaměť bez vynaložení námahy k pochopení obsahu), nejsou výsledky řešení příkladů na studiu teorie příliš závislé. Podstatnější roli hraje určitá "celková matematická způsobilost" studentů – studenti s horšími předpoklady ke studiu matematiky jsou spíše než teorii schopni (nebo ochotni) osvojit si početní postupy, a ke studiu teorie přistupují způsobem, který nevede ke zlepšení výsledků řešení příkladů. Změna tohoto stavu je při dramaticky nízkých hodinových dotacích pro výuku matematiky na VŠE (bez možnosti podrobnějšího vysvětlení torie a nácviku promyšleného formulování) možná jen zjednodušením výkladu.

4. Závěrečné shrnutí I. části

Výuka matematiky na vysokých školách by měla být diferencovaná podle zaměření té které školy. Protože základní kurz matematiky obvykle předchází výuku odborných předmětů, nebývá možné do výuky zařadit dostatek aplikačních příkladů, odpovídajících odbornému zaměření školy. Diferenciace tak spočívá v tom, jaké pojmy a početní postupy jsou do základního kurzu zařazeny – s ohledem na jejich využitelnost při následném studiu odborných předmětů. Navíc by ale měl být přizpůsoben i způsob výkladu.

Odborné katedry VŠE zpravidla požadují, aby se v rámci kurzu matematiky studenti naučili zvládat potřebné početní postupy, a aby přitom nebyli příliš zatěžováni teorií. Zkušenosti s výukou matematiky na VŠE i výsledky testů (viz kapitola 3) ukazují, že ačkoliv jsou v současné době od studentů vyžadovány přesné formulace definic a matematických vět, nepřináší dosavadní systém příliš pozitivní výsledky. Argument, že studiem teorie si studenti prohlubují logické myšlení, neobstojí, protože studenti se pouze učí teorii nazpaměť. S názorem některých pedagogů, že si tak studenti alespoň procvičí paměť, nelze souhlasit. Jistě by bylo prospěšné a využitelné jak při studiu odborných předmětů, tak později v praxi, kdyby si studenti osvojili logické uvažování a naučili se precizně formulovat myšlenky. Nelze však očekávat, že by tyto schopnosti získali v rámci jednosemestrálního kurzu matematiky. Pokud není možné v rámci výuky nechávat studentům volný prostor k pokusům o zformulování definic a vět, rozebírat s nimi chybné formulace a vést je ke kultuře vyjadřování, nepřekročí studenti úroveň, které dosáhli na střední škole. V tomto ohledu je však úroveň všeobecně nízká, zejména u absolventů jiných škol než gymnázií.

Jak ukázaly výsledky testů (viz odstavec 3.5 kapitoly 3), studiem teorie se nezlepšila schopnost řešit příklady. Zvýšil se ale podíl studentů, kteří v testu správně zformulovali definici, ale nevyřešili správně odpovídající příklad. Je otázkou, nakolik je pak takovéto studování teorie přínosné.

Pokud časové podmínky kurzu matematiky neumožňují se studenty procvičovat formulace vět a definic, jeví se jako smysluplnější snažit se dosáhnout toho, aby studenti získali o pojmech jakousi rámcovou představu místo bezmyšlenkovitého odříkávání teorie. Neznamená to nutně odstoupit při výkladu od definic a vět, ale vysvětlit je co nejjednodušším způsobem a od studentů přesné znění nevyžadovat. Pro studium odborných předmětů by např. stačilo, aby studenti věděli, že hodnost matice je číslo, které lze zjistit převedením matice na odstupňovanou jako počet jejích nenulových řádků, aby uměli používat úpravy matice, které jsou k tomu potřeba, a věděli, že pomocí pojmu hodnost matice lze posoudit řešitelnost soustavy. Pokud by bylo potřeba posuzovat i lineární závislost vektorů, měli by studenti vědět, že hodnost matice udává počet "důležitých" řádků v matici, a že ostatní řádky lze určitým způsobem pomocí těchto "důležitých" řádků vyjádřit, takže jsou v matici v jistém smyslu zbytečné. Jak ukazují výsledky testů (viz pododstavec 3.2.2 kapitoly 3), studenti sice nemají problém se zvládnutím definice hodnosti matice, ale jen 22% z nich umí definovat i pojmy lineární závislost a lineární kombinace vektorů, takže patrně o obsahu definice hodnost matice příliš dobrou představu nemají.

Místo schopnosti samostatně formulovat matematická tvrzení by měla být preferována znalost souvislostí a schopnost rozhodnout o tom, co z daného výsledku vyplývá. Studenti by měli být schopni zodpovědět dotazy typu: Není-li ve skupině vektorů žádný vektor násobkem jiného, znamená to, že je skupina lineárně nezávislá? Je-li matice A singulární, znamená to, že maticová rovnice $AX = B$ nemá řešení? Je-li $\det A \neq 0$, lze něco říci o počtu řešení soustavy $A\bar{x} = \bar{b}$? atd.

Mezi pedagogy katedry matematiky na VŠE však nepanuje shoda, je-li takový způsob výuky akceptovatelný, a někteří důsledně trvají na tom, že je třeba od studentů vyžadovat přesné formulace definic a vět – bez ohledu na to, zda studenti chápou obsah. Je otázkou, nakolik je takový přístup do budoucna udržitelný.

Část II

UČEBNÍ TEXT ZÁKLADY LINEÁRNÍ ALGEBRY (KOMENTÁŘ)

1. Charakteristika textu Základy lineární algebry

Text zpracovává poměrně širokou oblast lineární algebry formou přístupnou i studentům s horšími předpoklady pro studium matematiky. Může na jedné straně posloužit studentům středních škol, kteří mají zájem získat či rozšířit si znalosti z lineární algebry, je však určen především studentům vysokých škol, kteří se v rámci svého studijního programu musí naučit základům lineární algebry, matematika však pro ně není hlavním oborem (text vychází ze zkušeností s výukou matematiky na VŠE). Textu mohou využít i studenti více matematicky zaměřených škol jako průpravu ke studiu náročnějších textů z lineární algebry; proto je text poměrně obsáhlý.

Text není zcela standardní učebnicí lineární algebry. Charakteristické rysy textu jsou:

(1) dvojí úroveň
(2) struktura
(3) forma
(4) motivační a aplikační příklady
(5) neřešené úlohy k procvičení

ad (1) **dvojí úroveň**

Text sestává ze dvou částí. První část se zaměřuje především na početní postupy; obsahuje jednoduše podané základy lineární algebry potřebné pro zvládnutí řešení soustav lineárních rovnic metodami užívajícími matic a determinantů, řešení maticových rovnic, hledání vlastních čísel a vlastních vektorů matice a určování typů kvadratických forem. V celé první části je pod pojmem vektor míněn pouze aritmetický vektor (uspořádaná n-tice reálných čísel), a celá první část je vykládána bez použití pojmu lineární závislost a nezávislost vektorů (pojem lineární závislost a nezávislost vektorů činí studentům mimořádné potíže (viz kapitola 3 části I)).

Druhá část textu rozšiřuje témata první části jak do hloubky (podrobnější podání témat zpracovaných v první části), tak šířky (nová témata oproti první části). Je určena studentům matematicky poněkud vyspělejším než část první – obsahuje více odvozování a vysvětlování souvislostí.

V druhé části textu je definován pojem vektorový prostor, lineární závislost a nezávislost vektorů, báze prostoru atd., a kromě pasáží rozšiřujících témata první části obsahuje druhá část i pasáže týkající se lineárních zobrazení a jejich maticové reprezentace, prostorů se skalárním součinem a rozkladů matic.

Záměr dvojí úrovně textu je následující:

Pro studenty, jimž stačí zvládnout především početní postupy umožňující řešit soustavy lineárních rovnic, maticové rovnice, počítat determinanty atd., je dostačující nastudovat pouze první část.

Studenti, kteří potřebují obšírnější znalosti (jak do hloubky, tak šíře), je určena i část druhá. Přitom mají dvě možnosti:

1) nastudují nejprve první část, kde získají základní představu o pojmech a osvojí si potřebné početní postupy (převod matice na odstupňovanou, výpočet součinu matic apod.), a v druhé části si znalosti z první části rozšíří (zobecnění

pojmu vektor z aritmetického na vektor jakožto prvek axiomaticky definovaného vektorového prostoru apod.),

2) mohou studovat přímo druhou (obecnější) část, a potřebné pasáže a zejména početní postupy (převod matice na odstupňovanou, výpočet součinu matic apod.) nastudují z první části podle příslušných odkazů v textu.

Idea dvojí úrovně textu vznikla na základě vlastních zkušeností autorky práce s používáním učebních textů na VŠE. Po zkrácení dvousemestrálního základního kurzu matematiky na jednosemestrální (viz kapitola 1 části I) byl pro jednosemestrální kurz vydán text, který obsahově odpovídal náplni tohoto kurzu (tzn. obsah byl oproti učebnímu textu pro dvousemestrální kurz částečně redukován), navíc byl podán formou přístupnější studentům s horšími předpoklady pro studium matematiky (viz dále (2) – struktura a (3) – forma). Tento text si překvapivě pořizovali i studenti v té době na některých fakultách VŠE ještě dobíhajícího dvousemestrálního kurzu matematiky – jako průpravu pro studium pro ně náročnějšího učebního textu určeného pro dvousemestrální kurz. Teprve po prostudování tohoto "zjednodušeného" textu přistoupili ke studiu textu pro ně určeného.

ad (2) **struktura**

Cílem textu je vyložit látku jednoduchým způsobem, přístupným i méně matematicky zaměřeným studentům. Tito studenti si potřebují osvojit základní početní aparát, umožňující řešit jednoduché úlohy; hlubší zájem o teorii u nich na samém počátku studia lineární algebry nelze předpokládat. Standardní struktura matematického textu ("definice, věta, důkaz") tyto studenty zpravidla odrazuje, důkazy vyslovených tvrzení jim nenapomáhají porozumět látce – místo toho, aby jim důkazy pomohly uvědomit si důležitost všech předpokladů apod., představují pro ně spíš zátěž. Studenti se důkazy učí nazpaměť bez jakékoliv snahy o pochopení, a považují studium důkazů za naprosto zbytečné (tento názor je na VŠE podpořen požadavky odborných kateder naučit studenty základního kurzu především početní postupy a nezatěžovat je příliš teorií). Nutno konstatovat, že při tomto přístupu (učit se důkazy nazpaměť), pro studenty důkazy v naprosté většině případů skutečně zbytečné jsou, a že u nematematicky zaměřených studentů lze jen těžko předpokládat přístup jiný. Změnit tento přístup by znamenalo změnit "matematické myšlení" studentů, naučit je jakési "matematické kultuře", což by vyžadovalo značnou časovou investici, v mnoha případech se sporným výsledkem. U studentů oborů méně matematicky zaměřených není získání takovýchto matematických schopností s ohledem na pozdější využití matematického aparátu při studiu odborných předmětů ani nezbytné (jakkoliv je bezesporu schopnost argumentace a přesných formulací žádoucí i mimo oblast matematiky).

Proto není v textu volena struktura "definice, věta, důkaz"; nové pojmy jsou v textu zvýrazněny podtržením, a k jejich formulacím se v některých případech dospěje poněkud volnějším popisem. Tvrzení zásadnějšího významu jsou uvedena slovem "Platí", což opět někdy umožňuje i volnější formulace – v případě, že by precizní výčet předpokladů zatemnil podstatu tvrzení.

Formulace tvrzení je co nejjednodušší, zároveň je někdy upozorňováno na časté chyby či možné chybné interpretace. Látka je vysvětlována především na příkladech, v řadě případů jsou kromě standardních řešených příkladů zařazeny i příklady motivační či aplikační (viz dále (4) a kapitola 2 části II). Ačkoliv text neobsahuje důkazy tvrzení, jsou zejména v druhé části textu v mnoha případech nahrazeny odvozením vztahů nebo poukazy na souvislosti mezi nově vykládanými pojmy a tvrzeními s pojmy a tvrzeními vyloženými dříve.

ad (3) **forma**

Podobně jako důkazy tvrzení odrazuje studenty i přemíra obecných vzorců a dokonce i (pro matematiky běžný, pro laiky nepřirozený) matematický jazyk. Proto je v textu často formální zápis nahrazen či doplněn slovní formulací. Např. při definování součinu matic je pro vyjádření odpovídajícího prvku výsledné matice preferováno slovní vyjádření:

… Označíme-li prvky matice $C = A \cdot B$ jako c_{ij}, pak prvek c_{ij} bude skalárním součinem i-tého řádku matice A a j-tého sloupce matice B.

Tuto formulaci jsou studenti schopni nejen snáze akceptovat, ale následně sami vyjádřit lépe než s využitím formálního zápisu $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$, ačkoliv tento zápis je též v textu uveden (zápis s použitím sumační symboliky je pro studenty nepřehledný a jeho použití je zejména v první části textu spíše výjimečné).

Z hlediska vývoje matematiky se odklon od formálních zápisů může jevit jako krok zpět, je však nutno přihlížet k úrovni a potřebám studentů, pro něž je text určen.

Podobně je přizpůsoben i jazyk užívaný při formulacích definovaných pojmů a tvrzení. Ukazuje se, že některé studenty odrazují i výrazy "nechť", "buď" (ve smyslu imperativu), "budiž" apod., které už v běžné mluvě nejsou používány vůbec nebo pouze ojediněle. Jejich používání považují studenti za archaické až směšné. I tato zdánlivá drobnost může přispět k tomu, že studenti na matematiku jakožto vědní disciplinu celkově pohlížejí jako na zcela nepraktickou, odtrženou od běžného života. Vynechání takovýchto výrazů v učebním textu je proto snahou o jakési "polidštění" matematiky. Místo formulací užívajících těchto výrazů jsou – tam kde to lze – voleny spíše formulace "Je-li …, pak…" apod.

Text obsahuje velké množství řešených příkladů, v rámci nichž je kromě přiblížení daného pojmu, vysvětlení případných souvislostí s vyslovenými tvrzeními či dříve vyloženými pojmy někdy upozorňováno na časté chyby. Např. při výkladu vlivu úprav matice na její determinant je mimo jiné upozorněno na nutnost rozlišení, který řádek je od kterého odčítán:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} \begin{matrix} {\scriptstyle -1} \\ \hookleftarrow \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix},$$

ale

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ {\scriptstyle -1} \hookleftarrow \\ \\ \\ \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix}.$$

Právě na příkladech studenti nejlépe vykládanou látku pochopí.

ad (4) **motivační a aplikační příklady**

Do textu jsou kromě standardních řešených příkladů zařazeny i příklady motivační a aplikační, tj. příklady, které ukazují možné využití vykládaných pojmů či procesů. I když se nemusí nutně jednat o aplikace v praxi, poukazují příklady určitým způsobem na souvislost matematiky s reálným životem či na souvislost lineární algebry s jinými obory matematiky. Protože text není zaměřen na studenty určitého vědeckého oboru, jsou příklady voleny tak, aby jejich řešení nevyžadovalo téměř žádné znalosti z jiných vědních oborů či z jiných matematických odvětví. Tento požadavek je ovšem pro výběr příkladů značně limitující.

Podrobný popis motivačních a aplikačních příkladů je v kapitole 2 části II.

ad (5) **neřešené úlohy k procvičování**

V závěru každé kapitoly jsou jako cvičení uvedeny neřešené příklady (s výsledky) a řada tvrzení, o jejichž správnosti mají čtenáři rozhodnout. Na tomto cvičení si mohou studenti nejen zopakovat vyloženou látku a ověřit si, že ji správně pochopili, mohou si zároveň uvědomit nutnost přesného formulování matematických tvrzení. Toto cvičení tak může sloužit i k nácviku precizního vyjadřování. Správné výsledky jsou uvedeny ve většině případů i s odůvodněním, proč chybné či nepřesně formulované tvrzení neplatí.

Např.:

Tvrzení: *Součet nenulových vektorů je vždy nenulový vektor.*

Výsledek (N značí nepravdivé tvrzení):

N $(\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{o}$ nebo např. $(1,-1) + (2,0) + (-3,1) = (0,0))$

Nebo:

Tvrzení: *Skalární součin dvou vektorů s kladnými složkami je vektor s kladnými složkami.*

Výsledek (N značí nepravdivé tvrzení):

N (skalární součin není vektor)

Výsledky neřešených příkladů a cvičení uvedených v závěru kapitoly vždy bezprostředně následují po bloku zadání těchto cvičení, což umožňuje snadnější orientaci při hledání výsledků oproti možnosti zařadit výsledky cvičení ze všech kapitol až na samý závěr textu. Uvádět výsledek každého příkladu či cvičení přímo za jeho zadání není vhodné ze zřejmých důvodů – v některých případech (a zejména v případě cvičení na rozhodování pravdivosti tvrzení) by bylo řešení přímo "prozrazeno".

2. Motivační a aplikační příklady

2.1 Úvod

Text je v řadě případů doplněn motivačními či aplikačními příklady, tzn. příklady, které buď určitým způsobem uvozují či osvětlují nově zaváděné pojmy či procesy, nebo poukazují na možnost využití matematického aparátu k řešení problémů z praxe či problémů z jiných vědních oborů, popřípadě poukazují na souvislost mezi úlohami z lineární algebry a úlohami z jiných oborů matematiky. Tyto příklady jsou voleny tak, aby byly srozumitelné čtenářům jakéhokoliv odborného zaměření, tzn. tak, aby nevyžadovaly jiné než zcela základní znalosti z jiných vědních oborů či jiných oborů matematiky. Učební text je v tomto směru univerzálně použitelný pro studenty různých oborů. Požadavek snadné srozumitelnosti však výběr příkladů značně omezuje.

Ačkoliv v některých případech mohou existovat jednodušší způsoby řešení daného problému, nejde v těchto příkladech primárně o získání výsledku, ale o nástin možností využití nástrojů lineární algebry pro řešení problémů z jiných oborů či běžné praxe. Může se přitom jednat i o úlohy z každodenního života či jakési hříčky, které sice mohou být do jisté míry uměle vytvořené, napomáhají však vysvětlení určitého procesu, a zařazeny před vykládaný pojem mohou výklad vhodně uvést (např. úvod do násobení matic). V praxi by daný problém nebyl řešen nástroji lineární algebry – nemusí se jednat o aplikační příklady v pravém slova smyslu, příklady však daný pojem přesto vhodně ilustrují.

V rámci snahy o maximální zjednodušení výpočtů, které by při větší pracnosti mohly vkládaný proces zatemňovat, nemusí vždy dané hodnoty odpovídat reálným hodnotám z praxe, avšak – jak je třeba znovu zdůraznit – nejde v první řadě o získání výsledků, ale o poukázání na souvislost mezi využitím matematických pojmů a procesů (které se studentům mohou jevit jako samoúčelně vykonstruované) s úlohami z praxe. Navíc i při snaze o práci s daty odpovídajícími reálným hodnotám z praxe může být problémem aktuálnost těchto údajů (např. ceny zboží apod.). Náhrada konkrétních údajů obecnými údaji (např. místo ceny 3Kč zadat cenu cKč apod.) nemusí být vždy vhodným řešením – názornost úlohy se tak může značně snížit. V některých případech ale takováto obecnější formulace možná je.

Kromě poukázání na vztah teorie a praxe mohou motivační a aplikační příklady vnést poněkud zábavnější prvek do jinak strohého matematického výkladu.

Protože není zcela snadné získat takto jednoduché ilustrativní příklady, mohly by příklady uvedené v textu posloužit i vyučujícím lineární algebry jako zdroj inspirace. Proto jsou – v některých případech v zestručněné podobě – souhrnně uvedeny v této části práce, i s doplňujícím komentářem.

2.2 Motivační a aplikační příklady

Vektor, operace s vektory, lineární kombinace, skalární součin vektorů

Při prvním setkání studentů s pojmem aritmetický vektor (uspořádaná n-tice reálných čísel) se stává, že studenti ovlivněni představou vektoru (získanou na střední škole) jakožto orientované úsečky v rovině či trojrozměrném prostoru, kterou lze popsat pomocí uspořádané dvojice, resp. trojice reálných čísel, nechápou význam čtyř a vícesložkových vektorů. Jako jednoduchá ilustrace toho, co takové vektory mohou popisovat, poslouží následující příklady. Ty zároveň ilustrují i aritmetické operace s vektory. Místo obecně zadaných složek vektorů mohou být případně údaje zadány konkrétně.

Příklad 1

Podnik A vyrábí čtyři výrobky; označme denní produkci (počet kusů) prvního výrobku v_1, druhého výrobku v_2, třetího v_3 a čtvrtého v_4. Pak tuto informaci lze zapsat pomocí vektoru $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$. Vyrábí-li podnik B tytéž výrobky v množství analogicky zapsaném jako vektor $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, pak součet vektorů $\bar{v} + \bar{u} = (v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3, v_4 + u_4)$ udává celkovou denní produkci jednotlivých výrobků v obou podnicích dohromady.

Příklad 2

Zapíšeme-li ceny n výrobků uváděné v korunách jako vektor $\bar{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$, pak při kurzu koruna ku jiné měně např. 1:15 lze ceny těchto výrobků v jiné měně vyjádřit vektorem $15\bar{p} = 15(p_1, p_2, ..., p_n)$.

Pojem lineární kombinace činí studentům až nečekané potíže. Většinou si pod pojmem lineární kombinace představují jen násobky vektorů, případně i součty vektorů, nikoliv však součty násobků. Následující příklad by mohl napomoci představě, jak "nakombinovat" vektor pomocí jiných vektorů.

Příklad 3

Obchodník má přebytek zboží z_1, z_2, z_3. Rozhodne se pro výprodej tohoto zboží za zvýhodněnou cenu, ale pouze v ucelených sadách, ve kterých je pevně stanoven počet kusů z_1, z_2, z_3. Sada S_1 obsahuje 1ks z_1, 2ks z_2 a 4ks z_3, sada S_2 obsahuje 3ks z_1, 2ks z_2 a 2ks z_3, sada S_3 obsahuje 2ks z_1, 1ks z_2 a 3ks z_3, sada S_4 obsahuje 3ks z_1, 3ks z_2 a 7ks z_3. Může zákazník, který chce koupit přesně 20ks zboží z_1, 15ks z_2 a 25ks z_3, využít této výhodné nabídky?

Počet kusů z_1, z_2, z_3 v jednotlivých sadách je možno vyjádřit pomocí vektorů:

$$\bar{s}_1 = (1, 2, 4),\ \ \bar{s}_2 = (3, 2, 2),\ \ \bar{s}_3 = (2, 1, 3),\ \ \bar{s}_4 = (3, 3, 7),$$

podobně počet kusů, který požaduje zákazník: $\bar{a} = (20, 15, 25)$.

Zjistíme, zda se dá vektor $\bar{a}$ vyjádřit pomocí vektorů $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$, $\bar{s}_3$, $\bar{s}_4$, tzn. zda je vektor $\bar{a}$ lineární kombinací vektorů $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$, $\bar{s}_3$, $\bar{s}_4$, ovšem s nezápornými celočíselnými koeficienty (udávajícími počet jednotlivých sad). Zjistíme tedy, zda existují celá nezáporná čísla c_1, c_2, c_3, c_4 taková, že

$$\bar{a} = c_1 \cdot \bar{s}_1 + c_2 \cdot \bar{s}_2 + c_3 \cdot \bar{s}_3 + c_4 \cdot \bar{s}_4,$$

tj.

$$(20, 15, 25) = c_1 \cdot (1, 2, 4) + c_2 \cdot (3, 2, 2) + c_3 \cdot (2, 1, 3) + c_4 \cdot (3, 3, 7).$$

Porovnáním jednotlivých složek vektorů na obou stranách předchozí rovnice obdržíme soustavu lineárních rovnic o neznámých c_1, c_2, c_3, c_4:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} c_1 & + & 3c_2 & + & 2c_3 & + & 3c_4 & = & 20 \\ 2c_1 & + & 2c_2 & + & c_3 & + & 3c_4 & = & 15 \\ 4c_1 & + & 2c_2 & + & 3c_3 & + & 7c_4 & = & 25. \end{array}$$

Tato soustava má nekonečně mnoho řešení, ovšem jen některá z nich mohou vyhovovat podmínce $c_i \geq 0$. Obecné řešení soustavy je:

$$c_1 = 2 - t,\ c_2 = 4,\ c_3 = 3 - t,\ c_4 = t,\ t \in \mathbb{R}.$$

Z podmínky $c_i \geq 0$ je zřejmé, že musí být $t \geq 0$ (viz $c_4 = t$) a $t \leq 2$ (viz $c_1 = 2-t$). Navíc musí být c_i celá čísla. Úloha má tedy tři řešení:

pro $t = 0$ je $c_1 = 2,\ c_2 = 4,\ c_3 = 3,\ c_4 = 0$,
pro $t = 1$ je $c_1 = 1,\ c_2 = 4,\ c_3 = 2,\ c_4 = 1$,
pro $t = 2$ je $c_1 = 0,\ c_2 = 4,\ c_3 = 1,\ c_4 = 2$.

Zákazník má tři možnosti, jak zkombinovat sady S_1, S_2, S_3, S_4, aby nakoupil požadované množství zboží z_1, z_2, z_3 – může koupit 2ks sady S_1, 4ks sady S_2 a 3ks sady S_3:

$$2 \cdot (1, 2, 4) + 4 \cdot (3, 2, 2) + 3 \cdot (2, 1, 3) = (20, 15, 25),$$

nebo může koupit 1ks sady S_1, 4ks sady S_2, 2ks sady S_3 a 1ks sady S_4:

$$1 \cdot (1, 2, 4) + 4 \cdot (3, 2, 2) + 2 \cdot (2, 1, 3) + 1 \cdot (3, 3, 7) = (20, 15, 25),$$

nebo 4ks sady S_2, 1ks sady S_3 a 2ks sady S_4:

$$4 \cdot (3, 2, 2) + 1 \cdot (2, 1, 3) + 2 \cdot (3, 3, 7) = (20, 15, 25).$$

Po tomto příkladu následuje v textu poznámka, že příklad byl uměle zkonstruován z cvičných důvodů – v reálném životě by takto příznivá situace byla spíše výjimkou. Kdyby zákazník požadoval např. množství zboží reprezentované vektorem $\bar{a} = (10, 20, 30)$, nemohl by toto zboží z dané nabídky zkombinovat. Příslušná soustava má sice nekonečně mnoho řešení:

$$c_1 = 9 - t,\ c_2 = 4,\ c_3 = -4 - t,\ c_4 = t,\ t \in \mathbb{R},$$

žádné řešení vyhovující podmínce $c_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4$ však neexistuje (je-li $c_4 = t \geq 0$, pak nemůže být $c_3 = -4 - t \geq 0$).

Pojem (standardní) skalární součin studenti na základě středoškolských zkušeností spojují výhradně s úlohami z analytické geometrie. Jako ilustraci jiné interpretace, která může i později pomoci jako motivace k zavedení násobení matic, lze použít následující příklad.

Příklad 4

Zákazník chce koupit 6 kusů pečiva po 3 Kč, 4 litry nápoje po 15 Kč/l a 10 vajec po 2 Kč.

Cenu, kterou za celý nákup zaplatí, lze vyjádřit pomocí skalárního součinu vektorů. Počet jednotlivých nakupovaných položek lze zapsat pomocí vektoru $\bar{p} = (6, 4, 10)$ a ceny zboží pomocí vektoru $\bar{c} = (3, 15, 2)$. Cena celého nákupu bude $6 \cdot 3 + 4 \cdot 15 + 10 \cdot 2$ Kč, což lze vyjádřit jako skalární součin

$$\bar{p} \bullet \bar{c} = (6,\ 4,\ 10) \bullet (3,\ 15,\ 2) = 6 \cdot 3 + 4 \cdot 15 + 10 \cdot 2 = 98.$$

Zákazník zaplatí za nákup 98Kč.

Matice, operace s maticemi

Pro první setkání s maticemi jakožto určitými "tabulkami" lze použít příklad následujícího typu. V příkladu není řešen žádný problém, slouží jen k přiblížení pojmu matice a matice k ní transponované.

Příklad 5

Pomocí matic lze zapsat údaje, které se běžně zapisují do tabulek – počet kusů zboží ve skladech, počet osob s určitou vlastností v různých lokalitách nebo různých časových obdobích apod. Význam transponované matice si lze snadno představit – údaje z tabulky se místo "po řádcích" čtou "po sloupcích". Porovnejme např. řazení údajů v Tabulce 1 a Tabulce 2, udávajících počty snídaní, obědů a večeří v jistém stravovacím zařízení během pracovního týdne:

	Po	Út	St	Čt	Pá
snídaně	40	75	72	68	60
obědy	77	95	93	87	71
večeře	54	75	70	64	–

Tabulka 1. Počty snídaní, obědů a večeří 1

	snídaně	obědy	večeře
Po	40	77	54
Út	75	95	75
St	72	93	70
Čt	68	87	64
Pá	60	71	–

Tabulka 2. Počty snídaní, obědů a večeří 2

Tabulkám odpovídají navzájem transponované matice typu 3×5, resp. 5×3:

$$A = \begin{pmatrix} 40 & 75 & 72 & 68 & 60 \\ 77 & 95 & 93 & 87 & 71 \\ 54 & 75 & 70 & 64 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} 40 & 77 & 54 \\ 75 & 95 & 75 \\ 72 & 93 & 70 \\ 68 & 87 & 64 \\ 60 & 71 & 0 \end{pmatrix}.$$

Následující příklad ilustruje použití matic v praxi. Příkladu v textu předchází poznámka, že v praxi se často vyskytují matice o velkém počtu řádků i sloupců, a že i prvky matic mohou být velká čísla.

Příklad 6

Černobílý digitální obraz se skládá např. z 340×280 bodů (pixelů), každý bod má jeden z 256 odstínů šedi (očíslováno 0 – 255). Tyto údaje lze zapsat maticí 340×280, jejíž prvky jsou čísla od 0 do 255.

Následující příklad se může jevit jako poněkud dětinský, ukazuje však názorně, že má smysl zavádět aritmetické operace s maticemi.

Příklad 7

V prodejně s porcelánem nabízejí určitý typ hlubokých, mělkých a dezertních talířů ve čtyřech barevných variantách – modré (M), zelené (Z), červené (Č) a oranžové (O). Každý měsíc doplňují zásoby o potřebný počet kusů; Tabulka 3 udává počet objednaných kusů v měsíci lednu:

	M	Z	Č	O
hluboké	80	70	60	80
mělké	70	60	50	90
dezertní	50	40	30	30

Tabulka 3. Počty hlubokých, mělkých a dezertních talířů

Údaje zapsané v této tabulce lze reprezentovat maticí:

$$L = \begin{pmatrix} 80 & 70 & 60 & 80 \\ 70 & 60 & 50 & 90 \\ 50 & 40 & 30 & 30 \end{pmatrix}.$$

Pro velký zájem o toto zboží objednali v únoru dvojnásobek veškerého zboží oproti lednu:

$$U = 2L = \begin{pmatrix} 160 & 140 & 120 & 160 \\ 140 & 120 & 100 & 180 \\ 100 & 80 & 60 & 60 \end{pmatrix}.$$

V březnu objednali:

$$B = \begin{pmatrix} 90 & 80 & 90 & 70 \\ 70 & 90 & 60 & 80 \\ 60 & 40 & 50 & 30 \end{pmatrix}.$$

Za 1. čtvrtletí tedy celkem objednali množství popsané maticí $L + U + B$:

$$\begin{pmatrix} 80+160+90 & 70+140+80 & 60+120+90 & 80+160+70 \\ 70+140+70 & 60+120+90 & 50+100+60 & 90+180+80 \\ 50+100+60 & 40+80+40 & 30+60+50 & 30+60+30 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 330 & 290 & 270 & 310 \\ 280 & 270 & 210 & 350 \\ 210 & 160 & 140 & 120 \end{pmatrix}.$$

Průměrné měsíční objednávky v 1. čtvrtletí jsou popsány maticí (zaokrouhleno)

$$P = \frac{1}{3}(L + U + B) = \begin{pmatrix} 110 & 97 & 90 & 103 \\ 93 & 90 & 70 & 117 \\ 70 & 53 & 47 & 40 \end{pmatrix}.$$

Součin matic, nekomutativita násobení matic, inverzní matice

Následující příklad v textu předchází zavedení součinu matic. Pro studenty, pro něž je text určen, nemůže jako vhodná motivace pro zavedení násobení matic posloužit skládání lineárních zobrazení, neboť tento pojem není v první části textu vůbec uveden (studentům s horšími předpoklady ke studiu matematiky činí pojem lineární zobrazení velké potíže, a rozhodně nemůže sloužit pro přiblížení jiného pojmu). Jako motivace k zavedení násobení matic může sloužit snaha "počítat s maticemi podobně jako s čísly"; proč je však součin matic zaveden právě takovým způsobem, studentům není jasné – považují definici součinu matic za zbytečně komplikovanou. Následující příklad ukazuje na situaci z běžného života (která by ovšem v praxi pomocí matic jistě řešena nebyla – příklad je jen motivační), že násobení matic – tak, jak je definováno – má nějaký smysl.

Příklad 8

Osoby A, B, C hodlají zakoupit zboží z_1, z_2, z_3, z_4, každá z osob v jiném množství. Celý nákup může každá z osob zrealizovat buď v obchodě O_1 nebo v O_2. Který obchod bude pro kterou osobu výhodnější? V Tabulce 4 je uvedeno, kolik kusů zboží z_1, z_2, z_3, z_4 každá z osob požaduje, Tabulka 5 uvádí ceny zboží v obchodech O_1, O_2:

	z_1	z_2	z_3	z_4
A	6	5	3	1
B	3	6	2	2
C	3	4	3	1

Tabulka 4. Počet kusů zboží

	O_1	O_2
z_1	1,50	1,00
z_2	2,00	2,50
z_3	5,00	4,50
z_4	16,00	17,00

Tabulka 5. Ceny zboží v O_1, O_2

Údaje z tabulek je možno reprezentovat maticemi: matice

$$P = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

udává, kolik jednotlivé osoby požadují kusů zboží; matice

$$C = \begin{pmatrix} 1,50 & 1 \\ 2 & 2,50 \\ 5 & 4,50 \\ 16 & 17 \end{pmatrix}$$

udává ceny zboží.

Z tabulek je zřejmé, že např. osoba A zaplatí v obchodě O_1:

$$6 \cdot 1,50 + 5 \cdot 2,00 + 3 \cdot 5,00 + 1 \cdot 16,00 = 50$$

a v obchodě O_2 :

$$6 \cdot 1,00 + 5 \cdot 2,50 + 3 \cdot 4,50 + 1 \cdot 17,00 = 49,$$

podobně pro osoby B, C.

Částku zaplacenou osobou A v obchodě O_1 lze zapsat jako skalární součin vektoru $\bar{p}_1 = (6,\ 5,\ 3,\ 1)$, udávajícího počet kusů zboží požadovaný osobou A (1. řádek matice P) a vektoru $\bar{c}_1 = (1,50,\ 2,00,\ 5,00,\ 16,00)$, udávajícího ceny zboží v obchodě O_1 (1. sloupec matice C):

$$\bar{p}_1 \bullet \bar{c}_1 = (6,\ 5,\ 3,\ 1) \bullet (1,50,\ 2,00,\ 5,00,\ 16,00) =$$

$$= 6 \cdot 1,50 + 5 \cdot 2,00 + 3 \cdot 5,00 + 1 \cdot 16,00 = 50,$$

částku zaplacenou osobou A v obchodě O_2 jako skalární součin

$$\bar{p}_1 \bullet \bar{c}_2 = (6,\ 5,\ 3,\ 1) \bullet (1,00,\ 2,50,\ 4,50,\ 17,00) =$$

$$= 6 \cdot 1,00 + 5 \cdot 2,50 + 3 \cdot 4,50 + 1 \cdot 17,00 = 49,$$

podobně pro osoby B, C:

$$\bar{p}_2 \bullet \bar{c}_1 = (3,\ 6,\ 2,\ 2) \bullet (1,50,\ 2,00,\ 5,00,\ 16,00) =$$

$$= 3 \cdot 1,50 + 6 \cdot 2,00 + 2 \cdot 5,00 + 2 \cdot 16,00 = 58,50$$

(částka zaplacená osobou B v obchodě O_1) atd.

Zapíšeme výsledky těchto skalárních součinů do matice, a to tak, že skalární součin $\bar{p}_1 \bullet \bar{c}_1$ napíšeme do prvního řádku a prvního sloupce, skalární součin $\bar{p}_1 \bullet \bar{c}_2$ napíšeme do prvního řádku a druhého sloupce, skalární součin $\bar{p}_2 \bullet \bar{c}_1$ napíšeme do druhého řádku a prvního sloupce atd. Dostaneme matici

$$R = \begin{pmatrix} 50 & 49 \\ 58,50 & 61 \\ 43,50 & 43,50 \end{pmatrix}.$$

Např. první řádek matice R vyjadřuje částku, kterou zaplatí osoba A v obchodě O_1 (prvek r_{11}) a v obchodě O_2 (prvek r_{12}), atd.

Následující příklad ilustruje násobení matic a mocninu matice.

Příklad 9

Uvažujme autobusové spojení mezi lokalitami 1, 2, 3, 4, 5, přičemž nemusí existovat spojení mezi jakýmikoliv dvěma lokalitami. Definujeme matici A typu 5×5 o prvcích a_{ij} následujícím způsobem: položíme $a_{ii} = 0$ a pro $i \neq j$ položíme $a_{ij} = 1$, je-li spojení mezi i a j, a $a_{ij} = 0$, není-li spojení mezi i a j. Matice A je zřejmě symetrická, neboť uvažujeme oboustranné spojení mezi i a j.

Například z matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

lze vyčíst, že mezi lokalitami 1 a 2 existuje spojení (neboť $a_{12} = a_{21} = 1$), zatímco mezi lokalitami 1 a 3 nikoliv (neboť $a_{13} = a_{31} = 0$).

Matice

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pak uvádí, kolika způsoby lze dorazit z lokality i do lokality j (nebo obráceně) s použitím dvou autobusů, tj. s jedním přestupem (nebereme přitom ohled na časovou návaznost spojů). Označíme-li prvky matice A^2 jako $(a^2)_{ij}$, pak např. prvek $(a^2)_{24} = 2$ udává, že z lokality 2 do lokality 4 (nebo obráceně) lze s jedním přestupem dorazit dvěma způsoby. Protože je

$$(a^2)_{24} = a_{21}a_{14} + a_{22}a_{24} + a_{23}a_{34} + a_{24}a_{44} + a_{25}a_{54} = 1 + 0 + 1 + 0 + 0,$$

a protože součin $a_{2k}a_{k4}$ může být roven jedné jen v případě, že $a_{2k} = 1$ a současně $a_{k4} = 1$ (a tedy existuje spojení mezi 2 a k i mezi k a 4), znamená to, že z lokality 2 do lokality 4 lze dorazit buď s přestupem v lokalitě 1 (neboť $a_{21}a_{14} = 1$) nebo v lokalitě 3 (neboť $a_{23}a_{34} = 1$), zatímco např. s přestupem v lokalitě 5 to možné není (neboť $a_{25}a_{54} = 0$).

Počet spojení mezi jednotlivými lokalitami s maximálně jedním přestupem je vyjádřen maticí

$$A + A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že např. mezi lokalitami 2 a 4 jsou 3 možnosti – přímé spojení (neboť $a_{24} = 1$) a 2 možnosti s přestupem (neboť $(a^2)_{24} = 2$).

Oproti zde uvedené zkrácené verzi je v příkladu v textu rozebíráno ještě dopravní spojení v kombinaci autobusového s vlakovým, a to jak v pořadí nejprve autobus a následně vlak, tak i v pořadí opačném.

Následující příklad zábavnou formou na příkladu šifrování textu s užitím násobení matic ukazuje užití inverzní matice a nekomutativitu násobení matic. Na příkladu je dobře patrné, jak vynásobením maticí A se text změní a vynásobením maticí A^{-1} (ve správném pořadí) se "vrací" zpět. Vynásobením maticí z nesprávné strany se text zkomolí.

Příklad 10

Uvažujme následující způsob šifrování textu: každému písmenu abecedy (bez háčků a čárek) přiřadíme číslo podle tabulky:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
8	7	5	13	9	16	18	22	4	23	11	3	21	1	6	15	12	19	2	14	17	20	25	24	10	26

Text, který chceme zašifrovat, zapíšeme (v číselné podobě) po řádcích do čtvercové matice; pokud by byl počet písmen textu menší než počet prvků matice, doplníme zbylá místa nulami. Zformujeme např. text "BÍLÁ KOČKA" (jakožto "BILA KOCKA") do matice A:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 8 & 11 & 6 \\ 5 & 11 & 8 \end{pmatrix}.$$

Dále musí být dána čtvercová matice příslušného řádu, kterou (kromě výše uvedené tabulky) musí znát i osoba, která text chce dešifrovat. Nechť je to např. matice

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Text zašifrujeme vynásobením maticí C zleva (to musí vědět i osoba, která text chce dešifrovat):

$$Z = CA = \begin{pmatrix} 19 & 19 & 14 \\ 12 & 15 & 11 \\ 8 & 11 & 6 \end{pmatrix}.$$

Pro dešifrování textu je třeba matici Z vynásobit maticí C^{-1} zleva:

$$C^{-1}Z = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 & 19 & 14 \\ 12 & 15 & 11 \\ 8 & 11 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 8 & 11 & 6 \\ 5 & 11 & 8 \end{pmatrix} = A.$$

Protože násobení matic není komutativní, je třeba důsledně dodržovat pořadí násobených matic. Kdybychom vynásobili matice C^{-1} a Z v opačném pořadí, dostali bychom

$$ZC^{-1} = \begin{pmatrix} 19 & 19 & 14 \\ 12 & 15 & 11 \\ 8 & 11 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 19 \\ 1 & 10 & 15 \\ 2 & 4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Po zpětném přiřazení příslušných písmen bychom obdrželi text "CERNY PSIK" neboli "ČERNÝ PSÍK"!

Už pro matice řádu 3 je ovšem poměrně obtížné takovýto příklad zkonstruovat – aby po vynásobení inverzní maticí z nesprávné strany dával dešifrovaný text smysl, a navíc smysl "opačného" významu.

Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Následující příklad je jednoduchou ekonomickou aplikací maticových rovnic, resp. vlastních vektorů matice. Ačkoliv se jedná o ekonomickou aplikaci, není potřeba žádných znalostí z oboru ekonomie.

Příklad 11

Uvažujme tři výrobce A_1, A_2, A_3; každý z nich vyrábí jeden druh zboží z_1, z_2, z_3, každý prodává pouze ostatním dvěma a nakupuje jen od nich (příklad tzv.

Leontievova uzavřeného ekonomického modelu – viz [3]). Tabulka 6 uvádí podíl jednotlivých výrobců na spotřebě jednotlivých výrobků:

	z_1	z_2	z_3
A_1	0,6	0,2	0,3
A_2	0,1	0,7	0,2
A_3	0,3	0,1	0,5

Tabulka 6. Podíl výrobců na spotřebě

Např. první sloupec udává, že 60 % produktů z_1 spotřebuje sám výrobce A_1, 10 % odebere výrobce A_2 a 30 % odebere A_3. Je tedy zřejmé, že součet čísel v každém sloupci je roven 1.

Označme x_1, x_2, x_3 příjmy výrobců A_1, A_2, A_3. Potom částka, kterou utratí A_1 celkem za z_1, z_2, z_3, je $0,6x_1 + 0,2x_2 + 0,3x_3$. Protože předpokládáme, že výdaje každého z výrobců jsou rovny jeho příjmům, dostáváme pro výrobce A_1 rovnici $0,6x_1 + 0,2x_2 + 0,3x_3 = x_1$, podobně pro výrobce A_2, A_3. Odtud dostáváme soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 0,6x_1 & + & 0,2x_2 & + & 0,3x_3 & = & x_1 \\ 0,1x_1 & + & 0,7x_2 & + & 0,2x_3 & = & x_2 \\ 0,3x_1 & + & 0,1x_2 & + & 0,5x_3 & = & x_3. \end{array}$$

Tato soustava může být zapsána jako maticová rovnice $A\bar{x} = \bar{x}$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad \bar{x} = (x_1, x_2, x_3)^T.$$

Protože předpokládáme nezáporné příjmy jednotlivých výrobců, dostáváme navíc podmínku $x_i \geq 0$ pro $i = 1, 2, 3$ (označíme $\bar{x} \geq \bar{o}$). Rovnici $A\bar{x} = \bar{x}$ můžeme přepsat v ekvivalentní formě $(A - I)\bar{x} = \bar{o}$ – vidíme, že se jedná o stanovení vlastního vektoru k vlastnímu číslu 1:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -0,4 & 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & -0,3 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & 0,1 & -0,5 & 0 \end{array}\right).$$

Obecné řešení (tedy libovolné řešení) této soustavy má tvar $\bar{x} = t(13, 11, 10)^T$; podmínka $\bar{x} \geq \bar{o}$ bude splněna pro $t \geq 0$.

Tento výsledek znamená, že pro fungování tohoto modelu je třeba, aby příjmy výrobců A_1, A_2, A_3 byly v poměru 13:11:10.

Další příklad ukazuje aplikaci vlastních vektorů v oblasti průzkumu trhu; ani zde není potřeba žádných odborných znalostí.

Příklad 12

Při průzkumu trhu je zkoumána skupina 300 lidí, z nichž 200 používá výrobek A a 100 používá výrobek B. Po měsíci 80% uživatelů výrobku A nadále používá tento výrobek a 20% přejde k výrobku B, a 90% uživatelů výrobku B nadále používá výrobek B a 10% přejde k výrobku A. Předpokládáme, že i v dalších měsících zůstane vždy stejné procento uživatelů věrných původnímu výrobku (jedná se o jednoduchý příklad tzv. Markovových řetězců).

Na základě tohoto průzkumu určíme, kolik lidí bude užívat ten který výrobek po k měsících, a odhadneme dlouhodobý vývoj.

Počet uživatelů výrobku A po jednom měsíci je dán vztahem

$$0,8 \cdot 200 + 0,1 \cdot 100 = 170,$$

protože 80% z 200 uživatelů A (t.j. $0,8 \cdot 200$) užívá nadále výrobek A a navíc 10% ze 100 uživatelů výrobku B (t.j. $0,1 \cdot 100$) přejde k výrobku A.
Podobně je dán počet uživatelů výrobku B:

$$0,2 \cdot 200 + 0,9 \cdot 100 = 170.$$

Tyto vztahy lze přepsat užitím maticového zápisu:

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 170 \\ 130 \end{pmatrix}.$$

Označíme-li $T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix}$, $\bar{x}_0 = (200, 100)^T$ a $\bar{x}_1 = (170, 130)^T$, můžeme psát

$$\bar{x}_1 = T\bar{x}_0.$$

Složky vektoru $\bar{x}_1$ tedy udávají počet uživatelů výrobku A a výrobku B po jednom měsíci (tyto složky však nemusí vždy být přirozená čísla, neboť se jedná jen o přibližné odhady).

Podobně určíme počet uživatelů jednotlivých výrobků po dvou měsících; tento údaj reprezentujeme vektorem označeným $\bar{x}_2$:

$$\bar{x}_2 = T\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 170 \\ 130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 149 \\ 151 \end{pmatrix}$$

(můžeme také psát $\bar{x}_2 = T\bar{x}_1 = T(T\bar{x}_0) = T^2\bar{x}_0$).

Je zřejmé, že počet uživatelů výrobků A a B po k měsících je dán vztahem

$$\bar{x}_k = T\bar{x}_{k-1} \qquad \text{nebo} \qquad \bar{x}_k = T^k\bar{x}_0.$$

Lze ukázat (viz [13]), že je-li matice T taková, že existuje nějaká její mocnina, jejíž všechny prvky jsou kladné, pak vektory $\bar{x}_k$ konvergují (blíží se) pro velká k k (jednoznačnému) vektoru $\bar{x}$; jakmile je tohoto vektoru dosaženo, už se dalším násobením maticí T nezmění:

$$\bar{x} = T\bar{x}.$$

Navíc vektor $\bar{x}$ nezávisí na volbě počátečního vektoru $\bar{x}_0$.

Abychom určili počet uživatelů výrobků A a B v dlouhodobém výhledu, vypočítáme vektor $\bar{x}$ – stejně jako v předchozím příkladu se jedná o úlohu nalezení vlastního vektoru k vlastnímu číslu 1:

$$\bar{x} = T\bar{x} \iff \bar{T}\mathbf{x} - \bar{x} = \bar{o} \iff (T - I)\bar{x} = \bar{o}.$$

Protože je $T - I = \begin{pmatrix} -0,2 & 0,1 \\ 0,2 & -0,1 \end{pmatrix}$, obdržíme homogenní soustavu:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -0,2 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & -0,3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -0,2 & 0,1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

jejímž obecným řešením je vektor $\bar{x} = (t, 2t)^T$, $t \in \mathbb{R}$. Protože složky vektoru představují počet uživatelů výrobku A, resp. B, musí být jejich součet roven celkovému počtu uživatelů obou výrobků, tzn.

$$t + 2t = 300.$$

Odtud dostaneme $t = 100$, a tedy $\bar{x} = (100, 200)^T$.

V dlouhodobém výhledu bude cca 100 lidí užívat výrobek A a 200 lidí výrobek B (a jak už bylo řečeno, tento výsledek nezávisí na počátečním rozdělení uživatelů výrobků A a B).

Determinant

Kromě známých aplikací determinantů v lineární algebře (např. řešení soustav Cramerovým pravidlem, výpočet inverzní matice) lze jako ilustraci uvést využití determinantů v oblasti geometrie – při netradičních způsobech řešení úloh, které jsou čtenářům běžně známy.

Příklad 13

Užitím determinantu vypočítáme

a) obsah rovnoběžníku určeného vrcholy $[0, 0]$, $[2, -1]$, $[3, 4]$,

b) objem rovnoběžnostěnu určeného vektory (hranami vycházejícími z téhož vrcholu) $(2, -1, 3)$, $(4, -2, 1)$, $(-3, 2, 4)$.

ad a) Obsah rovnoběžníku určeného vrcholy $[0, 0]$, $[a_1, a_2]$, $[b_1, b_2]$ (se čtvrtým vrcholem $[a_1 + b_1, a_2 + b_2]$), tj. obsah rovnoběžníku určeného vektory

$$\bar{a} = (a_1, a_2),\ \bar{b} = (b_1, b_2),$$

je dán vzorcem (nebudeme dokazovat)

$$S = |\det A|,$$

kde A je matice, jejíž sloupce jsou tvořeny vektory $\bar{a}$, $\bar{b}$.
Tedy

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 11.$$

Obsah rovnoběžníku určeného vrcholy $[0, 0]$, $[2, -1]$, $[3, 4]$ je 11.

ad b) objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ je dán vzorcem (nebudeme dokazovat)

$$V = |\det A|,$$

kde A je matice, jejíž sloupce jsou tvořeny vektory $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.
Tedy

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -16 + 24 + 3 - 18 + 16 - 4 = 5.$$

Objem rovnoběžnostěnu určeného vektory (hranami vycházejícími z téhož vrcholu) $(2, -1, 3)$, $(4, -2, 1)$, $(-3, 2, 4)$ je 5.

Příklad 14

Užitím determinantu

a) zjistíme, zda body $[2, -1]$, $[-7, -7]$, $[8, 3]$ leží na téže přímce,

b) najdeme rovnici roviny určené body $[2, 2, -1]$, $[-2, 5, -4]$, $[3, -2, 1]$,
c) najdeme rovnici sféry určené body $[-1, 2, 0]$, $[0, 1, -2]$, $[1, 0, -1]$, $[1, -1, 2]$.

ad a) Obecně, body $[a_1, a_2]$, $[b_1, b_2]$, $[c_1, c_2]$ leží na téže přímce popsané rovnicí $ax + by + c = 0$, právě když souřadnice každého z nich vyhovují této rovnici:

$$\begin{array}{ccccccc} aa_1 & + & ba_2 & + & c & = & 0 \\ ab_1 & + & bb_2 & + & c & = & 0 \\ ac_1 & + & bc_2 & + & c & = & 0. \end{array}$$

Dostali jsme soustavu lineárních rovnic o neznámých a, b, c; ta má netriviální řešení, právě když matice soustavy je singulární, tj. právě když

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

V našem případě je (výpočet ponecháváme jako cvičení)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -7 & -7 & 1 \\ 8 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

a tedy dané body leží na téže přímce.

Stejným způsobem lze zjistit, zda dané body $[a_1, a_2, a_3]$, $[b_1, b_2, b_3]$, $[c_1, c_2, c_3]$ a $[d_1, d_2, d_3]$ leží v jedné rovině; je to právě když

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

ad b) Obecně, leží-li body $[a_1, a_2, a_3]$, $[b_1, b_2, b_3]$, $[c_1, c_2, c_3]$ v rovině popsané rovnicí $ax + by + cz + d = 0$, vyhovují souřadnice každého z bodů této rovnici:

$$\begin{array}{ccccccccc} aa_1 & + & ba_2 & + & ca_3 & + & d & = & 0 \\ ab_1 & + & bb_2 & + & cb_3 & + & d & = & 0 \\ ac_1 & + & bc_2 & + & cd_3 & + & d & = & 0. \end{array}$$

Tato soustava spolu s rovnicí

$$ax + by + cz + d = 0$$

tvoří soustavu čtyř lineárních rovnic o čtyřech neznámých a, b, c, d. Tato soustava má netriviální řešení, právě když matice soustavy je singulární, tj. právě když

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Pokud by dané tři body ležely na téže přímce (tj. neurčovaly by rovinu), příslušný determinant by byl nulový nezávisle na x, y, z, tzn. rovnice $0 = 0$ by neurčovala rovinu.

V našem případě získáme rovnici

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Po výpočtu determinantu (ponecháváme jako cvičení) a úpravě dostaneme rovnici roviny

$$6x - 5y - 13z - 15 = 0.$$

ad c) Hledáme koeficienty a, b, c, d, e v rovnici sféry

$$a(x^2 + y^2 + z^2) + bx + cy + dz + e = 0.$$

Podobně jako v b): leží-li body $[a_1, a_2, a_3]$, $[b_1, b_2, b_3]$, $[c_1, c_2, c_3]$, $[d_1, d_2, d_3]$ na sféře, vyhovují souřadnice každého z nich rovnici sféry:

$$a(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + ba_1 + ca_2 + da_3 + e = 0$$

$$a(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + bb_1 + cb_2 + db_3 + e = 0$$

$$a(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) + bc_1 + cc_2 + dc_3 + e = 0$$

$$a(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2) + bd_1 + cd_2 + dd_3 + e = 0.$$

Spolu s rovnicí

$$a(x^2 + y^2 + z^2) + bx + cy + dz + e = 0$$

obdržíme soustavu pěti lineárních rovnic o neznámých a, b, c, d, e. Tato soustava má netriviální řešení, právě když

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ a_1^2+a_2^2+a_3^2 & a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1^2+b_2^2+b_3^2 & b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1^2+c_2^2+c_3^2 & c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1^2+d_2^2+d_3^2 & d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Tato rovnice je hledanou rovnicí sféry.

V našem případě dostáváme

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Po výpočtu determinantu (ponecháváme jako cvičení) dostaneme rovnici

$$-3x^2 - 3y^2 - 3z^2 - 27x - 21y - 3z + 30 = 0$$

neboli

$$x^2 + y^2 + z^2 + 9x + 7y + z - 10 = 0.$$

Stejným způsobem lze získat např. rovnici kružnice či paraboly (v rovině) určené třemi body.

Další méně známou aplikací determinantů je jejich využití při zjišťování existence společných kořenů dvou polynomů.

Příklad 15
Užitím determinantu zjistíme, zda polynomy

$$f(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2 \quad \text{a} \quad g(x) = 4x^4 - 4x^3 - 9x^2 + x + 2$$

mají společný kořen.

Obecně (viz [26]), dva polynomy

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

a

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0,$$

takové že $n \leq m$ a $a_n \neq 0$ nebo $b_m \neq 0$ mají společný kořen, právě když

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \ldots & b_1 & b_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \ldots & b_1 & b_0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & b_m & b_{m-1} & \ldots & b_1 & b_0 \end{vmatrix} = 0$$

(determinant matice $m + n \times m + n$).

V našem případě dostaneme determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -5 & 2 \\ 4 & -4 & -9 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & -9 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -9 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Tento determinant je roven nule (výpočet ponecháváme jako cvičení) – polynomy f, g mají společný kořen (čtenáři si moho zkontrolovat, že společným kořenem je $x = \frac{1}{2}$, ten však předchozím výpočtem nezískáme – jen zjistíme jeho existenci).

Další využití determinantů je možné v teorii grafů. Pojmy z teorie grafů, použité v následujícím příkladu, si čtenáři případně snadno nastudují.

Příklad 16
Tento příklad vyžaduje znalost základních pojmů z teorie grafů, které jsou však na potřebné úrovni velmi snadno zvládnutelné.

a) Uvažujme neorientovaný graf o vrcholech 1, 2, 3, 4, 5 s množinou hran

$$E = \{\{1,2\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}\},$$

kde $\{i,j\}$ značí hranu spojující vrcholy i a j, přičemž $\{i,j\} = \{j,i\}$.

Graf lze charakterizovat maticí A typu 5×5 definovanou následovně: diagonální prvky a_{ii} budou pro každé $i = 1, ..., 5$ rovny počtu hran obsahujících vrchol i, mimodiagonální prvky a_{ij} $(i \neq j)$ budou rovny -1, pokud je mezi vrcholy i, j hrana (tj. $\{i,j\} \in E$), a rovny 0 v opačném případě. Protože se jedná o neorientovaný graf (a tedy $\{i,j\} = \{j,i\}$), bude matice A symetrická:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Lze ukázat (viz [4]), že počet neidentických koster grafu v neorientovaném grafu je roven hodnotě algebraického doplňku libovolného prvku matice A.

V případě uvažovaného grafu zjistíme počet koster grafu výpočtem algebraického doplňku např. prvku a_{55}:

$$(-1)^{10} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 21.$$

b) Uvažujme orientovaný graf o vrcholech 1, 2, 3, 4 s množinou hran

$$E = \{[1,3]\,, [1,4]\,, [2,1]\,, [3,2]\,, [4,2]\,, [4,3]\}\,,$$

kde $[i,j]$ značí hranu vedoucí z vrcholu i do vrcholu j.

Matice A, charakterizující graf, bude mít pro každé $i = 1, ..., 4$ diagonální prvky a_{ii} rovny počtu hran vstupujících do vrcholu i, a mimodiagonální prvky a_{ij} $(i \neq j)$ budou rovny -1 v případě, že z vrcholu i do vrcholu j vede hrana (tj. $[i,j] \in E$), a rovny 0 v opačném případě. V případě orientovaného grafu $([i,j] \neq [j,i])$ nebude matice A symetrická:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lze ukázat (viz [4]), že počet neidentických kořenových stromů (hranových podgrafů daného orientovaného grafu) s kořenem ve vrcholu i, je roven hodnotě algebraického doplňku prvku a_{ii}.

V případě uvažovaného grafu zjistíme např. počet stromů grafu s kořenem ve vrcholu 1 výpočtem algebraického doplňku prvku a_{11} :

$$(-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

Soustava lineárních rovnic. Metoda nejmenších čtverců

Následující příklady ukazují využití soustav lineárních rovnic a metody nejmenších čtverců pro úlohy z praxe. V některých případech jsou použita data odpovídající reálným údajům zveřejněným na internetu.

Příklad 17

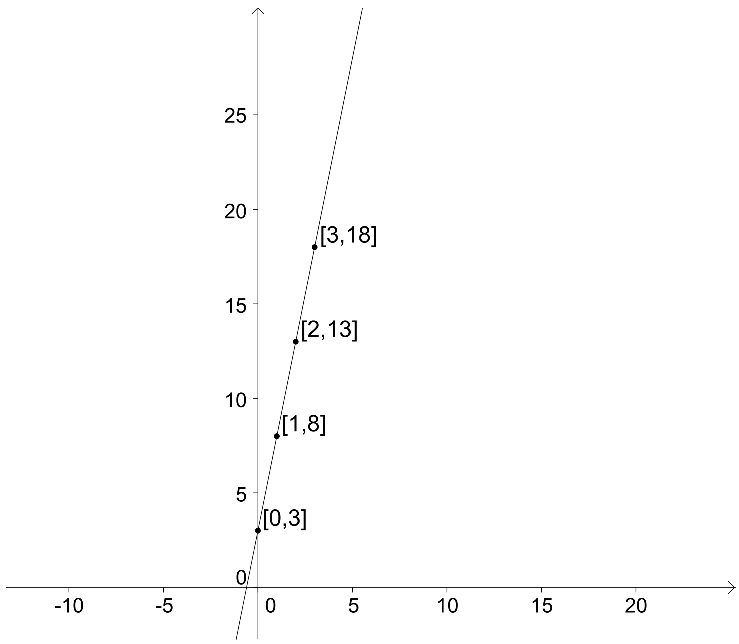
V Tabulce 7 je uvedena průměrná hrubá mzda v České republice v letech 1990, 1995, 2000 a 2005 (zdroj: http://www.kurzy.cz/makroekonomika/mzdy/). Pro snadnější výpočty bez použití výpočetní techniky jsou hodnoty zaokrouhleny na tisíce.

	tis. Kč
1990	3
1995	8
2000	13
2005	18

Tabulka 7. Průměrná hrubá mzda

Na základě těchto údajů odhadneme průměrnou hrubou mzdu v roce 2010[1].

Časový údaj považujeme za nezávislou veličinu, výši průměrné mzdy za veličinu závislou na čase – jedná se o funkci jedné proměnné. Označíme-li rok 1990 jako 0, 1995 jako 1, 2000 jako 2 a 2005 jako 3, dostaneme čtyři body $[0,3]$, $[1,8]$, $[2,13]$, $[3,18]$ v rovině. Hledáme funkci, jejíž graf "co nejlépe" prochází těmito body. Podle obrázku (viz Obr. 1) se zdá, že body leží na přímce.



Obr. 1. Body $[0,3]$, $[1,8]$, $[2,13]$, $[3,18]$

Budeme proto hledat lineární funkci, tj. funkci danou předpisem $y = ax + b$, tak, aby souřadnice daných bodů této rovnici vyhovovaly (dosazujeme za x první

[1]Tato část učebního textu vznikala v roce 2009. Data lze samozřejmě podle potřeby aktualizovat a případně porovnat odhadnuté hodnoty s realitou.

souřadnice bodů, za y druhé souřadnice):

$$\begin{array}{rcrcr} a\cdot 0 & + & b & = & 3 \\ a\cdot 1 & + & b & = & 8 \\ a\cdot 2 & + & b & = & 13 \\ a\cdot 3 & + & b & = & 18. \end{array}$$

Dostali jsme soustavu lineárních rovnic o neznámých a, b, reprezentovanou maticí

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 13 \\ 3 & 1 & 18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Řešením soustavy je $a = 5$, $b = 3$. To je velmi překvapivé zjištění – soustava má řešení a dané body leží přesně na přímce! Rovnice této přímky je

$$y = 5x + 3.$$

Pro odhad průměrné mzdy v roce 2010 stačí do této rovnice dosadit $x = 4$ (hodnota odpovídající roku 2010, tj. hodnota následující po hodnotě odpovídající roku 2005) – dostaneme $y = 23$.

Příklad 18

Tabulka 8 udává podíl domácností vybavených výpočetní technikou (zdroj: http://www.czso.cz/cz/cr_1989_ts/0803.pdf) Pro snadnější výpočty jsou údaje zaokrouhleny.

	%
1990	3
1995	7
2000	21
2005	42

Tabulka 8. Vybavení domácností výpočetní technikou

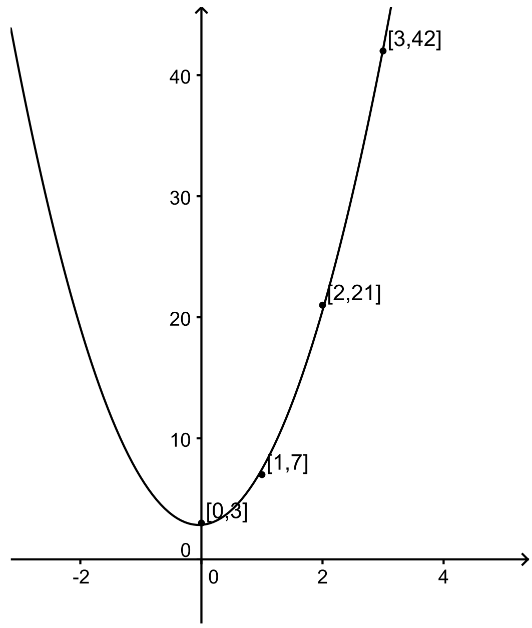
Podobně jako v Příkladu 17 označíme rok 1990 jako 0, 1995 jako 1, 2000 jako 2 a 2005 jako 3 a dostaneme body $[0, 3]$, $[1, 7]$, $[2, 21]$, $[3, 42]$. Podle obrázku (viz Obr. 2) je vidět, že body neleží na přímce, ale spíše na parabole.

Nalezneme proto metodou nejmenších čtverců parabolu, která tyto body nejlépe aproximuje, vypočítáme chybu a odhadneme podíl domácností vybavených výpočetní technikou v roce 2010.

Dosadíme souřadnice daných bodů do rovnice paraboly $y = ax^2 + bx + c$ a obdržíme soustavu lineárních rovnic o neznámých a, b, c

$$\begin{array}{rcrcrcr} a\cdot 0 & + & b\cdot 0 & + & c & = & 3 \\ a\cdot 1 & + & b\cdot 1 & + & c & = & 7 \\ a\cdot 4 & + & b\cdot 2 & + & c & = & 21 \\ a\cdot 9 & + & b\cdot 3 & + & c & = & 42 \end{array}$$

reprezentovanou maticí



Obr. 2. Body $[0,3]$, $[1,7]$, $[2,21]$, $[3,42]$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 1 & 21 \\ 9 & 3 & 1 & 42 \end{array}\right).$$

Tato soustava nemá řešení (výpočet ponecháváme jako cvičení) – dané čtyři body neleží na parabole. Použijeme metodu nejmenších čtverců – nalezneme řešení $\tilde{x}$ rovnice

$$A^T A\overline{x} = A^T\overline{b}.$$

V tomto případě máme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 21 \\ 42 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Nejprve vypočítáme

$$A^T A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 98 & 36 & 14 \\ 36 & 14 & 6 \\ 14 & 6 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A^T\overline{b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 21 \\ 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 469 \\ 175 \\ 73 \end{pmatrix}$$

a dosadíme do rovnice $A^T A\bar{x} = A^T\bar{b}$

$$\begin{pmatrix} 98 & 36 & 14 \\ 36 & 14 & 6 \\ 14 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 469 \\ 175 \\ 73 \end{pmatrix}.$$

Dostali jsme soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 98 & 36 & 14 & 469 \\ 36 & 14 & 6 & 175 \\ 14 & 6 & 4 & 73 \end{array}\right),$$

jejímž řešením je (výpočet neuvádíme)

$$a = 4,25, \quad b = 0,35, \quad c = 2,85 \qquad \text{neboli} \qquad \tilde{x} = (4,25,\ 0,35,\ 2,85)^T.$$

Hledaná rovnice paraboly je

$$y = 4,25x^2 + 0,35x + 2,85.$$

Vypočítáme ještě chybu řešení metodou nejmenších čtverců $||\bar{e}|| = ||\bar{b} - A\tilde{x}||$; nejprve vypočítáme $A\tilde{x}$:

$$A\tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,85 \\ 7,45 \\ 20,55 \\ 42,15 \end{pmatrix}$$

a dostaneme

$$||\bar{e}|| = ||\bar{b} - A\tilde{x}|| = ||(3,7,21,42)^T - (2,85,\ 7,45,\ 20,55,\ 42,15)^T|| =$$

$$= ||(0,15,\ -0,45,\ 0,45,\ -0,15)^T|| =$$
$$= \sqrt{0,0225 + 0,2025 + 0,0225 + 0,2025} = \sqrt{0,45}.$$

Dosazením $x = 4$ do rovnice paraboly $y = 4,25x^2 + 0,35x + 2,85$ odhadneme ještě podíl domácností vybavených výpočetní technikou v roce 2010:

$$y = 72,25 \cong 72.$$

S využitím dat v Tabulce 8 odhadujeme, že podíl domácností vybavených výpočetní technikou v roce 2010 bude činit 72%.

Je však zřejmé, že pro další odhady již tato parabola sloužit nemůže – dosazením $x = 5$ do její rovnice bychom dostali výsledek překračující 100%.

SVD rozklad

Následuje popis problému z praxe, při jehož řešení lze využít SVD rozkladu matic.

Příklad 19

SVD rozklad má široké využití, a to zejména v praxi. Velmi zajímavé je využití SVD rozkladu pro úsporu množství dat při jejich úschově či přenosu – např. při úschově či přenosu digitálního obrazu elektronickou formou. Uvedeme zde pouze hlavní myšlenku. Digitální černobílý obraz např. 340×280 pixelů sestává z 340×280 bodů různých stupňů šedi. Očíslujeme-li tyto stupně šedi čísly 0–255, můžeme obrázek reprezentovat maticí A typu 340×280 (jejíž prvky budou čísla od 0 do 255) – to je poměrně značný objem dat. Některé části obrázku však mohou být méně důležité – například jednolitá plocha pozadí. Ukazuje se, že tyto partie obrázku určitým způsobem souvisí s malými singulárními čísly matice A, a že k popisu důležitých partií stačí jen větší singulární čísla a jim příslušné levé a pravé singulární vektory.

Uvažujme SVD rozklad matice A ve tvaru

$$A = \sigma_1 \bar{u}_1 \bar{v}_1^T + \ldots + \sigma_r \bar{u}_r \bar{v}_r^T,$$

kde $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ jsou nenulová singulární čísla matice A řazená sestupně podle velikosti, $\bar{u}_i$, resp. $\bar{v}_i$ jsou příslušné levé, resp. pravé singulární vektory. Zanedbáme-li sčítance odpovídající menším singulárním číslům, popíše zbývající součet

$$\sigma_1 \bar{u}_1 \bar{v}_1^T + \ldots + \sigma_k \bar{u}_k \bar{v}_k^T \quad (k \leq r)$$

od jistého k obrázek s dostatečnou přesností. Úspora tak může být značná – v případě obrázku 340×280 pixelů může stačit prvních $20 - 30$ sčítanců. Místo 340×280 čísel (prvků matice A) tak stačí uschovat (přenést) $20 - 30$ singulárních čísel a jim odpovídajících 340-ti složkových vektorů $\bar{u}_i$ a 280-ti složkových vektorů $\bar{v}_i$.

3. Závěrečné shrnutí II. části

Cílem učebního textu Základy lineární algebry je zpřístupnit základy lineární algebry i studentům s horšími předpoklady pro studium matematiky. Pro dosažení tohoto cíle jsou vykládané pojmy formulovány co nejjednodušeji, formální zápisy jsou často doplněny či zcela nahrazeny slovními formulacemi. Výklad je ilustrován či přímo prováděn na řešených příkladech, což čtenářům usnadňuje pochopení.

Jako ukázka možného využití vykládaného matematického aparátu jsou v textu uvedeny i jednoduché motivační a aplikační příklady. Volba pouze takových příkladů, které nevyžadují žádné odborné znalosti z jiných oborů, umožňuje použití textu studentům různých oborů.

V textu je často poukazováno na souvislosti s pojmy a postupy již dříve vyloženými.

Pro procvičení vyložené látky je text doplněn řadou neřešených příkladů, a pro kontrolu správného pochopení teorie jsou zařazeny kontrolní otázky – tvrzení, jejichž pravdivost mají čtenáři posoudit.

Dvouúrovňová struktura textu umožňuje čtenářům zvolit úroveň, jakou potřebují, a v případě volby obtížnější úrovně si vybrat podle vlastních schopností způsob nastudování (nejdříve část I, pak část II, nebo přímo část II).

Text Základy lineární algebry poskytuje podklady pro studium lineární algebry, metodické postupy použité v tomto textu jsou však použitelné nejen pro výklad lineární algebry, ale i jiných matematických oborů (jak ukazují i zkušenosti s používáním textů [1], resp. [12] při výuce základů matematické analýzy).

Závěr

Výuka matematiky na školách netechnického směru má v první řadě zajistit, aby studenti disponovali matematickým aparátem potřebným při výuce odborných předmětů. Zároveň však v obecnější rovině může být platformou pro získání dovedností uplatnitelných v odborné praxi – studenti se učí precizně formulovat myšlenky, exaktně se vyjadřovat, věcně argumentovat. V podmínkách, kdy je výuka matematiky drasticky redukována (tak, jak je tomu např. na VŠE v Praze), není z časových důvodů pro rozvoj takovýchto schopností v rámci výuky prostor. V takovém případě nezbývá než zaměřit se na primární cíl – naučit studenty základní pojmy a početní postupy, které uplatní při následném studiu odborných předmětů. Vykládanou látku je potřeba podávat co nejjednodušeji a nejsrozumitelněji, důležité je neodradit a neznechutit studenty (kteří nezřídka na vysoké školy už přicházejí s negativním vztahem k matematice).

V této práci je na historii výuky matematiky na VŠE v Praze dokumentován trend redukce výuky matematiky (viz kapitola 1 části I). Tato redukce by s sebou měla nést i změny v koncepci výuky (viz kapitola 2 části I). Odborné katedry na VŠE požadují, aby kurz matematiky vybavil studenty základním matematickým aparátem potřebným při výuce odborných předmětů, a aby přitom studenti nebyli příliš zatěžováni teorií. Studentům je teorie vykládána na přednáškách a připomínána na cvičeních v souvislosti s řešením příkladů, výklad však nepřináší žádoucí výsledky. Z důvodů nízkých hodinových dotací probíhají jak přednášky, tak i cvičení k základnímu kurzu matematiky tak, že studenti víceméně pasivně přijímají informace od vyučujících, aniž by během výuky měli prostor pro samostatné procvičování. Ukazuje se (viz kapitola 3 části I), že zatímco početní postupy jsou studenti schopni tímto způsobem celkem dobře akceptovat, pochopení teorie a zejména samostatné formulování činí studentům značné potíže. Výsledky testů zadaných studentům VŠE (viz kapitola 3 části I) potvrzují zkušenost získanou během ústního zkoušení – studenti nejsou schopni přesně formulovat matematické pojmy, a často je i z písemných formulací v testu zřejmé, že o definovaném pojmu nemají správnou představu. Zlepšení výsledků by v tomto směru přineslo procvičování studentů ve formulacích upozorňováním na chyby, kterých se dopouštějí. To však při nízkých hodinových dotacích není v rámci řádné výuky možné. Pokud jsou studenti přesto nuceni naučit se zcela přesné znění definic a matematických vět, vede to ve většině případů k pouhému memorování sdělení, jejichž obsah zůstane studentům utajen. Jakkoliv by schopnost precizních formulací byla žádoucí nejen v oblasti matematiky, znamená požadavek vyslovení přesného znění vět a definic bez předchozího nácviku (pod odborným dohledem) pro studenty s horšími předpoklady pro studium matematiky pouze zátěž na paměť, nikoliv tolik potřebné rozvíjení logického myšlení. V důsledku se tak prohlubuje odpor studentů ke studiu matematiky. Na základě výsledků testů (viz kapitola 3 části I) lze navíc učinit závěr, že nastudování definic za těchto podmínek nezvýšilo schopnost řešit příklady využívající příslušných pojmů.

Jako přínosnější se proto jeví nelpět na zcela přesných formulacích matematických pojmů a tvrzení. Studenti by spíše měli umět popsat podstatu věci, třeba i nematematickým jazykem a s drobnými nepřesnostmi, které jsou schopni na základě připomínek pedagoga korigovat. Důraz by měl být kladen na to, aby studenti měli na paměti, že při použití matematických metod při řešení odborných problémů musí bedlivě zvažovat, je-li určitá metoda pro řešení daného problému přípustná (ověřování předpokladů). Místo schopnosti samostatného exaktního formulování matematických tvrzení by měla být preferována schopnost činit správné závěry – na co lze z daného výsledku usuzovat (a co naopak z výsledku nevyplývá).

Tomu by měl být přizpůsoben i způsob výkladu látky – jak při výuce, tak v příslušných učebních materiálech. Jednoduchý výklad, spíše slovní, oproštěný od přemíry formálních zápisů, spojený s použitím vhodných příkladů, pomůže k lepší srozumitelnosti. Studentům tak poznání, že jsou schopni látku akceptovat, přináší leckdy nečekanou radost. Ve vzácnějších případech studenti shledávají, že pro ně matematika není předmětem tak obtížným, jak zprvu očekávali, ztratí tak předchozí respekt, který je odrazoval od studia matematiky, a poupraví pak svůj třeba i dříve negativní postoj k matematice.

Učební text Základy lineární algebry (viz kapitola II a samostatná příloha) se snaží tyto ambice naplnit v oblasti lineární algebry.

Literatura

[1] BATÍKOVÁ, B., HENZLER, J., HLADÍKOVÁ, H., NEŠVEROVÁ, E., OTAVOVÁ, M., SÝKOROVÁ, I., ULRYCHOVÁ, E., VALENTOVÁ, E.: *Učebnice matematiky pro ekonomické fakulty.* Oeconomica, Praha, 2009.

[2] COUFAL, J., KLŮFA, J.: *Matematika I (pro Vysokou školu ekonomickou).* VŠE Praha, 1994.

[3] FRIEDBERG, S. H., INSEL, A. J., SPENCE, L. E.: *Linear Algebra.* 4th edition, Prentice Hall, 2003.

[4] GRIMALDI, R. P., LOPEZ, R.J.: The Matrix-Tree Theorem, in: *Linear Algebra Gems – Assets for Undergraduate Mathematics,* ed. by Carlson, D., Johnson, C. R. , Lay, D. C., Porter, A. D., Mathematical Association of America, 2002.

[5] HORSKÝ, Z.: *Učebnice matematiky pro posluchače VŠE.* SNTL Praha/ALFA Bratislava, 1968.

[6] HORSKÝ, Z.: *Učebnice matematiky pro posluchače VŠE.* SNTL Praha/ALFA Bratislava, 1987.

[7] KAŇKA, M., COUFAL, J., KLŮFA, J.: *Učebnice matematiky pro ekonomy.* Ekopress, Praha, 2007.

[8] KAŇKA, M., HENZLER, J.: *Matematika II (pro Vysokou školu ekonomickou).* VŠE Praha, 1995.

[9] KAŇKA, M., HENZLER, J.: *Matematika 2.* Ekopress, Praha, 2003.

[10] KLŮFA, J.: *Matematika pro studenty VŠE.* Ekopress, Praha, 2011.

[11] KLŮFA, J., COUFAL, J.: *Matematika 1.* Ekopress, Praha, 2003.

[12] Kolektiv katedry matematiky: *Matematika pro 4MM101.* VŠE/Oeconomica, Praha, 2006.

[13] POOLE, D.: *Linear Algebra: A Modern Introduction.* Brooks/Cole, 2003.

[14] RYCHLÝ, R.: *Základy vyšší matematiky*, díl první. VŠE/SPN Praha, 1962.

[15] RYCHLÝ, R.: *Základy vyšší matematiky*, díl druhý. VŠE/SPN Praha, 1962.

[16] ŠVAGR, A. a kolektiv: *Studijní program.* VŠE Praha, 1994.

[17] ULRYCHOVÁ, E.: *Základní kurz matematiky na VŠE - historie.* In Mundus Symbolicus 15, VŠE Praha, 2007, 199–206.

[18] ULRYCHOVÁ, E.: *Základní učební texty z matematiky na VŠE Praha v letech 1954-2009.* In Bečvář, J., Bečvářová, M. (ed.): 31. mezinárodní konference Historie matematiky, Matfyzpress, Praha, 2010, 263–274.

[19] ULRYCHOVÁ, E.: *Aplikační příklady v základní literatuře pro kurz matematiky na VŠE.* In Bečvář, J., Bečvářová, M. (ed.): 33. mezinárodní konference Historie matematiky, Matfyzpress, Praha, 2012, 269–272

[20] VESELÝ, F.: *Úvod do počtu infinitesimálního.* VŠE/SPN Praha, 1954.

[21] VESELÝ, F.: *Úvod do počtu infinitesimálního II.* VŠE/SPN Praha, 1955.

[22] VESELÝ, F., RYCHLÝ, R.: *Matematika - díl první.* VŠE/SPN Praha, 1959.

[23] VESELÝ, F., RYCHLÝ, R.: *Matematika - druhý díl.* VŠE/SPN Praha, 1959.

[24] ZDRÁHALA, R. a kolektiv: *Studijní program Vysoké školy ekonomické v Praze (na školní rok 1972-73).* Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1972.

[25] *Prague School of Economics* - Prospectus, VŠE Praha, 1968.

[26] *Applications of Linear Algebra*, http://aix1.uottawa.ca/ jkhoury/app.htm

Seznam tabulek

I. Výuka lineární algebry

II. Učební text Základy lineární algebry (komentář)

Přílohy

Statistické modely
Samostatně svázaná příloha: učební text Základy lineární algebry