Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Karel Tůma

Fourierova metoda pro řešení parciálních diferenciálních rovnic

Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Milan Pokorný, Ph.D.
Studijní program: Matematika, obecná matematika

2006

Děkuji Mgr. Milanu Pokornému, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady a připomínky, které jsem uplatnil při psaní bakalářské práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 26. 5. 2006 Karel Tůma

Obsah

Název práce: Fourierova metoda pro řešení parciálních diferenciálních rovnic
Autor: Karel Tůma
Katedra (ústav): Matematický ústav UK
Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Milan Pokorný, Ph.D.
e-mail vedoucího: pokorny@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci odvodíme rovnici vedení tepla a rovnici struny. Ty pak následně řešíme v jedné prostorové dimenzi pomocí Fourierovy metody spočívající v separaci proměnných a nalezení řešení ve tvaru nekonečné řady. Zabýváme se třemi různými okrajovými podmínkami. Dále vyšetřujeme vlastnosti řešení těchto dvou problémů. Provádíme analýzu konvergence řešení ve tvaru řad v závislosti na počátečních podmínkách úloh. Ukážeme, že pomocí Fourierovy metody lze řešit také stacionární úlohy, konkrétně se zabýváme Laplaceovou rovnicí s okrajovými podmínkami na různých oblastech (kruh, výseč, výseč mezikruží, mezikruží).

Klíčová slova: Parciální diferenciální rovnice, Fourierova metoda, rovnice vedení tepla, rovnice struny.

Title: Fourier method for solving partial differential equations
Author: Karel Tůma
Department: Matematický ústav UK
Supervisor: Mgr. Milan Pokorný, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: pokorny@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we derive the heat equation and the wave equation. They are solved in one space dimension by the Fourier method that lies in a separation of variables and finding the solution in the form of an infinite series. We study three different boundary conditions. Further we investigate properties of the solutions of these two problems. We analyse a convergence of the solutions in the dependence on initial conditions of the problems. We show that also stationary equations can be solved by the Fourier method. Especially we solve Laplace equation with boundary conditions on several areas (a circle, a sector, a sector of an annulus, an annulus).

Keywords: Partial differential equations, Fourier method, heat equation, wave equation.

Kapitola 1

Úvod

Parciální deferenciální rovnice lze řešit různými způsoby. Jednou z možností je metoda charakteristik. Tato metoda ovšem funguje dobře jen na neomezených oblastech. Chceme-li počítat řešení rovnice v omezené oblasti, můžeme použít Fourierovy metody.

Předpokládejme, že máme lineární parciální diferenciální rovnici splňující homogenní okrajovou podmínku

$$au(\vec{x}) + b\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial \vec{n}} = 0$$

na hranici oblasti, kde $\vec{n}$ je jednotková normála hranice. Přepokládáme-li řešení v separovaném tvaru, najdeme s pomocí okrajových podmínek požadavky na separované funkce. Součin odpovídajících separovaných funkcí nám dává řešení rovnice. Jelikož jde o lineární rovnici, je i součet libovolných dvou řešení také řešením. Fourierova metoda spočívá v sečtení těchto řešení do nekonečné řady. Díky ortogonalitě a úplnosti oddělených funkcí a s užitím počáteční podmínky dostáváme koeficienty v součtu funkcí řešících rovnici. Konkrétně je Fourierova metoda použita pro homogenní rovnici vedení tepla a rovnici struny.

Důležitou součástí použití této metody je dokázání toho, že nekonečná řada nalezená zmíněným postupem je skutečně řešením. V této práci jsou zformulovány věty určující, kdy jsou konkrétní dvě rovnice klasickým řešením. Jednoznačnost řešení tepelné rovnice plyne pak přímo z principu maxima (např. v [1], str. 172). Věta o jednoznačnosti řešení vlnové rovnice je zformulována v [6], str. 51. Fourierova metoda je popsána v [1], str. 114 – 131 a [5], str. 91 – 96. Odvození rovnice vedení tepla vychází z [5], str. 38, rovnici struny jsme odvodili podle [1], str. 28.

Kapitola 2

Rovnice vedení tepla

2.1 Odvození rovnice vedení tepla

Mějme těleso T zaujímající oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Rovnici vedení tepla odvodíme z bilance energií

$$Q_0 - Q_1 = Q_2, \tag{2.1}$$

kde Q_0 je teplo vytvořené tepelnými zdroji $G(\vec{x}, t)$ umístěnými v tělese T, Q_1 je teplo, které protéká hranicí $\partial\Omega$, a Q_2 je změna tepla tělesa T odpovídající změně teploty $u(\vec{x}, t)$. Dále předpokládejme, že těleso T má hustotu $\rho(\vec{x})$, měrnou tepelnou kapacitu $c(\vec{x})$ a součinitel vnitřní tepelné vodivosti $\lambda(\vec{x})$.

Nyní určíme, čemu jsou rovny jednotlivá tepla. Tepelné zdroje $G(\vec{x}, t)$ představující tepelný výkon vztažený na jednotku objemu za časový okamžik δt vyprodukují energii

$$Q_0 = \delta t \int_\Omega G(\vec{x}, t) \, \mathrm{d}x.$$

Přes hranici $\partial\Omega$ proteče za čas δt teplo o velikosti

$$Q_1 = \delta t \int_{\partial\Omega} \vec{q}(\vec{x}, t).\vec{n}(\vec{x}) \, \mathrm{d}S,$$

kde $\vec{n}$ je jednotková vnější normála k hranici $\partial\Omega$ v bodě $\vec{x}$ a $\vec{q}(\vec{x}, t)$ je hustota tepelného toku, který můžeme určit z Fourierova zákona

$$\vec{q}(\vec{x}, t) = -\lambda \nabla u(\vec{x}, t).$$

Dosazením zpět do vztahu pro Q_1 dostáváme

$$Q_1 = -\delta t \int_{\partial\Omega} [\lambda \nabla u(\vec{x}, t)] \, .\vec{n}(\vec{x}) \, \mathrm{d}S.$$

Nakonec ještě určíme vztah mezi teplem a změnou teploty. Energie potřebná k zahřátí tělesa T o teplotu δu je rovna

$$Q_2 = \int_\Omega c(\vec{x})\rho(\vec{x})\delta u(\vec{x},t)\,\mathrm{d}x.$$

Změna teploty δu, ke které dojde mezi časem t a $t_2 = t + \delta t$, je rovna

$$\delta u(\vec{x},t) = u(\vec{x},t_2) - u(\vec{x},t) = \frac{\partial u(\vec{x},t^*)}{\partial t}\delta t,$$

kde jsme použili Lagrangeovu větu o střední hodnotě za předpokladu spojitosti u a $t^* \in [t, t_2]$. Dosazením do vztahu pro Q_2 dostáváme

$$Q_2 = \delta t \int_\Omega c(\vec{x})\rho(\vec{x})\frac{\partial u(\vec{x},t^*)}{\partial t}\,\mathrm{d}x.$$

Dosazením do bilance energie (2.1) dostáváme rovnici

$$\delta t \left(\int_\Omega G(\vec{x},t)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} [\lambda \nabla u(\vec{x},t)]\,.\vec{n}(\vec{x})\,\mathrm{d}S - \int_\Omega c(\vec{x})\rho(\vec{x})\frac{\partial u(\vec{x},t^*)}{\partial t}\,\mathrm{d}x \right) = 0.$$

Na druhý integrál v předchozím vztahu užijeme větu o divergenci a získáváme

$$\delta t \int_\Omega \left[G(\vec{x},t) + \mathrm{div}\,[\lambda \nabla u(\vec{x},t)] - c(\vec{x})\rho(\vec{x})\frac{\partial u(\vec{x},t^*)}{\partial t} \right] \mathrm{d}x = 0.$$

Rovnici podělíme δt a provedeme limitu $\delta t \to 0$, pak $t^* \to t$. Předchozí bilanci můžeme ale provádět nejen v Ω, ale i v každé její libovolné podoblasti, proto musí být argument integrálu roven nule. Předpokládáme-li navíc, že $c, \rho, \lambda =$ konst., můžeme λ vytknout z divergence a už přímo napsat rovnici pro vedení tepla

$$\frac{\partial u(\vec{x},t)}{\partial t} - \frac{\lambda}{c\rho}\Delta u(\vec{x},t) = \frac{G(\vec{x},t)}{c\rho}.$$

Uvažujme speciálně za těleso tyč (jednorozměrný případ), jejíž konce jsou umístěny v bodech 0 a 1. Dále předpokládejme, že nemá žádné tepelné zdroje ($G(\vec{x},t) \equiv 0$). Pak můžeme problém vedení tepla zapsat ve tvaru

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 \quad \text{na} \quad (0,1)\times(0,\infty), \tag{2.2}$$

kde $a^2 = \lambda/(c\rho)$ a dolní indexy značí parciální derivaci podle t, resp. podle x.

2.2 Vedení tepla 1

Řešíme rovnici vedení tepla (2.2) s počáteční podmínkou $u(x,0) = u_0(x)$ a okrajovými podmínkami $u(0,t) = 0, u(1,t) = 0$ pro všechna t.

Předpokládejme řešení separující obě proměnné $u(x,t) = e(x)v(t)$. Po dosazení do rovnice (2.2) dostáváme

$$e(x)\dot{v}(t) - a^2 v(t)e''(x) = 0 \;\Rightarrow\; a^2\frac{e''(x)}{e(x)} = \frac{\dot{v}(t)}{v(t)}, \tag{2.3}$$

a tedy výraz na levé straně je závislý jen na x, přičemž výraz na pravé straně jen na t, z toho vyplývá, že oba zlomky musí být rovny konstantě. Z tohoto důvodu označme

$$\lambda = -\frac{e''(x)}{e(x)}. \tag{2.4}$$

Tento vztah nám spolu s okrajovými podmínkami $e(0) = e(1) = 0$ dává omezení na λ. Ukážeme, že netriviální řešení $u(x,t)$ dostáváme jen pro $\lambda > 0$. Rovnici (2.4) přenásobme $e^2(x)$ a integrujme od 0 do 1. Při integraci per partes vypadne podle okrajových podmínek hraniční člen ($e(0) = e(1) = 0$).

$$\lambda\int_0^1 e^2(x) = -\int_0^1 e(x)e''(x) \overset{\text{PP}}{=} -\left([e(x)e'(x)]_0^1 - \int_0^1 e'^2(x)\right) = \int_0^1 e'^2(x).$$

Pro $e(x)$ nenulové dostáváme, že nutně $\lambda > 0$ a pro ně vyřešíme z (2.4)

$$e(x) = c_1 \sin\sqrt{\lambda}x + c_2\cos\sqrt{\lambda}x,$$

to dosadíme do okrajových podmínek. Dostáváme

$$\begin{aligned} 0 &= e(0) = c_2, \\ 0 &= e(1) = c_1\sin\sqrt{\lambda}, \end{aligned}$$

nemá-li být $e(x)$, a tedy i $u(x,t)$ identicky roven nule, musí být $\lambda = k^2\pi^2$, $k \in \mathbb{Z}$. Z označení (2.4) a rovnice (2.3) můžeme určit čemu je rovno $v(t)$, tedy

$$\dot{v} + a^2\lambda v = 0 \;\Rightarrow\; v(t) = v(0)\,\mathrm{e}^{-a^2\lambda t},$$

kde $v(0)$ je hodnota v v čase $t = 0$. Tu určíme z počáteční podmínky

$$u_0(x) = u(x,0) = e(x)v(0) = e(x)a_0,$$

kde a_0 je nové označení pro $v(0)$. Nyní už víme, čemu je rovno $u(x,t)$. Obě funkce $e(x), v(t)$ máme vyjádřené pomocí konstanty λ, která je omezená vztahem $\lambda = k^2\pi^2$. Pro různá k dostáváme různá řešení. Tedy

$$u_k(x,t) = v_k(x,t)e_k(x,t) = a_k\,\mathrm{e}^{-a^2k^2\pi^2 t}\sin(k\pi x),$$

kde a_k nyní obsahuje i multiplikativní konstantu ze sinu.

Rovnici (2.2) řeší také každý součet u_k. To nás přivádí k tomu hledat řešení ve tvaru nekonečné řady

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \, \mathrm{e}^{-a^2k^2\pi^2 t} \sin(k\pi x),$$
$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x),$$

kde druhá rovnice je patřičně upravená počáteční podmínka.

Systém $\{\sin(k\pi x)\}_{k=1}^{\infty}$ tvoří ortogonální úplnou bázi prostoru $L^2[0,1]$. To se nám bude hodit ke spočítání hodnot koeficientů a_k.

$$\int_0^1 u_0(x)\sin(k\pi x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{l=1}^{\infty} a_l \sin(l\pi x)\sin(k\pi x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \sum_{l=1}^{\infty} a_l \int_0^1 \sin(l\pi x)\sin(k\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_k}{2},$$

přičemž sumaci a integrál můžeme přehodit, neboť suma konverguje stejnoměrně na $[0,1]$ a poslední rovnost vyplývá z ortogonality (polovina – ověření výpočtem). Takže je-li splněna počáteční podmínka, musí být nutně

$$a_k = 2\int_0^1 u_0(x)\sin(k\pi x)\,\mathrm{d}x.$$

Naopak, pro taková a_k je z úplnosti systému splněna počáteční podmínka, protože

$$\int_0^1 \left(u_0(x) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x) \right) \sin(l\pi x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall l \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ u_0(x) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x) = 0.$$

Celkově tedy dostáváme

$$u(x,t) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-a^2k^2\pi^2 t} \sin(k\pi x) \int_0^1 u_0(x)\sin(k\pi x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.5}$$

2.3 Vedení tepla 2

Uvažujme počáteční podmínku $u(x,0) = u_0(x)$ a smíšené okrajové podmínky $u(0,t) = 0, u_x(1,t) = 0$ pro všechna t.

Separujeme $u(x,t) = v(t)e(x)$. Stejně jako části Vedení tepla 1 dospějeme k závěru, že $\lambda > 0$; opět dostáváme

$$e(x) = c_1 \sin \sqrt{\lambda}x + c_2 \cos \sqrt{\lambda}x$$

a okrajové podmínky dávají

$$\begin{aligned} 0 &= e(0) = c_2, \\ 0 &= e'(1) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}x \end{aligned}$$

a opět pro netriviálnost řešení nutně chceme, aby $\sqrt{\lambda} = (k + 1/2)\pi$. Dostáváme tedy

$$e(x) = c_1 \sin [(k + 1/2)\, \pi x].$$

Separovaná funkce $v(t)$ vyjde stejně jako v části Vedení tepla 1, proto celkově po sečtení dostáváme

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \, \mathrm{e}^{-a^2(k+1/2)^2\pi^2 t} \sin [(k + 1/2)\, \pi x], \\ u_0(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin [(k + 1/2)\, \pi x]. \end{aligned}$$

Systém funkcí $\{\sin (k + 1/2)\pi x\}$ je opět úplný ortogonální se stejnou normou jako minule a pro koeficienty vychází

$$a_k = 2 \int_0^1 u_0(x) \sin [(k + 1/2)\, \pi x] \, \mathrm{d}x.$$

Celkem pak tedy dostáváme

$$u(x,t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-a^2(k+1/2)^2\pi^2 t} \sin [(k + 1/2)\, \pi x] \int_0^1 u_0(x) \sin [(k + 1/2)\, \pi x] \, \mathrm{d}x. \tag{2.6}$$

2.3.1 Vedení tepla 3

Uvažujme počáteční podmínku $u(x,0) = u_0(x)$ a okrajové podmínky $u_x(0,t) = 0, u_x(1,t) = 0$ pro všechna t.

Separujeme $u(x,t) = v(t)e(x)$. Stejným postupem jako v části Vedení tepla 1 dostaneme

$$e(x) = c_1 \cos (k\pi x).$$

Separovaná funkce $v(t)$ vyjde stejně jako v části Vedení tepla 1, proto celkově po posčítání dostáváme

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \,\mathrm{e}^{-a^2k^2\pi^2 t} \cos(k\pi x),$$
$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\pi x).$$

Systém funkcí $\{\cos k\pi x\}$ je úplný ortogonální se stejnou normou jako v části Vedení tepla 1 a 2 a pro koeficienty vychází

$$a_k = 2\int_0^1 u_0(x)\cos(k\pi x)\,\mathrm{d}x.$$

Celkem pak tedy dostáváme

$$u(x,t) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-a^2k^2\pi^2 t}\cos(k\pi x)\int_0^1 u_0(x)\cos(k\pi x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.7}$$

2.4 Vlastnosti řešení rovnice vedení tepla

Nyní se podíváme, kdy jde v případě rovnice vedení tepla o klasické řešení a co víme o diferencovatelnosti řešení. Nejprve si zformulujeme větu (viz [2], str. 139).

Věta 2.4.1 (Weierstrass o derivacích). *Buď $s_n(x) = \sum_k^n f_k(x)$ částečný součet řady. Nechť existují $s_n'(x)$ na (a,b) pro všechna $n = 1,2,3,\dots$ Nechť dále $s_n'(x) \rightrightarrows_{\mathrm{loc}}$ na (a,b) a existuje bod $x_0 \in (a,b)$, že $s_n(x_0)$ konverguje.*

Pak $s_n(x) \rightrightarrows_{\mathrm{loc}}$ na (a,b), označíme-li $s(x) := \lim_{n\to\infty} s_n(x)$, pak

$$\lim_{n\to\infty} s_n'(x) = s'(x),\ \forall x \in (a,b).$$

Nyní ověříme, že řešení $u(x,t)$ v případě rovnice vedení tepla je nekonečně diferencovatelné. Pro zajištění (lokálně) stejnoměrné konvergence na $[0,1]$ řad (2.5), (2.6) a (2.7) budeme požadovat $u_0(x) \in L^1[0,1]$. Konvergentní majoranta vypadá pak $\forall t > \delta > 0$ následovně

$$2\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-a^2(k+1)^2\pi^2\delta}\int_0^1 |u_0(x)|\,\mathrm{d}x,$$

neboť $\sin x \le 1$. Pro ověření diferencovatelnosti $u(x,t)$ použijeme Weierstrassovu větu. Pro pevné, a libovolné $t > \delta$ vypadá konvergentní majoranta řad (2.5), (2.6) a (2.7) po n derivováních

$$2\sum_{k=1}^{\infty} k^n \,\mathrm{e}^{-a^2(k+1)^2\pi^2\delta}\int_0^1 |u_0(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Tato řada konverguje pro každé $n = 1, 2, 3\dots$ Předpoklady Weierstrassovy věty jsou splněny, neboť původní nederivovaná řada konverguje nejen bodově v jednom bodě z $[0, 1]$, ale dokonce stejnoměrně na celém intervalu. Navíc libovolná nekonečná suma derivace argumentu řady konverguje stejnoměrně na daném intervalu, a tedy jsou splněny předpoklady Weierstrassovy věty pro libovolnou derivaci. Tím se myslí, že jakmile zjistíme z věty, že suma derivací konverguje k derivaci řady, tak ji označíme jako novou řadu a s tou pokračujeme dále. Tedy $u(x, t)$ je nekonečně diferencovatelná pro $t > \delta$. Pro klasičnost řešení bychom ještě chtěli, aby $u(x, t) \in C([0, T] \times [0, 1])$. K tomu stačí, aby řada (2.5) konvergovala stejnoměrně pro $t \in [0, \delta]$, tj. stačí, aby konvergovala její majoranta

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^1 u_0(x)\sin(k\pi x)\,\mathrm{d}x\right|.$$

Buď b_k Fourierovy koeficienty pro $u_0'(x)$ v L^2 prostoru s ortogonálním systémem $\{\cos k\pi x\}$. Pomocí integrace per partes dostáváme

$$|a_k| = \left|2\int_0^1 u_0(x)\sin(k\pi x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|2\int_0^1 u_0'(x)\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{|b_k|}{k},$$

kde požadujeme, aby $u_0(0) = u_0(1) = 0$ pro vymizeni hraničních členů. Pak pomocí Besselovy nerovnosti (viz str. 17) máme

$$\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|b_k|^2\underbrace{2\|\cos k\pi x\|_2^2}_{1} \overset{\text{BN}}{\le} 2\|u_0'(x)\|_2^2 < \infty,$$

neboť předpokládáme $u_0'(x) \in L^2(0, 1)$. Dále pomocí Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti dostáváme

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^1 u_0(x)\sin(k\pi x)\,\mathrm{d}x\right| = \sum_{k=1}^{\infty}|a_k| < \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|b_k|}{k} \overset{\text{CS}}{\le}$$

$$\overset{\text{CS}}{\le} \left(\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2} < \infty$$

a vyše uvedená majoranta konverguje. Napišme si větu o klasickém řešení rovnice vedení tepla.

Tvrzení 2.4.2 (Klasické řešení rovnice vedení tepla). *Rovnice* $u_t - a^2u_{xx} = 0$ *na* $(0, 1) \times (0, \infty)$ *s okrajovými podmínkami* $u(0, t) = 0$ *a počátečními podmínkami* $u(x, 0) = u_0(x)$ *má klasické řešení, tj.* $u(x, t) \in C([0, 1] \times [0, \infty))$*, jestliže*

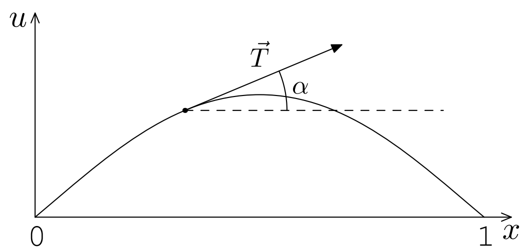
$$u_0(x) \in C[0, 1], \quad u_0'(x) \in L^2(0, 1), \quad u_0(0) = u_0(1) = 0.$$

Navíc řešení dané řadou (2.5) je nekonečněkrát diferencovatelné pro $t > 0$.

Kapitola 3

Rovnice struny

3.1 Odvození rovnice struny



Obrázek 1: Struna

Mějme strunu nataženou mezi body 0 a 1 (viz obr. 1). Studujme malé příčné kmity struny, pak struna kmitá v jedné rovině, kolmo na osu x a v čase t má výchylku $u(x,t)$, zanedbáváme vyšší mocniny u_x. Dále předpokládejme, že struna je ohebné pružné vlákno, a tedy vektor napětí $\vec{T}$ má směr tečny k vláknu.

Nyní ukážeme, že napětí ve struně má ve všech místech x a pro všechny časy t konstantní velikost. Hookův zákon říká, že relativní prodloužení je přímo úměrné napětí ve struně. Podíváme se tedy, jakou mírou přispívá relativní prodloužení způsobené kmitáním struny. Délka struny mezi body x_1 a x_2 má velikost

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + u_x^2}\,\mathrm{d}x \sim x_2 - x_1,$$

což je původní délka struny, relativní prodloužení je nulové, a tedy dle Hookova zákona kmitání nepřispívá k napětí ve struně – napětí je pro všechny časy t v daném místě konstantní.

Zaveďme průmět napětí $\vec{T}$ do osy x, $T_x(x) = T(x)\cos\alpha$ a průmět $\vec{T}$ do osy u, $T_u(x) = T(x)\sin\alpha \sim T(x)\,\mathrm{tg}\,\alpha = T(x)u_x$, aproximaci jsme mohli provést díky malým α. Na strunu nalézající se mezi body x_1 a x_2 působí síly napětí, vnější síly a síly setrvačné (pozorujeme ze soustavy spojené se strunou). Poslední dvě síly mají směr osy u. Protože studujeme příčné kmity, musí být součet sil promítnutých do osy x roven nule, tedy

$$T_x(x_1) - T_x(x_2) = 0,$$

kde x_1, x_2 jsme ale volili libovolně, a proto T nezávisí ani na x, označme toto konstantní napětí T_0.

Nyní sepíšeme pohybovou rovnici pro úsek $[x_1, x_2]$. Změna hybnosti mezi časem t_1 a t_2 je rovna

$$\Delta p = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)[u_t(x, t_2) - u_t(x, t_1)] \,\mathrm{d}x,$$

kde $\rho(x)$ je lineární hustota struny. Celkový impulz síly působící na tento úsek po dobu $t_2 - t_1$, který se skládá z napětí $T_u(x) = T_0 u_x(x)$ a vnějších objemových sil $f(x, t)$, je roven

$$\Delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left[T_0(u_x(x_2, t) - u_x(x_1, t)) + \int_{x_1}^{x_2} f(x, t) \,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}t.$$

Dle druhého Newtonova zákona si musí být tyto dva impulzy rovny. Předpokládáme-li spojitost prvních derivací $u(x, t)$, můžeme použít první větu o střední hodnotě pro integrální počet, dostáváme

$$\begin{aligned}
\Delta p &= \rho(x^*)[u_t(x^*, t_2) - u_t(x^*, t_1)]\Delta x, \\
\Delta I &= \left[T_0(u_x(x_2, t^{**}) - u_x(x_1, t^{**})) + \int_{x_1}^{x_2} f(x, t^{**}) \,\mathrm{d}x \right] \Delta t,
\end{aligned}$$

kde $x^* \in [x_1, x_2]$, $\Delta x = x_2 - x_1$, $t^{**} \in [t_1, t_2]$ a $\Delta t = t_2 - t_1$. Nyní stejným způsobem přepíšeme integrál pomocí věty o střední hodnotě a použijeme Lagrangeovu větu o střední hodnotě na rozdíly. Pak dostáváme rovnici

$$\rho(x^*)u_{tt}(x^*, t^*)\Delta x \Delta t = [T_0(u_{xx}(x^{**}, t^{**})) + f(x^{***}, t^{**})]\Delta x \Delta t,$$

kde $t^* \in [t_1, t_2]$ a $x^{**}, x^{***} \in [x_1, x_2]$. Obě strany rovnice podělíme $\Delta x \Delta t$ a provedeme limity $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$. Pak z libovolnosti x_1, t_1 dostáváme rovnici příčných kmitů struny

$$u_{tt}(x, t) = a^2(x) u_{xx}(x, t) + F(x, t),$$

kde $a^2(x) = T_0/\rho(x)$ a $F(x, t) = f(x, t)/\rho(x)$. Budeme-li nyní považovat hustotu struny ρ za konstantu a zanedbáme-li vnější síly $F(x, t)$, dostáváme

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad \text{na} \quad (0, 1) \times (0, \infty). \tag{3.1}$$

3.2 Struna 1

Řešíme rovnici struny (3.1) s počátečními podmínkami $u(x,0) = u_0(x)$, $u_t(x,0) = u_1(x)$ a okrajovými podmínkami $u(0,t) = 0, u(1,t) = 0$ pro všechna t.

Hledejme řešení v separovaném tvaru $u(x,t) = v(t)e(x)$. Stejným postupem jako v části Vedení tepla 1 dospějeme k závěru, že $e_k(x) = c_1 \sin k\pi x$. Funkci $v(t)$ získáme řešením rovnice

$$\ddot{v} + a^2k^2\pi^2 v = 0.$$

Protože z části o rovnici vedení tepla víme, že $\lambda > 0$, jde o rovnici harmonického oscilátoru, a tudíž můžeme přímo psát řešení rovnice

$$v_k(t) = a_k \cos(ak\pi t) + \frac{b_k}{ak\pi} \sin(ak\pi t),$$

kde $a_k = v_k(0)$ a $b_k = v_k'(0)$. Rovnice struny je lineární rovnice, a tedy posčítáním všech řešení $v_k(t)e_k(x)$ získáme také řešení. Dostáváme tedy

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(ak\pi t) + \frac{b_k}{ak\pi} \sin(ak\pi t) \right) \sin(k\pi x), \tag{3.2}$$

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x),$$

$$u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi x).$$

Jako dříve můžeme z ortogonálnosti a úplnosti systému $\{\sin k\pi x\}_{k=1}^{\infty}$ v prostoru $L^2[0,1]$ určit koeficienty a_k a b_k, dostáváme

$$a_k = 2\int_0^1 u_0(x) \sin(k\pi x)\,\mathrm{d}x,$$

$$b_k = 2\int_0^1 u_1(x) \sin(k\pi x)\,\mathrm{d}x.$$

3.3 Struna 2

Uvažujme počáteční podmínky $u(x,0) = u_0(x)$, $u_t(x,0) = u_1(x)$ a okrajové podmínky $u(0,t) = 0, u_x(1,t) = 0$ pro všechna t.

Hledejme řešení v separovaném tvaru $u(x,t) = v(t)e(x)$. Stejným postupem jako v části Vedení tepla 2 zjistíme, že $e_k(x) = c_1 \sin[(k+1/2)\pi x]$. Funkce $v(t)$ má tvar

$$v_k(t) = a_k \cos(ak\pi t) + \frac{b_k}{ak\pi} \sin(ak\pi t),$$

kde $a_k = v_k(0)$ a $b_k = v_k'(0)$. Posčítáním všech řešení $v_k(t)e_k(x)$ dostáváme

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(ak\pi t) + \frac{b_k}{ak\pi} \sin(ak\pi t) \right) \sin[(k+1/2)\pi x], \qquad (3.3)$$

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin[(k+1/2)\pi x],$$

$$u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin[(k+1/2)\pi x].$$

Ortogonálnost systému $\{\sin[(k+1/2)\pi x]\}_{k=1}^{\infty}$ nám pomůže určit koeficienty a_k a b_k, dostáváme

$$a_k = 2\int_0^1 u_0(x) \sin[(k+1/2)\pi x]\, \mathrm{d}x,$$

$$b_k = 2\int_0^1 u_1(x) \sin[(k+1/2)\pi x]\, \mathrm{d}x.$$

3.4 Struna 3

Uvažujme počáteční podmínky $u(x,0) = u_0(x)$, $u_t(x,0) = u_1(x)$ a okrajové podmínky $u_x(0,t) = 0, u_x(1,t) = 0$ pro všechna t.

Hledejme řešení v separovaném tvaru $u(x,t) = v(t)e(x)$. Stejným postupem jako v části Vedení tepla 3 dospějeme k závěru, že $e_k(x) = c_1 \cos(k\pi x)$. Funkce $v(t)$ má tvar

$$v_k(t) = a_k \cos(ak\pi t) + \frac{b_k}{ak\pi} \sin(ak\pi t),$$

kde $a_k = v_k(0)$ a $b_k = v_k'(0)$. Posčítáním všech řešení $v_k(t)e_k(x)$ dostáváme

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(ak\pi t) + \frac{b_k}{ak\pi} \sin(ak\pi t) \right) \cos(k\pi x), \qquad (3.4)$$

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\pi x),$$

$$u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(k\pi x).$$

Ortogonálnost systému $\{\cos(k\pi x)\}_{k=1}^{\infty}$ nám pomůže určit koeficienty a_k

a b_k, dostáváme

$$a_k = 2\int_0^1 u_0(x)\cos(k\pi x)\,\mathrm{d}x,$$
$$b_k = 2\int_0^1 u_1(x)\cos(k\pi x)\,\mathrm{d}x.$$

3.5 Vlastnosti řešení rovnice struny

Nyní se podívejme na vlastnosti řešení. Zřejmě nemůžeme předpokládat nekonečnou diferencovatelnost jako v případě řešení rovnice vedení tepla. Při derivování nekonečné řady (předpokládejme na okamžik, že můžeme přehodit derivaci a limitu) nám ze sinu „vyskakují“ k. Čím vyšší derivaci budeme požadovat, tím náročnější budou naše požadavky na počáteční podmínky $u_0(x)$ a $u_1(x)$.

Zabývejme se nejdříve, co budeme chtít pro to, aby řešení $u(x,t)$ bylo spojité na $[0,1]\times[0,\infty)$. Pro spojitost nám určitě stačí stejnoměrná konvergence řad (3.2), (3.3) nebo (3.4). Budeme studovat případ (3.2), ostatní případy by se provedly zcela analogicky. Majorantní řada vypadá pro $t>0$ následovně

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + \frac{|b_k|}{k}.$$

A teď se ptáme, kdy tato řada konverguje (absolutně – rozdělíme si ji na dvě)? Předpokládejme, že u_0 má první derivaci, pak můžeme s pomocí integrace per-partes psát

$$a_k = 2\int_0^1 u_0(x)\sin(k\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{k\pi}\int_0^1 u_0'(x)\cos(k\pi x)\,\mathrm{d}x - \left[u_0(x)\cos(k\pi x)\right]_0^1,$$

kde navíc požadujeme, aby hraniční člen vymizel, tj. chceme $u_0(0)=u_0(1)=0$. Zatím tedy máme

$$k|a_k| = \frac{2}{\pi}\int_0^1 u_0'(x)\cos(k\pi x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.5}$$

Dále se nám bude hodit následující nerovnost ([4], str. 10).

Věta 3.5.1 (Besselova nerovnost). *Buď $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortogonální systém Hilbertova prostoru H a c_k koeficienty prvku $x\in H$, tj. $x=\sum c_k x_k$, pak*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2.\|x_k\|^2 \le \|x\|^2,$$

kde norma $\|\cdot\|$ je norma indukovaná skalárním součinem v H.

Zjevně jsou splněny předpoklady věty, protože v našem případě máme L^2 prostor s ortogonálním systémem $\{\cos k\pi x\}$. V rovnosti (3.5) označme c_k koeficient prvku $u_0'(x)$, budeme požadovat, aby byl z $L^2[0,1]$. Přepišme si (3.5) s novým značením

$$k|a_k| = \frac{2}{\pi}\left|\int_0^1 u_0'(x)\cos(k\pi x)\,\mathrm{d}x\right| = \frac{|c_k|}{\pi}$$

a zjistíme, že následující řada je konvergentní

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2|a_k|^2 = \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2 = \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2.\underbrace{2\|\cos k\pi x\|_2^2}_{1} \overset{\mathrm{BN}}{\leq} \frac{2}{\pi^2}\|u_0'(x)\|_2^2,$$

protože $u_0'(x) \in L^2[0,1]$. V poslední úpravě jsme použili Besselovu nerovnost.

Nyní naši žádanou řadu odhadneme snadno pomocí Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti.

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}k|a_k| \overset{\mathrm{C-S}}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}k^2|a_k|^2\right)^{1/2},$$

a protože jsou oba činitelé konečné, původní řada konverguje.

Teď zcela analogickým postupem odhadneme konvergenci $\sum|b_k|/k$. Tady nám bude stačit „pouhá“ spojitost $u_1(x)$. Koeficient b_k je zde přímo koeficient rozkladu funkce $u_1(x)$ do báze $\sin k\pi x$, a tedy

$$\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|b_k|^2.\underbrace{2\|\sin k\pi x\|_2^2}_{1} \overset{\mathrm{BN}}{\leq} 2\|u_1(x)\|_2^2 < \infty.$$

Znovu použitím Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti dostáváme konvergenci.

Pro spojitost řešení $u(x,t)$ celkově klademe na počáteční funkce $u_0(x)$ a $u_1(x)$ podmínky:

$$u_0(x) \in C[0,1],\ u_0'(x) \in L^2(0,1),\ u_0(0) = u_0(1) = 0, \quad u_1(x) \in C[0,1].$$

Pro klasické řešení bychom ale navíc ještě chtěli, aby $u(x,t) \in C^2((0,1)\times(0,\infty))$. Budeme postupovat stejně jako minule, jen navíc zapojíme Weierstrassovu větu pro stejnoměrnou konvergenci řady. Ukážeme, že řada druhých derivací argumentů řady (3.2) konverguje stejnoměrně na $[0,1]$. Navíc bude-li konvergovat tato řada stejnoměrně, budou konvergovat i řady s nižšími derivacemi (derivováním vyskakují nepříjemná k). Celkem bude možné přehodit derivaci a limitu. Řada druhých derivací argumentů řady (3.2) vypadá takto

$$-\sum_{k=1}^{\infty}k^2\pi^2\left(a_k\cos(ak\pi t) + \frac{b_k}{ak\pi}\sin(ak\pi t)\right)\sin(k\pi x),$$

její majoranta je až na multiplikativní konstantu rovna

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2|a_k| + k|b_k|. \tag{3.6}$$

Jako minule využijeme integrování per-partes a vhodně zvolených okrajových podmínek požadovaných po $u_0(x)$, upravujme

$$a_k = 2\int_0^1 u_0(x)\sin(k\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{k\pi}\int_0^1 u_0'(x)\cos(k\pi x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{2}{k^2\pi^2}\int_0^1 u_0''(x)\sin(k\pi x)\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{k^3\pi^3}\int_0^1 u_0'''(x)\cos(k\pi x)\,\mathrm{d}x.$$

Potřebujeme tedy, aby $u_0(x)$ měla dvě spojité derivace na intervalu $[0,1]$, $u_0'''(x) \in L^2(0,1)$ a $u_0(0) = u_0(1) = u_0''(0) = u_0''(1) = 0$. Hraniční člen, který se objeví při druhém per-partes, vypadává z nulovosti sinu na krajích. To nás vede stejně jako při ověřování spojitosti $u(x,t)$ k zadefinování c_k – koeficientu rozkladu $u_0'''(x)$ do báze $\cos k\pi x$.

$$k^3|a_k| = \frac{2}{\pi^3}\left|\int_0^1 u_0'''(x)\cos(k\pi x)\,\mathrm{d}x\right| = \frac{|c_k|}{\pi^3}.$$

Pak zjistíme, že konverguje řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^6|a_k|^2 = \frac{1}{\pi^6}\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2 = \frac{1}{\pi^6}\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2.\underbrace{2\|\cos k\pi x\|_2^2}_{1} \overset{\mathrm{BN}}{\leq} \frac{2}{\pi^6}\|u_0'''(x)\|_2^2$$

a použitím Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti stejným způsobem jako dříve dostaneme, že $\sum k^2|a_k| < \infty$.

A teď se podíváme, kdy je $\sum k|b_k| < \infty$. Opět metodou per-partes dostáváme

$$b_k = 2\int_0^1 u_1(x)\sin(k\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{k\pi}\int_0^1 u_1'(x)\cos(k\pi x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{2}{k^2\pi^2}\int_0^1 u_1''(x)\sin(k\pi x)\,\mathrm{d}x,$$

kde jsme k použití integrace po částech potřebovali spojitou derivaci $u_1(x)$, $u_1''(x) \in L^2(0,1)$ a hraniční podmínku $u_1(0) = u_1(1) = 0$. Označíme c_k koeficient rozkladu $u_1''(x)$ do báze $\sin k\pi x$, pak

$$k^2|b_k| = \frac{2}{\pi^2}\left|\int_0^1 u_1''(x)\sin(k\pi x)\,\mathrm{d}x\right| = \frac{|c_k|}{\pi^2}$$

a ukážeme konvergenci

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^4|b_k|^2 = \frac{1}{\pi^4}\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2 = \frac{1}{\pi^4}\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2.\underbrace{2\|\sin k\pi x\|_2^2}_{1} \overset{\text{BN}}{\leq} \frac{2}{\pi^4}\|u_1''(x)\|_2^2$$

a znovu zopakujeme Cauchyho-Schwarovu nerovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|b_k| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}k^2|b_k| \overset{\text{C-S}}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}k^4|b_k|^2\right)^{1/2}.$$

Tím pádem řada (3.6) konverguje.

Při odhadování konvergence řad jsme dokázali následující lemma.

Lemma 3.5.2. *Buď $f^{(n)}(x) \in C[0,1]$, $f^{(n+1)}(x) \in L^2(0,1)$. Nechť a_k, resp. b_k jsou koeficienty rozkladu fce $f(x)$ do baze* $\sin k\pi x$, *resp.* $\cos k\pi x$ *a $f^{(r)}(0) = f^{(r)}(1) = 0$ pro $0 \leq r \leq n$, kde r je sudé, resp. r je liché. Pak řada*

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|k^s, \text{ resp. } \sum_{k=1}^{\infty}|b_k|k^s$$

konverguje pro $0 \leq s \leq n$.

Poznámka. Standardní znění věty je odlišné ([4], str. 22). Obvykle se požaduje stejně jako v lemmatu spojitost parciálních derivací do řádu n a příslušnost do $L^2(0,1)$ pro $(n+1)$-ní derivaci, ale namísto nulovosti na krajích se požaduje periodicita všech derivací na $[0,1]$ až do řádu n. Fce se rozkládá do systému $\{\sin 2k\pi x, \cos 2k\pi x\}_{k=0}^{\infty}$ s koeficienty a_k a b_k. V našem případě zajistilo vymizení hraničních členů z integrace per-partes nulovost na krajích. Zde s jiným systémem stačí periodicita, aby

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|)k^s$$

konvergovala pro $0 \leq s \leq n$.

Zformulujme si požadavek klasického řešení rovnice struny.

Tvrzení 3.5.3 (Klasické řešení rovnice struny). *Rovnice $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ na $(0,1)\times(0,\infty)$ s okrajovými podmínkami $u(0,t) = u(1,t) = 0$ a počátečními podmínkami $u(x,0) = u_0(x)$ a $u_t(x,0) = u_1(x)$ má klasické řešení, tj. $u(x,t) \in C^2([0,1]\times[0,\infty))$, jestliže*

$$\begin{aligned} &u_0(x) \in C^2[0,1], \quad u_0''' \in L^2(0,1), \quad u_0(0) = u_0(1) = u_0''(0) = u_0''(1) = 0,\\ &u_1(x) \in C^1[0,1], \quad u_1'' \in L^2(0,1), \quad u_1(0) = u_1(1). \end{aligned}$$

Příklad

Nyní vypočítáme konkrétní příklad splňující předpoklady tvrzení. Budeme řešit Dirichletovu úlohu $u(0,t) = u(1,t) = 0$ s počátečními podmínkami

$$u_0(x) = x^3 - 3x^4 + 3x^5 - x^6, \quad u_1(x) = -x^2 + x.$$

Dle předchozí teorie určíme koeficienty a_k a b_k

$$\begin{aligned} a_k &= 2\int_0^1 u_0(x)\sin(k\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{144((-1)^k - 1)}{k^7\pi^7}(k^2\pi^2 - 10), \\ b_k &= 2\int_0^1 u_1(x)\sin(k\pi x)\,\mathrm{d}x = -\frac{4((-1)^k - 1)}{k^3\pi^3}. \end{aligned}$$

A můžeme přímo psát řešení ve tvaru nekonečné sumy (3.2)

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(ak\pi t) + \frac{b_k}{ak\pi}\sin(ak\pi t)\right)\sin(k\pi x) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} 4\frac{(-1)^k - 1}{k^4\pi^4}\left(\frac{36}{k^3\pi^3}(k^2\pi^2 - 10)\cos(ak\pi t) - \frac{1}{a}\sin(ak\pi t)\right)\sin(k\pi x).$$

Kapitola 4

Stacionární úlohy

4.1 Příklady na Laplaceovu rovnici v polárních souřadnicích

V následujících příkladech řešíme Laplaceovu rovnici na různých oblastech s různými okrajovými podmínkami.

Příklad 1

$$\Delta u = 0 \text{ v } \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 < R^2\},\ u = g \text{ na } \partial\Omega.$$

Převedeme do polárních souřadnic $u = u(r, \varphi)$, pak Laplaceova rovnice vypadá následovně

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0, \quad r \in (0, R), \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Předpokládejme řešení ve tvaru separovaných proměnných

$$u(r, \varphi) = f(r) w(\varphi).$$

Rovnice se pak převádí na následující (derivaci podle r značíme čárkou, derivaci dle φ tečkou, vynecháváme proměnné)

$$r^2 f'' w + r f' w + f \ddot{w} = 0 \ \Rightarrow\ \frac{\ddot{w}}{w} = -\frac{1}{f}(r f' + r^2 f'') = -\mu,$$

kde μ musí být konstanta, neboť funkce na levé straně je závislá jen na φ, a funkce na pravé straně jen na r. Nejprve vyřešíme rovnici

$$\ddot{w} + \mu w = 0.$$

Funkce $\omega(\varphi)$ je 2π periodická, tedy $\omega(\varphi + 2\pi) = \omega(\varphi)$. Jediné netriviální řešení pro $w(0) = w(2\pi)$ máme pro $\mu > 0$. Z důvodu 2π periodicity funkce navíc dostáváme

$$w(\varphi) = A\cos(\sqrt{\mu}\varphi) + B\sin(\sqrt{\mu}\varphi) \;\Rightarrow\; \sqrt{\mu} = k \in \mathbb{Z}.$$

Celkem je tedy

$$w_k(\varphi) = A_k\cos(k\varphi) + B_k\sin(k\varphi).$$

Dále vyřešíme rovnici, přičemž si uvědomíme, že $\mu = k^2$.

$$r^2 f'' + rf' - k^2 f = 0,$$

pro $k \neq 0$ to je Eulerova rovnice, jejíž obecné řešení je

$$f(r) = Cr^k + Dr^{-k}.$$

Pro $k = 0$ použijeme substituci $f'(r) = g(r)$ a řešíme rovnici $r^2 g' + rg = 0$. Separací proměnných dostáváme $g = c/r$, tedy po odsubstituování a vhodném označení konstant máme $f = C_0 \ln r + D_0$.

Navíc ovšem víme, že u splňuje Laplaceovu rovnici v Ω, tj. je v ní harmonická a nemůže tedy v ní divergovat. Jenže pro $D_k \neq 0$ a $r \to 0$ jde f (a tedy i u) k nekonečnu. Proto $D = D_0 = 0$. Pro f máme tedy vztah

$$f_k(r) = Cr^k.$$

Dohromady pak platí

$$u_k(r,\varphi) = r^k(A_k\cos(k\varphi) + B_k\sin(k\varphi)),$$

kde nové konstanty jsou definovány takto

$$A_k = CA_k, \quad B_k = CB_k.$$

Fourierova metoda nám potom nabízí následující řešení ve tvaru nekonečné řady

$$u(r,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k(A_k\cos(k\varphi) + B_k\sin(k\varphi)),$$

$$g(\varphi) = u(R,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} R^k(A_k\cos(k\varphi) + B_k\sin(k\varphi)),$$

kde druhý vztah vyplývá z okrajových podmínek. Za předpokladu, že g splňuje Dirichletovu-Jordanovu větu (viz [3], str. 490), tj. je integrovatelná a po částech spojitá na $[0, 2\pi]$, můžeme ji zapsat ve tvaru Fourierovy řady

$$g(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos k\varphi + b_k\sin k\varphi,$$

kde

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\,\mathrm{d}t, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\cos kt\,\mathrm{d}t, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\sin kt\,\mathrm{d}t.$$

Přímým provnáním koeficientů obou řad dostáváme

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_n = \frac{a_n}{R^n}, \quad B_n = \frac{b_n}{R^n}.$$

Tím pádem lze u zapsat

$$u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k (a_k\cos k\varphi + b_k \sin k\varphi),$$

kde tato řada konverguje stejnoměrně na $(0,R)\times(0,2\pi)$.

Příklad 2

$$\Delta u = 0 \text{ v } \Omega = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2,\ 0<r<R,\ \varphi\in(0,\theta)\},$$

$$\begin{aligned} u &= 0 \text{ na } \{\{\varphi=0\},\ \{\varphi=\theta\}\}\cap\partial\Omega,\\ u &= g \text{ na } \{r=R\}\cap\partial\Omega. \end{aligned}$$

V polárních souřadnicích vypadají okrajové podmínky snadněji

$$u(R,\varphi) = g(\varphi),\ u(r,0) = u(r,\theta) = 0 \quad \forall r\in[0,R].$$

Opět budeme hledat řešení ve tvaru separovaných proměnných $u(r,\varphi) = f(r)w(\varphi)$. Oproti předchozímu příkladu bude vypadat jinak funkce $w(\varphi)$. Z okrajových podmínek dostáváme

$$0 = w(0) = A, \quad 0 = w(\theta) = B\sin(\sqrt{\mu}\varphi) \ \Rightarrow\ \sqrt{\mu} = \frac{k\pi}{\theta},$$

kde implikace vychází z požadavku netriviálního řešení w. Máme tedy

$$w_k(\varphi) = B_k \sin\frac{k\pi}{\theta}\varphi.$$

Řešení pro $f(r)$ zůstává stejné jako v prvním příkladě

$$f_k(r) = Cr^k.$$

Dohromady je pak s použitím Fourierovy metody

$$u(r,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k r^k \sin\left(\frac{k\pi}{\theta}\varphi\right),$$

kde $A_k = CB_k$. Okrajová podmínka nám ještě poskytuje vztah

$$g(\varphi) = u(R,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k R^k \sin\left(\frac{k\pi}{\theta}\varphi\right),$$

ze kterého získáme koeficienty A_k, mohli bychom opět porovnat s vhodně upravenou (zúženou na $(0,\theta)$) Fourierovou řadou. Namísto toho nyní využijeme ortogonality a úplnosti systému $\sin(l\pi\varphi/\theta)$. Víme totiž, že

$$\int_0^\theta \sin\left(\frac{k\pi}{\theta}\varphi\right)\sin\left(\frac{l\pi}{\theta}\varphi\right)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\theta}{2}\delta_{kl}.$$

Počítejme

$$\int_0^\theta g(\varphi)\sin\left(\frac{l\pi}{\theta}\varphi\right)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{A_l R^l \theta}{2} \;\Rightarrow\; A_l = \frac{2}{R^l\theta}\int_0^\theta g(\varphi)\sin\left(\frac{l\pi}{\theta}\varphi\right)\,\mathrm{d}\varphi.$$

Prováděli jsme záměnu sumy a integrálu díky stejnoměrné konvergenci řady. Celkem tedy máme

$$u(r,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k r^k \sin\left(\frac{k\pi}{\theta}\varphi\right),$$
$$A_k = \frac{2}{R^k\theta}\int_0^\theta g(\varphi)\sin\left(\frac{k\pi}{\theta}\varphi\right)\,\mathrm{d}\varphi.$$

Příklad 3

$$\Delta u = 0 \text{ v } \Omega = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2,\; 0 < R_0 < r < R,\; \varphi \in (0,\theta)\},$$

$$\begin{aligned} u &= 0 \text{ na } \{\{\varphi = 0\}, \{\varphi = \theta\}\} \cap \partial\Omega,\\ u &= f_2 \text{ na } \{r = R\} \cap \partial\Omega,\\ u &= f_1 \text{ na } \{r = R_0\} \cap \partial\Omega. \end{aligned}$$

V polárních souřadnicích vypadají okrajové podmínky následovně

$$u(R,\varphi) = f_2(\varphi),\; u(R_0,\varphi) = f_1(\varphi),\; u(r,0) = u(r,\theta) = 0 \quad \forall r \in [R_0, R].$$

Opět budeme hledat separované řešení $u(r,\varphi) = f(r)w(\varphi)$. Zcela stejně jako v druhém příkladě vychází, že

$$\begin{aligned} w_k(\varphi) &= A_k \sin\frac{k\pi}{\theta}\varphi,\\ f_k(r) &= Cr^k + Dr^{-k}\; k > 0,\\ f_0(r) &= C_0 + D_0 \ln r. \end{aligned}$$

kde koeficient D už nemusí být nutně nulový. Sepišme si řešení a okrajové podmínky ve tvaru řad.

$$u(r,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k r^k + B_k r^{-k}) \sin \frac{k\pi}{\theta}\varphi,$$
$$f_1(\varphi) = u(R_0,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k R_0^k + B_k R_0^{-k}) \sin \frac{k\pi}{\theta}\varphi,$$
$$f_2(\varphi) = u(R,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k R^k + B_k R^{-k}) \sin \frac{k\pi}{\theta}\varphi,$$

kde $f_0(r)$ se nám neprojevilo, neboť jsme ho přenásobovali sinem s nulovým argumentem. Analogicky jako minule dostáváme

$$\int_0^\theta f_1(\varphi) \sin \frac{k\pi}{\theta}\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \frac{\theta}{2}(A_k R_0^k + B_k R_0^{-k}),$$
$$\int_0^\theta f_2(\varphi) \sin \frac{k\pi}{\theta}\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \frac{\theta}{2}(A_k R^k + B_k R^{-k}),$$

což je soustava dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé A_k, B_k. Její řešení vypadá takto.

$$A_k = \frac{2}{\theta(R_0^k R^{-k} - R_0^{-k} R^{-k})} \int_0^\theta \left(f_1(\varphi) R^{-k} - f_2(\varphi) R_0^{-k}\right) \sin \frac{k\pi}{\theta}\varphi \,\mathrm{d}\varphi,$$
$$B_k = \frac{2}{\theta(R^k R_0^{-k} - R^{-k} R_0^{-k})} \int_0^\theta \left(f_1(\varphi) R^{k} - f_2(\varphi) R_0^{k}\right) \sin \frac{k\pi}{\theta}\varphi \,\mathrm{d}\varphi.$$

Příklad 4

$$\Delta u = 0 \text{ v } \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ R_0^2 < x^2 + y^2 < R^2\},$$

$$u = f_2 \text{ na } \{x^2 + y^2 = R^2\} \cap \partial\Omega,$$
$$u = f_1 \text{ na } \{x^2 + y^2 = R_0^2\} \cap \partial\Omega.$$

V polárních souřadnicích vypadají okrajové podmínky následovně

$$u(R_0,\varphi) = f_1(\varphi),\ u(R,\varphi) = f_2(\varphi) \quad \forall r \in [R_0, R].$$

Řešení hledáme v separovaném tvaru $u(r,\varphi) = f(r)w(\varphi)$. Jako v prvním příkladě nám vychází

$$
\begin{aligned}
w_k(\varphi) &= A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi,\\
f_k(r) &= Cr^k + Dr^{-k},\ k > 0,\\
f_0(r) &= C_0 + D_0 \ln r.
\end{aligned}
$$

Řešení a okrajové podmínky ve tvaru řad vypadají následovně

$$
u(r,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty}(C_k^1 r^k \cos k\varphi + C_k^2 r^k \sin k\varphi) + \\
+ \sum_{k=1}^{\infty}(D_k^1 r^{-k} \cos k\varphi + D_k^2 r^{-k} \sin k\varphi) + C_0^1 + D_0^1 \ln r,
$$

$$
f_1(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty}(C_k^1 R_0^k \cos k\varphi + C_k^2 R_0^k \sin k\varphi) + \\
+ \sum_{k=1}^{\infty}(D_k^1 R_0^{-k} \cos k\varphi + D_k^2 R_0^{-k} \sin k\varphi) + C_0^1 + D_0^1 \ln R_0,
$$

$$
f_2(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty}(C_k^1 R r^k \cos k\varphi + C_k^2 R^k \sin k\varphi) + \\
+ \sum_{k=1}^{\infty}(D_k^1 R^{-k} \cos k\varphi + D_k^2 R^{-k} \sin k\varphi) + C_0^1 + D_0^1 \ln R.
$$

Zapíšeme si $f_1(\varphi)$ a $f_2(\varphi)$ ve tvaru Fourierovy řady

$$
\begin{aligned}
f_1(\varphi) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi),\\
f_2(\varphi) &= \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(c_k \cos k\varphi + d_k \sin k\varphi).
\end{aligned}
$$

Porovnáním koeficientů u $f_1(\varphi)$ a $f_2(\varphi)$ dostáváme

$$
\begin{aligned}
\frac{a_0}{2} &= C_0^1 + D_0^1 \ln R_0,\ a_k = C_k^1 R_0^k + D_k^1 R_0^{-k},\ b_k = C_k^2 R_0^k + D_k^2 R_0^{-k},\\
\frac{c_0}{2} &= C_0^1 + D_0^1 \ln R,\ c_k = C_k^1 R^k + D_k^1 R^{-k},\ d_k = C_k^2 R^k + D_k^2 R^{-k},
\end{aligned}
$$

což je soustava šesti rovnic o šesti neznámých, kde

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(\varphi)\cos k\varphi \,\mathrm{d}\varphi, \ b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(\varphi)\sin k\varphi \,\mathrm{d}\varphi, \\ c_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_2(\varphi)\cos k\varphi \,\mathrm{d}\varphi, \ d_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_2(\varphi)\sin k\varphi \,\mathrm{d}\varphi. \end{aligned}$$

Soustava se rozpadá na tři soustavy dvou rovnic o dvou neznámých (jsou napsané pod sebou). První soustava má řešení

$$D_0^1 = \frac{c_0 - a_0}{2\ln(R/R_0)}, \ C_0^1 = \frac{1}{2\ln R_0}\left(\frac{a_0}{2} - \frac{c_0 - a_0}{2\ln(R/R_0)}\right).$$

Zbylé rovnice řešíme pronásobením vhodným koeficientem a sečtením.

$$\begin{aligned} D_k^1 &= \frac{a_k R^k - c_k R_0^k}{R_0^{-k} R^k - R^{-k} R_0^k}, \ C_k^1 = \frac{a_k R^{-k} - c_k R_0^{-k}}{R_0^k R^{-k} - R^k R_0^{-k}}, \\ D_k^2 &= \frac{b_k R^k - d_k R_0^k}{R_0^{-k} R^k - R^{-k} R_0^k}, \ C_k^2 = \frac{b_k R^{-k} - d_k R_0^{-k}}{R_0^k R^{-k} - R^k R_0^{-k}}, \end{aligned}$$

čímž jsme určili všechny koeficienty a jsme hotovi.

Literatura

[1] Barták J., Herrmann L., Lovicar V., Vejvoda O.: *Parciální diferenciální rovnice II*, SNTL, Praha, 1988.

[2] Jarník V.: *Diferenciální počet II*, Academia, Praha, 1976.

[3] Jarník V.: *Integrální počet II*, Nakladatelství Československé Akademie věd, Praha, 1955.

[4] Kopáček J.: *Matematika pro fyziky IV.*, SPN, Praha, 1989.

[5] Míka S., Kufner A.: *Parciální diferenciální rovnice I*, SNTL, Praha, 1983.

[6] Samarskij A. A., Tichonov A. N.: *Rovnice matematické fysiky*, Nakladatelství Československé Akademie věd, Praha, 1955.