Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Kristýna Ivanková

Diferenční rovnice a jejich využití v ekonomických modelech

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Oldřich John, CSc.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

2006

Děkuji Doc. RNDr. Oldřichu Johnovi, CSc. za tematické vedení práce a za pomoc v rámci konzultací k práci.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 23. května 2006 Kristýna Ivanková

Obsah

Název práce: Diferenční rovnice a jejich využití v ekonomických modelech
Autor: Kristýna Ivanková
Katedra (ústav): Katedra matematické analýzy
Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Oldřich John, CSc.
e-mail vedoucího: john@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V práci studujeme lineární diferenční rovnice prvního řádu a jejich využití při formulaci a hledání řešení mikroekonomických a makroekonomických modelů. Modely, které v práci uvádíme, jsou natolik zjednodušené, aby bylo možné získat jejich řešení pomocí zkoumaného matematického aparátu. U diferenčních rovnic se zaměříme na řešení těchto rovnic pro speciální pravé strany. Získané výsledky následně použijeme v mikroekonomických modelech rovnováhy trhu. Základním modelem je zde pavučinový model, z něj jsou odvozeny modely s normální cenou a s adaptivními očekáváními. V závěru práce se zabýváme zkoumáním stability a dynamiky multiplikátorů v makroekonomických modelech uzavřené ekonomiky (modely zdanění, spoření a zvyky spotřebitelů) i otevřené ekonomiky.

Klíčová slova: lineární diferenční rovnice, ekonomické modely, pavučinový model, multiplikátory, stabilita řešení

Title: Difference equations and their applications in economical models
Author: Kristýna Ivanková
Department: Department of mathematical analysis
Supervisor: Doc. RNDr. Oldřich John, CSc.
Supervisor's e-mail address: john@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In our work we study linear first-order difference equations and their application in the formulation and finding the solution of microeconomic and macroeconomic models. The referred models are simplified so far as to allow their solution by means of investigated mathematical appliance. In difference equations we focus on their solution for special right sides. The obtained results are used in microeconomic models of market equilibrium. The basic model is the cobweb theorem, contextual models with normal price and adaptive expectation are derived. In the conclusion we investigate stability and the dynamics of multipliers in macroeconomic models of closed economy (models with taxation, saving and habits of consumers) and open economy.

Keywords: linear difference equations, economical models, cobweb theorem, multipliers, stability of solution

1. kapitola
Lineární diferenční rovnice prvního řádu

Tato kapitola obsahuje matematický aparát, který v dalších dvou kapitolách užijeme k odvození a analýze jednotlivých matematických modelů v ekonomii. Vznikla zpracováním příslušných partií z [1] a [2].

Definice: ***Lineární diferenční rovnicí prvního řádu s konstantními koeficienty*** *rozumíme rovnici*

$$c_1 y_{t+1} + c_0 y_t = g(t),\ t \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \tag{1}$$

kde neznámou je posloupnost reálných čísel $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$*, koeficienty* c_1*,* $c_0 \in \mathbf{R}$*,* $c_1 \neq 0$*,* $c_0 \neq 0$*, a posloupnost* $g(t)$*,* $t \in \mathbf{N} \cup \{0\}$*, jsou dány.*

Pokud $g(t) = 0$ pro každé $t \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, pak se rovnice (1) nazývá **homogenní** lineární diferenční rovnicí prvního řádu.

Pokud požadujeme, aby řešení rovnice (1) splňovalo tzv. počáteční podmínku $y_0 = A$, kde A je dané reálné číslo, pak se rovnice (1) s touto podmínkou nazývá **počáteční úloha.**

Věta 1. *Nechť* M *je prostor všech posloupností reálných čísel* $y = \{y_t\}_{t=0}^{\infty}$*,* c_1*,* $c_0 \in \mathbf{R}$*,* $c_1 \neq 0$*,* $c_0 \neq 0$*. Potom*

$$L : y \mapsto z = \{c_1 y_{t+1} + c_0 y_t\}_{t=0}^{\infty}, \qquad L : M \to M,$$

je lineární zobrazení.

Důkaz:

1) Pro všechna y^1, $y^2 \in M : L(y^1) + L(y^2) = \{c_1 y_{t+1}^1 + c_0 y_t^1\}_{t=0}^{\infty} + \{c_1 y_{t+1}^2 + c_0 y_t^2\}_{t=0}^{\infty} = \{c_1(y_{t+1}^1 + y_{t+1}^2) + c_0(y_t^1 + y_t^2)\}_{t=0}^{\infty} = L(y_1 + y_2)$.

2) Pro všechna $a \in \mathbf{R}$, $y \in M : L(ay) = \{c_1 a y_{t+1} + c_0 a y_t\}_{t=0}^{\infty} = a\{c_1 y_{t+1} + c_0 y_t\}_{t=0}^{\infty} = aL(y)$. ♡

Věta 2. *Nechť* $\overline{y} \in M$ *je řešení rovnice (1). Potom platí:*

$$W = \{\overline{y} + y; L(y) = 0,\ y \in M\}$$

je množina všech řešení rovnice (1).

Důkaz:

$L(\overline{y}) = g,\ L(y) = 0,\ L(\overline{y} + y) = g + 0 = g$, takže každý prvek množiny W je řešením rovnice (1).

Mějme $x \in M$ takové, že $L(x) = g$. Potom $w = x - \overline{y}\ \in \{y \in M : L(y) =$

$0\}$, protože $L(w) = L(x - \overline{y}) = L(x) - L(\overline{y}) = g - g = 0$, a $x = \overline{y} + w$, takže každé řešení (1) je prvkem množiny W. ♡

Pevně zvolenou posloupnost $\overline{y} \in M$, pro niž $L(\overline{y}) = g$, nazveme **partikulárním řešením** rovnice (1).

Abychom našli všechna řešení rovnice (1), je potřeba najít jedno řešení této rovnice (partikulární řešení $\overline{y}$) a všechna řešení rovnice $L(y) = 0$.

Řešení homogenní lineární diferenční rovnice prvního řádu

Řešení homogenní rovnice

$$c_1 y_{t+1} + c_0 y_t = 0,\ t \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \tag{2}$$

s počáteční podmínkou $y_0 = A$ má tvar

$$y_t = A(-b)^t,\ t \in \mathbf{N} \cup \{0\},$$

kde $b = c_0/c_1$, což lze snadno odvodit a dokázat metodou matematické indukce nebo ověřit dosazením do levé strany rovnice (2).

Chování řešení $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$ závisí na znaménku a absolutní hodnotě čísla b. Pro $b < 0$ je $\{y_t\}$ monotónní, pro $b > 0$ je $\{y_t\}$ alternující posloupnost. Pro $|b| < 1$ konverguje ($\lim_{t\to\infty} |b|^t = 0$ pro $|b| < 1$), pro $|b| > 1$ diverguje ($\lim_{t\to\infty} |b|^t = \infty$ pro $|b| > 1$) a pro $|b| = 1$ osciluje s konstantní amplitudou ($b = 1$) nebo je konstantní ($b = -1$).

Partikulární řešení lineární diferenční rovnice prvního řádu pro speciální pravé strany

Při hledání partikulárního řešení rovnice (1) lze někdy užít metodu neurčitých koeficientů. Postup ukážeme na některých dílčích případech.

a) Pro $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ je $g(t) = t^k,\ t \in \mathbf{N} \cup \{0\}$

Postup ukážeme v případě $k = 2$. Partikulární řešení hledáme ve tvaru $\alpha + \beta t + \gamma t^2$, kde α, β, γ jsou neurčité koeficienty.

Dosazením do rovnice (1) a srovnáním podle mocnin t dostaneme soustavu

$$\left.\begin{array}{l} c_1\gamma + c_0\gamma = 1, \\ c_1\beta + 2c_1\gamma + c_0\beta = 0, \\ c_1\alpha + c_1\beta + c_1\gamma + c_0\alpha = 0. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Pokud $c_1 + c_0 \neq 0$, lze odtud jednoznačně určit koeficienty α, β, γ.

$$\alpha = \frac{c_1(c_1 - c_0)}{(c_1 + c_0)^3}, \qquad \beta = \frac{-2c_1}{(c_1 + c_0)^2}, \qquad \gamma = \frac{1}{c_1 + c_0}$$

Partikulární řešení pro $c_1 + c_0 \neq 0$ je

$$\overline{y}_t = \frac{c_1(c_1 - c_0)}{(c_1 + c_0)^3} - \frac{2c_1}{(c_1 + c_0)^2}\, t + \frac{1}{c_1 + c_0}\, t^2,\ t \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

Pokud $c_1 + c_0 = 0$, soustava (3) nemá řešení a řešení rovnice (1) ve tvaru $\alpha + \beta t + \gamma t^2$ neexistuje. Partikulární řešení v tomto případě hledáme ve tvaru $\alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3$. Rovnici (1) můžeme přepsat (pro $c = -c_0 = c_1$) jako

$$y_{t+1} - y_t = \frac{t^2}{c}.$$

Po dosazení a srovnání podle mocnin dostaneme soustavu lineárních rovnic pro α, β, γ, jejímž řešením je

$$\alpha = \frac{1}{6c}, \qquad \beta = \frac{-1}{2c}, \qquad \gamma = \frac{1}{3c}.$$

Partikulární řešení pro $c_1 + c_0 = 0$ je

$$\overline{y}_t = \frac{1}{6c} t - \frac{1}{2c}\, t^2 + \frac{1}{3c}\, t^3,\ t \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

b) $g(t)$ je exponenciální posloupnost

Pro $g(t) = Bd^t$, kde B, d jsou daná nenulová reálná čísla (pro $g(t) = B\alpha^{\lambda t}$ položíme $\alpha^\lambda = d$), hledáme partikulární řešení nehomogenní rovnice ve tvaru Cd^t, kde C je neurčitý koeficient.

Po dosazení do rovnice (1) dostaneme po úpravě vztah

$$d^t(c_1 Cd + c_0 C - B) = 0,$$

z čehož lze určit koeficient C, pokud $c_1 d + c_0 \neq 0$.

$$C = \frac{B}{c_1 d + c_0}$$

Partikulární řešení pro $c_1 d + c_0 \neq 0$ je

$$\overline{y}_t = \frac{B}{c_1 d + c_0}\, d^t,\ t \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

Pro $c_1 d + c_0 = 0$ zkusíme najít partikulární řešení ve tvaru tCd^t. Po dosazení do rovnice (1) získáme rovnici

$$d^t[(c_1 d + c_0)tC + c_1 Cd - B)] = 0,$$

přičemž $c_1 d + c_0 = 0$ z předpokladu. Odtud dopočteme koeficient C.

$$C = -\frac{B}{c_0}$$

Partikulární řešení pro $c_1 d + c_0 = 0$ je

$$\overline{y}_t = -\frac{B}{c_0}\, t d^t, \; t \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

c) $g(t)$ je goniometrická funkce

Nechť $g(t) = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t$, B_1, B_2, ω jsou daná reálná čísla, $B_1^2 + B_2^2 \neq 0$, $\omega \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Hledáme partikulární řešení ve tvaru $\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t$ (α, β jsou neurčité koeficienty).

Po dosazení do rovnice (1) použijeme součtové vzorce pro argumenty sinu a kosinu, tj.

$$\cos(\omega t \pm \omega) = \cos \omega t \cos \omega \mp \sin \omega t \sin \omega,$$

$$\sin(\omega t \pm \omega) = \sin \omega t \cos \omega \pm \sin \omega \cos \omega t,$$

a porovnáním koeficientů u $\sin \omega t$ a $\cos \omega t$ dostaneme soustavu

$$\alpha(c_0 + c_1 \cos \omega) + \beta(c_1 \sin \omega) = B_1,$$

$$\alpha(-c_1 \sin \omega) + \beta(c_0 + c_1 \cos \omega) = B_2.$$

Tato soustava rovnic má řešení

$$\alpha = \frac{B_1(c_0 + c_1 \cos \omega) - B_2 c_1 \sin \omega}{(c_0 + c_1 \cos \omega)^2 + (c_1 \sin \omega)^2}, \qquad \beta = \frac{B_2(c_0 + c_1 \cos \omega) + B_1 c_1 \sin \omega}{(c_0 + c_1 \cos \omega)^2 + (c_1 \sin \omega)^2},$$

pokud je determinant matice soustavy různý od nuly, tj. $(c_0 + c_1 \cos \omega)^2 + (c_1 \sin \omega)^2 \neq 0$.
Protože předpokládáme, že $c_1 \neq 0$, rovnost $(c_0 + c_1 \cos \omega)^2 + (c_1 \sin \omega)^2 = 0$ může nastat pouze v případě, kdy $\sin \omega = 0$, tj. $\omega = k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Tento případ jsme však vyloučili.

Metodou neurčitých koeficientů lze odvodit následující tvrzení, které je speciálním případem obecnější věty ([1], str. 85) pro lineární diferenční rovnici prvního řádu:

Věta 3. *Nechť posloupnost $g(t)$, $t \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, v rovnici (1) splňuje*

$$g(t) = u^t(P(t) \cos \omega t + Q(t) \sin \omega t),$$

kde $u > 0$, P, Q jsou polynomy.
Pak existuje řešení rovnice (1) ve tvaru

$$\overline{y}_t = u^t t^m (R(t) \cos \omega t + S(t) \sin \omega t),$$

kde R, S jsou vhodné polynomy stupně menšího nebo rovného maximu stupňů polynomů P a Q a $m \in \{0, 1\}$ udává násobnost čísla $u(\cos \omega + i \sin \omega)$ jakožto kořenu charakteristického polynomu rovnice (1).

2. kapitola
Pavučinový model

V této kapitole provedeme výklad a utřídění jednoduchých dynamických modelů tržní rovnováhy, které jsou uvedeny v [2], kapitola 4.

Statický model nabídky a poptávky tvoří soustava rovnic

$$D = a + bp,$$

$$S = a_1 + b_1 p,$$

$$D = S,$$

kde D je poptávka, S je nabídka, p je cena zboží, D, S a p jsou nezáporné veličiny a konstanty a, a_1, $b < 0$, $b_1 > 0$ jsou zadány. Poslední rovnice vyjadřuje podmínku rovnováhy. (Trh určí cenu tak, aby poptávka přesně vstřebala nabízené množství, tj. aby nezůstal výrobce s neprodaným zbožím a zákazník s neuspokojeným požadavkem.) Řešením soustavy je cena

$$p = \frac{a_1 - a}{b - b_1}.$$

Od statického modelu nabídky a poptávky můžeme odvodit model dynamický, tzv. pavučinový model. Ten se týká zboží, jehož výroba není okamžitá či nepřetržitá, ale vyžaduje určitou ustálenou dobu (bereme ji jako jednotku času). Na konci každého období s pořadovým číslem $t \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ se materializuje výtěžek výroby, která probíhala během tohoto období, a jeho cena je určena poptávkou (např. zemědělská výroba). Výrobci očekávají, že tato cena vydrží do příštího období, a množství nové produkce přizpůsobí současné ceně.

Předpokládejme tedy, že poptávka závisí na současné ceně a nabídka na ceně z předchozího období následujícím způsobem:

$$D_{t+1} = a + bp_{t+1},$$

$$S_{t+1} = a_1 + b_1 p_t.$$

Posledním předpokladem modelu je splnění podmínky rovnováhy nabídky a poptávky v každém období.

$$D_t = S_t$$

Dosazením dostaneme diferenční rovnici

$$bp_{t+1} - b_1 p_t = a_1 - a.$$

Obecné řešení odpovídající homogenní rovnice je $A(b_1/b)^t$ a partikulární řešení nehomogenní rovnice je $p_e = (a_1 - a)/(b - b_1)$ (shodné s řešením statického modelu nabídky a poptávky). Obecné řešení nehomogenní rovnice je

$$p_t = A(b_1/b)^t + p_e$$

a řešení s výchozí cenou p_0 (počáteční podmínka) má tvar

$$p_t = (p_0 - p_e)(b_1/b)^t + p_e.$$

Ekonomickou interpretací partikulárního řešení p_e je statická rovnovážná hodnota ceny. Z obecného řešení rovnice je vidět, že pokud je počáteční cena p_e, pak $p_t = p_e$, tj. cena zůstává ve všech obdobích na hodnotě p_e.

Podle obecného řešení rovnice závisí chování ceny během času na podílu b_1/b: $b_1/b < 0$, takže cena osciluje kolem své rovnovážné hodnoty. Tyto oscilace se buď zvětšují ($|b_1| > |b|$) nebo mají konstantní amplitudu ($|b_1| = |b|$) nebo jsou utlumené ($|b_1| < |b|$). Podmínka stability je $|b_1/b| < 1$, tj. $|b_1| < |b|$. V tomto případě řešení rovnice pro cenu konverguje k rovnovážné hodnotě p_e.

Definice: *O dynamickém modelu řekneme, že je* ***stabilnější*** *než jiný model, pokud je jeho podmínka stability (podmínka pro obecné řešení homogenní rovnice zaručující konvergenci posloupnosti hodnot ceny k rovnovážné ceně) méně restriktivní.*

Pavučinový model a očekávání

Tradiční pavučinový model může být považován za speciální případ obecnějšího modelu

$$\left.\begin{array}{l} D_{t+1} = a + bp_{t+1}, \\ S_{t+1} = a_1 + b_1 p^e_{t+1}, \\ D_t = S_t, \end{array}\right\} \tag{4}$$

kde p^e_{t+1} značí cenu očekávanou výrobci (cenu, o které výrobci na začátku výroby předpokládají, že ji bude mít produkt v době své materializace). V původním pavučinovém modelu se předpokládá $p^e_{t+1} = p_t$.

Normální cena

Normální cena p_N je cena, o které výrobci předpokládají, že ji dříve či později bude mít produkt na trhu. Pokud se současná cena liší od normální ceny, pak výrobci očekávají, že se cena v budoucnu změní směrem k normální ceně.

$$p^e_{t+1} = cp_N + (1 - c)p_t, \qquad 0 < c < 1$$

Předpoklad $c < 1$ je ekvivalentní tomu, že výrobci neočekávají, že cena během jednoho období dosáhne normální ceny ($c = 1$), ale předpokládají proces přibližování. Pro $c = 0$ dostaneme původní pavučinový model.

Jednoduchým způsobem, jak určit normální cenu, je předpokládat $p_N = p_e$. To by znamenalo, že výrobci znají model řídící určení ceny na trhu, ale vědí, že se cena, která je vychýlena z rovnováhy, nemůže kvůli vnějším vlivům okamžitě vrátit k hodnotě p_e.

Dosazením do obecnějšího modelu dostaneme

$$b_1(1-c)p_t - bp_{+1}t = a - a_1 - b_1 c p_e,$$

$$p_t = A\left[\frac{b_1(1-c)}{b}\right]^t + p_e,$$

kde $A = p_0 - p_e$ je počáteční odchylka. Podmínka stability je $|b_1(1-c)| < |b|$. Číslo $1-c$ je kladné a menší než jedna ($0 < c < 1$), takže $|b_1(1-c)| < |b_1|$. Když srovnáme nový model s původním pavučinovým modelem, obdržíme následující výsledky:

1) Konvergentní cenový vývoj zůstane konvergentní a konvergence je v případě nového modelu rychlejší, protože

$$\left|\frac{b_1(1-c)}{b}\right| < \left|\frac{b_1}{b}\right| < 1$$

a $|[b_1(1-c)/b]^t|$ jde k nule rychleji než $|(b_1/b)^t|$.

2) Oscilace s konstantní amplitudou se utlumí (když $|b_1| = |b|$, tak $|b_1(1-c)| < |b|$).

3) Divergentní cenový vývoj se může stát konvergentním (nebo s konstantní amplitudou), když bude c dostatečně blízké jedné, nebo zůstane divergentní, ale divergence bude pomalejší. (Čím větší je c, tím menší je $1-c$ a tím spíše $|b_1(1-c)| < |b|$, přestože $|b_1| > |b|$.)

Větší hodnota c znamená, že výrobci očekávají rychlejší přibližování současné ceny k její rovnovážné hodnotě.

Tyto výsledky ukazují, že zavedení očekávání založených na normální ceně, která je rovná ceně rovnovážné, činí v každém případě model stabilnějším.

Adaptivní očekávání

Jiný způsob, jak modifikovat původní pavučinový model, je použití adaptivních očekávání. V každém období jsou očekávání upravena na základě nesrovnalosti mezi pozorovanou hodnotou a předchozí očekávanou hodnotou.

$$p^e_{t+1} = \beta p^e_t + (1-\beta)p_t, \qquad 0 < \beta < 1$$

Z rovnice je vidět, že pokud je pozorovaná hodnota z předchozího období větší (respektive menší, rovna) než očekávaná hodnota v daném období, pak je nová očekávaná hodnota upravena směrem nahoru (respektive dolů, ponechána konstantní).

Užitím modelu (4) vyloučíme p_t^e a získáme tak diferenční rovnici prvního řádu v proměnné p_t:

$$S_t = a_1 + b_1 p_t^e,$$

$$p_t^e = \frac{S_t - a_1}{b_1},$$

$$\frac{S_{t+1} - a_1}{b_1} = \beta \frac{S_t - a_1}{b_1} + (1-\beta)p_t,$$

$$S_{t+1} = \beta S_t + a_1(1-\beta) + b_1(1-\beta)p_t.$$

Z předpokladu $D_t = S_t$ pro všechna t plyne:

$$D_t = a + bp_t,$$

$$a + bp_{t+1} = a\beta + b\beta p_t + a_1(1-\beta) + b_1(1-\beta)p_t,$$

$$p_{t+1} - \left[\left(\frac{b_1}{b} - 1\right)(1-\beta) + 1\right] p_t = \frac{(a_1 - a)(1-\beta)}{b}.$$

Partikulární řešení této rovnice je p_e, což je rovnovážná cena. Obecné řešení odpovídající homogenní rovnice je

$$A\left[\left(\frac{b_1}{b} - 1\right)(1-\beta) + 1\right]^t$$

a obecné řešení nehomogenní rovnice je

$$p_t = A\left[\left(\frac{b_1}{b} - 1\right)(1-\beta) + 1\right]^t + p_e,$$

$A = p_0 - p_e$ je počáteční odchylka. Podmínka stability je

$$\left|\left(\frac{b_1}{b} - 1\right)(1-\beta) + 1\right| < 1,$$

z čehož jednoduchými úpravami dostaneme

$$1 - \frac{2}{1-\beta} < \frac{b_1}{b} < 1.$$

Pravá část nerovnosti je splněna vždy (z předpokladu $b < 0$, $b_1 > 0$), takže nás zajímá jen levá část, kterou můžeme vyjádřit jako

$$-\frac{b_1}{b} < 1 + \frac{2\beta}{1-\beta}.$$

Porovnáním s podmínkou stability původního modelu ($-b_1/b = |b_1/b| < 1$) zjistíme, že podmínka stability modelu s adaptivními očekáváními je méně omezující, takže můžeme usuzovat, že zavedení adaptivních očekávání činí model stabilnějším. (Čím větší je β, tím je model stabilnější.)

V modelu s normální cenou můžeme podmínku stability vyjádřit jako

$$-\frac{b_1}{b} = \left|\frac{b_1}{b}\right| < 1 + \frac{c}{1-c}.$$

Z toho je vidět, že pro $c = \beta$ je model s normální cenou méně stabilní než model s adaptivními očekáváními.

Na závěr této kapitoly uvedeme model, do něhož je zavedena dynamika jiným způsobem než rovnováhou trhu. Poptávka i nabídka závisí na současné ceně,

$$D_t = a + bp_t,$$
$$S_t = a_1 + b_1 p_t,$$

a cena se přizpůsobuje jejich rozdílu

$$p_{t+1} - p_t = \alpha(D_t - S_t),$$

kde $\alpha > 0$ je reaktivita ceny na rozdíl poptávky a nabídky. Dosazením dostaneme diferenční rovnici

$$p_{t+1} - [\alpha(b - b_1) + 1]p_t = \alpha(a - a_1).$$

Partikulární řešení této rovnice je opět

$$p_e = \frac{a_1 - a}{b - b_1},$$

což odpovídá rovnovážné hodnotě ceny. Obecné řešení příslušné homogenní rovnice je

$$A[\alpha(b - b_1) + 1]^t,$$

kde A je konstanta daná počáteční podmínkou. Podmínka stability je

$$|\alpha(b - b_1) + 1| < 1,$$

což lze upravit na

$$-\frac{2}{\alpha} < b - b_1 < 0.$$

Pravá nerovnost je splněna ($b < 0$, $b_1 > 0$), takže posloupnost hodnot ceny konverguje k rovnovážné hodnotě pro $b_1 - b < 2/\alpha$. Tuto nerovnost můžeme vyjádřit jako

$$-\frac{b_1}{b} < 1 + \frac{2(1 - \alpha|b|)}{\alpha|b|}.$$

Porovnáním s podmínkou stability pavučinového modelu ($-b_1/b = |b_1/b| < 1$) dostaneme tyto výsledky: Pro $|b| < 1/\alpha$ bude model stabilnější než pavučinový model a pro $|b| > 1/\alpha$ bude model méně stabilní.

3. kapitola
Dynamika multiplikátorů

V této kapitole provedeme výklad jednoduchých dynamických modelů uzavřené i otevřené ekonomiky, které jsou uvedeny v [2], kapitola 4.

Základní model uzavřené ekonomiky

V základním makroekonomickém modelu uzavřené ekonomiky vystupují nezáporné veličiny Y_t (národní důchod), I_t (investice) a C_t (spotřeba). Indexem $t \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ označujeme pořadové číslo období. (Např. C_t je spotřeba v t-tém období.) Naším cílem je diskuze matematického modelu, který odvodíme z následujících předpokladů: Spotřeba závisí na národním důchodu se zpožděním jednoho období, tj.

$$C_{t+1} = a + bY_t, \qquad a \geq 0,$$

kde b, $0 < b < 1$, je mezní tendence ke spotřebě. O investicích předpokládáme, že jsou složeny z části autonomní I_0 a z části, která závisí lineárně na národním důchodu (se zpožděním jednoho období). Koeficient h, $0 < h < 1$, je tzv. mezní tendence k investování.

$$I_{t+1} = hY_t + I_0$$

Podmínka rovnováhy

$$Y_t = C_t + I_t$$

nám dává poslední rovnici tohoto modelu. Substitucí dostaneme diferenční rovnici prvního řádu

$$Y_{t+1} - (b+h)Y_t = a + I_0$$

s řešením

$$Y_t = A(b+h)^t + \frac{a + I_0}{1-b-h},$$

kde A je konstanta daná počáteční podmínkou. Veličiny b i h jsou kladné, takže posloupnost Y_t bude monotónní. Systém je stabilní pro $b + h < 1$. Předchozí podmínka nám říká, že součet mezní tendence ke spotřebě a mezní tendence k investování nesmí překročit jedničku, aby byl systém stabilní. Také je z této podmínky vidět, že $0 < 1-b-h$, takže multiplikátor $1/(1-b-h)$ je kladný.

Z tohoto modelu vyplývá: Zvýšíme-li autonomní investice z I_0 na $I_0 + \Delta I$, změní se (při splnění podmínky rovnováhy) limitní hodnota národního důchodu z Y na $Y + \Delta Y$, přičemž

$$Y = \frac{a + I_0}{1-b-h}, \qquad Y + \Delta Y = \frac{a + I_0 + \Delta I}{1-b-h}.$$

Tedy přírůstek ΔY je součinem přírůstku autonomních investic a multiplikátoru $1/(1-b-h)$. (To je obsahem jedné z Keynesových makroekonomických pouček.)

Zdanění

Jedním z možných rozšíření předchozího modelu je zavedení daně. Předpokládejme, že daň T (nezáporná veličina) je lineární funkce národního důchodu, tedy

$$T = T_a + \tau Y, \qquad 0 < \tau < 1, \qquad T_a \geq 0,$$

kde T_a je autonomní část daně. Spotřeba je nyní funkcí čistého národního důchodu po srážce daně Y_d (nezáporná veličina), který lze v našem modelu vyjádřit jako $Y - T$. Máme tedy

$$C_{t+1} = a + bY_{dt},$$

$$I_{t+1} = hY_t + I_0,$$

$$T_t = T_a + \tau Y_t,$$

$$Y_{dt} = Y_t - T_t,$$

$$Y_t = C_t + I_t.$$

Substitucí a úpravou dostaneme diferenční rovnici prvního řádu

$$Y_{t+1} - [b(1-\tau) + h]Y_t = a - bT_a + I_0$$

s řešením

$$Y_t = A[b(1-\tau) + h]^t + \frac{a - bT_a + I_0}{1 - b(1-\tau) - h},$$

kde A je konstanta daná počáteční podmínkou. Protože $b(1-\tau)$ i h jsou kladné, je posloupnost Y_t monotónní. Podmínka stability je $b(1-\tau) + h < 1$, tj. $h < 1 - b + b\tau$, což je méně omezující než podmínka stability základního modelu ($h < 1 - b$). Se zavedením zdanění se tedy model stává stabilnějším. Pokud $b(1-\tau)+h < 1$, pak multiplikátor $1/[1-b(1-\tau)-h]$ je kladný a menší než multiplikátor bez přítomnosti zdanění. Z toho vyplývá, že stejná změna autonomní investice vyvolá menší změnu národního důchodu v modelu se zdaněním než v modelu bez zdanění.

Zvyky spotřebitelů

Jiným rozšířením základního modelu uzavřené ekonomiky je zavedení zvyků spotřebitelů. To se v modelu projeví jako závislost spotřeby nejen na národním důchodu z předchozího období, ale i na současném národním důchodu.

$$C_{t+1} = a + bY_{t+1} + cY_t, \qquad 0 < b < 1, \qquad 0 < c < 1$$

Předpokládejme, že investice jsou pouze autonomní,

$$I_t = I_0,$$

a podmínka rovnováhy je

$$Y_t = C_t + I_t.$$

Dosazením dostaneme diferenční rovnici

$$Y_{t+1} - \frac{c}{1-b}Y_t = \frac{a+I_0}{1-b}$$

s řešením

$$Y_t = A\left(\frac{c}{1-b}\right)^t + \frac{a+I_0}{1-b-c},$$

kde A je konstanta daná počáteční podmínkou. Číslo $c/(1-b)$ je větší než nula, takže posloupnost Y_t bude monotónní. Podmínka stability je $c < 1-b$, tj. tendence ke spotřebě v předchozím období musí být menší než tendence ke spoření v současném období, aby posloupnost hodnot národního důchodu konvergovala k rovnovážné hodnotě. Multiplikátor $1/(1-b-c)$ je při splnění podmínky stability kladný.

Nyní řešme předchozí model v případě, kdy autonomní investice rostou exponenciálně podle vzorce

$$I_t = I_0(1+g)^t,$$

kde g je kladná konstanta. Dosazením dostaneme diferenční rovnici

$$Y_{t+1} - \frac{c}{1-b}Y_t = \frac{a+I_0(1+g)^t}{1-b}.$$

Řešení homogenní rovnice je stejné jako v předchozím modelu. Partikulární řešení nalezneme tak, že najdeme partikulární řešení pro pravou stranu $a/(1-b)$ a partikulární řešení pro pravou stranu $I_0(1+g)^t/(1-b)$. Jejich součet je partikulární řešení pro pravou stranu $a/(1-b)+I_0(1+g)^t/(1-b)$ (z linearity zobrazení $L(Y)$, viz kapitola 1). Hledané partikulární řešení je

$$\overline{Y}_t = \frac{a}{1-b-c} + \frac{I_0}{(1-b)(1+g)-c}(1+g)^t.$$

Multiplikátor

$$\frac{(1+g)^t}{(1-b)(1+g)-c}$$

je při splnění podmínky stability kladný. Pro $g = 0$ dostaneme předchozí model. V tomto modelu závisí rovnovážná hodnota národního důchodu na čase (monotónně roste), v předchozím modelu byla konstantní.

V předchozích třech modelech jsme předpokládali stejnou podmínku rovnováhy $Y_t = C_t + I_t$. V následujících modelech zavedeme jiné podmínky rovnováhy.

Spoření

Dalším faktorem ovlivňujícím chování uzavřené ekonomiky jsou úspory. V souvislosti s tím odvodíme následující model: Předpokládáme, že úspory S (nezáporná veličina) závisí na národním důchodu z předchozího období.

$$S_{t+1} = sY_t, \qquad 0 < s < 1,$$

kde s je mezní tendence ke spoření. Investice jsou složeny z části autonomní I_0 a z části závisí na rozdílu současného a předchozího národního důchodu.

$$I_{t+1} = k(Y_{t+1} - Y_t) + I_0, \qquad k > 0,$$

kde k je tzv. akcelerační koeficient. Závislost spotřeby na národním důchodu je stejná jako v základním modelu.

$$C_{t+1} = a + bY_t$$

Podmínka rovnováhy je

$$I_t = S_t + C_t.$$

V tomto modelu nás bude zajímat růst národního důchodu. Substitucí dostaneme diferenční rovnici

$$Y_{t+1} - \frac{k+s+b}{k} Y_t = \frac{a - I_0}{k}$$

s řešením

$$Y_t = A\left(1 + \frac{s+b}{k}\right)^t + \frac{I_0 - a}{s+b},$$

kde A je konstanta daná počáteční podmínkou. Podmínka stability není nikdy splněna ($(s+b)/k > 0$), takže posloupnost Y_t diverguje (monotónně roste) a partikulární řešení diferenční rovnice není limitní rovnovážnou hodnotou národního důchodu. Rovnovážný národní důchod roste s konstantním přírůstkem $(s+b)/k$.

Pokud změníme předpoklad o úsporách na

$$S_{t+1} = sY_{t+1},$$

tj. úspory závisí na současném národním důchodu, dostaneme dosazením do nového modelu diferenční rovnici

$$Y_{t+1} - \frac{k+b}{k-s}Y_t = \frac{a-I_0}{k-s}$$

s řešením

$$Y_t = A\left(1 + \frac{s+b}{k-s}\right)^t + \frac{I_0-a}{s+b},$$

kde A je konstanta daná počáteční podmínkou. Partikulární řešení je stejné jako v předchozím modelu. Aby rovnovážný národní důchod rostl, je třeba splnit podmínku $s < k$. Obyčejně tato podmínka platí. ($s < 1$ a obvykle $k > 1$) Potom je konstantní přírůstek roven $(s+b)/(k-s)$, což je větší přírůstek než v předchozím modelu.
Pro $s > k$ získáme jednoduchými úpravami podmínku stability $2(s-k) > s+b$, tj. $s - b > 2k$. Multiplikátor $1/(s+b)$ je vždy kladný.

Multiplikátor zahraničního obchodu

V posledním odstavci rozšíříme základní model uzavřené ekonomiky zavedením nezáporných veličin M_t (dovoz) a X_t (vývoz), tj. přechodem k otevřené ekonomice.
Dovoz je složen z části autonomní M_0 a z části, která závisí lineárně na národním důchodu z předchozího období, a o vývozu předpokládáme, že je zcela exogenní (ovládaný zvenčí).

$$M_{t+1} = mY_t + M_0, \qquad 0 < m < 1,$$

kde m je mezní tendence k dovozu,

$$X_t = X_0.$$

Závislost spotřeby a investic na národním důchodu je stejná jako v základním modelu.

$$C_{t+1} = a + bY_t,$$

$$I_{t+1} = hY_t + I_0$$

V otevřené ekonomice je souhrnná nabídka součtem národního produktu a dovozu, souhrnná poptávka je součtem národní spotřeby, národních investic a vývozu. Podmínka rovnováhy je tedy

$$Y_t = C_t + I_t + X_t - M_t.$$

Substitucí prvních čtyř rovnic do páté dostaneme diferenční rovnici prvního řádu

$$Y_{t+1} - (b + h + m)Y_t = a + I_0 + X_0 - M_0$$

s řešením

$$Y_t = A(b + h - m)^t + \frac{a + I_0 + X_0 - M_0}{1 - b - h + m},$$

kde A je konstanta daná počáteční podmínkou. Číslo $b + h - m$ vyjadřuje mezní tendenci k výdajům za domácí produkty, o které předpokládáme, že je kladná. Z tohoto předpokladu plyne, že posloupnost Y_t bude monotónní. Podmínka stability je $b+h-m < 1$, tj. $h < 1-b+m$, což je méně omezující než podmínka stability základního modelu ($h < 1 - b$). Při přechodu k otevřené ekonomice se tedy model stává stabilnějším. Multiplikátor $1/(1 - b - h + m)$ je při splnění podmínky stability kladný a je menší než multiplikátor v základním modelu uzavřené ekonomiky. Z toho vyplývá, že stejná změna autonomní investice vyvolá menší změnu národního důchodu v modelu otevřené ekonomiky než v modelu uzavřené ekonomiky.

Dále se budeme zabývat otázkou, zda multiplikátor zahraničního obchodu způsobí úplné vyrovnání obchodní bilance. Předpokládejme, že obchod je na počátku v rovnováze (tj. $X_0 = M_0$) a že vývoz autonomně vzroste z X_0 na $X_0 + \Delta X$. Národní důchod roste podle multiplikátoru zahraničního obchodu a vzrůstá i dovoz, protože je rostoucí funkcí národního důchodu.

$$\Delta Y = \frac{1}{1 - b - h + m}\Delta X,$$

$$\Delta M = m\Delta Y = \frac{m}{1 - b - h + m}\Delta X.$$

Zajímá nás, jestli indukovaný vzrůst dovozu přesně vyrovná autonomní vzrůst vývozu, tj. zda $\Delta M = \Delta X$. To nastane právě tehdy, když $m/(1 - b - h + m) = 1$, tedy $h = 1 - b$. Poslední rovnost nelze vyloučit úvahami o stabilitě. Podmínka stability $h < 1 - b + m$ připouští $h = 1 - b$. Obecně je ΔM větší, menší nebo rovno ΔX pro h větší, menší nebo rovno $1 - b$ a každý ze tří případů je teoreticky možný.

Literatura

[1] John, O. a kol. (2003): *Matematika (pokračování)*. Matfyzpress, Praha.

[2] Gandolfo, G. (1996–1997): *Economic Dynamics 3rd Edition*. Springer-Verlag, Berlin.