

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Jaroslava Prokopová

### **Numerické řešení obtékání leteckého profilu**

Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Miloslav Feistauer, DrSc.  
Studijní program: Matematika, obecná matematika

2006

Ráda bych poděkovala svému vedoucímu bakalářské práce Prof. RNDr. Miloslavu Feistauerovi, DrSc. za odborné vedení, Doc. RNDr. Jiřímu Felcmanovi, CSc. za pomoc s programem pro metodu konečných prvků, Mgr. Martinu Madlíkovi za pomoc se zpracováním grafického výstupu z programu pro metodu konečných prvků v programu TecPlot, Danu Hasnedlovi za pomoc s instalací potřebného softwaru a samozřejmě svým rodičům za jejich všestrannou podporu.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne .....

.....

Jaroslava Prokopová

# Obsah

Úvod	6
<b>1 Základní rovnice</b>	<b>7</b>
1.1 Rovnice kontinuity . . . . .	7
1.2 Navierovy-Stokesovy rovnice . . . . .	7
1.3 Zjednodušující předpoklady . . . . .	8
1.4 Bernoulliho rovnice . . . . .	10
<b>2 Formulace problému obtékání izolovaného profilu</b>	<b>11</b>
2.1 Profil . . . . .	11
2.2 Diferenciální rovnice . . . . .	12
2.3 Okrajové podmínky . . . . .	13
<b>3 Použití funkcí komplexní proměnné</b>	<b>14</b>
3.1 Komplexní rychlost . . . . .	14
3.2 Komplexní potenciál . . . . .	15
3.3 Formulace problému obtékání profilu . . . . .	16
3.4 Obtékání kruhu . . . . .	17
3.5 Cirkulace rychlosti podél profilu . . . . .	20
3.6 Problém obtékání profilu . . . . .	21
3.7 Konformní zobrazení . . . . .	21
3.8 Aplikace konformního zobrazení . . . . .	22
3.9 Žukovského profil . . . . .	23
3.10 Obtékání Žukovského profilu . . . . .	23
3.11 Kuttova-Žukovského odtoková podmínka . . . . .	25
<b>4 Použití proudové funkce</b>	<b>27</b>
4.1 Proudová funkce . . . . .	27
4.2 Okrajové podmínky . . . . .	27

4.3	Numerické řešení . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Použití metody konečných prvků</b>	<b>31</b>
5.1	Variační formulace . . . . .	31
5.2	"Variační" formulace . . . . .	32
5.3	Diskretizace problému . . . . .	33
5.4	Přibližné řešení . . . . .	34
5.5	Řešení diskrétního problému . . . . .	35
<b>6</b>	<b>Výsledky</b>	<b>36</b>
6.1	Řešení pomocí funkcí komplexní proměnné . . . . .	36
6.2	Řešení pomocí metody konečných prvků . . . . .	43
6.3	Srovnání výsledků . . . . .	46
	<b>Příloha</b>	<b>49</b>
	<b>Literatura</b>	<b>51</b>

Název práce: Numerické řešení obtékání leteckého profilu  
Autor: Jaroslava Prokopová  
Katedra (ústav): Katedra numerické matematiky  
Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Miloslav Feistauer, DrSc.  
e-mail vedoucího: feist@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Předkládaná práce se věnuje problematice obtékání izolovaného leteckého profilu. Jsou zde popsány rovnice charakterizující nevazké, nestlačitelné, nevířivé, stacionární, rovinné proudění a uvedena kompletní charakteristika daného problému pomocí rychlosti i proudové funkce. Hlavní náplní je pak studium metody funkcí komplexní proměnné a metody konečných prvků. Při aplikaci těchto metod se zaměřujeme na řešení obtékání Žukovského profilu. Díky ostré odtokové hraně tohoto profilu jsou zde studovány odtokové podmínky a jejich využití ve studovaných metodách. Poslední částí této práce je srovnání výsledků dosažených pomocí těchto metod pro zvolený Žukovského profil.

Klíčová slova: nevazké, nestlačitelné, nevířivé, stacionární, rovinné proudění; metoda funkcí komplexní proměnné; metoda konečných prvků; Žukovského profil; odtoková podmínka

Title: Numerical solution of flow past an airfoil  
Author: Jaroslava Prokopová  
Department: Department of Numerical Mathematics  
Supervisor: Prof. RNDr. Miloslav Feistauer, DrSc.  
Supervisor's e-mail address: feist@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: This work deal with the problem of flow past an airfoil. We describe the mathematical formulation of inviscid, incompressible, irrotational, stationary plane flow with the aid of the velocity and the stream function. The problem is solved by the method of complex functions and also by the finite element method. Special attention is paid to the trailing condition and its realization in the mentioned methods. In the last part of the work, results obtained by both methods are compared.

Keywords: flow past an airfoil, method of complex functions, finite element method, trailing condition, Joukowski airfoil

# Úvod

Problematika obtékání leteckého profilu je stále aktuální v návrhu a optimalizaci křídel letadel. Výpočty související s obtékáním leteckého profilu mají své místo při vývoji nových letounů.

Pro studium proudění a tedy i obtékání daného profilu jsou používány matematické modely, které nám umožňují získat informace o chování profilu při jeho obtékání tekutinou. Ve své práci se zaměřuji na řešení problému nevazkého, nestlačitelného, nevířivého, stacionárního, rovinného proudění, který je v tomto případě vhodným zjednodušením popisu proudění tekutiny.

Za těchto podmínek formulujeme problém charakterizující obtékání leteckého profilu pomocí rychlosti i proudové funkce. Dále pak studujeme analytickou metodu funkcí komplexní proměnné a numerickou metodu konečných prvků a jejich užití na danou problematiku.

Jak je v práci popsáno, metoda funkcí komplexní proměnné dává přesné řešení. Její použitelnost je ovšem omezena na nalezení konformního zobrazení daného profilu, což není vždy jednoduchý úkol. Ze znalosti teorie funkcí komplexní proměnné víme, že takové zobrazení existuje. V této práci jsem se tedy zaměřila na studium obtékání Žukovského profilu, pro který lze konformní zobrazení vyjádřit pomocí elementárních funkcí.

Žukovského profily se ve 20. století používaly díky svému aerodynamickému tvaru ke konstrukci křídel letadel. V dnešní době se již pro konstrukci křídel letadel nepoužívají, přesto dál mají své využití jako testovací profily při vývoji nových numerických metod, právě díky možnosti určit analytické řešení obtékání takového profilu.

Důležitou úlohu při aplikovatelnosti zvoleného modelu hraje odtoková podmínka, jejíž problematika je v této práci taktéž zpracována.

Metoda konečných prvků je na rozdíl od metody funkcí komplexní proměnné široce použitelná prakticky pro jakýkoliv profil. V současné době je jednou z nejužívanějších numerických metod pro řešení parciálních diferenciálních rovnic.

# Kapitola 1

## Základní rovnice

Základní rovnice popisující proudění tekutin jsou rovnice kontinuity, pohybové rovnice, rovnice pro energii a termodynamické vztahy. V této kapitole budeme předpokládat, že všechny veličiny vystupující v rovnicích jsou dostatečně hladké v množině  $Q_T = \Omega \times (0, T)$ , kde  $\Omega$  je oblast vyplněná tekutinou a  $(0, T)$  s  $T > 0$  je časový interval, během kterého sledujeme proudění.

### 1.1 Rovnice kontinuity

Rovnice kontinuity je matematickou formulací zákona zachování hmoty a lze ji vyjádřit v následujícím tvaru:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.1)$$

v  $Q_T$ , kde  $\rho$  je hustota tekutiny,  $\vec{v}$  je vektor rychlosti a  $t$  je čas.

### 1.2 Navierovy-Stokesovy rovnice

Navierovy-Stokesovy rovnice jsou matematickou formulací zákona zachování hybnosti a jsou vyjádřeny vztahem:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v} v_i) = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda \operatorname{div} \vec{v}) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right\} \quad (1.2)$$

pro  $i = 1, 2, 3$  v  $Q_T$ , kde  $\rho$  je opět hustota tekutiny,  $v_i$  jsou složky vektoru rychlosti  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $t$  je čas,  $\vec{f}$  je vektor hustoty vnějších objemových sil  $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ ,  $p$  je tlak a  $\lambda$  a  $\mu$  jsou koeficienty vazkosti.

Koeficienty vazkosti  $\lambda$  a  $\mu$  lze obecně vyjádřit  $\lambda = \lambda(\theta, \rho, p)$  a  $\mu = \mu(\theta, \rho, p)$ , kde  $\theta$  je absolutní teplota. V praxi jsou však obvykle tyto koeficienty brány jako konstanty. Pro určení těchto konstant uvažujeme  $\mu > 0$  a  $\lambda$  volíme tak, aby splňovalo rovnost  $3\lambda + 2\mu = 0$ . Koeficient  $\mu$  se nazývá dynamickou vazkostí a  $\nu := \frac{\mu}{\rho}$  je vazkostí kinematickou.

### 1.3 Zjednodušující předpoklady

Předpokládáme-li, že je **proudění nestlačitelné**, což je vyjádřeno podmínkou  $\rho = konst. > 0$ , rovnice kontinuity a Navierovy-Stokesovy rovnice se zjednoduší následujícím způsobem:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \operatorname{div} (v_i \vec{v}) = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right\}. \quad (1.4)$$

Uvažujeme-li  $\mu = konst$  pak i  $\nu = konst$ . Upravíme poslední člen (1.4) a použijeme vztahy (1.3) a

$$\operatorname{div} (v_i \vec{v}) = v_i \operatorname{div} \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) v_i = (\vec{v} \cdot \nabla) v_i,$$

čímž získáme následující tvar Navierových-Stokesových rovnic:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) v_i = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 v_i. \quad (1.5)$$

Výsledně lze tedy problém nestlačitelného proudění charakterizovat těmito rovnicemi ve vektorovém tvaru v  $Q_T$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} &= \vec{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Pokud je vazkost tekutiny tak malá, že ji zanedbáme, mluvíme o **nevazkém proudění**. Problém nevazkého nestlačitelného proudění lze popsat



následovně: tvar rovnice kontinuity (1.3) zůstane zachován a pohybové rovnice budou mít v  $Q_T$  tvar

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p . \quad (1.7)$$

Rovnice (1.7) se nazývají Eulerovy rovnice.

Jestliže všechny veličiny popisující proudění nezávisí na čase, což znamená  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$  a tedy  $\vec{v} = \vec{v}(x)$ ,  $p = p(x)$ ,  $\vec{f} = \vec{f}(x)$ , pak mluvíme o **stacionárním proudění**. Díky těmto předpokladům se nám rovnice popisující proudění v  $\Omega$  zjednoduší následujícím způsobem:

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \quad (1.8)$$

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p . \quad (1.9)$$

Mluvíme-li o **nevířivém proudění**, myslíme tím takové proudění, u něhož předpokládáme, že malé tekutinné objemy se pohybují translačně, deformují se, ale nerotují. To lze matematicky vyjádřit formulí

$$\operatorname{rot} \vec{v} = 0 \text{ v } \Omega$$

Tohoto faktu ještě užijeme později.

Za **rovinné** nebo-li **2-rozměrné proudění** považujeme proudění v  $\mathbb{R}^3$ , kde lze zvolit kartézský systém  $x_1, x_2, x_3$  tak, že platí:

- oblast vyplněná tekutinou  $\Omega_3 = \Omega \times (0, c)$ ,  $c = \text{konst.} > 0$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  je oblast,
- veličiny popisující proudění nezávisí na  $x_3$  a tedy  $\frac{\partial}{\partial x_3} \equiv 0$ ,
- $v_3 \equiv 0$ .

Pak značíme  $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ .

## 1.4 Bernoulliho rovnice

Uvažujme-li stacionární, nevazké, nestlačitelné, nevířivé proudění, lze odvodit vztah, z něhož je možné explicitně vyjádřit tlak.

V případě dvourozměrného resp. třírozměrného proudění položíme  $N = 2$  resp.  $N = 3$ .

**Definice:** Řekneme, že pole vnějších sil  $\vec{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$  je potenciální, jestliže existuje  $U \in C^1(\Omega)$  taková, že  $\vec{f} = \text{grad } U$  v  $\Omega$ .  $U$  je potenciál vnějších sil.

**Věta 1.4.1:** Necht'  $\vec{v} \in C^1(\Omega)^N$ ,  $p \in C^1(\Omega)$  splňují Eulerovy rovnice (1.9) a  $\text{rot } \vec{v} = 0$  v oblasti  $\Omega$ . Předpokládejme, že existuje  $U \in C^1(\Omega)$  takové, že  $\vec{f} = \text{grad } U$  v  $\Omega$ . Pak platí

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 - U = \text{konst v } \Omega. \quad (1.10)$$

**Důkaz:** V rovnici (1.7) použijeme vztah

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \nabla(|\vec{v}|^2) - \vec{v} \times \text{rot } \vec{v},$$

který lze jednoduše ověřit rozepsáním stran vztahu do složek. Dále využijeme fakt, že se jedná o nevířivé proudění a tedy  $\text{rot } \vec{v} = 0$ . Získáme tedy Eulerovy rovnice tvaru:

$$\frac{1}{2} \nabla(|\vec{v}|^2) = \vec{f} - \frac{\nabla p}{\rho} \text{ v } \Omega,$$

což je ekvivalentní s

$$\nabla\left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 - U\right) = 0 \text{ v } \Omega.$$

Vzhledem k tomu, že  $\Omega$  je oblast, je tento vztah ekvivalentní s rovností

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 - U = \text{konst v } \Omega.$$

Vztah (1.10) se nazývá **Bernoulliho rovnice**.

# Kapitola 2

## Formulace problému obtékání izolovaného profilu

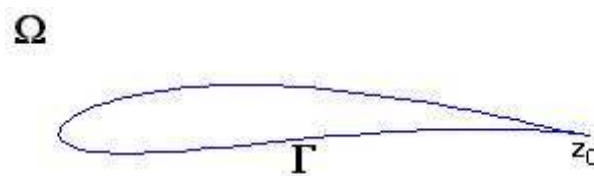
### 2.1 Profil

Definice:

- *Křivkou v  $\Omega$  nazveme libovolné spojité zobrazení  $\varphi : [a, b] \rightarrow \Omega$ , kde  $[a, b]$  je uzavřený omezený interval.*
- *Křivku  $\varphi : [a, b] \rightarrow \Omega$  nazveme hladkou, jestliže existuje  $\varphi'(\tau) \neq 0$  pro všechna  $\tau \in [a, b]$ .*
- *Křivku  $\varphi : [a, b] \rightarrow \Omega$  nazveme po částech hladkou, jestliže existuje dělení  $\alpha_0 = a < \alpha_1 < \dots < \alpha_k = b$  takové, že zobrazení  $\varphi |_{[\alpha_{i-1}, \alpha_i]}$  je hladká křivka v  $\Omega$  pro všechny  $i = 1, \dots, k$ .*
- *Křivku  $\varphi : [a, b] \rightarrow \Omega$  nazveme po částech lineární, jestliže existuje dělení  $\alpha_0 = a < \alpha_1 < \dots < \alpha_k = b$  takové, že zobrazení  $\varphi |_{[\alpha_{i-1}, \alpha_i]}$  je lineární pro všechny  $i = 1, \dots, k$ , tzn. že  $\varphi(\tau) = \delta_i + \sigma_i \tau$ , kde  $\tau \in [a, b]$ ,  $\delta_i, \sigma_i \in R^N$ .*
- *Řekneme, že křivka  $\varphi : [a, b] \rightarrow \Omega$  je uzavřená, jestliže  $\varphi(a) = \varphi(b)$ .*
- *Řekneme, že uzavřená křivka  $\varphi : [a, b] \rightarrow \Omega$  je jednoduchá, jestliže  $\varphi(\tau) \neq \varphi(\tau')$ ,  $\forall \tau, \tau' \in [a, b]$ ,  $\tau \neq \tau'$ .*

**Definice:** *Profil* nazveme geometrický obraz po částech uzavřené jednoduché záporně orientované křivky v  $\mathbb{R}^2$ , která je hladká s výjimkou nejvýše jednoho bodu.

Z hlediska praktických aplikací se předpokládá, že bod  $z_0$ , v němž není profil  $\Gamma$  hladký, leží na zadní, tedy odtokové, hraně profilu  $\Gamma$  vzhledem k nabíhajícímu proudu.



Obrázek 2.1: Profil  $\Gamma$

Oblastí  $\Omega$  vyplněnou tekutinou je vnějšek profilu  $\Gamma$ , tj.  $\Omega = \text{Ext } \Gamma$ .

## 2.2 Diferenciální rovnice

V této práci se omezíme pouze na rovinné, stacionární, nevazké, nestlačitelné, nevířivé proudění. To nám umožňuje formulovat problém obtékání profilu pomocí rovnice kontinuity

$$\text{div } \vec{v} = 0 \text{ v } \Omega \quad (2.1)$$

a podmínky nevířivosti

$$\text{rot } \vec{v} = 0 \text{ v } \Omega. \quad (2.2)$$

Rozepsáním operátorů rotace a divergence dostaneme soustavu:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \text{ v } \Omega \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = 0 \text{ v } \Omega. \quad (2.4)$$

## 2.3 Okrajové podmínky

K ucelení celého problému je ještě nutné doplnit okrajové podmínky.

Předpokládáme, že profil  $\Gamma$  je neprostupný, tedy tekutina nemůže prostupovat skrz jeho stěny. Tento fakt matematicky vyjádříme podmínkou:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \text{ na } \Gamma, \quad (2.5)$$

kde  $\vec{n}$  je jednotková vnější normála ke  $\Gamma$ .

V nekonečnu budeme uvažovat okrajovou podmínku předepisující chování rychlosti:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \vec{v}(x) = \vec{v}_\infty, \quad (2.6)$$

kde  $\vec{v}_\infty$  je rychlost v nekonečnu zvaná též rychlost nabíhajícího proudu. Rychlost v nekonečnu lze vyjádřit pomocí její velikosti a úhlu náběhu  $\theta_\infty$  takto:

$$\vec{v}_\infty = |\vec{v}_\infty| (\cos \theta_\infty, \sin \theta_\infty). \quad (2.7)$$

Najdeme-li rychlost  $\vec{v}$  splňující rovnice (2.3) a (2.4) a okrajové podmínky (2.5) a (2.6), tlak dopočítáme z Bernoulliho rovnice (1.10), kde předpokládáme  $U = 0$ . Konstantu  $v$  (1.10) lze určit ze zadané rychlosti  $\vec{v}_\infty$  a tlaku  $p_\infty$  v nekonečnu.

# Kapitola 3

## Použití funkcí komplexní proměnné

V následující kapitole budeme pracovat s množinou  $E = \{x + iy; (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ , kterou nazýváme komplexní rovinou. Množinu  $S = E \cup \{\infty\}$  nazveme uzavřenou komplexní rovinou.

### 3.1 Komplexní rychlost

V části 2.2 jsme formulovali problém rovinného, stacionárního, nevazkého, nestlačitelného, nevířivého proudění. Rychlost  $\vec{v} = (v_1, v_2) \in C^1(\Omega)$  splňuje rovnice (2.3) a (2.4) mající tvar

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} &= 0 \text{ v } \Omega \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} &= 0 \text{ v } \Omega.\end{aligned}$$

Funkci  $w(z) = v_1(x, y) - iv_2(x, y)$  nazýváme komplexní rychlostí k  $\vec{v}$ . Rovnice (2.3) a (2.4) reprezentují *Cauchyho-Riemannovy podmínky* pro existenci derivace

$$w'(z) = \frac{dw(z)}{dz} = \lim_{\tilde{z} \rightarrow z} \frac{w(\tilde{z}) - w(z)}{\tilde{z} - z}. \quad (3.1)$$

Máme-li tedy rychlost  $\vec{v} \in C^1(\Omega)$ , která vyhovuje rovnicím (2.3) a (2.4) v  $\Omega$ , pak komplexní rychlost  $w$  je holomorfní funkcí v  $\Omega$ . Náš problém je vyjádřen

holomorfní funkci  $w$  v  $\Omega$ , což nám umožňuje použít teorii funkcí komplexní proměnné pro řešení rovnic (2.3) a (2.4).

## 3.2 Komplexní potenciál

Jestliže nejednoznačná analytická funkce  $F$  splňuje vztah

$$F'(z) = w(z) \text{ pro všechna } z \in \Omega, \quad (3.2)$$

pak  $F$  nazýváme komplexním potenciálem ke komplexní rychlosti  $w$  v  $\Omega$ .

Jestliže  $w$  je komplexní rychlost v oblasti  $\Omega \subset E$ , pak existuje komplexní potenciál  $F$  k komplexní rychlosti  $w$ . Navíc každé takové  $F$  je neomezeně pokračovatelná analytická funkce v  $\Omega$  a má pouze holomorfní elementy. Díky poznatkům z komplexní analýzy víme, že všechny větve komplexního potenciálu  $F$  v  $\Omega$  jsou jednoznačné holomorfní funkce lišící se pouze o aditivní konstantu. Kteroukoliv z nich můžeme definovat jako

$$\tilde{F} = \phi + i\psi. \quad (3.3)$$

Máme-li  $\tilde{F}' = w$ , pak získáme ze vztahu (3.3) a Cauchyho-Riemannových podmínek vyjádření složek rychlosti pomocí  $\phi$  a  $\psi$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = v_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x} \text{ v } \Omega. \quad (3.4)$$

$\phi$  je potenciál rychlosti a  $\psi$  se nazývá proudovou funkcí.

Proudnicí nazveme takovou křivku, že v každém bodě  $x$  ležícím na ní, v němž je  $\vec{v}(x) \neq 0$ , existuje tečný vektor  $\vec{t}$  rovnoběžný s  $\vec{v}$ . Derivaci proudové funkce  $\psi$  podél proudnice  $\varphi = \varphi(\tau)$ ,  $\tau \in [a, b]$  nalezneme následujícím způsobem. Pro tečný vektor k proudnici  $\varphi$  platí

$$\vec{t} = \varphi'(\tau) \|\vec{v}$$

a tedy

$$\varphi'(\tau) = \vartheta(\tau) \vec{v}(\varphi(\tau)).$$

Nyní můžeme derivaci proudové funkce  $\psi$  vyjádřit jako

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(\varphi(\tau))}{d\tau} &= \vartheta(\tau) \left( \frac{\partial \psi(\varphi(\tau))}{\partial x} \varphi'_1(\tau) + \frac{\partial \psi(\varphi(\tau))}{\partial y} \varphi'_2(\tau) \right) \\ &= \vartheta(\tau) \{ -v_2(\varphi(\tau)) \varphi'_1(\tau) + v_1(\varphi(\tau)) \varphi'_2(\tau) \} \\ &= \vartheta(-v_2 v_1 + v_1 v_2) = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Z tohoto vztahu vidíme, že proudová funkce je konstantní podél proudnic.

Profil, který obtékáme, pokládáme za neprostupný. Jednotkovou vnější normálu  $\vec{n}$  k profilu  $\Gamma$  a tečný vektor  $\vec{t}$  lze zapsat jako

$$n = n_1 + in_2 \quad t = t_1 + it_2.$$

Jejich vzájemný vztah se vyjádří ve tvaru

$$n = -it. \quad (3.6)$$

Podmínku neprostupnosti (2.5) profilu  $\Gamma$  můžeme vyjádřit pomocí komplexního potenciálu  $F$  ke komplexní rychlosti  $w \in C(\Omega \cup \Gamma)$ . Připomeňme, že komplexní potenciál  $F$  má jednoznačně určenou imaginární část  $\psi \in C^1(\Omega \cup \Gamma)$ . Pak lze psát

$$v_n = \vec{v} \cdot \vec{n} = \text{Im}(wt) = \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (3.7)$$

$$v_t = \vec{v} \cdot \vec{t} = \text{Re}(wt) = -\frac{\partial \psi}{\partial n}. \quad (3.8)$$

Podmínka (2.5) je tedy ekvivalentní s vztahem:

$$\psi = \text{konst na } \Gamma. \quad (3.9)$$

To znamená, že profil  $\Gamma$  je částí proudnice.

### 3.3 Formulace problému obtékání profilu

Problém obtékání neprostupného profilu  $\Gamma$  pro rovinné, stacionární, ne-  
vazké, nestlačitelné, nevířivé proudění v oblasti  $\Omega$ , kde profil  $\Gamma$  je částí hra-  
nice oblasti  $\Omega$ , tj.  $\Gamma \subset \partial\Omega$ , lze formulovat dvěma způsoby:

1. Jestliže je profil  $\Gamma$  hladký, pak hledáme komplexní funkci  $w$  splňující podmínky
  - (a)  $w$  je holomorfní funkce v  $\Omega$ ,
  - (b)  $w \in C(\Omega \cup \Gamma)$ ,
  - (c)  $w$  splňuje  $\text{Im}(wt) = 0$  na  $\Omega$ .



2. Hledáme analytickou funkci  $F$  v  $\Omega$  takovou, že

- (a) její derivace  $w = F'$  je holomorfní v  $\Omega$ ,
- (b)  $F$  má jednoznačnou imaginární část  $\psi$  spojitě rozšiřitelnou na  $\Omega \cup \Gamma$  a splňující  $\psi = \text{konst}$  na  $\Gamma$ .

Formulace problému 1. a 2. nejsou obecně ekvivalentní.

### 3.4 Obtékání kruhu

Jednoduchým příkladem profilu může být kruh  $K_R$  se středem v počátku, poloměrem  $R \in (0, \infty)$  a rovnicí  $x^2 + y^2 = R^2$ . Kruh  $K_R$  je geometrickým obrazem negativně orientované jednoduché uzavřené křivky  $\varphi(\tau) = Re^{-i\tau}$ ,  $\tau \in [0, 2\pi]^1$ .

Bud'  $R \in (0, \infty)$ , konstanta  $\gamma \in \mathbb{R}^1$ ,  $u_\infty = u_{1\infty} + iu_{2\infty} \in E$  a  $\bar{u}_\infty = u_{1\infty} - iu_{2\infty}$ , kde  $\vec{u}_\infty = (u_{1\infty}, u_{2\infty})$  je rychlost v nekonečnu a lze ji vyjádřit jako

$$u_\infty = |u_\infty| (\cos \theta_\infty + i \sin \theta_\infty) \text{ s } \theta_\infty \in [0, 2\pi],$$

kde  $\theta_\infty$  je tzv. úhel náběhu. Pak komplexní potenciál  $F$  a jemu odpovídající komplexní rychlost  $w$  můžeme vyjádřit ve tvaru:

$$F(z) = \bar{u}_\infty z + u_\infty \frac{R^2}{z} - \frac{\gamma}{2\pi i} \log z \quad (3.10)$$

$$w(z) = \bar{u}_\infty - u_\infty \frac{R^2}{z^2} - \frac{\gamma}{2\pi i} \frac{1}{z}. \quad (3.11)$$

Nyní ověříme, že se jedná o obtékání kruhu  $K_R$ . Potřebujeme ukázat, že imaginární část komplexního potenciálu  $F$ , tedy proudová funkce  $\psi$ , je na profilu konstantní. Profil  $\gamma$  lze v tomto případě vyjádřit jako

$$K_R = \{Re^{-i\tau}; \tau \in [0, 2\pi)\} = \{R(\cos \tau + i \sin \tau); \tau \in [0, 2\pi)\}.$$

Nyní dosadíme do vztahu (3.10) body profilu a rozepíšeme komplexní logaritmus

---

<sup>1</sup>V kapitole 3 Použití funkcí komplexní proměnné uvažujeme komplexní exponenciálu  $\exp z = e^z$ .

$$\begin{aligned}
F(R(\cos \tau + i \sin \tau)) &= \\
&= (v_{1\infty} - iv_{1\infty})R(\cos \tau + i \sin \tau) + (v_{1\infty} + iv_{1\infty})\frac{R^2}{R(\cos \tau + i \sin \tau)} - \\
&\quad - \frac{\gamma}{2\pi i} \ln R - \frac{\gamma}{2\pi i} \tau \\
&= (v_{1\infty} - iv_{1\infty})R(\cos \tau + i \sin \tau) + (v_{1\infty} + iv_{1\infty})R(\cos \tau - i \sin \tau) + \\
&\quad + \frac{i\gamma}{2\pi} \ln R - \frac{\gamma}{2\pi} \tau \\
&= 2R(v_{1\infty} \cos \tau + v_{2\infty} \sin \tau) + \frac{i\gamma}{2\pi} \ln R - \frac{\gamma}{2\pi} \tau \quad \text{pro všechna } \tau \in [0, 2\pi).
\end{aligned}$$

Imaginární část  $F$  a tedy proudová funkce  $\psi$  na profilu  $K_R$  je

$$\operatorname{Im} F(R(\cos \tau + i \sin \tau)) = \frac{\gamma}{2\pi} \ln R = \text{konst.}$$

Tím jsme dokázali, že se jedná o obtékání kruhu.

Nyní se budeme snažit najít stagnační body, tedy body, v nichž je rychlost (3.11) rovna nule. Jestliže  $v_\infty = 0$ , pak  $w(z) = 0$  pouze v případě, že  $z = 0$ . Tento bod ale leží uvnitř kruhu. Předpokládejme tedy  $v_\infty \neq 0$ .

1. Nejprve předpokládejme, že  $|\gamma| < 4\pi R |v_\infty|$  a položme

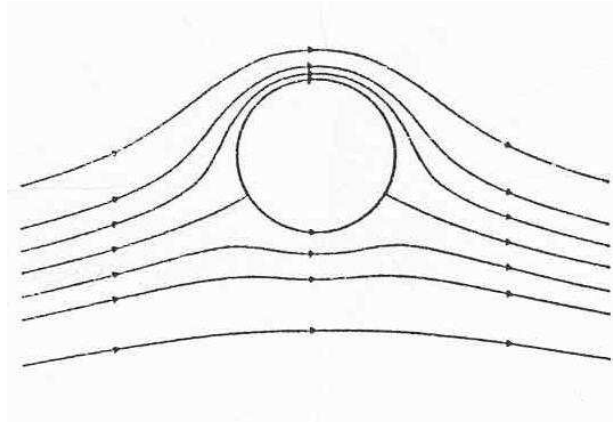
$$\beta = \arcsin \frac{\gamma}{4\pi R |v_\infty|}. \quad (3.12)$$

Pak máme dva stagnační body

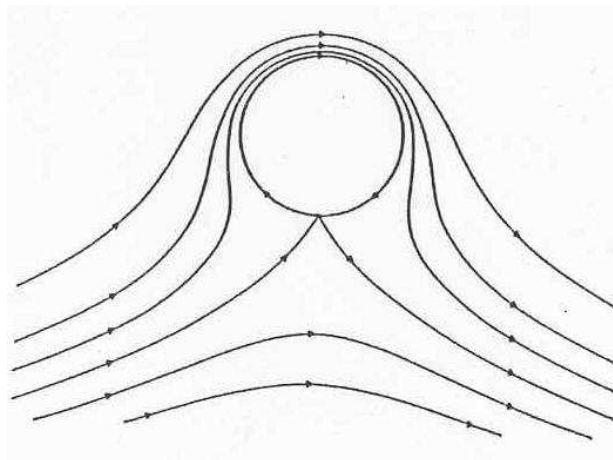
$$z_1 = -Re^{i(\theta_\infty + \beta)}, \quad z_2 = Re^{i(\theta_\infty - \beta)}, \quad (3.13)$$

ležící na kruhu  $K_R$ . Uvažujeme-li  $|\theta_\infty| \leq \frac{\pi}{2}$ , pak stagnační body  $z_1$  resp.  $z_2$  nazýváme náběžným resp. odtokovým bodem.

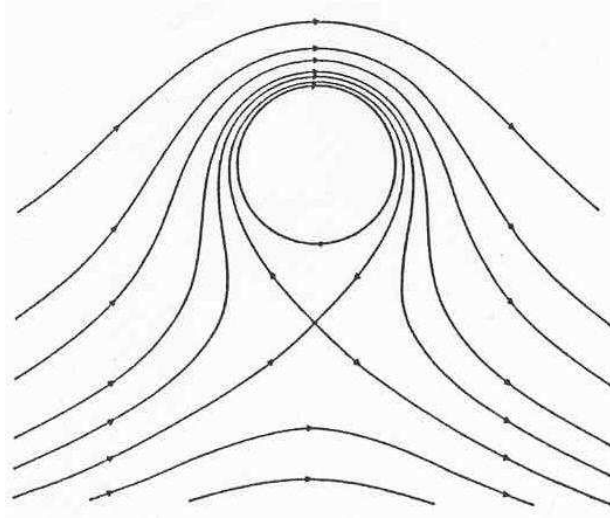
2. Jestliže  $|\gamma| = \pm 4\pi R |v_\infty|$  dostáváme pouze jediný stagnační bod  $z_1 = z_2 = \exp[i(\theta_\infty \mp \frac{\pi}{2})]$ , který náleží kruhu  $K_R$ .
3. Pro  $|\gamma| > 4\pi R |v_\infty|$  existuje jediný stagnační bod ležící v  $\Omega$ . Druhý stagnační bod leží ve vnitřku kruhu  $K_R$  a není tedy bodem proudového pole.



Obrázek 3.1: ad 1. Obtékání kruhu:  $R = 4$ ,  $w_\infty = 1$ ,  $\gamma = 8\pi$



Obrázek 3.2: ad 2. Obtékání kruhu:  $R = 4$ ,  $w_\infty = 1$ ,  $\gamma = 16\pi$



Obrázek 3.3: ad 3. Obtékání kruhu:  $R = 4$ ,  $w_\infty = 1$ ,  $\gamma = 20\pi$

### 3.5 Cirkulace rychlosti podél profilu

Uvažujme profil  $\Gamma = \langle \varphi \rangle$ , kde  $\varphi$  je po částech hladká, jednoduchá, uzavřená, negativně orientovaná křivka v  $E$ , a rychlost  $\vec{v} \in [C(\Omega \cup \Gamma)]^2$ , kde  $\Omega = \text{Ext } \Gamma$ . Cirkulace rychlosti  $\vec{v}$  podél profilu  $\Gamma$  je definována jako cirkulace podél křivky  $\varphi$ :

$$\gamma_\Gamma = \int_\varphi \vec{v} \cdot \vec{t} dS, \quad (3.14)$$

kde  $\vec{t}$  je jednotkový tečný vektor ke křivce  $\varphi$ . Rozepíšeme-li nyní  $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2 : [a, b] \rightarrow E$ , dostáváme

$$\gamma_\Gamma = \text{Re} \int_b^a [v_1(\varphi(\tau)) - iv_2(\varphi(\tau))] \varphi'(\tau) d\tau = \text{Re} \int_\varphi w(z) dz. \quad (3.15)$$

Komplexní rychlost  $w$  je holomorfní funkce v  $\Omega$  a uvažujme libovolnou, jednoduchou, uzavřenou, po částech hladkou, negativně orientovanou křivku  $\tilde{\varphi}$  v  $\Omega$  takovou, že  $\Gamma \subset \text{Int } \tilde{\varphi}$ . Díky Cauchyho-Goursatově větě [1] máme

$$\int_\varphi w(z) dz = \int_{\tilde{\varphi}} w(z) dz$$

a tedy

$$\gamma_\Gamma = \text{Re} \int_{\tilde{\varphi}} w(z) dz. \quad (3.16)$$

### 3.6 Problém obtékání profilu

Mějme daný profil  $\Gamma$ ,  $V_\infty = v_{1\infty} + iv_{2\infty} \in E$  a  $\gamma \in \mathbb{R}^1$ . Problém obtékání profilu  $\Gamma$ , které je homogenní v nekonečnu a má rychlost  $v_\infty = (v_{1\infty}, v_{2\infty})$  a cirkulaci rychlosti  $\gamma$ , spočívá v nalezení rychlostního potenciálu  $F$  vyhovujícího následujícím podmínkám:

1.  $F$  je analytická funkce v  $\Omega = \text{Ext } \Gamma$ .
2.  $w = F'$  je holomorfní funkce v  $\Omega$ .
3.  $\lim_{z \rightarrow \infty} w(z) = \bar{V}_\infty = v_{1\infty} - v_{2\infty}$ .
4.  $F$  má jednoznačnou imaginární část  $\psi$ , která může být rozšířena na  $\Omega \cup \Gamma$  tak, že  $\psi \in C(\Omega \cup \Gamma)$  a  $\psi|_\Gamma = \text{konst.}$
5. Cirkulace rychlosti podél profilu  $\Gamma$  je roven  $\gamma$  ve smyslu

$$\gamma_\Gamma = \text{Re} \int_{\bar{\varphi}} w(z) dz.$$

Pro řešení tohoto problému využijeme konformního zobrazení.

### 3.7 Konformní zobrazení

Řekneme, že funkce  $\mathcal{K} : \Omega \rightarrow S$  je meromorfní v  $\Omega$ , jestliže  $\Omega \subset S$  je otevřená,  $\mathcal{K}$  je spojitě v  $\Omega$  a holomorfní v  $\Omega - M$ , kde  $M$  je izolovaná množina v  $\Omega$ .  $M$  nemá žádné hromadné body v  $\Omega$  a obsahuje všechny póly zobrazení  $\mathcal{K}$ . Meromorfní funkce  $\mathcal{K} : \Omega \rightarrow S$ , která je prostá, je nazývána konformním zobrazením.

Existenci konformního zobrazení nám ve speciálním případě zaručuje Riemannova věta [1]:

**Věta 3.7.1:** *Nechť  $\Omega$ ,  $\Omega^* \subset S$  jsou neprázdné oblasti, jejichž doplňky  $S - \Omega$ ,  $S - \Omega^*$  jsou souvislé množiny obsahující nejméně dva body. Pak existuje konformní zobrazení  $\mathcal{K}$  oblasti  $\Omega$  na oblast  $\Omega^*$ . Jestliže  $\Omega$ ,  $\Omega^*$  jsou Jordanovy oblasti, pak konformní zobrazení  $\mathcal{K}$  je spojitě rozšiřitelné na  $\bar{\Omega}$  tak, že  $\mathcal{K}$  je homeomorfismus mezi  $\bar{\Omega}$  a  $\bar{\Omega}^*$ .*

Poslední část věty říká, že  $\mathcal{K}$  je spojitě zobrazení množiny  $\bar{\Omega}$  na množinu  $\bar{\Omega}^*$ , které je vzájemně jednoznačné, a jeho inverzní zobrazení  $\mathcal{K}^{-1}$  je spojitě v  $\bar{\Omega}^*$ .

### 3.8 Aplikace konformního zobrazení

Mějme komplexní potenciál  $F^*$  v oblasti  $\Omega^* \subset E$  a komplexní rychlost  $w^* = (F^*)'$ . Jestliže  $\mathcal{K} : \Omega \xrightarrow{\text{na}} \Omega^*$  je konformní zobrazení, pak existuje právě jedna analytická funkce  $F$ , kterou získáme složením  $F^*$  a  $\mathcal{K}$ , tedy  $F = F^* \circ \mathcal{K}$ . Její derivaci vyjádříme jako  $F' = ((F^*)' \circ \mathcal{K})\mathcal{K}'$ .  $F'$  je holomorfní funkce v  $\Omega$ . Proudění s komplexním potenciálem  $F^*$  je **konformně ekvivalentní** s komplexním potenciálem  $F$  ke komplexní rychlosti  $w = F'$  v oblasti  $\Omega$  a platí pro ně vzájemný vztah

$$F = F^* \circ \mathcal{K}.$$

Nyní se budeme věnovat problému obtékání profilu uvedeného v části (3.6). Nechť  $\Omega^* = \text{Ext } K_R$ , kde  $K_R$  je negativně orientovaný kruh popsany v části (3.4), a  $\Omega = \text{Ext } \Gamma$ , kde  $\Gamma$  je profil. Budeme používat silnější verzi věty o existenci konformního zobrazení [1].

**Věta 3.8.1:** *Existuje právě jedno konformní zobrazení  $\mathcal{K} : \Omega \cup \{\infty\} \xrightarrow{\text{na}} \Omega^* \cup \{\infty\}$  takové, že*

$$\mathcal{K}(\infty) = \infty, \quad (3.17)$$

$$\mathcal{K}'(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \mathcal{K}'(z) > 0. \quad (3.18)$$

*Navíc  $\mathcal{K}$  má právě jedno spojitě rozšíření na  $\Omega \cup \Gamma$ , které je homeomorfismem mezi  $\Omega \cup \Gamma$  a  $\Omega^* \cup K_R$ .*

**Věta 3.8.2:** *Mějme profil  $\Gamma \subset E$ ,  $V_\infty = v_{1\infty} + v_{2\infty} \in E$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}^1$ ,  $R \in (0, \infty)$  a konformní zobrazení z předcházející věty. Nechť  $u_\infty = \frac{V_\infty}{\mathcal{K}'(\infty)}$ . Pak funkce*

$$F(z) = \bar{u}_\infty \mathcal{K}(z) + \frac{u_\infty R^2}{\mathcal{K}(z)} - \frac{\gamma}{2\pi i} \log(\mathcal{K}(z)), \quad z \in \Omega = \text{Ext } \Gamma$$

*je řešením problému obtékání profilu z části (3.6).*

### 3.9 Žukovského profil

Žukovského funkce je funkce

$$Z(\vartheta) = \frac{1}{2} \left( \vartheta + \frac{a^2}{\vartheta} \right), \quad (3.19)$$

kde  $a \in (0, \infty)$ . Funkce  $Z$  je racionální a holomorfní v  $E - \{0\}$ . Body 0 a  $\infty$  jsou jednoduchými póly Žukovského funkce. Funkce  $Z$  má tyto vlastnosti:

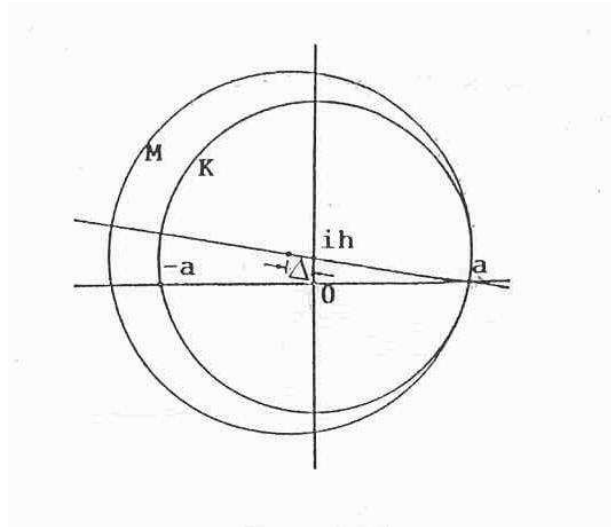
- $Z(S) = S$ .  $Z(\vartheta_1) = Z(\vartheta_2)$  pouze tehdy, když  $\vartheta_1 = \vartheta_2$  nebo  $\vartheta_1 = \frac{a^2}{\vartheta_2}$ .
- $Z$  je zobrazení prosté na jakékoliv množině  $M \subset S$ , která neobsahuje žádnou ze zmíněných dvojic bodů  $\vartheta_1, \vartheta_2$  a  $\vartheta_1 = \frac{a^2}{\vartheta_2}$ . Jestliže je množina  $M$  otevřená, pak  $Z|M$  je konformní zobrazení.

Žukovského funkce  $Z$  se využívá ke konstrukci Žukovského profilu, který se díky svému aerodynamickému tvaru používal na začátku 20. století v letectví pro návrhy tvaru křídel letadel. Nyní se již se v letectví Žukovského profil nevyužívá, nadále se však užívá k testování numerických metod díky možnosti získat pro takový profil přesné řešení. Mějme kruh  $K(h, a)$  se středem v bodě  $ih$  a procházející body  $\pm a$ , kde  $h \in [0, \infty]$ . Dále mějme kruh  $M$  dotýkající se kruhu  $K(h, a)$  v bodě  $a$  a splňující  $\overline{\text{Int } K(h, a)} \subset \text{Int } M \cup \{a\}$ . Pak množina  $Z(M)$  se nazývá **Žukovského profil**. Jelikož  $Z$  je spojitě a prostě v  $M$ , Žukovského profil je geometrický obraz jednoduché uzavřené křivky. Žukovského profil závisí na třech parametrech:  $a$ ,  $h$  a vzdálenosti  $\Delta$  mezi středy kruhů  $K = K(h, a)$  a  $M = M(h, a, \Delta)$ .

### 3.10 Obtékání Žukovského profilu

Uvažujme Žukovského profil s parametry  $a$ ,  $h$ ,  $\Delta$  a označme  $\vartheta_0$  a  $R$  střed a poloměr kruhu  $M = M(h, a, \Delta)$ . Pak funkce  $\omega = \vartheta - \vartheta_0$  zobrazuje konformně  $\text{Ext } M \cup \{\infty\}$  na  $\text{Ext } K_R \cup \{\infty\}$  a homeomorfně uzávěry těchto množin. Inverzní zobrazení  $\mathcal{K}$  k Žukovskému zobrazení  $Z$  je

$$\mathcal{K}(z) = z + \sqrt{z^2 - a^2}, \quad (3.20)$$



Obrázek 3.4: Parametry Žukovského profilu

$\Delta$ \ h	1.2	1.8
0.6		
1.2		
1.8		

Obrázek 3.5: Žukovského profily s  $a = 6$



kde  $\sqrt{z^2 - a^2} = \exp\left(\frac{1}{2} \log(z^2 - a^2)\right)$  a  $\log$  značí hlavní hodnotu logaritmu. Tzn., že pro  $z = |z|e^{i\sigma} \neq 0$ ,  $\sigma \in [-\pi, \pi)$ , máme  $\log z = \ln|z| + i\sigma$ . Z věty (3.8.2) a vlastností Žukovského funkce  $Z$  získáváme komplexní potenciál

$$F(z) = \frac{1}{2} \left[ \bar{V}_\infty (\mathcal{K}(z) - \vartheta_0) + \frac{V_\infty R^2}{\mathcal{K}(z) - \vartheta_0} - \frac{\gamma}{\pi i} \log(\mathcal{K}(z) - \vartheta_0) \right] \quad (3.21)$$

pro obtékání Žukovského profilu  $Z(M)$  s cirkulací rychlosti  $\gamma$  a rychlostí v nekonečnu  $\vec{v}_\infty = (v_{1\infty}, v_{2\infty})$ .

### 3.11 Kuttova-Žukovského odtoková podmínka

Problém obtékání Žukovského profilu s předepsanou rychlostí v nekonečnu má nespočetně řešení lišících se od sebe cirkulací rychlosti. Ne všechna tato řešení mají dobrý fyzikální smysl. Pro nalezení fyzikálně smysluplných řešení je třeba zkoumat chování rychlosti v okolí ostré odtokové hrany Žukovského profilu  $Z(M)$  v bodě  $a = Z(a)$ . Ze vztahu (3.21) získáme

$$\begin{aligned} w(z) &= F'(z) = \mathcal{K}'(z) \left\{ \frac{1}{2} \left[ \bar{V}_\infty - \frac{V_\infty R^2}{(\mathcal{K}(z) - \vartheta_0)^2} \right] - \frac{\gamma}{2\pi i} \frac{1}{\mathcal{K}(z) - \vartheta_0} \right\} \\ &= w^*(\mathcal{K}(z) - \vartheta_0) \mathcal{K}'(z), \end{aligned} \quad (3.22)$$

kde  $w^*$  je komplexní rychlost proudění obtékajícího kruhu  $K_R$  s cirkulací  $\gamma$  a rychlostí v nekonečnu  $\frac{\vec{v}_\infty}{2}$  danou vztahem (3.11) s  $u_\infty = \frac{V_\infty}{2}$ . Protože  $Z'(a) = 0$ , dostáváme

$$\lim_{z \rightarrow a} \mathcal{K}'(z) = \infty. \quad (3.23)$$

Tudíž,  $a$  je jednoduchým pólem derivace  $\mathcal{K}'$ . Jestliže  $\mathcal{K}(a) - \vartheta_0 = a - \vartheta_0$  není stagnačním bodem funkce  $w^*$ , pak  $w^*(a - \vartheta_0) \neq 0$  a

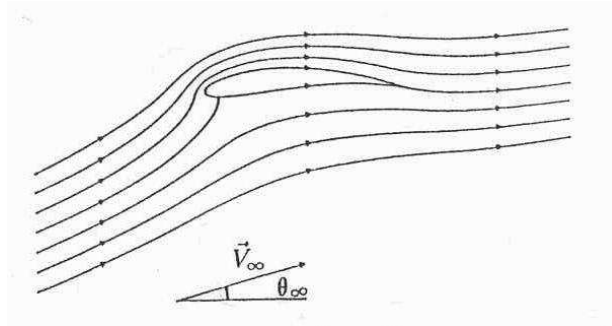
$$\lim_{z \rightarrow a} w(z) = w^*(a - \vartheta_0) \lim_{z \rightarrow a} \mathcal{K}'(z) = \infty. \quad (3.24)$$

Vidíme, že rychlost je neomezená v okolí ostré odtokové hrany, což je fyzikálně nereálné. Pro získání dobrého modelu použijeme **Kuttovo-Žukovského pravidlo** [1]: *Reálná tekutina tekoucí proti profilu pod "rozumným" úhlem náběhu získá přirozeně takovou cirkulaci, aby odtok na ostré odtokové hraně byl hladký.* Pro  $|\theta_\infty| < \frac{\pi}{2}$  se toto pravidlo hladkého odtoku nazývá

**Kuttova-Žukovského odtoková podmínka.** Hodnota cirkulace může být vypočtena následujícím způsobem:

Ze vztahu (3.22) víme, že rychlost  $w(z)$  je omezená pouze tehdy, je-li bod  $a - \vartheta_0$  stagnačním bodem rychlosti  $w^*$ . Nechť  $V_\infty = |V_\infty| \exp(i\theta_\infty)$  a  $|\theta_\infty| \leq \frac{\pi}{2}$ . Na základě vztahu (3.13) potřebujeme nalézt cirkulaci  $\gamma$  tak, aby  $a - \vartheta_0 = z_2 = R \exp[i(\theta_\infty - \beta)]$ , kde  $\beta$  je určeno vztahem (3.12) s  $u_\infty = \frac{V_\infty}{2}$ . Z definice Žukovského profilu víme, že  $-\frac{h}{a} = \tan(\theta_\infty - \beta)$  a tedy  $\beta = \theta_\infty + \arctan\left(\frac{h}{a}\right)$ . Toto a vztah (3.12) dává hledanou cirkulaci

$$\gamma = 2\pi R |V_\infty| \left( \theta_\infty + \arctan \frac{h}{a} \right) \quad (3.25)$$



Obrázek 3.6: Hladký odtok na Žukovského profilu:  $|w_\infty| = 1$ ,  $\theta_\infty = 15^\circ$ ,  $\gamma = 4.91$

Pro určení cirkulace pro hladký profil, tedy profil bez ostré hrany, lze užít **odtokovou podmínku nulové rychlosti v předepsaném stagnačním bodě**  $z_0$  ležícím na zadní části profilu ve směru proudu:

$$\vec{v}(z_0) = 0, \quad (3.26)$$

což lze pro komplexní rychlost  $w$  přepsat ve tvaru

$$w(z_0) = 0.$$

Odtokový stagnační bod  $z_0 \in \Gamma$  se určí jako bod s největší křivostí na zadní straně profilu  $\Gamma$ . Je-li zadní část profilu  $\Gamma$  tvořena obloukem kružnice  $\mathcal{C}$ , pak se za odtokový stagnační bod volí prostřední bod oblouku  $\mathcal{C}$ .

# Kapitola 4

## Použití proudové funkce

### 4.1 Proudová funkce

Připomeňme, že proudovou funkci  $\psi$  definujeme jako  $\psi \in C^2(\Omega)$  splňující vztahy:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = v_1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v_2 \text{ v } \Omega. \quad (4.1)$$

Z této definice plyne

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \text{ v } \Omega. \quad (4.2)$$

Dosadíme-li rovnice (4.1) do podmínky nevířivého proudění dostaneme

$$0 = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\Delta \psi.$$

Proudová funkce nevířivého proudění tedy splňuje rovnici:

$$\Delta \psi = 0 \text{ v } \Omega. \quad (4.3)$$

### 4.2 Okrajové podmínky

Máme dva druhy okrajových podmínek:

- okrajové podmínky v nekonečnu,
- okrajové podmínky na profilu.

Okrajová podmínka v nekonečnu je dána vztahem

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \vec{v}(x) = \vec{v}_\infty,$$

kterou lze pomocí proudové funkce vyjádřit následovně:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \nabla \psi(x) = (-v_{2\infty}, v_{1\infty}). \quad (4.4)$$

$\psi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  právě, když  $\vec{v} \in C^1(\Omega)^2 \cap C(\bar{\Omega})$ . Pak lze okrajovou podmínku na profilu formulovat ve tvaru:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0,$$

to je ekvivalentní vyjádření

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial y} n_1 - \frac{\partial \psi}{\partial x} n_2 = \nabla \psi \cdot (-n_2, n_1),$$

kde  $\vec{n} = (n_1, n_2)$  je jednotková vnější normála a tečný vektor k profilu  $\Gamma$  je  $(-n_2, n_1) = \vec{t}$ . Tím získáváme vztah

$$0 = \nabla \psi \cdot \vec{t} = \frac{\partial \psi}{\partial \vec{t}},$$

který dává okrajovou podmínku na profilu  $\Gamma$  ve tvaru

$$\psi = \text{konst} \quad \text{na } \Gamma. \quad (4.5)$$

### 4.3 Numerické řešení

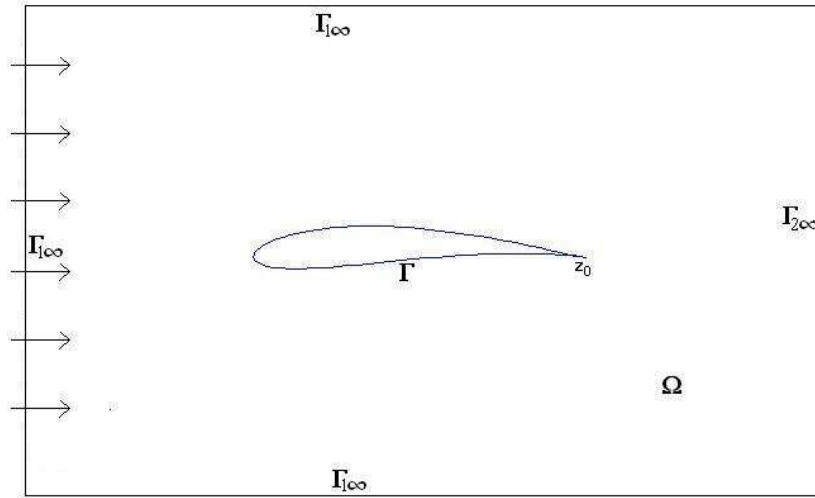
Numerické řešení vyžaduje, aby byla výpočetní oblast omezená. Proto vložíme profil  $\Gamma$  do dostatečně velké omezené oblasti. Dostáváme tak výpočetní oblast

$$\Omega = \text{Ext } \Gamma \cap \text{Int } \Gamma_\infty,$$

kde  $\Gamma_\infty$  je jednoduchá, uzavřená, po částech hladká křivka, pro niž platí  $\Gamma \subset \text{Int } \Gamma_\infty$ .

Okrajová podmínka (4.4) nás vede k předpokladu, že se  $\psi$  chová v nekonečnu jako funkce

$$\psi(x, y) = -v_{2\infty}x + v_{1\infty}y.$$



Obrázek 4.1: Výpočetní oblast

Na  $\Gamma_{1\infty}$ , části křivky  $\Gamma_\infty$ , klademe

$$\psi(x, y) = -v_{2\infty}x + v_{1\infty}y \text{ na } \Gamma_{1\infty}, \quad (4.6)$$

což je ekvivalentní proudové funkci konstantního rychlostního pole  $\vec{v}_\infty$ .

Na  $\Gamma_{2\infty}$ , části křivky  $\Gamma_\infty$ , mějme vztah

$$\vec{v} \cdot \vec{t} = \vec{v}_\infty \cdot \vec{t} = v_{1\infty}t_1 + v_{2\infty}t_2.$$

Je-li  $\vec{n}$  je vnější jednotková normála ke  $\Gamma_{2\infty}$  a  $\vec{t}$  je jednotkový tečný vektor ke  $\Gamma_{2\infty}$  a platí  $(n_1, n_2) = (t_2, -t_1)$ . Použijeme-li nyní (4.1), dostáváme

$$v_{1\infty}t_1 + v_{2\infty}t_2 = \frac{\partial\psi}{\partial y}(-n_2) - \frac{\partial\psi}{\partial x}n_2 = -\nabla\psi \cdot \vec{n} = -\frac{\partial\psi}{\partial n}.$$

Máme tedy Neumannovu podmínku na  $\Gamma_{2\infty}$ :

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{2\infty}} = v_{1\infty}n_2 - v_{2\infty}n_1 = \varphi_N. \quad (4.7)$$

Na profilu  $\Gamma$  máme podmínku (4.5)

$$\psi \Big|_{\Gamma} = q = \text{konst.}$$

Odtokové podmínky na profilu  $\Gamma$  se liší pro případ, kdy se jedná o hladký profil a kdy se jedná o profil s ostrou odtokovou hranou.

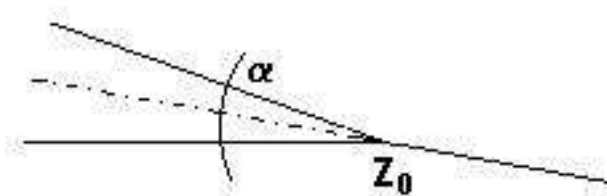
1. Je-li profil  $\Gamma$  hladký, zvolíme odtokový bod  $z_0 \in \Gamma$ . Pak podmínky  $\vec{v}(z_0) = 0$  a  $(\vec{v} \cdot \vec{n})|_{\Gamma} = 0$  dávají

$$(\vec{v} \cdot \vec{t})(z_0) = 0.$$

Z toho získáváme podmínku

$$\frac{\partial \psi}{\partial n}(z_0) = 0. \quad (4.8)$$

2. Má-li profil  $\Gamma$  ostrou odtokovou hranu, použijeme následující podmínku [2]: *Proudnice definovaná jako křivka daná podmínkou  $\psi = q$  opouští profil  $\Gamma$  v bodě  $z_0$  ve směru osy úhlu tvořeného hladkými částmi profilu  $\Gamma$ .*



Obrázek 4.2: Odtoková podmínka pro profil s ostrou odtokovou hranou

Problém obtékání profilu  $\Gamma$  se dá formulovat následovně:  
Hledáme  $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$  a  $q \in \mathbb{R}$  takové, že

$$\Delta \psi = 0 \text{ v } \Omega \quad (4.9)$$

$$\psi = q = \text{konst na } \Gamma \quad (4.10)$$

$$\psi = \psi_D \text{ na } \Gamma_{1\infty} \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \varphi_N \text{ na } \Gamma_{2\infty} \quad (4.12)$$

a je splněna odtoková podmínka.

# Kapitola 5

## Použití metody konečných prvků

### 5.1 Variační formulace

Klasické řešení problému obtékání profilu je formulováno vztahy (4.9) - (4.12) a odtokovou podmínkou.

Naším cílem bude řešení tohoto problému metodou konečných prvků. Definujme nejprve prostor testovacích funkcí

$$V = \left\{ v \in C^1(\bar{\Omega}); v|_{\Gamma_{1\infty}} = 0, v|_{\Gamma} = 0 \right\}. \quad (5.1)$$

Rovnici (4.9) vynásobme libovolným  $v \in V$ , zintegrujme přes oblast  $\Omega$  a použijme Greenovu větu:

$$0 = \int_{\Omega} \Delta\psi \cdot v dx = - \int_{\Omega} \nabla\psi \cdot \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\psi}{\partial n} v dS. \quad (5.2)$$

Díky definici prostoru  $V$  můžeme integrál přes  $\partial\Omega$  upravit následně:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\psi}{\partial n} v dS = \int_{\Gamma \cup \Gamma_{1\infty} \cup \Gamma_{2\infty}} \frac{\partial\psi}{\partial n} v dS = \int_{\Gamma_{2\infty}} \frac{\partial\psi}{\partial n} v dS = \int_{\Gamma_{2\infty}} \varphi_N v dS. \quad (5.3)$$

Výsledně tedy dostáváme identitu

$$\int_{\Omega} \nabla\psi \cdot \nabla v dx = \int_{\Gamma_{2\infty}} \varphi_N v dS, \quad (5.4)$$

splněnou pro všechna  $v \in V$ . Zaved'me formy

$$a(\psi, v) = \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla v dx \quad (5.5)$$

$$L(v) = \int_{\Gamma_{2\infty}} \varphi_N v dS. \quad (5.6)$$

Rovnost (5.4) lze přepsat jako

$$a(\psi, v) = L(v) \quad \text{pro všechna } v \in V. \quad (5.7)$$

Nechť  $\psi^* \in C^2(\bar{\Omega})$  splňuje následující podmínky:

$$\psi^*|_{\Gamma_{1\infty}} = \psi_D \quad (5.8)$$

$$\psi^*|_{\Gamma} = 0 \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial \tilde{n}}(z_0) = 0, \quad (5.10)$$

kde  $\frac{\partial}{\partial \tilde{n}}$  je derivace ve směru osy úhlu  $\alpha$  v bodě  $z_0$ . Zaved'me prostor

$$\tilde{V} = \left\{ v \in C^2(\bar{\Omega}); v|_{\Gamma_{1\infty}} = 0, v|_{\Gamma} = \text{konst}, \frac{\partial v}{\partial \tilde{n}}(z_0) = 0 \right\}. \quad (5.11)$$

Pak zjistíme, že

$$\psi - \psi^* \in \tilde{V} \text{ a tedy } \psi = \psi^* + u, \text{ kde } u \in \tilde{V}. \quad (5.12)$$

## 5.2 ”Variační” formulace

Na základě vztahu (5.2) vidíme, že funkce  $\psi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^1$ , která je klasickým řešením problému sestávajícího z (4.9) - (4.12) a odtokové podmínky, splňuje následující podmínky:

$$\psi \in C^2(\bar{\Omega}), \quad (5.13)$$

$$\psi - \psi^* \in \tilde{V}, \quad (5.14)$$

$$a(\psi, v) = L(v) \quad \text{pro všechna } v \in V, \quad (5.15)$$

kde formy  $a$  a  $L$  jsou definovány vztahy (5.5) a (5.6). Naším cílem je tedy nalézt funkci  $\psi$  vyhovující podmínkám (5.13) - (5.15).



## 5.3 Diskretizace problému

Problém (5.13) - (5.15) je základem pro aplikaci metody konečných prvků na řešení obtékání izolovaného profilu.

Aproximujeme oblast  $\Omega$  oblastí  $\Omega_h$  s po částech lineární hranicí  $\partial\Omega_h$ , jejíž vrcholy leží na hranici  $\partial\Omega$ . Části hranice  $\partial\Omega_h$  jsou aproximovány:  $\Gamma \approx \Gamma_h$ ,  $\Gamma_{1\infty} \approx \Gamma_{1h\infty}$ ,  $\Gamma_{2\infty} \approx \Gamma_{2h\infty}$ . Vytvoříme triangulaci  $\mathcal{T}_h$  oblasti  $\Omega_h$  sestávající z konečného počtu uzavřených trojúhelníků  $T$ , které mají následující vlastnosti:

1.  $\bar{\Omega}_h = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$ .
2. Jestliže  $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h$  a  $T_1 \neq T_2$ , pak může nastat pouze jeden z následujících případů:
  - (a)  $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ ,
  - (b)  $T_1 \cap T_2$  je společný vrchol trojúhelníků  $T_1, T_2$ ,
  - (c)  $T_1 \cap T_2$  společná strana trojúhelníků  $T_1, T_2$ .

Označme  $\sigma_h = P_1, \dots, P_N$  množinu všech vrcholů triangulace  $\mathcal{T}_h$  s těmito vlastnostmi:

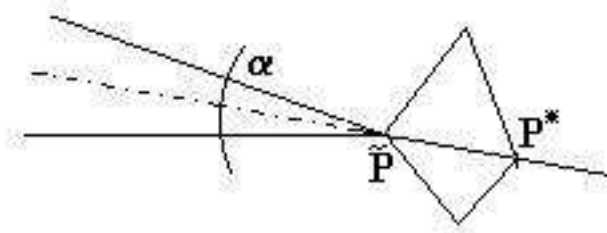
1.  $\sigma_h \subset \bar{\Omega}_h$  a  $\sigma_h \cap \partial\Omega_h \subset \partial\Omega$ ,
2. průsečíky částí hranice  $\partial\Omega$  s různými okrajovými podmínkami jsou prvky  $\sigma_h$ ,
3. body, v nichž není hranice  $\partial\Omega$  hladká, jsou prvky  $\sigma_h$ ,
4. pro bod  $z_0$  ležící na ostré odtokové hraně profilu  $\Gamma$  platí, že  $z_0 \in \sigma_h$  a existuje trojúhelník  $T \in \mathcal{T}_h$  s vrcholy  $\tilde{P} = z_0$  a  $P^* \in \Omega_h$  takový, že strana  $S = \tilde{P}P^* \subset \partial T$  má směr osy úhlu  $\alpha$  v bodě  $z_0$ .

Přibližné řešení problému budeme uvažovat v prostoru

$$X_h = \left\{ v_h \in C(\bar{\Omega}_h); v_h|_T \text{ je lineární na každém } T \in \mathcal{T}_h \right\} \quad (5.16)$$

a prostor  $V$  testovacích funkcí aproximujeme prostorem

$$V_h = \left\{ v_h \in X_h; v_h|_{\Gamma_{1h\infty}} = 0, v_h|_{\Gamma_h} = 0 \right\}. \quad (5.17)$$



Obrázek 5.1: Vlastnost 4 množiny  $\sigma_h = P_1, \dots, P_N$

Prostor  $\tilde{V}$  aproximujeme prostorem

$$\tilde{V}_h = \{v_h \in X_h; v_h|_{\Gamma_{1h\infty}} = 0, v_h|_{\Gamma_h} = \text{konst}, v_h(z_0) = v_h(P^*)\}. \quad (5.18)$$

Definujeme funkci  $\psi^* \in X_h$  s těmito vlastnostmi:

$$\psi_h^*(P) = \psi_D(P) \text{ pro všechna } P \in \sigma_h \cap \Gamma_{1\infty} \quad (5.19)$$

$$\psi_h^*|_{\Gamma_h} = 0 \quad (5.20)$$

$$\psi_h^*(z_0) = \psi_h^*(P^*). \quad (5.21)$$

## 5.4 Přibližné řešení

Hledáme takové  $\psi_h : \bar{\Omega}_h \rightarrow \mathbb{R}^1$ , že

$$\psi_h \in X_h, \quad (5.22)$$

$$\psi_h - \psi_h^* \in \tilde{V}_h, \quad (5.23)$$

$$a_h(\psi_h, v_h) = L_h(v_h) \text{ pro všechna } v_h \in V_h. \quad (5.24)$$

$\psi_h$  se nazývá přibližným řešením. Formy (5.5) a (5.6) mají v diskrétním problému tvar:

$$a_h(\psi_h, v_h) = \int_{\Omega_h} \nabla \psi_h \cdot \nabla v_h dx \quad (5.25)$$

$$L_h(v_h) = \int_{\Gamma_{2h\infty}} \varphi_{Nh} v_h dx, \quad (5.26)$$

kde  $\varphi_{Nh} : \Gamma_{2h\infty} \rightarrow \mathbb{R}$  je aproximace funkce  $\varphi_N : \Gamma_{2\infty} \rightarrow \mathbb{R}$ .

## 5.5 Řešení diskrétního problému

V prostoru  $X_h$  existuje báze tvořená funkcemi  $w_i, i = 1, \dots, N$ , takovými, že

$$w_i(P_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (5.27)$$

Jestliže  $v_h \in X_h$ , pak

$$v_h = \sum_{j=1}^N v_h(P_j) w_j. \quad (5.28)$$

V prostoru  $V_h$  existuje báze  $\{w_i^*\}_{i=1}^n$ , kde  $w_i^* \in X_h$  jsou přiřazeny vrcholům  $P_i \in \sigma_h \cap (\Omega_h \cup \Gamma_{2h\infty})$ . Tzn., že  $n =$  počet prvků množiny  $P_i \in \sigma_h \cap (\Omega_h \cup \Gamma_{2h\infty})$ . Předpokládáme, že platí

$$w_i^*(P_j) = \delta_{ij} \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, N.$$

V prostoru  $\tilde{V}_h$  existuje báze  $\{\tilde{w}_i^*\}_{i=1}^n, P_i \in \sigma_h \cap (\Omega_h \cup \Gamma_h \cup \Gamma_{2h\infty})$ , pro kterou platí:

- $\tilde{w}_i^* = w_i^*$  pro  $i = 1, \dots, n$  takové, že  $P_i \in \sigma_h \cap (\Omega_h \cup \Gamma_h \cup \Gamma_{2h\infty})$ ,
- $\tilde{w}_i^* = \sum_{P_j \in \sigma_h \cap (\Gamma_h \cup \{P^*\})} w_j^*$  pro  $P_i = P^*$ .

Přibližné řešení  $\psi_h$  lze zapsat i ve tvaru

$$\psi_h = \psi_h^* + u_h, \quad u_h \in \tilde{V}_h. \quad (5.29)$$

Funkce  $u_h$  lze zapsat jako

$$u_h = \sum_{j=1}^n u_j \tilde{w}_j^*. \quad (5.30)$$

Dostáváme tak vyjádření přibližného řešení

$$\psi_h = \psi_h^* + \sum_{j=1}^n u_j \tilde{w}_j^*. \quad (5.31)$$

Toto vyjádření dosadíme do vztahu (5.24), kde klademe  $v_h := w_i^*, i = 1, \dots, n$ , a získáváme soustavu lineárních rovnic pro neznámé  $u_1, \dots, u_n$ :

$$a_h \left( \psi_h^* + \sum_{j=1}^n u_j \tilde{w}_j^*, w_i^* \right) = L(w_i^*) \quad \text{pro všechna } i = 1, \dots, n, \quad (5.32)$$

pro jejíž řešení můžeme použít některou z metod na řešení soustav lineárních rovnic.

# Kapitola 6

## Výsledky

Jako modelový příklad pro srovnání řešení problému obtékání leteckého profilu pomocí funkcí komplexní proměnné a metody konečných prvků jsem zvolila Žukovského profil s parametry:  $a = 6$ ,  $h = 0,5$ ,  $\Delta = 0,6$ . Dalšími vstupními daty byly velikost rychlosti v nekonečnu  $|\vec{v}_\infty| = 50$  a náběžný úhel  $\theta_\infty = \frac{\pi}{36}$ .

### 6.1 Řešení pomocí funkcí komplexní proměnné

Pro řešení problému obtékání profilu  $\Gamma$  jsem použila vlastní program (viz Příloha), který jsem napsala v systému MatLab. Pro jeho vytvoření jsem použila postup řešení daného problému popsany v kapitole 3.

Výsledky jsou graficky vyjádřeny pomocí grafu izokřivek velikosti rychlosti, grafu proudnic a grafu rozložení rychlosti podél profilu.

Jak ukazuje graf rozložení rychlosti podél profilu 6.3 největší rychlosti je dosahováno na profilu  $\Gamma$  těsně nad náběžným bodem. Tento bod má souřadnice  $[-5,8994, 0,3233]$  a absolutní hodnota rychlosti v něm je  $|\vec{v}| = 85,1707$ . Cirkulace je  $\gamma = 352,7325$ .

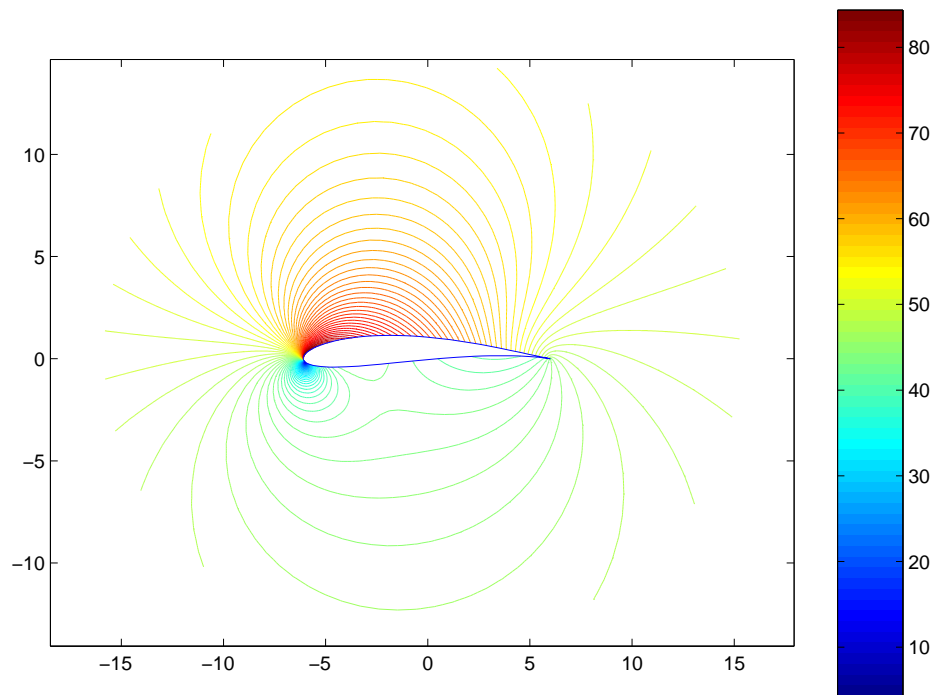
Z těchto hodnot a grafu izokřivek velikosti rychlosti 6.1 vidíme, že na horní straně profilu  $\Gamma$  je dosahováno vyšších rychlostí než na dolní straně. To je dáno tvarem profilu  $\Gamma$  a náběžným úhlem  $\theta_\infty$ . Pro srovnání a získání představy tu ještě ukažme, jak se grafy změní, změníme-li parametry Žukovského profilu nebo náběžný úhel  $\theta_\infty$ .

Mějme nyní tedy testovací profil  $\Gamma$  popsany na začátku této kapitoly, profil  $\Gamma_1$  se změněným parametrem  $h = 1$  a  $\Delta = 1.2$  a profil  $\Gamma_2$  stejný jako  $\Gamma$ ,

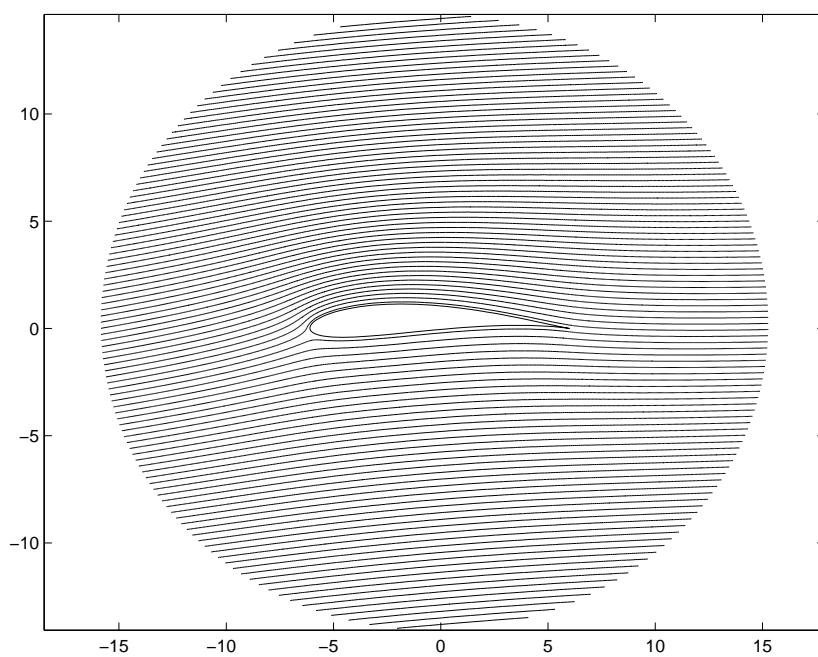
ale velikost náběžného úhlu je změněna na  $\theta_\infty = \frac{\pi}{12}$ . Ostatní podmínky zůstávají stejné.

Pro profil  $\Gamma_1$  dostáváme cirkulaci  $\gamma = 571,3995$ . Maximální rychlosti se dosahuje na profilu v bodě  $[-4,4550, 1,8001]$  s  $|\vec{v}| = 92,6986$ .

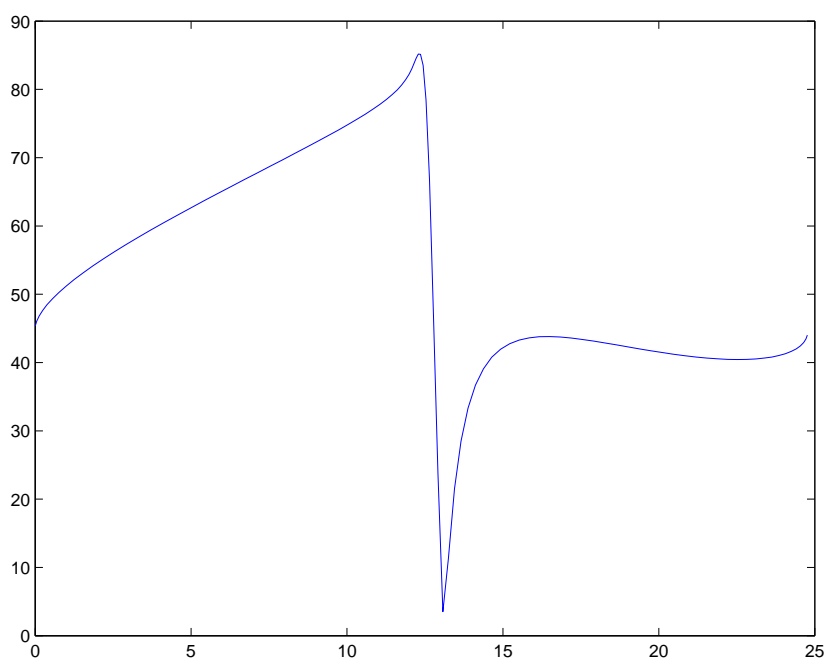
Pro profil  $\Gamma_2$  dostáváme cirkulaci  $\gamma = 703,3277$ . Maximální rychlosti se dosahuje na profilu v bodě  $[-6,0991, 0,0360]$  s  $|\vec{v}| = 175,8362$ .



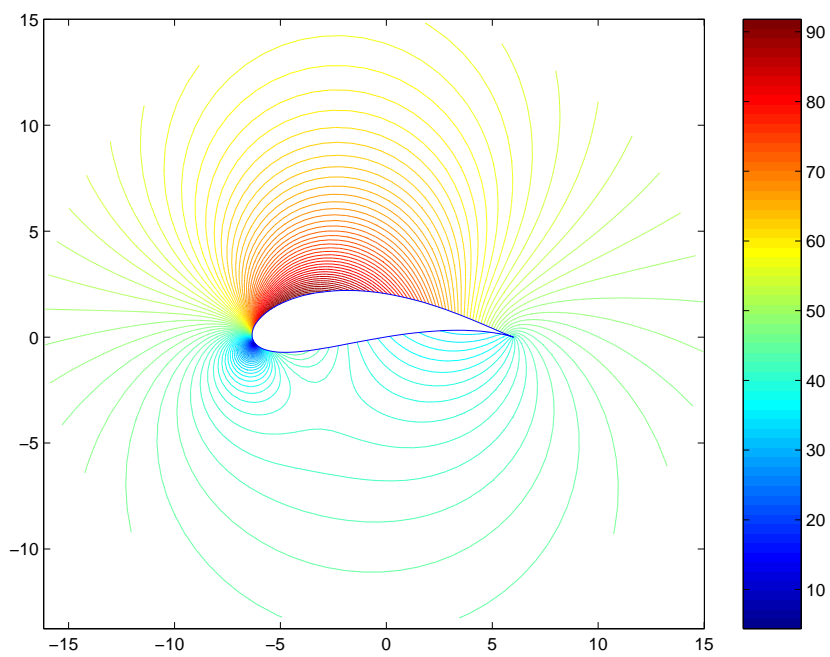
Obrázek 6.1: Profil  $\Gamma$ : graf izokřivek velikosti rychlosti



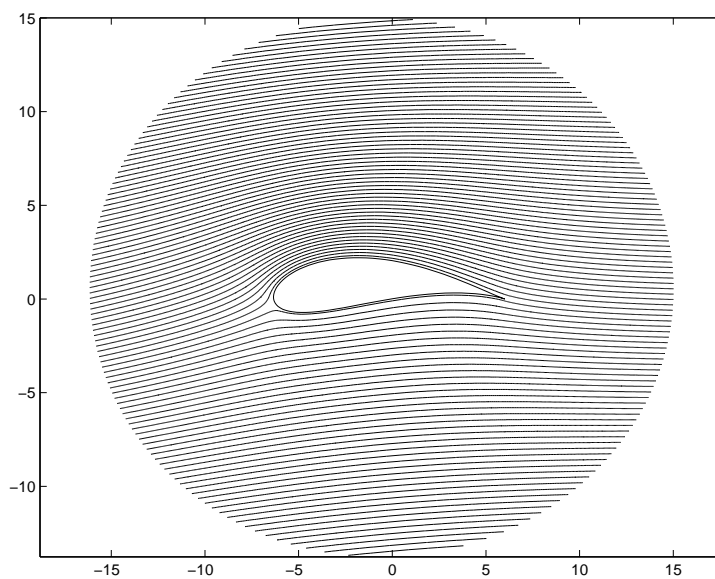
Obrázek 6.2: Profil  $\Gamma$ : graf proudnic



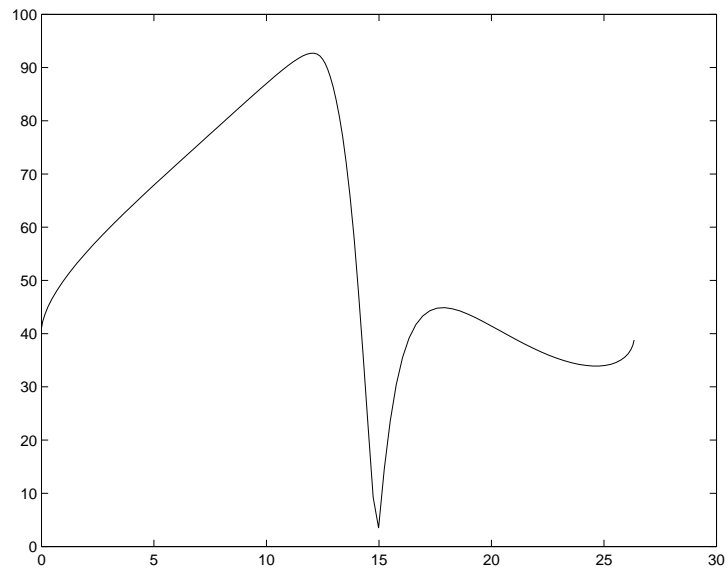
Obrázek 6.3: Profil  $\Gamma$ : graf rozložení rychlosti podél profilu



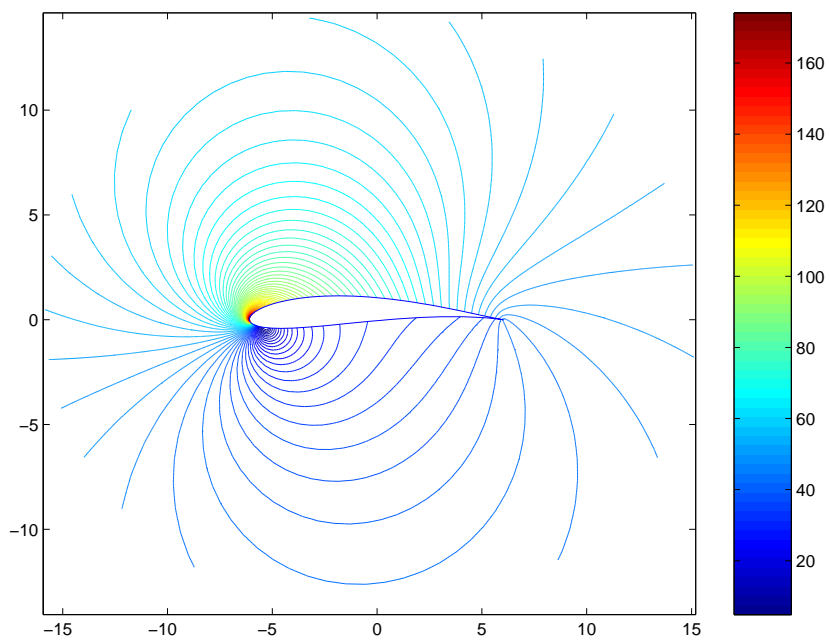
Obrázek 6.4: Profil  $\Gamma_1$ : graf izokřivek velikosti rychlosti



Obrázek 6.5: Profil  $\Gamma_1$ : graf proudnic

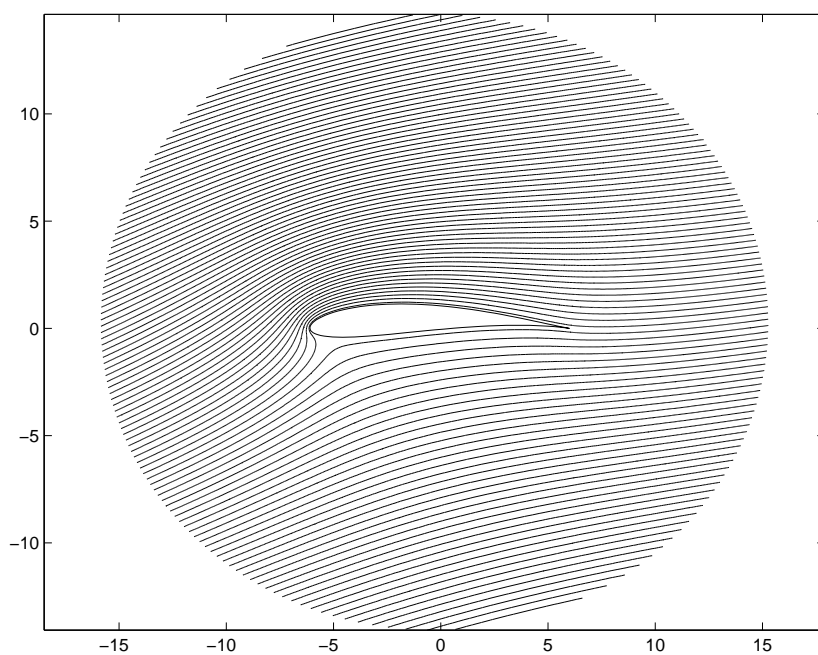


Obrázek 6.6: Profil  $\Gamma_1$ : graf rozložení rychlosti podél profilu

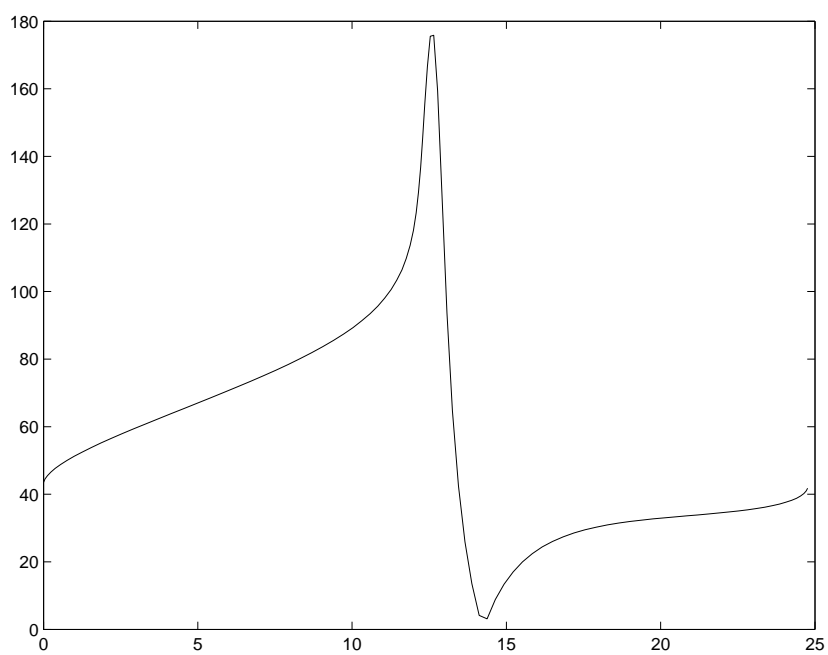


Obrázek 6.7: Profil  $\Gamma_2$ : graf izokřivek velikosti rychlosti

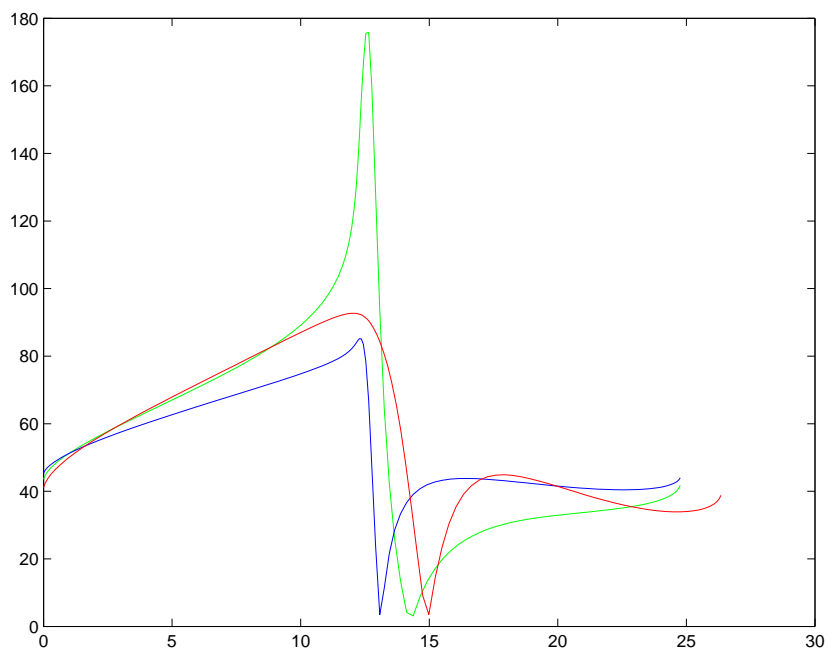




Obrázek 6.8: Profil  $\Gamma_2$ : graf proudnic



Obrázek 6.9: Profil  $\Gamma_2$ : graf rozložení rychlosti podél profilu



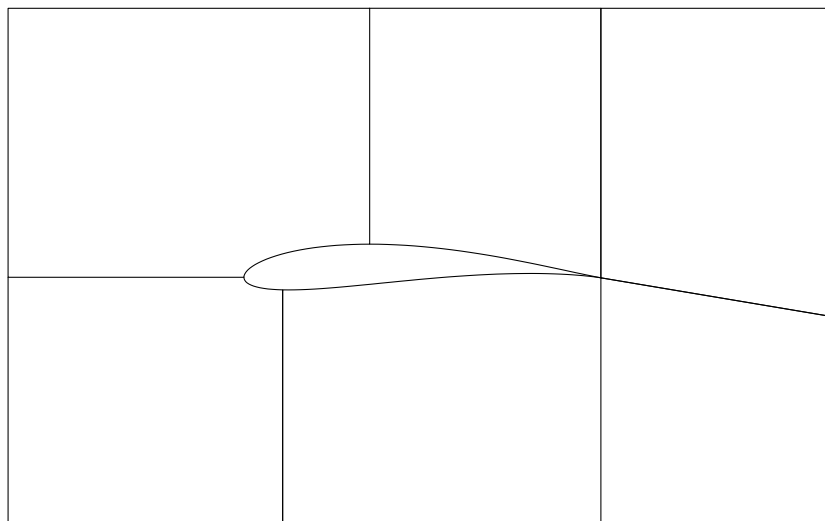
Obrázek 6.10: Srovnání rozložení rychlostí podél profilu pro případ  $\Gamma$  (modrá),  $\Gamma_1$  (červená),  $\Gamma_2$  (zelená)

## 6.2 Řešení pomocí metody konečných prvků

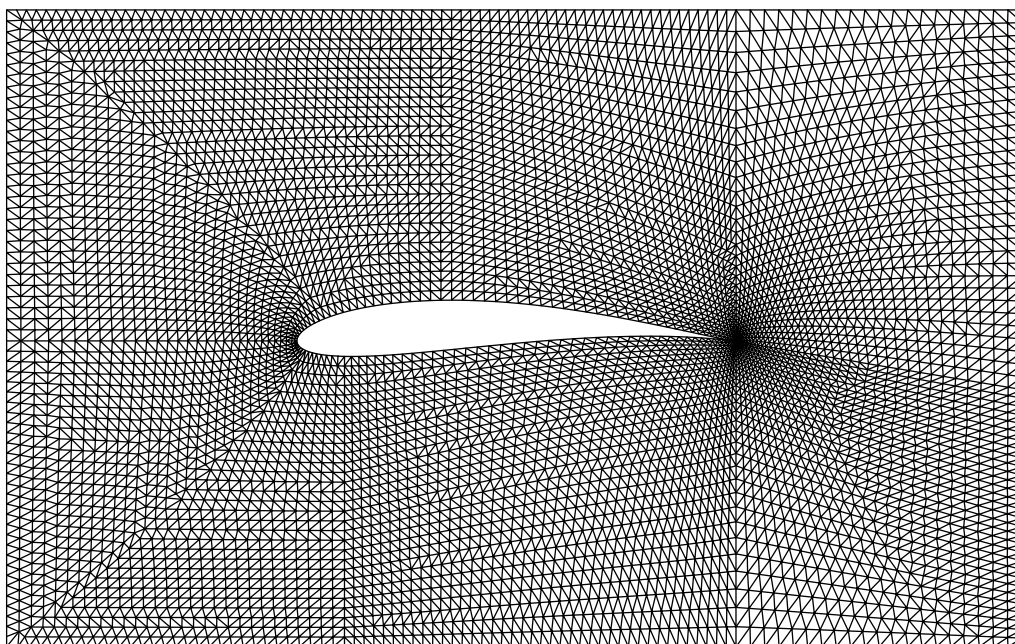
Pro řešení problému obtékání profilu  $\Gamma$  metodou konečných prvků jsem použila program, který je podrobně popsán v [3].

Pomocí tohoto programu byla vytvořena triangulace a následně i určena rychlost ve vrcholech trojúhelníku a proudová funkce. Grafickým výstupem je graf izokřivek velikosti rychlosti ve vrcholech trojúhelníků a graf proudnic. Barevné znázornění izochar velikosti rychlosti ve vrcholech trojúhelníků bylo provedeno za pomoci programu TecPlot.

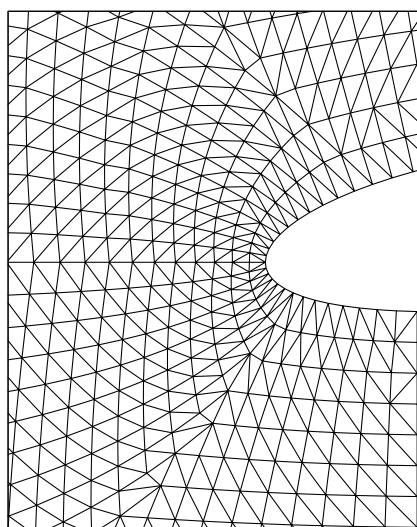
Maximální rychlosti se v tomto případě nabývá v bodě  $[-5,7159, 0,4477]$  a její velikost je  $|\vec{v}| = 82,8834$ .



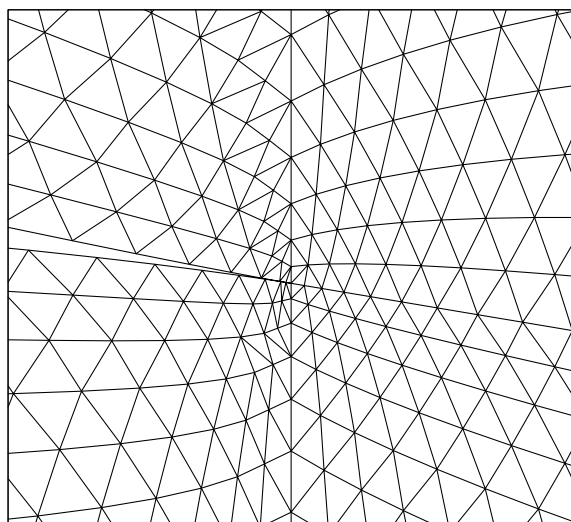
Obrázek 6.11: Rozdělení výpočetní oblasti na makroelementy



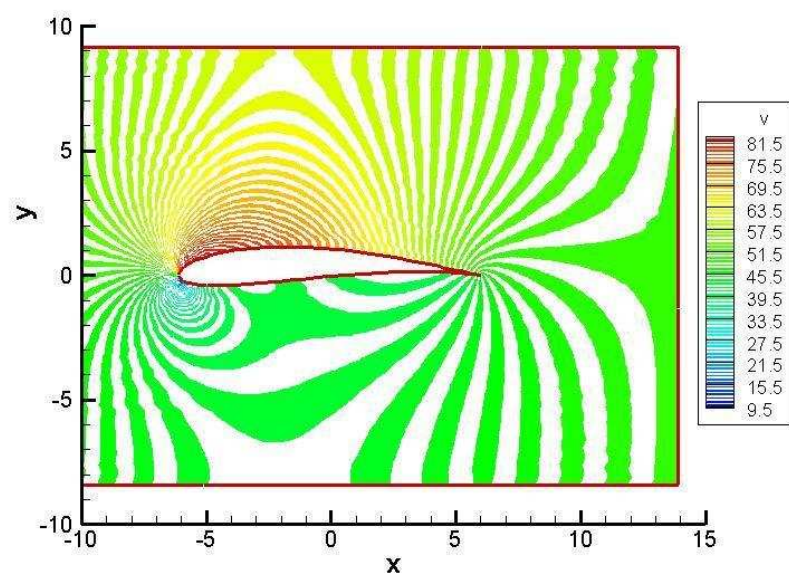
Obrázek 6.12: Triangulace výpočetní oblasti



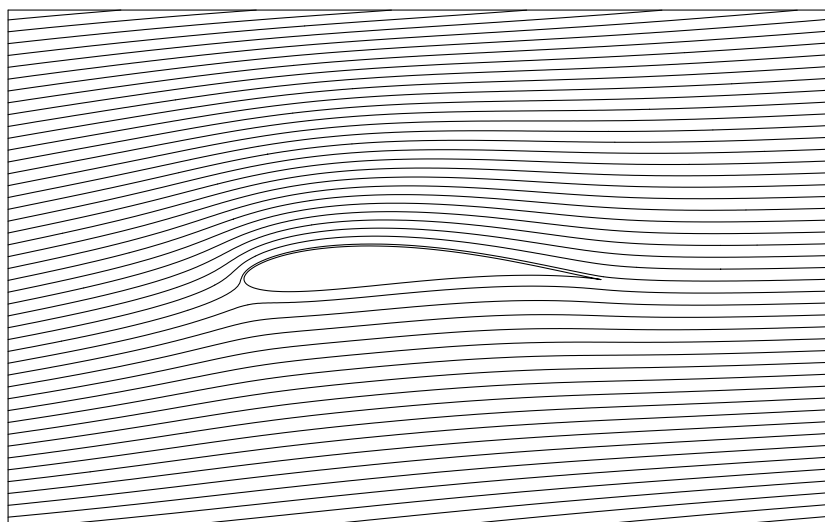
Obrázek 6.13: Triangulace o blízkosti náběžné hrany



Obrázek 6.14: Triangulace v blízkosti odtokové hrany



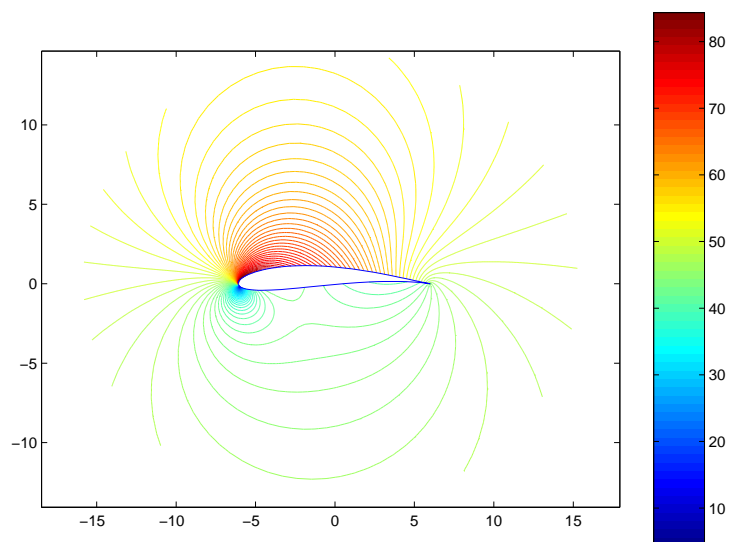
Obrázek 6.15: Graf izokřivek velikosti rychlosti ve vrcholech trojúhelníků



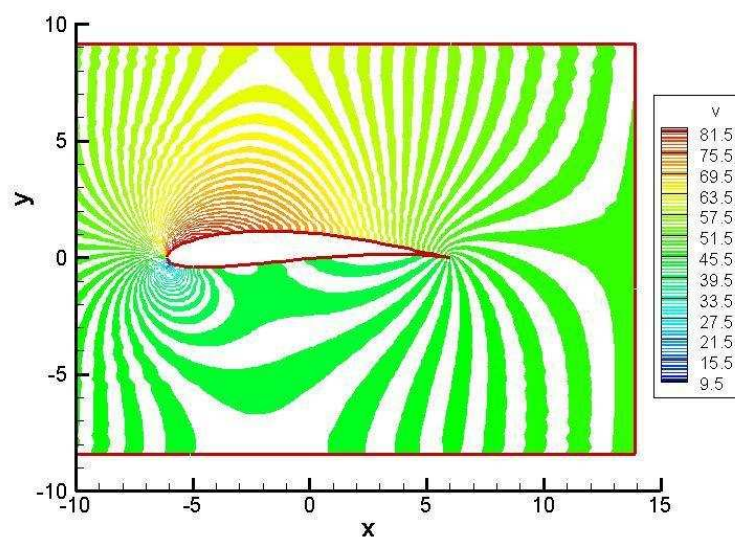
Obrázek 6.16: Graf proudnic

### 6.3 Srovnání výsledků

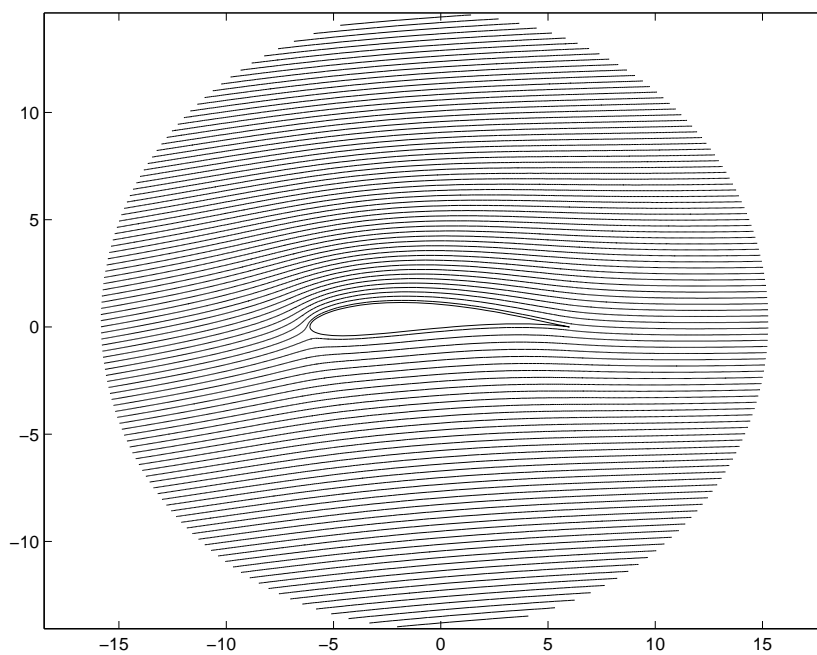
Srovnajme nyní výsledky, které jsme získali pro profil  $\Gamma$  metodou funkcí komplexní proměnné a pomocí metody konečných prvků. Pro srovnání nám poslouží grafy izokřivek velikosti rychlosti a grafy proudnic.



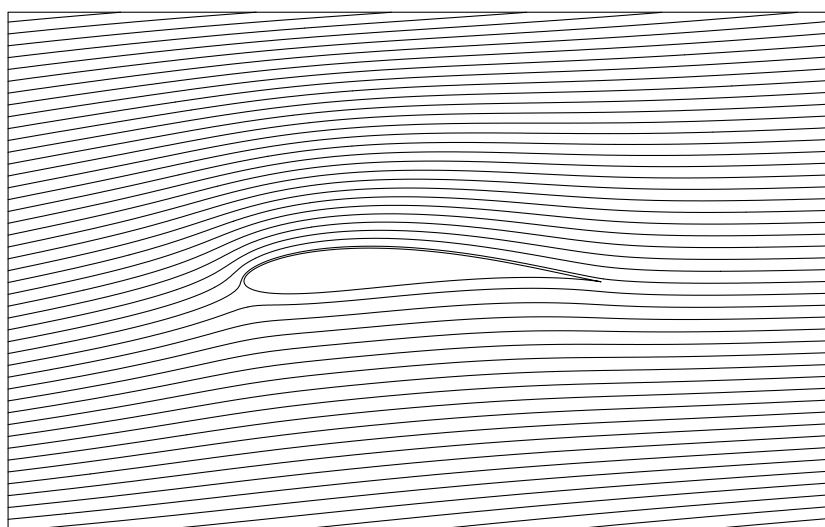
Obrázek 6.17: Graf izokřivek velikosti rychlosti získaný metodou funkcí komplexní proměnné



Obrázek 6.18: Graf izokřivek velikosti rychlosti ve vrcholech trojúhelníků při použití metody konečných prvků



Obrázek 6.19: Graf proudnic získaný metodou funkcí komplexní proměnné



Obrázek 6.20: Graf proudnic při použití metody konečných prvků



# Příloha

**Program pro řešení obtékání Žukovského profilu metodou funkcí komplexní proměnné:**

```
clear all
a=6; %bod spolecny kruhu M i K
delta=0.6; %vzdalenost stredu kruhu K a M
h=0.5;
V=50; %velikost rychlosti v nekonecnu - pouzivam Vv=V*exp(i*theta)
theta=pi/36; %v radianech nabehovy uhel 36
Vv=V*exp(i*theta); %rychlost v nekonecnu v nekonecnu jako komplex.cislo
uhelkrok=pi/48; %uhlova vzdalenost bodu na kruhu M
r=delta+(a^2+h^2)^(1/2); %polomer kruhu M
disp(['Polomer kruhu M je ' num2str(r)])
polomerkrok=0.1; %velikost kroku polomeru
X=30; %maximalni polomer pro sit
alfa=atan(h/a);
hdelta=sin(alfa)*r;
adelta=(delta^2-(hdelta-h)^2)^(1/2);
v0=-adelta+i*hdelta; %v0=stred kruhu M
gama=2*pi*r*V*sin(theta+alfa) %vypocet cirkulace
uhel=(0:uhelkrok:2*pi-eps);
polomer=(r:polomerkrok:X);
k=v0+exp(i*(uhel+alfa))*polomer; %pozor na spravne poradí nasobení vektoru-
muší dát matici ne číslo se správným indexováním řádku a sloupce
kridlo=0.5*(k+((a^2)./k)); %matice bodu na uzaveru extM po transformaci
na profil
kder=2./(1-(a^2)./k.^2); %derivace pomoci vztahu o derivaci inverzni fce.
rychlost=kder.*(1/2).*(conj(Vv)-(Vv*r^2)./(k-v0).^2-gama./(pi*i*(k-v0)));
proud=imag((1/2).*(conj(Vv)*(k-v0)+(Vv*r^2)./(k-v0)-(gama/(pi*i))*log(k-
```

```

v0));
figure
contour(real(kridlo),imag(kridlo),(real(rychlost).^2+imag(rychlost).^2).^0.5,100)
%vykresleni izocar velikosti rychlosti
colorbar
hold on
plot(real(kridlo(:,1)),imag(kridlo(:,1)))
axis equal
figure
contour(real(kridlo),imag(kridlo),proud,100)
hold on
plot(real(kridlo(:,1)),imag(kridlo(:,1)))
axis equal
vzdalrych(real(kridlo(:,1)),imag(kridlo(:,1)),rychlost(:,1));

```

### **Funkce vzdalrych pro výpočet rozložení rychlosti podél profilu:**

```

function graf=vzdalrych(x,y,v);
delka(1)=0;
for h=(2:(length(x)-1)),
delka(h)=delka(h-1)+((x(h+1)-x(h))^2+(y(h+1)-y(h))^2)^(1/2);
end
rychlik=abs(v);
rychlik2=[];
for h=(1:length(rychlik)),
rychlik2=[rychlik(h) rychlik2];
end
figure
hold on
plot(delka,rychlik2(2:length(v)))'

```

# Literatura

- [1] Feistauer M.: *Mathematical Methods in Fluid Dynamics*, Longman, Harlow, 1993.
- [2] Feistauer M., Felcman J., Rokyta M., Vlášek Z.: *Finite-element solution of flow problems with trailing conditions*, Journal of Computational and Applied Mathematics 44 (1992) 131-165.
- [3] Feistauer M., Felcman J., Rokyta M., Vlášek Z.: *Numerické řešení modelů nevazkého nevířivého proudění metodou konečných prvků*, Výzkumná zpráva, Praha, 1989.