Posudok na dizertačnú prácu Mariána Pilca

Model Problems of the Theory of Gravitation

V práci sa buduje hamiltonovský formalizmus pre čistú gravitáciu, to znamená všeobecnú teóriu relativity bez látkových polí, v ktorom úlohu zovšeobecnených súradníc hrajú zložky 4-rozmerných repérov (tetrád). V prvej časti sa vykladá klasická teória a v druhej sa zostrojuje Hilbertov priestor, ktorý by mal byť „ihriskom" pre budúcu kvantovú teóriu. Autor sa pri zavedení Hilbertovho priestoru neodvoláva na intuíciu, ale postupuje exaktne, s využitím nástrojov, ktoré ponúka funkcionálna analýza. Výsledkom je priestor, v ktorom majú operátory vystupujúce v teórii, formálne zavedené pomocou pravidla „Diracove zátvorky prejdú na $1/i\ \times$ komutátor", dobrý zmysel, ale ktorý obsahuje množstvo podpriestorov uzavretých vzhľadom na ich pôsobenie. (Obvyklý prívlastok „Poissonove" je zamenený za „Diracove", lebo je reč o teórii s väzbami.) Tento priestor je príliš veľký. Autor sa však zmieňuje aj o možnom spôsobe, ako sa s tým vysporiadať. Navrhuje využiť kompaktifikáciu grúp, pomocou ktorých sa v teórii definujú zovšeobecnené hybnosti.

Postup v práci sa líši od štandardného voľbou premenných, ktorými sa opisuje gravitačné pole. Štandardne sa v hamiltonovskom formalizme za zovšeobecnené súradnice berú zložky 3-rozmernej metriky, alebo v „odmocninovej" verzii zložky 3-rozmerných repérov (triád). Autor, keď má charakterizovať odlišnosť svojho prístupu od prístupov známych z literatúry, hovorí, že používa repéry, ktoré nie sú dotyčnicové k nadplochám konštantného času. Zdá sa mi výstižnejšie povedať, že nepoužíva 3- ale 4-rozmerné repéry. Samozrejme, na 3-rozmerné repéry sa dá hľadieť ako na 4-rozmerné s nultým vektorom kolmým na nadplochu konštantného času. Ale v bežnom chápaní natočenie 4-rozmerných repérov s voľbou týchto nadplôch nesúvisí. Bolo ľubovoľné u Cartana pri opise spinorov v zakrivenom priestore, aj u Utiyamu, keď prišiel s kalibračnou formuláciou teórie gravitácie.

Po prechode od triád k tetrádam musíme dostať, aspoň na klasickej úrovni, rovnakú teóriu. Aj dostaneme. Napríklad štyri funkcie, ktorými je v štandardnom prístupe dané „zlepenie" 3-rozmerných priestorov do priestoročasu – funkcia plynutia času N a vektor posunutia N^α – sú v jedno-jednoznačnom súvise so štyrmi nultými zložkami repérnych kovektorov l^a. Funkcie (N, N^α) sa zadávajú rukou a po kvantovaní z teórie vypadnú, čo v prístupe s tetrádami plynie z väzieb prvého druhu $\tilde{\pi}_a$ (hybnosti kánonicky združené s l^a) $= 0$. Vec sa nezmení, keď sa na ňu pozrieme z iného stanovišťa. Pravda, pri novom uhle pohľadu sa ľahko stane, že niečo prehliadneme, a je aj možné, že z nového miesta vec vôbec neuvidíme. Preto keď autor po dlhých manipuláciách s algebraickými výrazmi prišiel k výsledku, že systém sekundárnych väzieb sa uzaviera po prvom kroku rovnicami, podľa ktorých sú torzia aj Ricciho tenzor nulové, bolo to očakávané, ale nie dopredu zaručené. Musel mať pocit tvorcu, ktorý dokončil svoje dielo a „videl, že je to dobré".

Pri zostrojení Hilbertovho priestoru autor využil teóriu nekonečných tenzorových súčinov, ktorú sformuloval r. 1939 John von Neumann. Tá nie je v bežnej výbave teoretického fyzika, ani v učebnici Blank-Exner-Havlíček o nej nenájdeme viac než krátku zmienku s odkazom na pôvodný článok. Východiskovými objektami teórie sú stavy kvantového poľa dané súborom jeho stavov v jednotlivých bodoch priestoru. Aj vlnové funkcie sa vyčísľujú na takýchto „pobodových" stavoch – nie na konfiguráciách poľa, ktoré sa dajú chápať týmto spôsobom iba v limitnom zmysle – a pre každý „pobodový" stav sa rovnajú nekonečnému súčinu komplexnýxh čísel. Ako sa ľahko dá presvedčiť, systém „pobodových" stavov sa rozpadá na veľké množstvo vzájomne ortogonálnych podsystémov, uzavretých vzhľadom na pôsobenie funkcionálnej derivácie. V tom spočíva problém príliš veľkého priestoru, spomenutý na začiatku. Otázka je, či sa nedá vyriešiť kánonickým výberom podsystému „pobodových" stavov. Tak ako sa to fakticky robí, aspoň podľa mňa, v teórii skalárneho poľa, keď sa zapíšu stavy Fockovho priestoru ako „pobodové" stavy v **k**-reprezentácii.

Práca je napísaná vcelku zrozumiteľne, hoci niekedy by sa žiadalo, aby bol autor k čitateľovi ústretovejší a nenechal ho hádať, „čo tým chcel básnik povedať". Pôvodne som si napríklad myslel, ze formy $\mathbf{u}^a$, na ktorých sa definuje kovariantná derivácia, a $\hat{\mathbf{v}}^a$, na ktorých sa demonštruje jej 3 + 1 rozklad, sú prvky všeobecnej kovektorovej bázy, ktoré sa inde označujú $\mathbf{g}^a$. Zdalo sa mi divné, že na jeden objekt pripadajú tri rôzne symboly, a nevidel som veľký zmysel v tom, uvažovať všeobecnú bázu tam, kde by stačila ortonormálna. Pritom sú to *ľubovoľné* vektorom zhodnotené formy, v označeniach práce prvky $\Lambda\mathbb{T}^1\mathbf{M}$. Autor sa môže brániť tým, že definícia kovariantnej derivácie cez formy je štandardná a každý ju pozná. Ťažšie by obhájil zavedenie vektorov $\mathbf{G}_a$ na str. 31, kde sa priraďujú klasické veličiny generátorom grúp, bez jediného slova vysvetlenia. Ak uvážime tvar Diracových zátvoriek $\{\mathbf{E}(\mathbf{Q}), \mathbf{F}(\mathbf{K})\}^*$ (rovnica (1.113)), zrejme platí $\tilde{G}^\alpha_a = -(8\pi\kappa)^{-1}\bar{\epsilon}^{\alpha\beta\gamma}\tilde{F}_{a\beta\gamma}$ – alebo platilo by, keby zátvorky $\{\mathbf{F}(\mathbf{K}_1), \mathbf{F}(\mathbf{K}_2)\}^*$ boli nulové. Ale či sú, to sa z práce nedozvieme.

Navrhujem prácu uznať za dizertačnú a autorovi udeliť titul PhD.

Bratislava, 24. 8. 13

Vladimír Balek
KTFDF UK, Bratislava