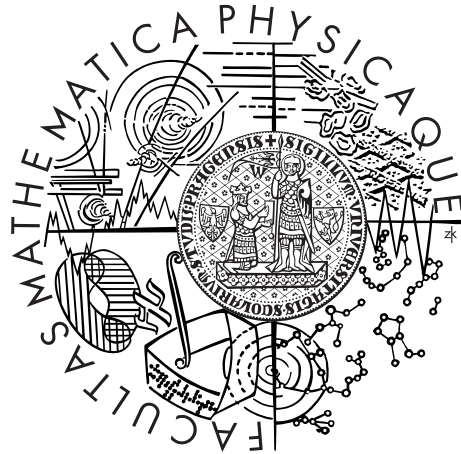


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Margaréta Perichtová

Dvojitý chain ladder

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Michal Pešta, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2013

Na tomto mieste by som sa chcela poďakovať vedúcemu mojej práce RNDr. Michalovi Peštovi Ph.D. za ochotu, cenné rady, a čas, ktorý mi venoval.

Taktiež by som sa chcela poďakovať rodine za podporu počas písania tejto práce aj počas celého štúdia.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Dvojitý chain ladder

Autor: Margaréta Perichtová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Michal Pešta, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Tato práce se zabývá řešením jednoho z největších problémů v neživotním pojištění a tím je stanovení výše rezervy na pojistná plnění. Pravděpodobně nejčastěji používanou metodou ke stanovení výše rezervy je metoda chain ladder. Přiblížíme si klasickou metodu chain ladder a její stochastický a deterministický přístup. Pak představíme poměrně novou metodu, metodu dvojitý chain ladder, která vychází z metody chain ladder, ale na rozdíl od ní bere v úvahu i počty nahlášených škod, což nám umožňuje přesněji odhadnout RBNS rezervu a také spočítat odděleně IBNR a RBNS rezervu. Nakonec obě metody aplikujeme na skutečná data, spočteme bodový odhad rezervy metodou chain ladder i metodou dvojitý chain ladder a výsledky srovnáme.

Klíčová slova: neživotní pojištění, rezervování, chain ladder

Title: Double chain ladder

Author: Margaréta Perichtová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Michal Pešta, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This thesis deals with one of the biggest problems in non-life insurance and that is forecasting outstanding claims liabilities. Chain ladder method is probably the most often used method for estimating outstanding liabilities. Firstly, we show classic chain ladder method and its deterministic and stochastic form. Secondly, we introduce relatively new method, double chain ladder method which comes from chain ladder method, but in addition it considers number of reported claims, that allow us to count RBNS reserve more precisely and also to count IBNR and RBNS reserves separately. In the end we apply both methods on the real data. We compute point estimate of the reserve by chain ladder method and by double chain ladder method and compare the results.

Keywords: non-life insurance, reserving, chain ladder

Názov práce: Dvojitý chain ladder

Autor: Margaréta Perichtová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci bakalárskej práce: RNDr. Michal Pešta, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Táto práca sa zaoberá riešením jedného z najväčších problémov v neživotnom poistení a tým je stanovenie výšky rezervy na poistné plnenia. Pravdepodobne najčastejšie používanou metódou na stanovenie výšky rezervy je metóda chain ladder. Priblížime si klasickú metódu chain ladder a jej deterministický aj stochastický prístup. Predstavíme pomerne novú metódu, metódu dvojitý chain ladder, ktorá vychádza z metódy chain ladder, ale narozdiel od nej berie do úvahy aj počty nahlásených škôd, čo nám umožňuje presnejšie odhadnúť RBNS rezervu a zároveň osobitne vypočítať IBNR a RBNS rezervy. Nakoniec obidve metódy aplikujeme na skutočné dáta, vypočítame bodový odhad rezervy metódou chain ladder aj metódou dvojitý chain ladder a výsledky porovnáme.

Kľúčové slová: neživotné poistenie, rezervovanie, chain ladder

Obsah

Úvod	2
1 Technické rezervy v neživotnom poistení	3
1.1 Rezerva na poistné plnenia	3
1.2 Výška rezervy na poistné plnenia	3
2 Klasický model chain ladder	5
3 Mackov model chain ladder	7
3.1 Predpoklady Mackovho modelu	7
3.2 Odhad vývojových faktorov f_j	8
3.3 Odhad parametra rozptylu σ_j	8
3.4 Výpočet strednej kvadratickej chyby	9
4 Dvojitý chain ladder	11
4.1 Základné údaje a značenie	11
4.2 Predpoklady 1.momentu:	11
4.3 Odhad parametrov	12
4.3.1 Odhad parametrov (α_i, β_j) a $(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_j)$	13
4.3.2 Odhad pravdepodobnosti oneskorenia	13
4.3.3 Odhad parametrov pre jednotlivé výšky platieb za škody	14
4.4 Odhad IBNR a RBNS rezerv	14
4.5 Model DCL s jednorazovými výplatami škôd	15
4.5.1 Odhad pravdepodobnosti oneskorenia	16
4.5.2 Odhad parametrov rozdelenia jednotlivých platieb	16
4.5.3 Odhad rezervy	17
5 Aplikácia na reálne dáta	18
5.1 Aplikácia metódy chain ladder	19
5.2 Aplikácia metódy dvojitý chain ladder	20
5.3 Zhrnutie a porovnanie výsledkov	24
Záver	26
Zoznam použitej literatúry	27
Zoznam obrázkov	28
Zoznam tabuliek	29

Úvod

Tvorba technických rezerv je dôležitou súčasťou chodu každej poisťovne. Najvýznamnejšia rezerva v neživotnom poistení je rezerva na poistné plnenia. Existuje niekoľko rôznych spôsobov ako odhadnúť výšku tejto rezervy. Najviac používaná a pomerne jednoduchá je metóda chain ladder a s ňou úzko súvisí metóda dvojitý chain ladder.

Naším cieľom je zoznámiť čitateľa s metódou dvojitý chain ladder, ktorá vychádza z metódy chain ladder, ale pridaním informácie o počte nahlásených škôd dokáže osobitne predpovedať RBNS a IBNR rezervu.

Práca je členená do piatich kapitol. V prvej kapitole sa oboznámime so základnými pojmami používanými pri stanovení rezervy v neživotnom poistení.

V druhej kapitole opíšeme deterministický model metódy chain ladder, teda ukážeme si ako zostrojiť bodový odhad budúcich plnení, za škody vzniknuté v minulosti a bodový odhad škodnej rezervy.

V tretej kapitole si predstavíme stochastický Mackov model metódy chain ladder, z ktorého je možné vypočítať strednú kvadratickú chybu, skonštruovať intervaly spoľahlivosti a určiť rozdelenie výšky škôd.

Vo štvrtej kapitole sa budeme venovať samotnej metóde dvojitý chain ladder. Ukážeme si predpoklady metódy a odvodíme vzťahy pre výpočet výšky rezervy. Tiež si ukážeme aplikáciu na model s jednorazovými výplatami škôd a predpoklady na rozdelenie veličín používaných v tomto modeli, odhad strednej hodnoty a rozptylu jednotlivých platieb a taktiež výpočet rezervy.

V poslednej kapitole aplikujeme teóriu z druhej a štvrtej kapitoly na skutočné dáta. Získame tak bodový odhad rezervy metódou chain ladder a metódou dvojitý chain ladder a výsledné rezervy porovnáme.

Kapitola 1

Technické rezervy v neživotnom poistení

Na začiatku si priblížime základné pojmy používané sa pri tvorení technických rezerv, budeme pritom vychádzať z Mandl [2009] a Bestová [2007]. Technické rezervy sa v neživotnom poistení tvoria na plnenie záväzkov z poisťovacej činnosti. V neživotnom poistení existuje niekoľko rôznych typov rezerv, pričom najvýznamnejšia je rezerva na poistné plnenia.

1.1 Rezerva na poistné plnenia

Rezervu na poistné plnenia, alebo tiež škodnú rezervu poisťovňa tvorí, aby mala v budúcnosti dostatok prostriedkov na vyplatenie poistného plnenia za škody vzniknuté v dôsledku poistnej udalosti, ktorá nastala pred rozvahovým dňom a doposiaľ nebola zlikvidovaná. Táto poistná udalosť je bližšie špecifikovaná v poistnej zmluve a má náhodný charakter, to znamená, že nevieme dopredu určiť či táto udalosť nastane, alebo kedy nastane a tiež nevieme určiť presnú výšku poistného plnenia za škody vzniknuté v dôsledku tejto poistnej udalosti. Rezerva je určená na krytie záväzkov z poistných udalostí:

- RBNS (Reported but not settled), t.j. poistných udalostí vzniknutých aj nahlásených pred rozvahovým dňom, ale zatiaľ nezlikvidovaných.
- IBNR (Incurred but not reported), t.j. poistných udalostí vzniknutých pred rozvahovým dňom, ale zatiaľ nenahlásených.

1.2 Výška rezervy na poistné plnenia

Keďže poistná udalosť je náhodná udalosť, výšku poistného plnenia nevieme dopredu určiť a teda nevieme určiť ani výšku rezervy, preto je nutné ju odhadnúť. Pri odhade výšky rezervy sa vychádza z údajov o vývoji výplat v danom odvetví v minulosti.

Výška RBNS rezervy sa stanoví ako súhrn odhadnutých nákladov na poistné plnenia pre jednotlivé poistné udalosti. Výšky poistných plnení jednotlivých udalostí odhaduje likvidátor na základe skúseností s podobnými udalosťami z minulosti, prípadne sa používajú jednoduché matematicko-štatistické metódy.

Výšku IBNR rezervy stanovuje poisťný matematik pomocou matematicko-štatistických modelov. Tieto modely tiež vychádzajú z údajov, ktoré poisťovňa získala v minulosti.

Pre reprezentáciu vývoja škôd v minulosti sa používajú vývojové trojuholníky, vidíme na obrázku 1.1.

$i \backslash j$	0	1	...	m-2	m-1
1	$X_{1,0}$	$X_{1,1}$...	$X_{1,m-2}$	$X_{1,m-1}$
2	$X_{2,0}$	$X_{2,1}$...	$X_{2,m-2}$	
	\vdots	\vdots			
	\vdots	\vdots			
m-1	$X_{m-1,0}$	$X_{m-1,1}$			
m	$X_{m,0}$				

Obrázok 1.1: Vývojový trojuholník.

Hodnoty v trojuholníku, ktoré sa nachádzajú v rovnakom riadku prináležia udalostiam, ktoré vznikli v tom istom poisťnom roku a hodnoty nachádzajúce sa v rovnakom stĺpci predstavujú oneskorenie v úhrade, alebo v nahlásení škody. Na diagonále sú potom posledné zaznamenané hodnoty. Vývojový trojuholník môže byť kumulatívny, alebo nekumulatívny. V kumulatívnom trojuholníku sa potom na mieste $X_{i,j}$ nachádzajú informácie z udalostí vzniknutých v poisťnom roku i a nahlásených alebo zlikvidovaných do konca roku $i + j$, a v nekumulatívnom trojuholníku sa na pozícii $X_{i,j}$ nachádzajú informácie z udalostí vzniknutých v poisťnom roku i a nahlásených alebo zlikvidovaných v roku $i + j$.

Kapitola 2

Klasický model chain ladder

V tejto kapitole si ukážeme jednoduchý spôsob ako tvoriť rezervy v neživotnom poistení, množstvo informácií použitých v tejto kapitole sa nachádza v Mandl a Mazurová [1999] a Mandl [2009]. Chain ladder model je pravdepodobne najpoužívanejšia metóda pre odhad IBNR rezerv v neživotnom poistení. Hlavným dôvodom je jej jednoduchosť a fakt, že nemá žiadne nároky na rozdelenie veličín a teda takmer žiadne predpoklady na vstupné dáta. Jej najväčšou nevýhodou je, že pre posledné škodné obdobia je jej odhad veľmi citlivý na zmeny pozorovaných dát. Vychádza z kumulatívneho trojuholníka, teda hodnoty v riadku sa nasčítavajú.

Nech $I = \{(i,j) : i = 1, \dots, m; j = 0, \dots, m-1\}$. Označme $C_{i,j}$ výšku poistného plnenia za škody vzniknuté v škodnom období i a nahlásené alebo zlikvidované do konca škodného obdobia $i+j$, kde $i, j \in I$. $C_{i,j}$ sú náhodné veličiny. Pre $i+j \leq m$ sú $C_{i,j}$ napozorované dáta z minulosti (ľavý horný trojuholník) a na diagonále sa nachádzajú posledné napozorované hodnoty.

Cieľom je doplniť tento trojuholník na štvorec a hodnoty nachádzajúce sa v poslednom stĺpci budú celkové odhady poistných plnení za škody vzniknuté v jednotlivých škodných obdobiach. A to za predpokladu, že pre každé škodné obdobie i je vývoj škôd po m rokoch zastavený. To znamená, že $C_{i,m-1} = C_{i,\infty}$ pre $\forall i = 1, \dots, m$. Potom celková škodná rezerva v škodnom období i bude $R_i = C_{i,m-1} - C_{i,m-i}$ pre $\forall i = 2, \dots, m$.

Metóda chain ladder ďalej predpokladá, že existujú tzv. vývojové faktory $f_1, \dots, f_{m-1} > 0$ také, že platí:

$$C_{i,j} = C_{i,j-1} f_j, \quad 1 \leq i \leq m-j, \quad 1 \leq j \leq m-1. \quad (2.1)$$

To znamená, že metóda chain ladder predpokladá, že stĺpce vývojového trojuholníka sú úmerné podľa vývojových faktorov f_j . Zo vzťahu (2.1) vidíme, že pri dopĺňaní trojuholníka na štvorec potrebujeme poznať vývojové faktory f_1, \dots, f_{m-1} . Tie sa odhadujú nasledovne

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{k=1}^{m-j} C_{k,j}}{\sum_{k=1}^{m-j} C_{k,j-1}}, \quad 1 \leq j \leq m-1. \quad (2.2)$$

Potom pre odhad výšky škod vzniknutých v škodnom období i a zlikvidovaných najneskôr s j ročným oneskorením je

$$\widehat{C}_{i,j} = C_{i,m-i} \cdot \widehat{f}_{m-i+1} \cdot \dots \cdot \widehat{f}_j, \quad \forall j > m - i, \quad (2.3)$$

celkový odhad výšky škod v škodnom období i je

$$\widehat{C}_{i,m-1} = C_{i,m-i} \cdot \widehat{f}_{m-i+1} \cdot \dots \cdot \widehat{f}_{m-1}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.4)$$

a odhad výšky rezervy za škody vzniknuté v škodnom období i vypočítame ako

$$\widehat{R}_i = C_{i,m-i} \cdot (\widehat{f}_{m-i+1} \cdot \dots \cdot \widehat{f}_{m-1} - 1), \quad i = 1, \dots, m.$$

Výšku celkovej rezervy R dostaneme ako súčet rezerv v jednotlivých škodných obdobiach a jej odhad $\widehat{R} = \widehat{R}_2 + \widehat{R}_3 + \dots + \widehat{R}_m$.

Kapitola 3

Mackov model chain ladder

Pre odhad škodnej rezervy existuje okrem metódy chain ladder mnoho ďalších metód. Ich výsledky odhadu výšky škodnej rezervy sa navzájom líšia, preto by bolo užitočné vedieť strednú kvadratickú chybu rezervy odhadnutej pomocou metódy chain ladder. Táto by určovala do akej miery je významný rozdiel medzi výsledkom metódy chain ladder a výsledkami iných metód, pri ktorých by sme tiež vedeli určiť strednú kvadratickú chybu. Mackov model chain ladder nám dáva rovnaký odhad výšky rezervy ako klasický model chain ladder. Spočíva v prevedení modelu z kapitoly dva na stochastický model. Je doplnený o predpoklad nezávislosti škodných rokov a výpočet rozptylu a strednej kvadratickej chyby. Hlavným zdrojom informácií v tejto časti je Mack [1993] a Bestová [2007].

3.1 Predpoklady Mackovho modelu

Uvažujme napozorované dáta vývoja škôd uložené v kumulatívnom trojuholníku. Teda $C_{i,j}$ je výška škôd vzniknutých v škodnom roku i a nahlásených alebo zlikvidovaných do konca škodného roku $i + j$. Pričom i, j sú také, že: $i + j \leq m$. Cieľom je doplniť tento trojuholník na štvorec a teda zostáva určiť budúce hodnoty $C_{i,j}$ pre $i + j > m$ a hlavne konečné výšky škôd $C_{i,m-1}$ pre $\forall i = 2, \dots, m$. Keďže ich nevieme určiť presne, ale považujeme ich za náhodné veličiny, budeme sa ich snažiť odhadnúť. Teraz zavedieme hlavné predpoklady Mackovho modelu:

1. Predpoklad úmernosti stĺpcov vývojového trojuholníka. Hovorí, že existujú vývojové faktory $f_1, \dots, f_{m-1} > 0$ také, že:

$$E(C_{i,j}|C_{i,0}, \dots, C_{i,j-1}) = C_{i,j-1} \cdot f_j, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq m-1. \quad (3.1)$$

2. Nezávislosť škodných rokov. To znamená, že všetky riadkové vektory sú navzájom nezávislé.

$$\{C_{i,0}, \dots, C_{i,m-1}\} \perp \{C_{k,0}, \dots, C_{k,m-1}\}, \quad \forall i \neq k, \quad i, k = 1, \dots, m. \quad (3.2)$$

3. Predpoklad rozptylu. Hovorí, že existuje parameter σ_j taký, že:

$$Var(C_{i,j}|C_{i,0}, \dots, C_{i,j-1}) = \sigma_j^2 \cdot C_{i,j-1}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq m-1. \quad (3.3)$$

4. Predpoklad, že vývoj škôd je po m rokoch zastavený. To znamená, že $C_{i,m-1} = C_{i,\infty}$ pre $\forall i = 1, \dots, m$.

V nasledujúcom tvrdení ukážeme, ako z napozorovaných dát získame celkovú výšku škôd v škodnom roku i .

Tvrdenie 1. *Nech $D = \{C_{i,j} | i + j \leq m; (i,j) \in I\}$ je množina doteraz napozorovaných dát. Potom za predpokladov (3.1) a (3.2) platí:*

$$E(C_{i,m-1}|D) = C_{i,m-i} \cdot f_{m-i+1} \cdot \dots \cdot f_{m-1}.$$

Dôkaz. Nájdem v Mack [1993]. □

3.2 Odhad vývojových faktorov f_j

Mackov model chain ladder uvažuje rovnaký odhad vývojových faktorov, ako klasický model. Teda

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{k=1}^{m-j} C_{k,j}}{\sum_{k=1}^{m-j} C_{k,j-1}}, \quad 1 \leq j \leq m-1.$$

Tvrdenie 2 (Nestrannosť a nekorelovanosť \hat{f}_j). *Za splnenia predpokladov (3.1) a (3.2) sú odhady vývojových faktorov f_1, \dots, f_{m-1} nestranné a nekorelované.*

Dôkaz. Dôkaz nájdeme v Mack [1993]. □

Dôsledok. $E(\hat{f}_{m-i+1} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{m-1}) = f_{m-i+1} \cdot \dots \cdot f_{m-1}$.

Z dôsledku (3.2), rovnice (2.3) a tvrdenia (1) platí

$$\begin{aligned} E(\hat{C}_{i,m-1}) &= E(C_{i,m-i} \cdot \hat{f}_{m-i+1} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{m-1}) \\ &= C_{i,m-i} \cdot f_{m-i+1} \cdot \dots \cdot f_{m-1} \\ &= E(C_{i,m-1}|D). \end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že $\hat{C}_{i,m-1}$ je nestranný odhad pre očakávanú hodnotu celkovej výšky platieb $E(C_{i,m-1}|D)$ v škodnom roku i .

Teda aj pre odhad škodnej rezervy $\hat{R}_i = \hat{C}_{i,m-1} - C_{m-i}$ v roku i platí, že je nestranným odhadom skutočnej rezervy $R_i = C_{i,m-1} - C_{m-i}$.

3.3 Odhad parametra rozptylu σ_j

Parameter σ_j^2 odhadujeme následovne

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{m-j-1} \cdot \sum_{k=1}^{m-j} C_{k,j-1} \left(\frac{C_{k,j}}{C_{k,j-1}} - \hat{f}_j \right)^2 \quad 1 \leq j \leq m-2 \quad (3.4)$$

Všimnime si, že parameter σ_{m-1}^2 nie je možné odhadnúť z vyššie uvedeného. Preto tento parameter odhadujeme inou metódou.

Ak $\hat{f}_{m-1} = 1$, to znamená, že škodný vývoj je ukončený po $m-1$ rokoch a teda platí $\hat{\sigma}_{m-1}^2 = 0$. Ak vývoj nie je ukončený po $m-1$ rokoch, tak extrapolujeme zvyčajne klesajúci rad $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \dots, \hat{\sigma}_{m-3}, \hat{\sigma}_{m-2}$ ďalším členom tak, že

$$\hat{\sigma}_{m-1}^2 := \min \left(\frac{\hat{\sigma}_{m-2}^4}{\hat{\sigma}_{m-3}^2}, \min(\hat{\sigma}_{m-3}^2, \hat{\sigma}_{m-2}^2) \right).$$

Tvrdenie 3 (Nestrannosť $\hat{\sigma}_j^2$). *Odhad*

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{m-j-1} \cdot \sum_{k=1}^{m-j} C_{k,j-1} \left(\frac{C_{k,j}}{C_{k,j-1}} - f_j \right)^2 \quad 1 \leq j \leq m-2$$

z rovnice (3.4) je nestranným odhadom parametra σ_j^2 .

3.4 Výpočet strednej kvadratickej chyby

Metóda chain ladder dáva iba bodový odhad pre $C_{i,m-1}$ a preto je malá, alebo nulová pravdepodobnosť, že by skutočné $C_{i,m-1}$ bolo rovné $\hat{C}_{i,m-1}$. Oveľa hodnotnejšia by pre nás bola informácia, aká veľká je priemerná vzdialenosť medzi predpoveďou $\hat{C}_{i,m-1}$ a skutočnou hodnotou $C_{i,m-1}$. Teda chceme zistiť veľkosť strednej kvadratickej chyby, označujeme mse (mean squared error).

Z definície mse:

$$mse(\hat{C}_{i,m-1}) = E \left((C_{i,m-1} - \hat{C}_{i,m-1})^2 \mid D \right)$$

Všimnime si, že mse má podobné zloženie ako rozptyl náhodnej veličiny X , ten môžeme prepísať pomocou strednej hodnoty $Var(X) = E(X - EX)^2$, ako priemernú vzdialenosť X od $E(X)$. Ak použijeme obecné pravidlo pre rozptyl: $E(X - c)^2 = Var(X) + (E(X) - c)^2$, kde c je skalár a prevedieme na mse, dostaneme:

$$mse(\hat{C}_{i,m-1}) = Var(C_{i,m-1} \mid D) + \left(E(C_{i,m-1} \mid D) - \hat{C}_{i,m-1} \right)^2$$

To platí, pretože $\hat{C}_{i,m-1}$ je skalár, za podmienky, že všetky data D sú známe. Táto rovnica ukazuje, že mse je súčet čistých budúcich náhodných chýb a odhadu chyby, ktorá sa meria ako kvadratická odchýlka odhadu $\hat{C}_{i,m-1}$ od $E(C_{i,m-1} \mid D)$.

Aby sme mohli určiť odhad strednej kvadratickej chyby odhadovanej rezervy, už nám len stačí ukázať, že mse odhadovanej rezervy v škodnom roku i je rovná mse odhadovanej celkovej výške škôd z tohto roku. To vyplýva priamo z definície mse, pretože

$$mse(\hat{R}_i) = E \left((\hat{R}_i - R_i)^2 \mid D \right) = E \left((\hat{C}_{i,m-1} - C_{i,m-1})^2 \mid D \right) = mse(\hat{C}_{i,m-1})$$

Odhad strednej kvadratickej chyby odhadovanej rezervy $mse(\hat{R}_i)$ si ukážeme v nasledujúcom tvrdení.

Tvrdenie 4. Za platnosti predpokladov (3.1), (3.2) a (3.3), bude odhad strednej kvadratickej chyby odhadovanej rezervy

$$\widehat{mse}(\widehat{R}_i) = \left(\widehat{C}_{i,m-1}\right)^2 \cdot \sum_{k=m-i+1}^{m-1} \frac{\widehat{\sigma}_k^2}{\widehat{f}_k^2} \left(\frac{1}{\widehat{C}_{i,k-1}} + \frac{1}{\sum_{l=1}^{m-k} C_{l,k-1}} \right)$$

kde $\widehat{C}_{i,k} = C_{i,m-i} \cdot \widehat{f}_{m-i+1} \cdot \dots \cdot \widehat{f}_k$, $k > m - i$, sú odhady budúcich škôd $C_{i,k}$ a predpokladáme $\widehat{C}_{i,m-i} = C_{i,m-i}$.

Dôkaz. Dôkaz nájdeme v Mack [1993].



Kapitola 4

Dvojitý chain ladder

Táto kapitola popisuje základnú myšlienku metódy dvojitý chain ladder a metódu dvojitý chain ladder na modeli s jednorazovými výplatami škôd. Vychádzame pritom hlavne z článku Martínez Miranda a kol. [2012]. Táto metóda odhadu výšky škodnej rezervy rozširuje metodu chain ladder tak, že používa aj informácie o počte nahlásených škôd. Výhodou tejto metódy je, že predpovedá osobitne rezervu pre IBNR a RBNS škody. Má 3 stochastické zložky, ktoré budeme odhadovať: oneskorenie zlikvidovania, výšky jednotlivých platieb a počet nahlásených škôd.

4.1 Základné údaje a značenie

Predpokladáme množinu $J_0 = \{(i, j) : i = 1, \dots, m; j = 0, \dots, m - 1; i + j \leq m\}$, a dva nekumulatívne vývojové trojuholníky (obidva dostupné v praxi):

1. Trojuhoník počtu vzniknutých škôd, značíme $\aleph_m = \{N_{i,j} : (i, j) \in J_0\}$, kde $N_{i,j}$ je počet škôd vzniknutých v roku i a nahlásených v roku $i + j$.
2. Trojuholník platieb za škody, značíme $\Delta_m = \{X_{i,j} : (i, j) \in J_0\}$, kde $X_{i,j}$ je výška platieb za škody vzniknuté v roku i a zaplatené v roku $i + j$.

Trojuholník počtu nahlásených škôd a trojuholník výšky platieb sú napozorované reálne údaje. Pre odhad výšky rezervy budeme potrebovať oneskorenie v úhrade nahlásených škôd (tzv. RBNS oneskorenie). Je to náhodná veličina a budeme ho modelovať pomocou veličiny $N_{i,j,l}^{paid}$, čo je počet budúcich platieb vychádzajúcich z $N_{i,j}$, ktoré sú nakoniec zlikvidované s l ročným oneskorením, kde $l = 0, \dots, m - 1$. Ďalej označme $Y_{i,j,l}^{(k)}$ je výška platby za k -tu škodu vzniknutú v roku i , nahlásenú v roku $i + j$ a zlikvidovanú v roku $i + j + l$, kde $k = 1, \dots, N_{i,j,l}^{paid}$, $(i, j) \in J_0$, $l = 0, \dots, m - 1$.

4.2 Predpoklady 1.momentu:

M1. Počty škôd $N_{i,j}$ sú náhodné veličiny so strednou hodnotou $E[N_{i,j}] = \alpha_i \beta_j$ a

$$\sum_{j=0}^{m-1} \beta_j = 1.$$

M2. Očakávaná hodnota náhodných veličín $N_{i,j,l}^{paid}$, ktoré modelujú oneskorenie zlikvidovania je $E[N_{i,j,l}^{paid} | \aleph_m] = N_{i,j} \tilde{\pi}_l$, $(i,j) \in J_0$, $l = 0, \dots, m-1$.

M3. Očakávaná hodnota výšky jednotlivých platieb, za podmienky, že je známy ich počet bude $E[Y_{i,j,l}^k | N_{i,j,l}^{paid}] = \tilde{\mu}_l \gamma_i$.

Za predpokladov M1-M3 platí:

$$\begin{aligned} E \left[\sum_{k=1}^{N_{i,j-l,l}^{paid}} Y_{i,j-l,l}^{(k)} \middle| \aleph_m \right] &= E \left[\sum_{k=1}^{N_{i,j-l,l}^{paid}} E[Y_{i,j-l,l}^{(k)} | \aleph_m, N_{i,j-l,l}^{paid}] \middle| \aleph_m \right] \\ &= E[N_{i,j-l,l}^{paid} \tilde{\mu}_l \gamma_i] = N_{i,j-l} \tilde{\pi}_l \tilde{\mu}_l \gamma_i \end{aligned}$$

Vidíme, že celkové výšky platieb za škody vzniknuté v roku i a zaplatené v roku $i+j$ môžeme napísať ako

$$X_{i,j} = \sum_{l=0}^j \sum_{k=1}^{N_{i,j-l,l}^{paid}} Y_{i,j-l,l}^{(k)}, \quad (i,j) \in J_0.$$

Potom očakávaná hodnota budúcich platieb $X_{i,j}$ bude

$$E[X_{i,j} | \aleph_m] = \sum_{l=0}^j N_{i,j-l} \tilde{\pi}_l \tilde{\mu}_l \gamma_i = \sum_{l=0}^j N_{i,j-l} \mu \pi_l \gamma_i. \quad (4.1)$$

Pričom platí $\mu = \sum_{l=0}^{m-1} \tilde{\pi}_l \tilde{\mu}_l$ a $\pi_l = \frac{\tilde{\pi}_l \tilde{\mu}_l}{\mu}$. Nepodmienujúcou očakávanú výšku platieb zapíšeme ako

$$E[X_{i,j}] = \alpha_i \mu \gamma_i \sum_{l=0}^j \beta_{j-l} \pi_l. \quad (4.2)$$

Pre odhad RBNS rezervy by bolo možné použiť obidve vyjadrenia (4.1) aj (4.2), ale predpokladáme, že bude výhodnejšie vychádzať z (4.1), kde počítame s aktuálnym počtom nahlásených škôd. Ak by sme použili (4.2) získame rovnaký odhad, ako by sme získali klasickou metódou chain ladder, toto nájdeme dokázané v Martínez Miranda a kol. [2012]. Pre odhad IBNR rezervy budeme vychádzať z vyjadrenia (4.2) a odhadu počtu škôd, ktoré budú nahlásené v budúcnosti.

4.3 Odhad parametrov

Pri odhade poistného plnenia a teda pri konštrukcii RBNS a IBNR rezerv potrebujeme najskôr odhadnúť parametre z predpokladov M1-M3. Už z názvu kapitoly vyplýva, že budeme používať metódu chain ladder dva krát a to na trojuholník počtu vzniknutých škôd \aleph_m a na trojuholník platieb za škody Δ_m . Predpokladáme, že $(i,j) \in J_0$, potom odhady parametrov označíme $(\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_j)$ a $(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_j)$ v príslušnom poradí k trojuholníkom \aleph_m a Δ_m .

Metóda chain ladder predpokladá, že $X_{i,j}$ sú nezávislé náhodné veličiny a platí

$$E[X_{i,j}] = \tilde{\alpha}_i \tilde{\beta}_j \quad (4.3)$$

pričom $\sum_{j=0}^{m-1} \tilde{\beta}_j = 1$.

Porovnaním rovníc (4.2) a (4.3) získame

$$\alpha_i \mu \gamma_i = \tilde{\alpha}_i \quad (4.4)$$

$$\sum_{l=0}^j \beta_{j-l} \pi_l = \tilde{\beta}_j \quad (4.5)$$

4.3.1 Odhad parametrov (α_i, β_j) a $(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_j)$.

Klasická metóda chain ladder, používa k odhadu výšky škodnej rezervy vývojové faktory f_j , $j = 1, \dots, m-1$, ktoré odhaduje pomocou vzťahu (2.2). Túto metódu odhadu použijeme na trojuholník počtu vzniknutých škôd \aleph_m a odhadnuté vývojové faktory f_j , $j = 1, \dots, m-1$ prevedieme na potrebné odhady β_j , $j = 0, \dots, m-1$ použitím nasledujúcich vzťahov.

$$\hat{\beta}_0 = \frac{1}{\prod_{l=1}^{m-1} \hat{f}_l} \quad (4.6)$$

$$\hat{\beta}_j = \frac{\hat{f}_j - 1}{\prod_{l=j}^{m-1} \hat{f}_l} \quad (4.7)$$

pre $\forall j = 1, \dots, m-1$.

Rovnaký postup použijeme na trojuholník platieb za škody Δ_m . Odhadneme z neho vývojové faktory f_j , $\forall j = 1, \dots, m-1$, a potom dopočítame odhad parametra $\tilde{\beta}_j$, $\forall j = 0, \dots, m-1$ ako v predchádzajúcom prípade.

Odhad parametrov pre škodné roky, α_i pre $\forall i = 1, \dots, m$ získame z posledného údaja v každom riadku z trojuholníka počtu vzniknutých škôd \aleph_m .

$$\hat{\alpha}_i = \sum_{j=0}^{m-i} N_{i,j} \prod_{j=m-i+1}^{m-1} \hat{f}_j \quad (4.8)$$

Podobne získame odhad parametrov $\tilde{\alpha}_i$ z trojuholníka platieb za škody Δ_m .

$$\hat{\tilde{\alpha}}_i = \sum_{j=0}^{m-i} X_{i,j} \prod_{j=m-i+1}^{m-1} \hat{f}_j$$

4.3.2 Odhad pravdepodobnosti oneskorenia

Odhad pravdepodobnosti oneskorenia $\pi = \{\pi_0, \dots, \pi_{m-1}\}$, získame vyriešením nasledujúcej sústavy rovníc, vychádzajúcich z rovnice (4.5).

$$\begin{pmatrix} \widehat{\beta}_0 \\ \vdots \\ \widehat{\beta}_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \widehat{\beta}_1 & \widehat{\beta}_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \widehat{\beta}_{m-1} & \widehat{\beta}_{m-2} & \cdots & \widehat{\beta}_1 & \widehat{\beta}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \vdots \\ \pi_{m-1} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

a riešenie označíme $\widehat{\pi} = \{\widehat{\pi}_l : l = 0, \dots, m-1\}$.

4.3.3 Odhad parametrov pre jednotlivé výšky platieb za škody

Parametre pre jednotlivé výšky platieb μ a γ_i kde μ je stredná hodnota výšky jednotlivých škôd a γ_i je parameter inflácie v škodnom roku i , odvodíme zo vzťahu (4.4).

$$\widehat{\gamma}_i = \frac{\widehat{\alpha}_i}{\widehat{\alpha}_i \widehat{\mu}}, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (4.10)$$

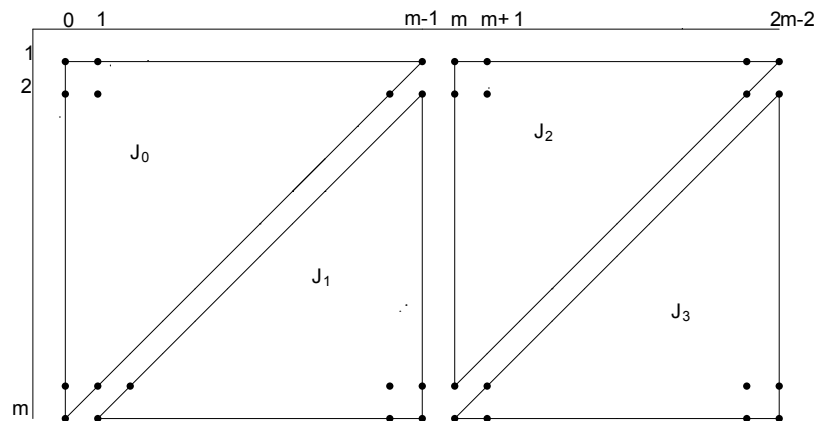
Najjednoduchší spôsob odhadu je položiť $\gamma_1 = 1$ a odhadnúť parameter μ z predchádzajúceho vzťahu.

$$\widehat{\mu} = \frac{\widehat{\alpha}_1}{\widehat{\alpha}_1} \quad (4.11)$$

Použitím $\widehat{\mu}$ dopočítame odhady zvyšných parametrov γ_i , $\forall i = 2, \dots, m$ z rovnice (4.10).

4.4 Odhad IBNR a RBNS rezerv

Pomocou odhadnutého parametra $\widehat{\theta} = (\widehat{\pi}, \widehat{\mu}, \widehat{\gamma})$ už môžeme vypočítať bodový odhad IBNR a RBNS rezerv. Pri výpočte RBNS rezervy by bolo najlepšie vziať do úvahy aj aktuálne počty nahlásených škôd a teda použiť vzťah (4.1). Pri výpočte IBNR rezervy nás naopak nezaujíma počet už nahlásených škôd, ale skôr počet škôd, ktoré budú nahlásené niekedy v budúcnosti. Teda je potrebné vytvoriť predpoveď pre počet nahlásených škôd v budúcnosti. Na to použijeme metódu chain ladder. Uvažujeme predpoveď cez trojuholníky na obrázku 4.1,



Obrázok 4.1: Škodný vývoj s maximálnou dobou oneskorenia $m - 1$.

dané množinami J_1 až J_3 .

$$J_1 = \{i = 2, \dots, m; j = 0, \dots, m-1; i+j = m+1, \dots, 2m-1\}$$

$$J_2 = \{i = 1, \dots, m; j = m, \dots, 2m-1; i+j = m+1, \dots, 2m-1\}$$

$$J_3 = \{i = 2, \dots, m; j = m, \dots, 2m-1; i+j = 2m, \dots, 3m-1\}$$

Klasická metóda chain ladder robí predpoveď len cez J_1 . Metóda dvojité chain ladder však predpovedá aj hodnoty na chvoste, teda cez množiny J_2 a J_3 , pričom používa rovnaké predpoklady o vývoji škôd.

Odhad celkovej rezervy vypočítame ako súčet RBNS rezervy a IBNR rezervy. Odhad výšky RBNS škôd je

$$\hat{X}_{i,j}^{rbns} = \sum_{l=i-m+j}^j N_{i,j-l} \hat{\pi}_l \hat{\mu} \hat{\gamma}_i, \quad (i,j) \in J_1 \cup J_2.$$

Odhad výšky IBNR škôd je

$$\hat{X}_{i,j}^{ibnr} = \sum_{l=0}^{i-m+j-1} \hat{N}_{i,j-l} \hat{\pi}_l \hat{\mu} \hat{\gamma}_i, \quad (i,j) \in J_1,$$

$$\hat{X}_{i,j}^{ibnr} = \sum_{l=j-m+1}^{j-m+i-1} \hat{N}_{i,j-l} \hat{\pi}_l \hat{\mu} \hat{\gamma}_i, \quad (i,j) \in J_2 \cup J_3,$$

kde $\hat{N}_{i,j} = \hat{\alpha}_i \hat{\beta}_j$.

Odhad celkovej rezervy R potom je

$$\hat{R} = \sum_{(i,j) \in J_1 \cup J_2} \hat{X}_{i,j}^{rbns} + \sum_{(i,j) \in J_1 \cup J_2 \cup J_3} \hat{X}_{i,j}^{ibnr}.$$

4.5 Model DCL s jednorazovými výplatami škôd

Z podmienok prvého momentu je možné odvodiť niekoľko modelov na odhad rezervy. My si ukážeme najjednoduchší model, ktorý predpokladá každú škodu vyplatenú jedinou platbou. Tento model bude založený na rozdelení náhodných veličín a použijeme pri tom vyššie odhadnuté parametre.

Uvažujme nasledujúce podmienky pre rozdelenie náhodných veličín.

R1. Počty škôd $N_{i,j}$ sú nezávislé náhodné veličiny z Poissonovho rozdelenia so

$$\text{strednou hodnotou } E[N_{i,j}] = \alpha_i \beta_j \text{ a } \sum_{j=0}^{m-1} \beta_j = 1.$$

R2. Pre dané $N_{i,j}$, majú počty zaplatených škôd multinomické rozdelenie také, že náhodný vektor $N_{i,j,0}^{paid}, \dots, N_{i,j,d}^{paid} \sim \text{Multi}(N_{i,j}; p_0, \dots, p_d)$, $\forall (i,j) \in J_0$, kde $d \leq m-1$ je maximálna doba oneskorenia zlikvidovania nahlásenej škody. Označme $p = (p_0, \dots, p_d)$ pravdepodobnosť oneskorenia, pre ktorú platí $\sum_{l=0}^d p_l = 1$, a $0 < p_l < 1, \forall l$.

R3. Jednotlivé platby $Y_{i,j,l}^k$ sú navzájom nezávislé z rozdelenia f_i . Označme μ_i a σ_i^2 strednú hodnotu a rozptyl pre $\forall i = 1, \dots, m$, kde $\mu_i = \mu \gamma_i$ a $\sigma_i^2 = \sigma^2 \gamma_i^2$.

R4. Náhodné veličiny $Y_{i,j,l}^k$ sú nezávislé od počtu škôd $N_{i,j}$ a tiež od oneskorenia zlikvidovania a nahlásenia škody. Tiež predpokladáme, že škody sú vyplatené jednou platbou, alebo nie sú vyplatené vôbec (tzv. zero claims).

Z podmienok $R1 - R4$ máme podmienenú strednú hodnotu výšky škôd $X_{i,j}$:

$$E[X_{i,j}|\mathfrak{N}_m] = \sum_{l=0}^{\min\{j,d\}} N_{i,j-l} p_l \mu_l \gamma_i, \quad (4.12)$$

nepodmienená stredná hodnota výšky škôd $X_{i,j}$ bude

$$E[X_{i,j}] = \alpha_i \mu \gamma_i \sum_{l=0}^{\min\{j,d\}} \beta_{j-l} p_l, \quad (4.13)$$

a rozptyl výšky škôd $X_{i,j}$ bude úmerný strednej hodnote a teda

$$\text{Var}[X_{i,j}|\mathfrak{N}_m] = \varphi_i E[X_{i,j}|\mathfrak{N}_m], \quad (4.14)$$

kde $\varphi_i = \varphi \gamma_i$ a $\varphi = (\sigma^2 + \mu^2)/(\mu)$.

4.5.1 Odhad pravdepodobnosti oneskorenia

Pre odhad parametra pravdepodobnosti oneskorenia $\hat{\mathbf{p}}$ je potrebné najskôr určiť maximálne oneskorenie vyplatenia škôd d . To urobíme tak, že zoberieme postupne všetky už odhadnuté parametre $\hat{\pi}_l > 0$ a d určíme tak, aby platilo $\sum_{l=0}^{d-1} \hat{\pi}_l < 1 \leq \sum_{l=0}^d \hat{\pi}_l$. Potom odhady parametrov oneskorenia \hat{p}_l stanovíme, tak, že $\hat{p}_l = \hat{\pi}_l$, ($l = 0, \dots, d-1$) a $\hat{p}_d = 1 - \sum_{l=0}^{d-1} \hat{p}_l$. Teda $\hat{\mathbf{p}} = (\hat{p}_0, \dots, \hat{p}_{d-1}, 1 - \sum_{l=0}^{d-1} \hat{p}_l)$.

4.5.2 Odhad parametrov rozdelenia jednotlivých platieb

Odhad strednej hodnoty μ a parametra inflácie škodného roku i , γ_i bude rovnaký ako ten, ktorý sme odhadli v časti (4.3.3). Parameter σ^2 pre rozptyl odhadneme zo vzťahu (4.14). Najskôr ale musíme odhadnúť parameter φ . Ten dostaneme z over-dispersed Poissonovho modelu

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{n - (d+1)} \sum_{(i,j) \in J_1} \frac{(X_{i,j} - \hat{X}_{i,j}^{DCL})^2}{\hat{X}_{i,j}^{DCL} \hat{\gamma}_i},$$

kde $n = m(m+1)/2$ a $\hat{X}_{i,j}^{DCL}$ je odhad $E[X_{i,j}|\mathfrak{N}_m]$ získaný metódou dvojitý chain ladder tak, že $\hat{X}_{i,j}^{DCL} = \sum_{l=0}^{\min\{j,d\}} N_{i,j-l} \hat{p}_l \hat{\mu} \hat{\gamma}_i$. Potom parameter pre rozptyl jednotlivých platieb bude $\hat{\sigma}_i^2 = \hat{\sigma} \hat{\gamma}_i^2$, $\forall i = 1, \dots, m$. kde $\hat{\sigma}^2 = \hat{\mu} \hat{\varphi} - \hat{\mu}^2$.

4.5.3 Odhad rezervy

Celkovú rezervu tohto modelu, označme ju R_* vypočítame ako súčet IBNR a RBNS rezerv.

Odhad RBNS rezervy spočítame ako

$$\widehat{R}_*^{rbns} = \sum_{(i,j) \in J_2 \cup J_3} \sum_{l=i-m+j}^{\min\{d,j\}} N_{i,j-i} \widehat{p}_l \widehat{\mu}^l \widehat{\gamma}_i, \quad (4.15)$$

a odhad IBNR rezervy ako

$$\widehat{R}_*^{ibnr} = \sum_{(i,j) \in J_1} \sum_{l=0}^{\min\{d,i-m+j-1\}} \widehat{N}_{i,j-i} \widehat{p}_l \widehat{\mu}^l \widehat{\gamma}_i + \sum_{(i,j) \in J_2 \cup J_3} \sum_{l=j-m+1}^{\min\{d,j-m+i-1\}} \widehat{N}_{i,j-i} \widehat{p}_l \widehat{\mu}^l \widehat{\gamma}_i \quad (4.16)$$

a teda $\widehat{R}_* = \widehat{R}_*^{ibnr} + \widehat{R}_*^{rbns}$.

Kapitola 5

Aplikácia na reálne dáta

V tejto časti si ukážeme aplikáciu metódy chain ladder a dvojité chain ladder v praxi. Použijeme údaje z balíčka DCL v programe R. Tento balíček obsahuje skutočné dáta z poisťovne, ktoré sú zaznamenané vo dvoch vývojových trojuholníkoch ročne počas 10 rokov. V jednom trojuholníku sú výšky zaplatených škôd a v druhom počty nahlásených škôd. Budeme predpovedať výšku škodnej rezervy pomocou bodového odhadu budúcich výplat. Najskôr na to použijeme metódu chain ladder a potom metódu dvojité chain ladder a výsledky porovnáme. Výpočty sú prevedené v programe Mathematica.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	451288	339519	333371	144988	93243	45511	25217	20406	31482	1729
2	448627	512882	168467	130674	56044	33397	56071	26522	14346	
3	693574	497737	202272	120753	125046	37154	27608	17864		
4	652043	546406	244474	200896	106802	106753	63688			
5	566082	503970	217838	145181	165519	91313				
6	606606	562543	227374	153551	132743					
7	536976	472525	154205	150564						
8	554833	590880	300964							
9	537238	701111								
10	684944									

Tabuľka 5.1: Výšky vyplatených škôd

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	6238	831	49	7	1	1	2	1	2	3
2	7735	1381	23	4	1	3	1	1	3	
3	10306	1093	17	5	2	0	2	2		
4	9639	995	17	6	1	5	4			
5	9511	1386	39	4	6	5				
6	10023	1342	31	16	9					
7	9834	1424	59	24						
8	10899	1503	84							
9	11954	1704								
10	10989									

Tabuľka 5.2: Počty nahlásených škôd

5.1 Aplikácia metódy chain ladder

Metóda chain ladder vychádza z kumulatívneho trojuholníka, preto je potrebné z trojuholníka z tabuľky 5.1 vytvoriť kumulatívny trojuholník pre výšky zaplatených škôd. Ten získame tak, že postupne sčítame hodnoty v jednotlivých riadkoch. Ďalej predpokladáme, že škodný vývoj je zastavený po 10 rokoch. Z

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	451288	790807	1124178	1269166	1362409	1407920	1433137	1453543	1485025	1486754
2	448627	961509	1129976	1260650	1316694	1350091	1406162	1432684	1447030	
3	693574	1191311	1393583	1514336	1639382	1676536	1704144	1722008		
4	652043	1198449	1442923	1643819	1750621	1857374	1921062			
5	566082	1070052	1287890	1433071	1598590	1689903				
6	606606	1169149	1396523	1550074	1682817					
7	536976	1009501	1163706	1314270						
8	554833	1145713	1446677							
9	537238	1238349								
10	684944									

Tabuľka 5.3: Kumulované výšky vyplatených škôd

predpokladu (3.1) vieme, že stĺpce vývojového trojuholníka vyplatených škôd sú úmerné a existujú vývojové faktory f_1, \dots, f_9 , pomocou ktorých môžeme predpovedať budúci škodný vývoj. Tie odhadujeme zo vzťahu (2.2). Napríklad pre vývojový faktor f_4 podelíme súčet hodnôt v piatom stĺpci kumulatívneho trojuholníka súčtom hodnôt vo štvrtom stĺpci kumulatívneho trojuholníka, pričom poslednú hodnotu vo štvrtom stĺpci vynecháme, aby bol počet hodnôt v čitateli a menovateli rovnaký.

$$\widehat{f}_4 = \frac{1362409 + 1316694 + 1639382 + 1750621 + 1598590 + 1682817}{1269166 + 1260650 + 15143364 + 1643819 + 1433071 + 1550074} = 1.06395$$

Takýmto postupom získame všetkých 9 vývojových faktorov:

\widehat{f}_1	\widehat{f}_2	\widehat{f}_3	\widehat{f}_4	\widehat{f}_5	\widehat{f}_6	\widehat{f}_7	\widehat{f}_8	\widehat{f}_9
1.98999	1.28515	1.13664	1.06395	1.03114	1.01668	1.00635	1.00409	1.00065

Z odhadnutých vývojových faktorov a z trojuholníka kumulovaných vyplatených škôd už môžeme predpovedať výšky škôd do budúcnosti. Použijeme pri tom vzťah (2.3). Teda napríklad výšku škôd vzniknutých v roku 4 a zlikvidovaných do konca roku 13 dostaneme ako

$$\widehat{C}_{4,9} = \widehat{f}_9 \cdot \widehat{f}_8 \cdot \widehat{f}_7 \cdot C_{4,6} = 1.00065 \cdot 1.00409 \cdot 1.00635 \cdot 1921062 = 1981700.$$

Takto môžeme predpovedať všetky hodnoty vývoja, až doplníme vývojový trojuholník na štvorec a v poslednom stĺpci budú celkové výšky výplát za škody vzniknuté v rokoch $1, \dots, 10$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	451288	790807	1124178	1269166	1362409	1407920	1433137	1453543	1485025	1486754
2	448627	961509	1129976	1260650	1316694	1350091	1406162	1432684	1447030	1448715
3	693574	1191311	1393583	1514336	1639382	1676536	1704144	1722008	1749350	1751387
4	652043	1198449	1442923	1643819	1750621	1857374	1921062	1948457	1979395	1981700
5	566082	1070052	1287890	1433071	1598590	1689903	1736256	1761016	1788978	1791061
6	606606	1169149	1396523	1550074	1682817	1751758	1799808	1825474	1854459	1856619
7	536976	1009501	1163706	1314270	1417245	1475307	1515774	1537389	1561800	1563619
8	554833	1145713	1446677	1616063	1742684	1814078	1863837	1890416	1920433	1922669
9	537238	1238349	1506570	1682968	1814832	1889181	1941000	1968680	1999939	2002268
10	684944	1326504	1613818	1802774	1944024	2023667	2079175	2108825	2142309	2144804

Tabuľka 5.4: Predpoveď vývoja platieb

Rezervu na poistné plnenia spočítame ako rozdiel všetkých platieb za škody a už zaplatených škôd. Takže je zrejmé, že pre rezervu za škody vzniknuté v roku i platí: $\widehat{R}_i = \widehat{C}_{i,m-1} - C_{i,m-i}$, $\forall i = 2, \dots, m$. Všimnime si, že pre prvý rok nie je potrebné tvoriť rezervu, a napríklad pre $i = 4$ máme

$$\widehat{R}_4 = \widehat{C}_{4,9} - C_{4,6} = 1981700 - 1921062 = 60638.$$

\widehat{R}_2	\widehat{R}_3	\widehat{R}_4	\widehat{R}_5	\widehat{R}_6	\widehat{R}_7	\widehat{R}_8	\widehat{R}_9	\widehat{R}_{10}
1 685	2 9379	60 638	10 1158	173 802	249 349	475 992	763 919	1 459 860

Celková rezerva R teda bude súčet jednotlivých rezerv.

$$\widehat{R} = \sum_{i=2}^{10} \widehat{R}_i = 3\,315\,782$$

5.2 Aplikácia metódy dvojitého chain ladder

V tejto časti si ukážeme, ako funguje metóda dvojitého chain ladder na modeli, ktorý je opísaný v podkapitole (4.5), teda predpokladáme, že všetky škody sú zlikvidované jednou platbou. Vychádzame z dvoch vývojových trojuholníkov, \aleph_{10} (tabuľka 5.2) a Δ_{10} (tabuľka 5.1). Na obidva trojuholníky prevedieme klasickú metódu chain ladder, ako v podkapitole 5.1. Získame tak vývojové faktory pre obidva trojuholníky, \widehat{f}_j z trojuholníka \aleph_{10} a \widetilde{f}_j z trojuholníka Δ_{10} .

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
\widehat{f}_j	1.13535	1.00379	1.00092	1.00033	1.00028	1.00023	1.00014	1.00031	1.00042
\widetilde{f}_j	1.98999	1.28515	1.13664	1.06395	1.03114	1.01668	1.00635	1.00409	1.00065

Pomocou týchto vývojových faktorov budeme predpovedať počet škôd a výšku platieb za škody v budúcnosti. Rozšírime teda trojuholníky Δ_{10} a \aleph_{10} na štvorce, pričom znovu použijeme klasickú metódu chain ladder. Výsledné hodnoty vidíme v tabuľkách 5.5 a 5.6.

Z Mack [1991] vieme, že očakávaný počet škôd $E[N_{i,j}]$ môžeme napísať ako súčin parametrov α_i a β_j .

Takisto očakávané výšky platieb $X_{i,j}$ môžeme prepísať ako súčin parametrov $\widetilde{\alpha}_i$ a $\widetilde{\beta}_j$. Teraz už môžeme prejsť k odhadu parametrov. Parametre β odhadneme zo

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	6238	831	49	7	1	1	2	1	2	3
2	7735	1381	23	4	1	3	1	1	3	4
3	10306	1093	17	5	2	0	2	2	4	4
4	9639	995	17	6	1	5	4	2	3	4
5	9511	1386	39	4	6	5	3	1	4	4
6	10023	1342	31	16	9	3	3	2	3	5
7	9834	1424	59	24	4	3	3	1	4	5
8	10899	1503	84	11	5	3	3	2	4	5
9	11954	1704	52	12	5	4	3	2	4	6
10	10989	1487	48	11	4	4	3	2	3	6

Tabuľka 5.5: Vývoj počtu škôd získaný metódou chain ladder

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	451288	339519	333371	144988	93243	45511	25217	20406	31482	1729
2	448627	512882	168467	130674	56044	33397	56071	26522	14346	1685
3	693574	497737	202272	120753	125046	37154	27608	17864	27342	2037
4	652043	546406	244474	200896	106802	106753	63688	27395	30938	2305
5	566082	503970	217838	145181	165519	91313	46353	24760	27962	2083
6	606606	562543	227374	153551	132743	68941	48050	25666	28985	2160
7	536976	472525	154205	150564	102975	58062	40467	21615	24411	1819
8	554833	590880	300964	169386	126621	71394	49759	26579	30017	2236
9	537238	701111	268221	176398	131864	74349	51819	27680	31259	2329
10	684944	641560	287314	188956	141250	79643	55508	29650	33484	2495

Tabuľka 5.6: Vývoj výšok platieb za škody získaný metódou chain ladder

vzťahov (4.6) a (4.7). Teda napríklad odhad parametra β_6 je

$$\widehat{\beta}_6 = \frac{\widehat{f}_6 - 1}{\prod_{l=6}^9 \widehat{f}_l} = \frac{1.00023 - 1}{1.00023 \cdot 1.00014 \cdot 1.00031 \cdot 1.00042} = 0.00023436,$$

a odhad parametra $\widetilde{\beta}_6$ je

$$\widetilde{\beta}_6 = \frac{\widetilde{f}_6 - 1}{\prod_{l=6}^9 \widetilde{f}_l} = \frac{1.01668 - 1}{1.01668 \cdot 1.00635 \cdot 1.00409 \cdot 1.00065} = 0.0258803.$$

Parameter α bude posledná hodnota z kumulovaného vývoja počtu škôd, ktorý sme získali metódou chain ladder. Budeme pritom vychádzať zo vzťahu (4.8). Teda napríklad odhad parametra α_6 je

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}_6 &= \sum_{j=0}^4 N_{6,j} \prod_{j=5}^9 \widehat{f}_j = \\ &= (10023 + 1342 + 31 + 16 + 9) \cdot 1.00028 \cdot 1.00023 \cdot 1.00014 \cdot 1.00031 \cdot 1.00042 = \\ &= 11436.9. \end{aligned}$$

Podobne odhad parametra $\widetilde{\alpha}$ odhadneme z vývoja výšok platieb za škody, ktorý sme získali metódou chain ladder. Všetky hodnoty parametrov vidíme v tabuľke 5.7.

i	$\hat{\alpha}_i$	$\hat{\tilde{\alpha}}_i$	j	$\hat{\beta}_j$	$\hat{\tilde{\beta}}_j$
1	7135	1486754	0	0.87515	0.31935
2	9155.85	1448715	1	0.11845	0.29912
3	11435.3	1751387	2	0.00377	0.13396
4	10676.3	1981700	3	0.00091	0.0881
5	10963.1	1791061	4	0.00033	0.06586
6	11436.9	1856619	5	0.00028	0.03713
7	11360.5	1563619	6	0.00023	0.02588
8	12519.	1922669	7	0.00014	0.01382
9	13746.	2002268	8	0.00031	0.01561
10	12556.7	2144804	9	0.00042	0.00116

Tabuľka 5.7: Parametre vývoja

Z prvého predpokladu rozdelenia R1 vieme, že $N_{i,j}$ sú náhodné veličiny z Poissonovho rozdelenia s multiplikatívnym parametrom $\alpha_i\beta_j$. Teda pre strednú hodnotu platí $E[N_{i,j}] = \alpha_i\beta_j$, a odhad počtu škôd $\hat{N}_{i,j} = \hat{\alpha}_i\hat{\beta}_j$. Všetky hodnoty $\hat{N}_{i,j}$ sú spočítané v tabuľke 5.8.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	6244	845	27	7	2	2	2	1	2	3
2	8013	1085	34	8	3	3	2	1	3	4
3	10008	1355	43	10	4	3	3	2	4	5
4	9343	1265	40	10	4	3	3	2	3	4
5	9594	1299	41	10	4	3	3	2	3	5
6	10009	1355	43	10	4	3	3	2	4	5
7	9942	1346	43	10	4	3	3	2	3	5
8	10956	1483	47	11	4	4	3	2	4	5
9	12030	1628	52	13	5	4	3	2	4	6
10	10989	1487	47	11	4	4	3	2	4	5

Tabuľka 5.8: Vývoj počtu škôd z predpokladu rozdelenia R1

Pre odhad pravdepodobnosti oneskorenia p potrebujeme najskôr poznať pravdepodobnosť oneskorenia bez restrikcí π , tú dostaneme ako riešenie sústavy rovníc (4.9) a maximálnu dĺžku oneskorenia d . Riešením sústavy (4.9) je vektor:

$$\hat{\pi} = (0.36491, 0.29241, 0.11192, 0.08388, 0.06297, 0.0332, 0.02449, 0.01207, 0.01581, -0.00124).$$

Pre maximálnu dĺžku oneskorenia d musí platiť, že $\sum_{l=0}^{d-1} \hat{\pi}_l < 1$ a zároveň $\sum_{l=0}^d \hat{\pi}_l \geq 1$.

V našom prípade to platí práve vtedy, keď $d = 8$. Takže maximálna dĺžka oneskorenia zlikvidovania škody je 8 rokov. Teraz už môžeme určiť pravdepodobnosť

oneskorenia p ako v časti 4.5.1: $\hat{p}_0 = \hat{\pi}_0 = 0.36491, \dots, \hat{p}_7 = \hat{\pi}_7 = a$ a $\hat{p}_8 = 1 - \sum_{l=0}^7 \hat{p}_l$.

Pri odhade parametrov jednotlivých platieb vychádzame zo vzťahu (4.10), položíme $\gamma_1 = 1$ a strednú hodnotu jednotlivých platieb odhadneme následovne:

$$\hat{\mu} = \frac{\hat{\tilde{\alpha}}_1}{\hat{\alpha}_1} = 208.375,$$

Zvyšné parametre γ_i , $i = 2, \dots, 10$ už ľahko dopočítame z toho istého vzťahu a použitím $\hat{\mu}$. Všetky parametre modelu a ich hodnoty zhrnieme v tabuľke 5.9.

	$\hat{\gamma}_i$	$\hat{\pi}_l$	\hat{p}_l
0		0.36491	0.36491
1	1	0.29241	0.29241
2	0.759345	0.11192	0.11192
3	0.735002	0.08388	0.08388
4	0.890783	0.06297	0.06297
5	0.784027	0.0332	0.0332
6	0.779058	0.02449	0.02449
7	0.660522	0.01207	0.01207
8	0.73704	0.01581	0.01416
9	0.699039	-0.00124	
10	0.811972		
$\hat{\mu} = 208.375$			

Tabuľka 5.9: Parametre vývoja

Teraz už máme všetky potrebné informácie, aby sme mohli dopočítať predpoveď škôd a škodnú rezervu. Pre RBNS škodný vývoj, vychádzame zo vzťahu (4.15). Počty škôd $N_{i,j}$ pritom bereme z trojuholníka \aleph_m , ktorý reprezentuje počty nahlásených škôd a teda len odhadneme výšku týchto už nahlásených škôd, pričom rátame s tým, že maximálna doba oneskorenia vyplatenia je 8 rokov. Ich súčet bude tvoriť RBNS rezervu. RBNS vývoj vidíme tabuľke 5.10. Odhad RBNS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1											447	160	101	66	39	23	13	9
2										3357	155	78	47	28	16	8	7	
3									24595	2490	99	44	22	11	8	4		
4								26624	27841	2807	140	65	32	22	11			
5						46368	24721	25035	3382	149	41	24	12					
6					68879	47771	25422	25962	3257	138	54	21						
7				103552	58331	40437	21610	21833	2953	155	47							
8			170011	126218	71192	49462	26279	26795	3423	183								
9		267460	173834	130474	73441	50876	27090	27643	3513									
10	548852	210079	157443	118205	62318	45960	22651	26569										

Tabuľka 5.10: RBNS škodný vývoj

rezervy teda je $\hat{R}_*^{rbns} = 3\,029\,495$.

Pre IBNR škodný vývoj budeme vychádzať zo vzťahu (4.16). Pričom počty škôd $\hat{N}_{i,j}$ sú odhadnuté počty škôd, ktoré už vznikli, ale ešte neboli nahlásené. Tu tiež počítame s tým, že maximálna doba oneskorenia zlikvidovania je 8 rokov. Odhad IBNR rezervy teda bude súčet všetkých škôd v tabuľke 5.11. A teda $\hat{R}_*^{ibnr} = 296\,520$.

Celkový vývoj škôd vidíme v tabuľke 5.12 a odhad celkovej rezervy $\hat{R}_* = \hat{R}_*^{ibnr} + \hat{R}_*^{rbns} = 3\,326\,014$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1																		
2										222	178	68	51	38	20	15	7	9
3									196	426	275	128	96	64	38	25	16	10
4								104	306	514	336	162	118	80	46	32	19	12
5							153	217	323	500	330	161	117	77	48	29	17	11
6						192	313	284	379	551	359	179	127	87	49	30	17	11
7					188	312	321	282	352	481	315	157	114	74	41	25	15	9
8				642	745	581	542	458	491	635	409	218	141	90	51	31	18	11
9			2752	2874	1620	1237	1040	727	696	752	533	227	147	94	53	32	19	12
10	92708	77236	31513	23045	17325	9548	7000	3811	4402	570	243	157	101	57	34	20	13	

Tabuľka 5.11: IBNR škodný vývoj

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17							
1																									
2											447	160	101	66	39	23	13	9							
3										3580	333	146	98	67	36	23	14	9							
4									24791	2916	374	172	118	75	46	29	16	10							
5									26728	28147	3320	476	228	150	102	57	32	19	12						
6									46522	24938	25358	3882	479	202	140	89	48	29	17	11					
7									69071	48084	25706	26341	3808	498	234	148	87	49	30	17	11				
8									103740	58643	40758	21892	22184	3434	470	204	114	74	41	25	15	9			
9									170652	126963	71772	50004	26737	27286	4058	591	218	141	90	51	31	18	11		
10									270212	176708	132094	74678	51915	27817	28339	4265	533	227	147	94	53	32	19	12	
11									641560	287315	188956	141250	79642	55508	29650	30381	4402	570	243	157	101	57	34	20	13

Tabuľka 5.12: Celkový škodný vývoj

5.3 Zhrnutie a porovnanie výsledkov

V praxi nás najčastejšie zaujímajú výšky rezerv v kalendárnych rokoch. Tieto získame z metódy dvojitého chain ladder tak, že z tabuľky 5.12 sčítame výšky škôd na diagonálach. Podobne získame výšky rezerv v kalendárnych rokoch pre metódu chain ladder, sčítaním hodnôt na diagonále v pravom dolnom trojuholníku z tabuľky 5.6. Vypočítané výšky rezerv pre jednotlivé kalendárne roky vidíme v tabuľke 5.13, osobitne pre IBNR a RBNS rezervy spočítané metódou dvojitého chain ladder a tiež celkové rezezervy metódou chain ladder (CLM) a metódou dvojitého chain ladder (DCL). Všimnime si, že odhady výšok rezerv sa líšia len veľmi málo, pretože dvojitého chain ladder používa pri svojom výpočte práve odhad metódou chain ladder. Navyše pre odhad RBNS rezervy používa skutočný počet nahlásených škôd, preto je zrejme tento odhad RBNS rezervy presnejší.

Budúce roky	DCL RBNS	DCL IBNR	celkom DCL	CLM
1	1260146	97158	1357304	1353858
2	671600	82606	754206	754180
3	453087	35499	488586	488612
4	292359	26500	318859	318043
5	164866	20351	185217	184611
6	103060	11970	115029	115023
7	54001	9074	63075	63145
8	30375	5412	35786	35813
9	0	5459	5459	2494
10		1119	1119	
11		580	580	
12		355	355	
13		211	211	
14		116	116	
15		65	65	
16		32	32	
17		13	13	
Celková rezerva	3029493	296520	3326013	3315779

Tabuľka 5.13: Bodový odhad rezervy po kalendárnych rokoch

Záver

Prostredníctvom tejto práce sme mali možnosť bližšie sa zoznámiť s problematikou rezervovania, porozumieť netriviálne metódy na stanovenie výšky rezervy a naštudovanú teóriu aplikovať v praxi. Zaoberali sme sa hlavne stanovením výšky rezervy na poistné plnenia v neživotnom poistení. Opísali sme známu metódu chain ladder a predstavili novú metódu na stanovenie výšky rezervy, ktorou je metóda dvojitý chain ladder.

Obidve metódy odhadu rezervy sme aplikovali na skutočné dáta. Vypočítali sme tak škodný vývoj v budúcnosti dvoma spôsobmi, ktoré nie sú až tak odlišné, pretože metóda dvojitý chain ladder používa pri svojom odhade metódu chain ladder a aj konečné výsledky bodového odhadu rezervy sa líšia len o málo. Veríme však, že odhad rezervy metódou dvojitý chain ladder je presnejší, pretože pri odhade RBNS rezervy používa skutočný počet nahlásených škôd.

Prácu by bolo možné ďalej rozšíriť o výpočet strednej kvadratickej chyby a tak s presnosťou určiť, ktorý odhad výšky rezervy je lepší a do akej miery. Kým metóda chain ladder počíta strednú kvadratickú chybu ako v kapitole 3.4, metóda dvojitý chain ladder pri výpočte používa bootstrap metódu.

Zoznam použitej literatúry

- BESTOVÁ, J. (2007). Run-off analýzy v neživotnóm pojišteni. Master's thesis, Univerzita Karlova v Praze.
- MACK, T. (1991). A simple parametric model for rating automobile insurance or estimating ibnr claims reserves. *ASTIN Bulletin*, **21**, 93–109.
- MACK, T. (1993). Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates. *ASTIN Bulletin*, **23**(2), 213–225.
- MANDL, P. (2009). *Účetní výkaznictví pojišťoven pro matematiky*. Matfyzpress, Praha.
- MANDL, P. a MAZUROVÁ, L. (1999). *Matematické základy neživotního pojištění*. Matfyzpress, Praha.
- MARTÍNEZ MIRANDA, M. D., NIELSEN, J. P. a VERRALL, R. (2012). Double chain ladder. *ASTIN Bulletin*, **42**(1), 59–76.

Zoznam obrázkov

1.1	Vývojový trojuholník.	4
4.1	Škodný vývoj s maximálnou dobou oneskorenia $m - 1$	14

Zoznam tabuliek

5.1	Výšky vyplatených škôd	18
5.2	Počty nahlásených škôd	18
5.3	Kumulované výšky vyplatených škôd	19
5.4	Predpoveď vývoja platieb	20
5.5	Vývoj počtu škôd získaný metódou chain ladder	21
5.6	Vývoj výšok platieb za škody získaný metódou chain ladder	21
5.7	Parametre vývoja	22
5.8	Vývoj počtu škôd z predpokladu rozdelenia R1	22
5.9	Parametre vývoja	23
5.10	RBNS škodný vývoj	23
5.11	IBNR škodný vývoj	24
5.12	Celkový škodný vývoj	24
5.13	Bodový odhad rezervy po kalendárnych rokoch	25