

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA  
UNIVERZITY KARLOVY, PRAHA

---

Posudek školitele na doktorskou disertační práci

RNDR. IVETY HNĚTYNKOVÉ ROZ. ULRYCHOVÉ

Krylov subspace approximations in linear algebraic  
problems

Řada úloh v matematice, ve fyzice a v inženýrské praxi je popsána systémem partiálních diferenciálních rovnic. Numerické řešení takových systémů metodou konečných prvků, konečných objemů, ev. konečných diferencí vede na velké a řídké soustavy lineárních algebraických rovnic. Přímé eliminační metody jsou nepoužitelné jednak proto, že během výpočtu nejsou k dispozici žádné aproximace řešení, které v technické praxi obvykle stačí a eliminaci je z tohoto důvodu nutné provést až do konce. Není možné zanedbat ani velké nároky na paměť počítače. Proto jsou v současné době populární projektivní metody a zde dominují krylovovské metody. I když se jedná z teoretického hlediska převážně o metody konečné, při řešení praktických úloh se chovají jako metody iterační. Jejich výhoda je hlavně v tom, že použijí-li se "šikovně", můžeme již po několika krocích dostat iteraci, která pro aproximaci hledaného řešení v praxi stačí. V práci se uvažují soustavy s nesymetrickou maticí. Byla popsána řada metod. Z praktického počítání však víme, že pokud stagnuje jedna z metod, další se obvykle chovají podobně. Proto se uvažuje jedna z nejpopulárnějších metod a sice restartovaná metoda GMRES. Na jedné straně bylo o této metodě napsáno mnoho článků, na druhé straně nás aplikace na obsáhlejší nesymetrické systémy přesvědčují o tom, že celý výzkum je stále na začátku a že tudíž má smysl tuto problematiku dále studovat. To bylo také předmětem první části práce nazvané "Approximation of invariant subspaces and convergence of GMRES". Iveta vyšla ze skutečnosti, že malá vlastní čísla ve spektru matice mohou zpomalovat konvergenci a způsobit i stagnaci. To je možné demonstrovat na řadě příkladů. Úkol byl tedy sestavit vlastní podprostor odpovídající malým vlastním číslům a na základě toho pak konstruovat adaptivní předpoklady pro každý restart.

První část práce má čtyři kapitoly, ve kterých je podrobně studována konstrukce invariantních podprostorů pomocí polynomiálních filtrů, speciálně užitím Čebyševových polynomů. Jsou formulovány a přesně dokázány věty o konvergenci konstruovaných podprostorů k invariantnímu prostoru. Popsány jsou i situace, kdy uvažovaná vlastní čísla mají defekt a dále je-li matice soustavy "derogatory". Čtvrtá kapitola první části je věnována numerickým výsledkům.

Další aktuální oblastí v numerické lineární algebře, ve které se intenzivně bádá jsou postupy LS, TLS, ScTLS a regularizační metody pro nalezení nejlepší aproximace pro přeuredené (overdetermined) systémy lineárních rovnic. I tyto systémy se vyskytují hojně

v technické praxi a řada metod pro jejich řešení (LSQR, hybridní metody) je vázána na otázku vhodné bidiagonalizace matice. Iveta se v druhé části práce nazvané "Core problem in errors-in-variables modeling" soustředila na core problem, zejména na otázku oddělení podstatné a redundantní části při konstrukci nejlepší aproximace.

V závěru jsou shrnuty dosažené výsledky a je nastíněn i postup další práce ve které autorka zajisté bude pokračovat

## Stručně k obsahu a k dosaženým výsledkům.

Práce se sestává, jak již bylo v úvodu zmíněno, ze šesti kapitol a tématicky je rozdělena na dvě části a sice část 1: Approximation of invariant subspaces and convergence of GMRES a část 2: Core problem in errors-in-variables modeling. Nejprve k první části. Autorka vyšla z práce Sorensena a dalších autorů (viz. literatura) o polynomiálních filtrech. Nová je zde právě konstrukce filtrů využitím Čebyševových polynomů. Tyto filtry numericky dávají lepší výsledky. Toto dokumentuje na řadě numerických příkladů. Dále sestavila a otestovala "alternující" algoritmus pro konstrukci filtrů za předpokladu, že spektrum matice leží "napravo" i "nalevo" od počátku. Je dokázána věta o konvergenci podprostorů získaných polynomiálními filtry s pohyblivými posuny a to k vlastnímu podprostoru zvolené dimenze příslušnému nejmenším vlastnímu číslu původní "velké" matice soustavy! To je nové. Řada článků zabývající se touto problematikou pracuje pouze s nejmenšími Ritzovými čísly. Dále Iveta uvažuje situaci, kdy Jordanův kanonický tvar matice není diagonální matice a v prezentovaných výsledcích popisuje chování Arnoldiho procesu.

Ve druhé části práce Iveta provedla alternativní důkaz jedné z hlavních vět popisujících chování "core" problému, který je založen na vztahu mezi Golubovou-Kahanovou bidiagonalizací, Lanczosovou třídiagonalizací a vlastnostmi Jacobiho matice. Tento výsledek byl již přijat k publikaci v LAA. Iveta pracovala od poloviny minulého roku v Ústavu informatiky na částečný úvazek pod vedením Prof. Zdeňka Strakoše, kde právě vznikly poslední dvě kapitoly práce. Na tomto místě bych rád poděkoval Prof. Strakošovi a kolektivitu pracovníků kolem, kteří Ivetě k práci vytvořili přátelskou a pracovní atmosféru.

## Hodnocení.

Po absolvování gymnázia v Jablonci nad Nisou nastoupila Iveta v roce 1998 ke studiu na Matematicko-fyzikální fakultě, kterou velice úspěšně zakončila v roce 2003. Slovem velice chci zdůraznit, že se v posledním ročníku přihlásila do soutěže SVOČ s prací, která obsahovala myšlenky z diplomky a v česko-slovenském kole v Banské Bystrici obsadila první místo. Hned po ukončení studia nastoupila na doktorandské studium. Od začátku pracovala s mimořádným zájmem zejména o nové výsledky dosažené v krylovovských metodách. Vystoupila s úspěchem na doktorandském týdnu s referátem (citace: viz příložený životopis) který je publikovaný ve sborníku z doktorandského týdne (2004). Vystoupila jednou v Matematickém ústavu AV ČR a v Ústavu informatiky AV ČR a dvakrát na katedrálním semináři. Zúčastnila se Zimních škol SNA'5 a SNA'6 v Ostravě a Moninci, kolokvia v Heidelbergu, workshopu Dresden-Praha, konference GAMM v Berlíně a konference ALA v Düsseldorfu. Na všech těchto akcích vystoupila s referátem, jehož text je otištěn ve sbornících z těchto konferencí. Dále se zúčastnila 3. mezinárodní letní školy v Bari v Itálii a 4. mezinárodního workshopu v Leuven v Belgii s prezentací posteru.

Na konferencích, letních školách a workshopech vystoupila desetkrát. List presentací je v příloženém životopisu, ve kterém je i seznam publikací (celkem sedm). Připomeňme, že referáty a sdělení byly sestaveny z částí dizertační práce. V současné době participuje na třech grantech.


Orientuje se výborně na počítači, z uživatelského software ovládá Maple, Matlab a GNU-plot, z programovacích jazyků Pascal, Prolog, Fortran (bezvadně), částečně C a C++.

Iveta předložila k obhajobě práci vynikající úrovně. Rozebrala konstrukci adaptivního předpokmínění, navrhla algoritmy, které skutečně urychlují konvergenci a v mnoha případech odstraňují stagnaci. V druhé části práce sestavila alternativní důkaz k výše citované větě a udělala přehled z literatury pro lineární aproximační problém, což svědčí o jejím přehledu v této oblasti. Bibliografie se sestává z 95-ti publikací.

Jak již bylo řečeno v úvodu tohoto posudku, práce obsahuje řadu nových a původních výsledků, které byly kladně přijaty na přednáškách a konferencích a které byly nebo budou publikovány. Práce je napsána pečlivě a barevné grafy jsou zpracovány s velkou rutinou. Z práce vyzařuje skutečně kus poctivé práce. Iveta je talentovaný a pracovitý matematik, který může dosáhnout ke světové špičce. K tomu ji přeji hodně úspěchů. Závěrem bych ještě rád poděkoval všem pracovníkům katedry numerické matematiky, tehdy pod vedením Prof. Feistauera, kteří Ivetě na katedře vytvořili hezké prostředí pro tvůrčí práci a všestranně ji vycházeli vstříc.

Na základě výše uvedeného hodnocení s potěšením doporučuji přijmout předloženou dizertační práci k obhajobě. Dále doporučuji, aby po úspěšné obhajobě byl RNDr. Ivetě Hnětynkové udělen titul PhD.

V Praze dne 19. července 2006.



SOKOLOVSKA 83  
186 75 Praha 8

Příloha: Curriculum vitae