UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Elementární metody sčítání řad

Autor: Martin Kakeš

Praha 2013

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením Mgr. Derka Pilouse. V práci jsou použity informační zdroje uvedené na konci práce v seznamu literatury.

V Praze dne 2. května 2013 ....

Martin Kakeš

Děkuji vedoucímu mé bakalářské práce, Mgr. Derkovi Pilousovi, za projevenou ochotu, mnoho cenných rad a připomínek, které mi pomohly realizovat tuto práci.

Abstrakt

Tématem této práce jsou elementární metody sčítání řad, to znamená metody, které nevyžadují znalosti z integrálního a diferenciálního počtu.

V kapitole „Základy teorie řad“ je shrnuta a částečně přepracována elementární teorie nekonečných řad. Jsou zde uvedeny základní vlastnosti řad a představena základní kritéria konvergence řad. V textu je umístěno několik příkladů, které demonstrují některé nové pojmy.

Druhá část práce (kapitola Sčítání řad) je zaměřena hlavně na elementární metody sčítání řad, zvláště zobecňuje pojem teleskopické řady a vyslovuje větu o jejím součtu. Sčítání řad je zde ukázáno řadou příkladů.

Klíčová slova: nekonečné řady, sčítání řad, kritéria konvergence.

Abstract

The main topic of this bachelor thesis are elementary methods of summation of series, it means methods, which do not require the knowledge of calculus.

In the chapter called „Základy teorie řad“ is sum up and partially rework elementary theory of infinite series. Basic properities of series and convergence tests are introduced here. Some examples, which demonstrate some of new terms, are placed in the text.

The second part of this thesis (chapter called „Sčítání řad“) is primarily focused on elementary methods of summation of series, it especially generalize definition of telescoping series and it contains theorem about sum of telescoping series. Summation of series is demonstrated here by the sequence of examples.

Keywords: infinite series, summation of series, convergence tests.

Obsah

Seznam použitého značení

Značení použité v této práci je shodné se standardním středoškolským značením, přesto některé věci dále upřesňuji.

$(a_k)_{k=1}^{\infty}$	posloupnost s k-tým členem a_k
$\mathbb{R}$	reálná čísla
$\mathbb{Z}$	celá čísla
$\mathbb{N}$	přirozená čísla (celá kladná)
$P(x)$	polynom s proměnnou x

Úvod

Téma této práce jsem si vybral z toho důvodu, že tradiční výuka řad je zaměřena spíše na vyšetřování chování řad než na jejich sčítání. Práce s řadami je ve většině případů heuristická a každá řada vyžaduje trochu jiný přístup, což je druhý důvod, proč jsem se rozhodl zabývat se právě tímto tématem.

V této práci se chci zaměřit především na elementární metody sčítání řad, to znamená metody, které nevyžadují znalosti z diferenciálního a integrálního počtu.

Všechny výsledky by měly být odvozeny elementárně, a proto by tato práce měla být přístupná široké skupině čtenářů. Čtenář, který se rozhodne číst tuto práci, by měl ovládat teorii posloupností a limit posloupností, alespoň na základní úrovni. Mezi řadami, které lze sčítat takto elementárně, bych se chtěl podrobněji zabývat teleskopickými řadami, protože při studiu literatury jsem tuto problematiku nenašel nikde důkladně rozvedenou.

Další věc, o kterou se chci pokusit v této práci, je vyložení teorie o konvergenci řad a kritériích konvergence v jiném pořadí, než je obvyklé, protože se mi nezdá vhodné, že ač se pracuje s absolutně konvergentními řadami, nazývají se pouze konvergentní a pojem absolutní konvergence je studentům představem až ve chvíli, kdy se setkají s neabsolutně konvergentními řadami.

Tématu řad se věnuje řada prací i prací bakalářských (z novějších např. Neumannová Radka: Sčítání nekonečných řad, Přf MU), já bych se zaměřením této práce chtěl odlišit od ostatních prací a poskytnout tím čtenáři jiný pohled na řady.

Kapitola 1

Základy teorie řad

1.1 Definice řady

Na začátku se budu zabývat definicí řady a korektností definice tohoto pojmu. Původně jsem se otázkou definice řady nechtěl zabývat tak podrobně, ale při studiu literatury jsem zjistil, že různí autoři definují řady různě a navíc dle mého názoru všechny definice, které jsem viděl, vykazují určitou míru nekorektnosti, na kterou bych chtěl v této kapitole poukázat a které jsem se pokusil vyhnout definicí zde uvedenou. Přes všechny tyto drobné rozdíly nedochází k žádným nedorozuměním, protože pojem řada je v matematice chápán všemi autory podobně a dostatečně přesně.

Definice 1. Nechť S je množina všech posloupností reálných čísel (dále reálných posloupností) a nechť $(a_k)_{k=1}^{\infty} \in S$. Pro posloupnost $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ definujeme $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,\ n \in \mathbb{N}$. Řadou budeme chápat zobrazení

$$\sum : (a_k)_{k=1}^{\infty} \to \lim_{n \to +\infty} s_n.$$

Místo tohoto značení budeme používat značení běžné u funkcí a operátorů a budeme pouze psát $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Čísla s_n nazýváme částečné součty řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a o a_k hovoříme jako o k-tém členu řady.

Poznámka 1. V souladu s konečnými součty budeme 1 a ∞ nazývat mezemi sčítání, ač ∞ není skutečná mez, protože symbol ∞ nám říká, že budeme sčítat nekonečně mnoho čísel, to znamená, že žádná horní mez ve sčítání není.

V definici 1 pracuji s posloupnostmi, které jsou indexovány od jedné. Není problém, a já to budu občas používat, pracovat s posloupnostmi, jejichž číslování začíná od nějakého $k_0 \neq 1$. Předpis příslušné řady poté vypadá takto: $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$. Formální rozšíření definice není třeba, protože stejně jako u posloupností i u řad můžeme přepočítat indexy (přeindexovat řadu) tak, aby sčítání začínalo od jedné.

Poznámka 2. Jiná, dle mého názoru méně korektní, ale názornější definice řady může být následující definice převzatá z [4, str. 129]:

> Nekonečnou řadou nazýváme symbol
>
> $$a_1 + a_2 + a_3 + \dots \tag{1.1}$$
>
> místo něhož též zavádíme symbol $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Reálná čísla $a_1, a_2, \dots$ nazýváme „členy řady“, a to člen a_k „k-tým členem“. Řada (1.1) je dána, je-li dána posloupnost jejích členů
>
> $$a_1, a_2, a_3, ... \tag{1.2}$$
>
> Je-li dána řada (1.1), dovedeme sestrojit součet jejích prvních dvou, tří, čtyř, ... členů, t. j. dovedeme sestrojit posloupnost $s_1, s_2, s_3, ...$ definovanou takto:
>
> $$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, s_3 = a_1 + a_2 + a_3 \dots; \tag{1.3}$$
>
> číslo $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ se nazývá n-tým částečným součtem řady (1.1).

V této definici řady vidím dva problémy. Prvním problémem je používání tří teček v (1.1), (1.2) a (1.3), protože symbol tří teček není matematicky nijak definován. Tři tečky nachází využití ve chvíli, kdy je z kontextu zřejmé, co nahrazují (jaká informace je za nimi skryta), ale nezdá se mi šťastné používat je při definování nového pojmu bez nějakého předchozího kontextu (tím myslím v této práci). Já zde budu občas tři tečky také využívat a to ve chvílích, kdy nebude moci dojít k omylu.

Druhá problematická věc v této definici je nazývání nekonečné řady jednou symbolem a jednou číslem. Tato definice dále pokračuje definicí 2, která je pokračováním i pro definici 1.

Definice 2 (Konvergentní, divergentní a oscilující řada)**.** Konverguje-li posloupnost částečných součtů, t.j. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s \in \mathbb{R}$ říkáme, že příslušná řada konverguje (nebo že je konvergentní) a číslo s se nazývá součtem této řady. Pokud řada nekonverguje, budeme říkat, že diverguje (nebo že je divergentní). V případě divergence rozlišujeme dva případy. Je-li $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \pm\infty$, pak říkáme, že řada diverguje k $+\infty$ (resp. $-\infty$) a její součet je $+\infty$ (resp. $-\infty$). Druhým případem je situace, kdy $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nemá smysl (protože $\lim_{n\to+\infty} s_n$ neexistuje) a pak ve shodě s terminologií posloupností říkáme, že řada je divergentní oscilující (krátce budeme říkat oscilující) [4, str. 129].

Poznámka 3. V předchozích definicích a i dále v textu je možno si všimnnout, že v teorii řad se používá v podstatě stejná terminologie jako v teorii posloupností. Souvislost mezi řadami a posloupnostmi je dána již tím, že řadu jsme definovali jako limitu posloupnosti částečných součtů.

Úmluva. Místo toho, abychom při výpočtech hovořili o tom, že budeme zjišťovat, zda je řada konvergentní, divergentní nebo oscilující, budeme používat pro tyto tři stavy souhrný pojem chování řady. Je to analogické jiným pojmům v matematice, například pojem extrém zahrnuje maximum i minimum nebo parita označuje sudost a lichost.

V případě, že řekneme, že nějaká operace nemá vliv na chování řady nebo že řada je vůči této operaci invariantní, budeme tím myslet, že konvergovala-li (divergovala-li, oscilovala-li) řada před danou operací, bude konvergovat (divergovat, oscilovat) i po ní.

V následujím textu se budu zabývat převážně řadami, které neoscilují (tedy těmi, které mají součet). Na oscilující řady a na to, jak jim přiřadit nějaký součet, se podívám v kapitole 2.4 (Sčítání divergentních řad).

S ohledem na definici 2 budeme tedy chování řad rozlišovat následovně:

$$\text{Řada } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ se nazývá } \begin{cases} \text{konvergentní, pokud} & \sum_{k=1}^{\infty} a_k = s \in \mathbb{R}, \\ \text{divergentní, pokud} & \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \pm\infty, \\ \text{oscilující, pokud} & \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ neexistuje.} \end{cases}$$

V definici 2 jsme chování řady definovali pomocí existence součtu (řada je konvergentní, pokud $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathbb{R}$), ale jak uvidíme v kapitole 1.3 (Kritéria konvergence), chování řady lze vyšetřit i bez nalezení jejího součtu. Obecně lze říci, že zjištění součtu řady je složitější úkol než vyšetření konvergence, už z toho důvodu, že ze znalosti součtu plyne znalost konvergence, ale ne naopak (u konvergentních řad). Na druhou stranu se ukazuje, že při řešení různých problémů v matematice, ve kterých vystupují řady, je pro vyřešení takového problému často dostačující „pouhé“ vyšetření chování řady.

Příklad 1. Vyšetřeme chování a najděme součet geometrické řady. Geometrická řada je řada geometrické posloupnosti, neboli řada ve tvaru

$$\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^k + \cdots ,$$

kde $a, q \in \mathbb{R}$. Ve shodě s terminologií geometrických posloupností nazýváme číslo q kvocientem řady, mezi členy řady a kvocientem platí vztah: $a_{k+1} = q \cdot a_k$ pro každé přirozené k a navíc $a_1 = a$. Známe-li kvocient řady a k-tý člen řady, můžeme snadno dopočítat libovolný další člen řady a naopak, známe-li dva po sobě jdoucí členy geometrické řady, z nichž alespoň jeden je nenulový, můžeme zjistit kvocient řady. Speciálním případem geometrické řady je tzv. nulová řada (řada, jejíž všechny členy jsou nulové, její součet je tudíž nula a řada je konvergentní). Tento případ nastává tehdy a jen tehdy, je-li $a = 0$, potom může být kvocient libovolné reálné číslo a není ho tedy možno určit jednoznačně. Pokud bude potřeba přiřadit nulové řadě kvocient, budeme jí přiřazovat kvocient $q = 0$, ale pokud nebude řečeno jinak, v celém dalším textu budeme uvažovat pouze geometrické řady, které mají $a \neq 0$.

Nyní již víme, co je geometrické řada a zbývá tedy zjistit, jak je to s její konvergencí a součtem. Jak jsem psal výše, zjištění součtu řady je obecně obtížnější úkol, ale v tomto příkladě nejdříve zjistíme součet řady v závislosti na kvocientu q a podle toho uvidíme, pro jaké kvocienty geometrická řada konverguje, pro jaké diverguje a pro jaké součet neexistuje. Zatím nebyla představena žádná metoda sčítání řad, tudíž jediná možnost je sečíst geometrickou řadu podle definice. To znamená najít obecné vyjádření n-tého částečného součtu. Zkusme se podívat na prvních několik členů posloupnosti částečných součtů a nalezněme vyjádření s_n. V tomto případě vypadá několik prvních členů posloupnosti následovně:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= a \\
s_2 &= a + aq \\
s_3 &= a + aq + aq^2 \\
&\vdots \\
s_n &= s_{n-1} + aq^{n-1} = a + aq + \ldots + aq^{n-1} = a(1 + q + \ldots + q^{n-1})
\end{aligned}
$$

Výraz $1 + q + \ldots + q^{n-1}$ můžeme získat z výrazu $1 - q^n$ použitím vzorce $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n)$. Pro $q \neq 1$ dostáváme:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

n-tý člen posloupnosti částečných součtů tedy můžeme pro $q \neq 1$ vyjádřit následovně:

$$s_n = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Abychom určili součet geometrické řady stačí pouze vyšetřit limitu posloupnosti částečných součtů řady v závislosti na q[§]:

$$\lim_{n\to+\infty} a\frac{1-q^n}{1-q} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a}{1-q} - q^n\frac{a}{1-q}\right) = \begin{cases} \frac{a}{1-q} & \text{pro } |q| < 1, \\ \operatorname{sgn}(a)\cdot\infty & \text{pro } q > 1, \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1. \end{cases}$$

[§]V případě, že limita neexistuje, nemá rovnost limit na levé straně smysl, pokud ji interpretujeme ve striktním smyslu, tedy že rovnost může platit pouze v případě, že obě strany rovnosti jsou smysluplné. Pro výpočet limit je však z praktických důvodů výhodnější chápat rovnost v rozšířeném smyslu, tedy jako platnou i v případě, kdy ani jedna strana smysl nemá. Formálně jde o doplnění oboru platnosti relace rovná se o speciální objekt nedefinováno.

Zbývá případ, kdy $q = 1$. V takovém případě se jedná o řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a$ a snadno si rozmyslíme, že pro její součet platí: $\sum_{k=1}^{\infty} a = \operatorname{sgn}(a) \cdot \infty$.

Geometrická řada je tedy konvergentní tehdy a jen tehdy, je-li $|q| < 1$, divergentní k $+\infty$ (resp. $-\infty$), je-li $q \geq 1$, a oscilující pro $q \leq -1$.

Geometrická řada má díky snadné sčítatelnosti a určení chování privilegovanou pozici mezi ostatními řadami. Srovnáním s ní se určuje konvergence dalších řad (viz podílové a odmocninové kritérium - věty 9 a 10). Shrneme tedy předchozí výsledky do věty, podle které budeme nadále chování a součet geometrických určovat. ■

Věta 1. *Nechť aq^{k-1} je geometrická posloupnost a $a \neq 0$. Potom platí:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = \begin{cases} \frac{a}{1-q} \text{ \textit{(řada konverguje)}} & \text{\textit{pro} } |q| < 1, \\ \operatorname{sgn}(a) \cdot \infty \text{ \textit{(řada diverguje)}} & \text{\textit{pro} } q \geq 1, \\ \text{\textit{neexistuje (řada osciluje)}} & \text{\textit{pro} } q \leq -1. \end{cases}$$

Poznámka 4. V předchozím příkladu (příklad 1) jsme při určování n-tého částečného součtu dospěli k následujícímu výsledku: $\sum_{k=1}^{n} aq^{k-1} = a\frac{1-q^n}{1-q}$ pro $q \neq 1$. Toto je vzorec pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti, známý ze střední školy. Mohli jsme tento vzorec použít rovnou a výpočet tím zkrátit, ale mně se zdálo didakticky vhodnější připomenout odvození tohoto vzorce a zároveň tím ukázat, čím je způsobena jeho nepoužitelnost pro případ, kdy $q = 1$.

Věta 2 (Bolzano-Cauchyho podmínka)**.** *Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je konvergentní právě tehdy, když platí tzv. Bolzano-Cauchyho podmínka ([1, str. 73]):*

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \ \forall m \in \mathbb{N}, m > n : \left| \sum_{j=n+1}^{m} a_j \right| < \epsilon.$$

Poznámka 5. S Bolzano-Cauchyho podmínkou (dále B-C podmínka) se čtenář setkal již v teorii posloupností, kde funguje jako nutná a postačující podmínka pro konvergenci posloupnosti (tedy pro to, aby měla posloupnost vlastní limitu). Podíváme-li se ještě jednou na výraz $\sum_{j=n+1}^{m} a_j$, můžeme si všimnout, že platí $\sum_{j=n+1}^{m} a_j = s_m - s_n$, což je rozdíl dvou členů posloupnosti částečných součtů, a vidíme, že B-C podmínka pro řady je ve skutečnosti B-C podmínkou pro posloupnosti, aplikovanou na posloupnost částečných součtů. Myšlenka, kterou jsem zde ukázal, je podstatou důkazu B-C podmínky pro řady.

Stejně jako u posloupností i zde je B-C podmínka nutnou a postačující podmínkou pro konvergenci řad. To znamená, je-li řada konvergentní, potom splňuje B-C podmínku (někdy zkráceně říkáme, že řada je cauchyovská), a z druhé strany, splňuje-li řada B-C podmínku, je konvergentní. B-C podmínka se často využívá k důkazu divergence řady, protože nesplňuje-li řada B-C podmínku, nemůže být potom konvergentní.

Použití B-C podmínky ukážu na důkazu divergence harmonické řady. Harmonická řada je řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \cdots \ .$$

Abych ukázal, že harmonická řada nesplňuje B-C podmínku, musím ukázat negaci, to znamená následující tvrzení:

$$\exists \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0 \ \forall n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \ \forall m \in \mathbb{N}, m > n : \left| \sum_{j=n+1}^{m} a_j \right| \geq \epsilon.$$

Částečné součty řady splňují následující:

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j} > \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

ϵ, které jsme hledali, existuje (za ϵ stačí volit libovolné číslo z intevalu $(0, \frac{1}{2}\rangle$), řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ tedy nesplňuje B-C podmínku a je divergentní (k $+\infty$).

Další možností, jak dokázat divergenci harmonické řady, je odhadnout zespodu členy posloupnosti částečných součtů a tím vlastně dokázat divergenci harmonické řady přímo z definice. Tento důkaz je více intuitivní a více nám ukazuje, jak se harmonická řada chová, na druhou stranu je méně korektní, právě proto, že některé věci nechává na intuitivní úrovni.

Nejdříve učiňme pozorování ohledně chování částečných součtů řady. Máme-li řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, takovou, že $\forall k : a_k \geq 0$, potom je posloupnost částečných součtů neklesající ($s_1 = a_1$, $s_2 = s_1 + a_2 \geq s_1$, $\ldots$, $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$). Z teorie posloupností víme, že je-li posloupnost monotónní, potom má limitu (vlastní nebo nevlastní), a dále víme, že každá vybraná podposloupnost z posloupnosti má stejnou limitu. Limita monotónní posloupnosti je tedy rovna limitě libovolné posloupnosti z ní vybrané.

Aplikujme nyní tyto poznatky na harmonickou řadu. Její členy jsou nezáporné, proto je její posloupnost částečných součtů s_n neklesající. Odhaneme ze spodu některé členy posloupnosti částečných součtů. První členy harmonické řady vypadají následovně:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}}_{>\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}} + \ldots >$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$$

Odhad pro posloupnost částečných součtů bude vypadat následovně:

$$s_1 = 1, \; s_2 = 1 + \frac{1}{2}, \; s_4 > 1 + \frac{2}{2}, \; s_8 > 1 + \frac{3}{2}.$$

Snadno si rozmyslíme, že by měl platit následující odhad: $s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$. Z toho už vidíme, že posloupnost $(s_{2^n})_{n=1}^{+\infty}$ vybraná z posloupnosti $(s_n)_{n=1}^{+\infty}$ má limitu, která je rovna $+\infty$ a díky tomu, že posloupnost $(s_n)_{n=1}^{+\infty}$ má limitu (protože je monotónní), tak je $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} s_{2^n} = +\infty$. Tímto jsme dokázali divergenci harmonické řady pomocí definice součtu.

1.2 Vlastnosti řad

Intuitivně můžeme řadu chápat jako součet nekonečně mnoha čísel. Mohlo by nás tedy zajímat, jestli o takovém součtu platí stejná tvrzení jako o součtu konečně mnoha reálných čísel. Jak se ukáže v následujících tvrzeních, při sčítání nekonečně mnoha čísel musíme být opatrní a obecně nemůžeme dělat to, co můžeme dělat s konečně mnoha čísly (přerovnání, přeuzávorkování).

Definice 3. Řekneme, že vlastnost P platí pro skoro všechna $k \in \mathbb{N}$, pokud $\exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}, k \geq k_0 : P(k)$.

Řekneme-li tedy, že nějaká vlastnost platí pro skoro všechna k, znamená to, že tato vlastnost neplatí nejvýše pro konečně mnoho hodnot k, nebo-li, že od určitého k_0 dále je vlastnost splněna pro každé k. Například můžeme říct, že posloupnost $(a_k)_{k=1}^{\infty}$, jejíž k-tý člen je dán vztahem $a_k = k - 10$, je pro skoro všechna k kladná. V tomto případě můžeme k_0 přímo určit, protože snadno spočteme, že pro $k \geq k_0 = 11$ už jsou všechny členy posloupnosti kladné, ale obecně toto nemusí být možné, ani to není potřebné. Nám stačí vědět, že takové k existuje. Například posloupnost, jejíž k-tý člen je určen předpisem: $a_k = k^6 + 4k^5 - k^3 - 20$, je určitě pro skoro všechna k kladná, protože $\lim_{k \to +\infty} k^6 + 4k^5 - k^3 - 20 = +\infty$.

Výhodnost této definice uvidíme již v následující větě, protože chování řady nezávisí na konečně mnoha členech dané řady. Při vyšetřování chování řad nám tedy bude stačit, bude-li nějaká vlastnost řady (např. nezápornost členů) platit pouze pro skoro všechny členy řady.

Věta 3. *Nechť k je přirozené číslo. Potom řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ buďto obě konvergují nebo obě divergují k $+\infty$ nebo obě divergují k $-\infty$ nebo obě oscilují. Jestliže mají součet, tak platí následující rovnost*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k.$$

[4, str. 133]

Pokud by $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ v předchozí větě oscilovala, neměla by předchozí rovnost smysl, protože by ani jedna strana rovnosti neměla smysl (měla by ovšem smysl v rozšířeném významu rovnosti, tak jak jsme uvedli v poznámce pod čarou na straně 13).

Poznámka 6. Z tvrzení věty 3 vidíme, že přidáním nebo odebráním konečného počtu členů řady nemůžeme ovlivnit chování řady. Dvojitým aplikováním této věty na řadu (nejdříve odebereme libovolný počet počátečních členů a v druhém kroku přidáme libovolný počet libovolných členů), lze dospět k tomu, že ani výměna konečného počtu členů řady za jiné nemá vliv na její chování. Tuto poznámku lze shrnout tak, že změna konečného počtu členů řady nemá vliv na jejích chování, neboli chování řady je invariantní vůči změně konečného počtu členů řady. Pouze u konvergentních řad může mít změna členů řady vliv na součet.

Další věc, kterou můžeme u součtů provádět, je uzávorkování jejich členů. O tom, za jakých podmínek je to přípustné u řad, hovoří další věta.

Věta 4. *Nechť* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s \in \mathbb{R}^*$. *Nechť* $(l_i)_{i=1}^{\infty}$ *je rostoucí posloupnost přirozených čísel taková, že* $l_1 = 1$*; potom je také*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=l_k}^{l_{k+1}-1} a_j \right) = s.$$

[4, str. 131]

Poznámka 7. Znění předchozí věty (věta 4) může na první pohled vypadat složitě, ale ve skutečnosti je jeho znění jednoduché, protože nám říká, že máme-li neoscilující řadu, můžeme její členy libovolně uzávorkovat a toto uzávorkování nebude mít vliv na součet. Tvrzení věty 4 lze pomocí symboliky tří teček přepsat následovně:

$$(a_1+a_2+\cdots+a_{l_2-1})+(a_{l_2}+a_{l_2+1}+\cdots+a_{l_3-1})+(a_{l_3}+a_{l_3+1}+\cdots+a_{l_4-1})+\cdots = s.$$

Příklad 2. V předchozí větě (věta 4) se hovoří o tom, že je-li řada konvergentní nebo divergentní (ne oscilující), můžeme její členy libovolně uzávorkovat. V předpokladech této věty jsou vyloučeny oscilující řady, proč tomu tak je, se pokusím ukázat v následujícím příkladu. Vezměme si jednoduchou řadu $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$, která je evidentně oscilující a věta 4 se na ní tedy nevztahuje. Podíváme-li se na prvních několik členů této řady, tak to vypadá následovně: $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k = -1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$. Zkusíme tedy její členy uzávorkovat více způsoby (nebudeme je přerovnávat, pouze na vhodná místa dopíšeme závorky) a uvidíme, co se stane. Závorky můžeme použít třeba takto: $(-1 +$

$1) + (-1+1) + (-1+1) + \ldots = 0+0+0+\ldots = 0$, ale i takto: $-1+(1-1)+(1-1)+\ldots = -1+0+0+\ldots = -1$. Vidíme, dvěma různými uzávorkováními vznikly dva různé výsledky (toto jsou jediné dva výsledky, které lze získat pomocí uzávorkování). Vzhledem k tomu, jak jsme definovali řady, nejsme v tuto chvíli schopni přiřadit této řadě žádný součet. Jak uvidíme v kapitole 2.4, jsou sčítací metody, které i této řadě umí přiřadit součet (konkrétně $\frac{1}{2}$). $\blacksquare$

Věta 5 (Linearita řad)**.** *Nechť* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *jsou dvě řady a* $c \in \mathbb{R}$. *Potom platí:*

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, *pokud má pravá strana smysl,*

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$, *pokud má pravá strana smysl.*

[4, str. 132]

Poznámka 8. Podívejme se podrobněji na předchozí větu a rozeberme případy, kdy má pravá strana smysl.

(i) Součin na pravé straně je definován vždy, je-li $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentní řada, protože c je reálné číslo a tudíž je na pravé straně součin dvou reálných čísel. Pokud je $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergentní řada, má pravá strana smysl jen tehdy, je-li c nenulové, protože výraz „$0 \cdot \infty$“ je nedefinovaný výraz. Osciluje-li řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, nemá pravá strana vůbec smysl, protože máme součin čísla s něčím nedefinovaným.

(ii) Jsou-li obě řady na pravé straně konvergentní, má pravá strana smysl vždy. Je-li jedna z řad na pravé straně konvergentní a druhá divergentní k $+\infty$ (resp. $-\infty$), má pravá strana smysl (a hodnotu $+\infty$ nebo $-\infty$). Jsou-li obě řady na pravé straně divergentní, mohou nastat dva případy: obě divergují ke stejnému nekonečnu, potom má pravá strana smysl, nebo každá diverguje k jinému nekonečnu a potom je vpravo nedefinovaný výraz „$\infty - \infty$“ a pravá strana smysl nemá. Je-li alespoň jedna z řad vpravo oscilující, nemá pravá strana smysl nikdy.

Chování řady je tedy invariantní vůči přičítání a odčítání konvergentních řad. To znamená, že máme-li nějakou řadu a přičteme k ní nebo od ní odečteme nějakou konvergentní řadu, neovlivníme tím chování původní řady.

Podívejme se ještě na jeden důležitý důsledek věty 5, a to vytýkání $c \neq 0$. První část tvrzení věty 5 nám říká, že můžeme vytknout konečné nenulové číslo řady bez ovlivnění chování. Pro praktické užití bychom spíše potřebovali opačný závěr, tedy z toho, že řada konverguje (diverguje, osciluje) plyne, že konverguje (diverguje, osciluje) i řada po vytknutí. Někdy totiž potřebujeme vytknout z řady nějaké číslo, abychom splnili podmínky kritérií. V našem případě půjde často o vytýkání -1, tím změníme znaménka všem členům řady a na místo toho, abychom pracovali s řadou, jejíž členy jsou nekladné, budeme pracovat s řadou, jejíž členy jsou nezáporné. Potom vyšetříme chování řady po vytknutí a protože budeme vědět, že vytknutí -1 neovlivní chování, budeme schopni zjistit chování řady před vytknutím.

První část věty 5 nám říká, že pokud má pravá strana smysl, pak se chování zachovává. V případě $c \neq 0$ to je vždy, pokud řada neosciluje. Nyní tedy víme, že konverguje-li (resp. diverguje-li) řada před vytknutím, pak konverguje (resp. diverguje) i po vytknutí. Z toho, že každá řada je buď konvergentní, divergentní nebo oscilující, vyplývá, že máme-li oscilující řadu a vytkneme z ní $c \neq 0$, získáme opět oscilující řadu (pokud by tomu tak nebylo, dostali bychom se do sporu s předchozími úvahami). A toto už je vše, co jsme potřebovali. Z právě provedených úvah vyplývá, že vytknutím nenulového c neovlivníme chování řady.

1.3 Kritéria konvergence

V této části se budu zabývat kritérii konvergence. Kritéria konvergence jsou tvrzení, která nám pomáhají při vyšetřování chování řady. Jak bude vidět dále, jsme schopni vyšetřit chování řady bez znalosti hodnoty součtu řady, to znamená, že můžeme říct, že řada koverguje (resp. diverguje, osciluje), aniž bychom jí sečetli. Nejdříve se zaměřím na pojem absolutní konvergence a na kritéria pro absolutní konvergenci a poté na pojem neabsolutní konvergence. Zároveň se podívám na rozdíly mezi absolutně a neabsolutně konvergentními řadami.

Věta 6 (Nutná podmínka konvergence)**.** *Nechť* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *je konvergentní řada. Potom* $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$. *[4, str. 134]*

Poznámka 9. U této věty jsem se rozhodl, že zde ukážu i její důkaz, protože je poměrně krátký a navíc se v něm využívá faktu, který budeme později potřebovat.

Víme, že $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, což podle definice řady (definice 1) znamená, že $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$, a chceme dokázat, že za daných předpokladů $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$. Podívejme se ještě jednou na to, jak vzniká posloupnost částečných součtů řady, n-tý částečný součet vzniká takto: $s_n = s_{n-1} + a_n$, což můžeme ještě upravit a máme: $a_n = s_n - s_{n-1}$. Toto je vztah, který, jak uvidíme později, je důležitý při určování součtů řad. Teď už víme vše, co potřebujeme, a můžeme dokončit důkaz věty 6:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} s_n - s_{n-1} \overset{(1)}{=} \lim_{n\to+\infty} s_n - \lim_{n\to+\infty} s_{n-1} = s - s = 0,$$

což je přesně to, co je potřeba dokázat. Krok (1) bylo možné provést právě díky tomu, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je konvergentní, tudíž $\lim s_n \in \mathbb{R}$.

Nyní se ještě podívejme, k čemu je tato věta užitečná. Mějme řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Pokud je tato řada konvergentní, tak podle předchozí věty (věta 6) víme, že $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$. Nyní se nabízí otázka, co můžeme říct o konvergenci řady, víme-li, že $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$. Odpověď je jednoduchá, nemůžeme říct nic, protože věta 6 je ve tvaru implikace a je-li splněn závěr implikace nemůžeme nic tvrdit o jejích předpokladech[5]. Skutečně, je-li $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$, může příslušná řada konvergovat (např. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$), ale nemusí (např. harmonická řada). Ale pokud zjistíme, že $\lim_{k\to+\infty} a_k \neq 0$ (tedy limita buď neexistuje nebo existuje a je nenulová) můžeme říct, že příslušná řada nekonverguje.

[5]Ve skutečnosti můžeme říci, že pokud $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$, má řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ už jistě součet a není tedy oscilující. Nelze však nic říci o její konvergenci, což je cílem kritérií.

Protože, pokud by řada konvergovala a zároveň by $\lim_{k\to+\infty} a_k \neq 0$ nebo by neexistovala, tak bychom se dostali do sporu s větou 6. Tvrzení, že pokud $\lim_{k\to+\infty} a_k \neq 0$, potom $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje, se někdy označuje jako postačující podmínka divergence.

Příklad 3. Podívejme se, jak to vypadá s nutnou podmínkou konvergence u geometrické řady, kterou jsme zkoumali v příkladu 1. Spočítejme tedy limitu $\lim_{k\to+\infty} aq^{k-1}$ v závislosti na a a q a předpokládejme, že $a \neq 0$ (pokud $a = 0$, tak $\lim_{k\to+\infty} aq^{k-1} = 0$). Limita bude vypadat následovně:

$$\lim_{k\to+\infty} aq^{k-1} = \begin{cases} \operatorname{sgn}(a)\cdot\infty & \text{pro } q > 1 \\ 0 & \text{pro } |q| < 1 \\ a & \text{pro } q = 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1. \end{cases}$$

Z výsledku této limity je vidět, že chování geometrické řady přesně koresponduje s tím, kdy je splněna nutná podmínka. To znamená, že pro konvergenci geometrické řady je podmínka $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$ nejen nutná, ale i postačující.

■

Definice 4 (Absolutní a neabsolutní konvergence)**.** Řekneme, že $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně, pokud $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje. Pokud $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, ale $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ diverguje, tak říkáme, že $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje neabsolutně. [4, str. 146]

Poznámka 10. V tomto místě bych chtěl upozornit na dva pojmy, které se někomu mohou zdát podobné, přesto každý znamená něco jiného. Řekneme-li, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nekonverguje absolutně, tak to znamená, že $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ nekonverguje, ale o chování samotné řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ neříkáme nic (může divergovat i konvergovat). Pokud ale řekneme, že $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje neabsolutně, tak to znamená přesně to, co říká definice 4.

Věta 7. *Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje, potom i $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje [2, str. 290].*

Poznámka 11. Přechozí věta nám říká, že pojem absolutní konvergence je silnější pojem než pojem neabsolutní konvergence. Tohoto faktu lze využít při vyšetřování konvergence řad. Někdy je totiž jednodušší rovnou vyšetřit absolutní konvergenci a tím zjistit i obyčejnou konvergenci, než se ptát na neabsolutní konvergenci a potom případně ještě zkoumat konvergenci absolutní.

Opět, jako u nutné podmínky konvergence (věta 6), je třeba dát si pozor na to, že tvrzení je ve tvaru implikace. To znamená, že zjistíme-li, že $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ diverguje, může ještě příslušná řada konvergovat neabsolutně, pokud ale $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje, tak potom i $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ musí divergovat, jinak bychom se dostali do sporu s touto větou (věta 7).

Rozlišování řad na absolutně a neabsolutně konvergentní je zvlášť důležité, rozšíříme-li pojem řady na sčítání nejen přes množinu přirozených čísel, ale i na obecné indexové množiny, které nemusí být uspořádané. V tu chvíli ztrácí pojem pojem neabsolutní konvergence smysl a hovoříme pouze o konvergenci absolutní. Důležitost uspořádání množiny pro neabsolutně konvergentní řady bude vidět ve větě 21 (věta o přerovnání).

1.3.1 Absolutní konvergence

Při výkladu teorie řad se o absolutní konvergenci obvykle nejdříve hovoří pouze jako o konvergenci a teprve ve chvíli, kdy se začne pracovat s neabsolutně konvergentními řadami, se zavede pojem absolutní konvergence. Já jsem se v tomto textu rozhodl začít pracovat rovnou s pojmy absolutní a neabsolutní konvergence.

Nejdříve se budu zabývat kritérii konvergence pro nezáporné řady (to jsou řady, jejichž všechny členy jsou nezáporné, ale jak uvidíme následující tvrzení budou platit i pro řady, jejichž skoro všechny členy jsou nezáporné). U nezáporných řad je konvergence to samé jako absolutní konvergence. Další vlastností těchto řad je, jak jsem už psal výše, že neoscilují, protože posloupnost částečných součtů je monotónní. Na závěr pojednání o absolutní konvergenci ukážu, jak použít tato kritéria pro obecné řady. Obecnou řadou budeme rozumět řadu, o níž není možné říct, že by skoro všechny její členy měly stejné znaménko. Příkladem takové řady může být řada $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$.

Věta 8 (Srovnávací kritérium). *Nechť pro řady* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *a* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *platí* $0 \leq a_k \leq b_k$ *pro skoro všechna* $k \in \mathbb{N}$. *Potom*

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konverguje* $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje*

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *diverguje* $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *diverguje.*

[1, str. 85]

Poznámka 12. O řadě $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ v předchozí větě (věta 8) hovoříme jako o majorantní řadě (majorantě) řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a o řadě $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ jako minorantní řadě (minorantě) řady $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ [1, str. 85]. Při práci se srovnávacím kritériem je třeba dát si pozor na to, že musíme najít buď konvergentní majorantu nebo divergentní minorantu.

Pro demonstraci použití srovnávacího kritéria zde uvedu dva příklady na vyšetření chování řady pomocí tohoto kritéria.

Příklad 4. Vyšetřeme chování řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Tuto řadu srovnáme s harmonickou řadou $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Protože pro všechny přirozená k platí nerovnost $k \geq \sqrt{k}$, tak pro převrácené hodnoty těchto čísel platí nerovnost $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$ a díky této nerovnosti už můžeme psát, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverguje, protože harmonická řada je její divergentní minoranta.

Druhá řada, jejíž chování budeme vyšetřovat, je řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k+3^k}$. Opět musíme najít nějakou řadu, se kterou tuto řadu srovnáme. Všimněme si, že pro každé přirozené k určitě platí nerovnost $2^k+3^k > 2^k$, tudíž pro převrácené hodnoty platí nerovnost $\frac{1}{2^k+3^k} < \frac{1}{2^k}$. Tím jsme našli pro řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k+3^k}$ majorantní řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$, což je geometrická řada s kvocientem $\frac{1}{2}$, která je, jak již víme, konvergentní, tudíž i naše řada, kterou vyšetřujeme, je konvergentní. $\blacksquare$

Věta 9 (Podílové kritérium). *Nechť pro řadu* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *platí,* $a_k > 0$ *pro skoro všechna* $k \in \mathbb{N}$ *a nechť existuje* $q \in (0, 1)$*, tak že*

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q$$

pro skoro všechna $k \in \mathbb{N}$, potom $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně. [1, str. 91]

Poznámka 13. Největší problém v pochopení této věty zpravidla činí role q, protože na první pohled není zřejmé, proč omezujeme členy řady $q < 1$ a ne přímo jedničkou samotnou. Rozdíl názorně demonstruje harmonická řada. Podíl jejích dvou po sobě následujících členů $\frac{k}{k+1} < 1$ pro každé přirozené k, ale jak již víme, tato řada diverguje. Oslabit tedy podmínku v podílovém kritériu na pouze $\frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ nelze. $q < 1$ totiž zajišťuje, že podíly po sobě následujících členů nejdou k hodnotě jedna libovolně blízko (speciálně, že jejich limitou není jedna). Tento význam často popisujeme tak, že q „odráží" podíly dvou po sobě následujících členů od jedničky.

Z předchozího příkladu samozřejmě neplyne, že pokud podíly po sobě následujících členů mají stejně jako u harmonické řady limitu jedna, pak řada diverguje. Příkladem je řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, důkaz její konvergence podávám v příkladu 9.

Pokud u podílového kritéria zjistíme, že pro skoro všechna $k \in \mathbb{N}$ platí $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$, tak řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nesplňuje nutnou podmínku konvergence (věta 6) a díky tomu můžeme konstatovat, že řada diverguje.

Příklad 5. Vyšetřeme chování řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$. Nejdříve se můžeme podívat, jak to je s nutnou podmínkou konvergence, zřejmě platí $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k!} = 0$, takže s ohledem na to, co jsem psal v poznámce 9, nemůžeme v tuto chvíli nic říct o konvergenci řady a musíme použít nějaké jiné kritérium. Zkusme použít právě představené podílové kritérium. Díky tomu, že $\forall k \in \mathbb{N} : \frac{1}{k!} > 0$, máme splněn jeden z předpokladů tvrzení. Nyní se musíme podívat, jestli najdeme nějaké q, o kterém hovoří podílové kritérium. Počítejme

$$\frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1}.$$

Můžeme například volit $q = \frac{1}{2}$, potom $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{2}$ pro každé přirozené k a tudíž $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{1}{2}$ a řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ tedy konverguje absolutně. Objeví-li se v příkladu multiplikativní faktoriály (připojené násobením), obvykle je vhodné použít podílové kritérium, protože se nám faktoriály většinou pokrátí a my můžeme vzniklý výraz snadněji vyšetřit. ∎

Věta 10 (Odmocninové kritérium). *Nechť pro řadu* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *platí,* $a_k \geq 0$ *pro skoro všechna* $k \in \mathbb{N}$ *a nechť existuje* $q \in \langle 0, 1)$ *tak, že*

$$\sqrt[k]{a_k} \leq q$$

pro skoro všechna $k \in \mathbb{N}$*, potom* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje absolutně. [1, str. 90]*

Příklad 6. Vyšetřeme chování řady $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$ pomocí odmocninového kritéria. Předpoklad nezápornosti členů řady je evidentně splněn, můžeme se tedy podívat na předpoklad $\sqrt[k]{a_k} \leq q$.

$$\sqrt[k]{\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k} = \frac{1}{\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}}.$$

Z teorie posloupností víme (např. zde [4, str. 104]), že posloupnost $\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}$ je rostoucí a navíc $\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} < \mathrm{e}$, tudíž posloupnost jejích převrácených hodnot je klesající posloupnost, takže $\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k} \leq \left(\frac{1}{1+1}\right)^{1} = \frac{1}{2}$, tudíž můžeme volit $q = \frac{1}{2}$ a potom pro každé přirozené k platí $\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k} \leq q$. Tím jsme pomocí odmocninového kritéria dokázali, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$ je konvergentní. ■

Poznámka 14. Stejně jako u podílového kritéria i zde hledáme nějaké pevné $q < 1$ a tím výraz $\sqrt[k]{a_k}$ „odrážíme“ od jedné.

A podobně jako u podílového kritéria, je-li $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$ pro skoro všechna k, tak tím není splněna nutná podmínka konvergence (věta 6) a řada tedy diverguje.

Poznámka 15. Podílové a odmocninové kritérium úzce souvisí s geometrickou řadou (obě tato kritéria vnitřně fungují na porovnávání řady s geometrickou řadou), nejlépe tuto skutečnost ukazují důkazy těchto kritérií, proto jsem se rozhodl ukázat zde důkaz podílového kritéria. Důkaz odmocninového kritéria je založen na stejném principu, proto ho zde ukazovat nebudu.

Z předpokladů podílového kritéria vím, že $a_k > 0$ a $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q \in (0, 1)$ pro skoro všechna k. Ve shodě s větou 3 a poznámkou, která ji následuje, mohu předpokládat, že to platí pro všechna $k \in \mathbb{N}$ (konečný počet členů řady nemá vliv na chování). Postupně pro členy řady mohu psát následující:

$$\begin{aligned}
a_2 &\leq q \cdot a_1 \\
a_3 &\leq q \cdot a_2 \leq q^2 \cdot a_1 \\
a_4 &\leq q \cdot a_3 \leq q^3 \cdot a_1 \\
&\vdots \\
a_k &\leq q \cdot a_{k-1} \leq q^{k-1} \cdot a_1.
\end{aligned}$$

Lze nahlédnout, že pro všechna k platí $0 < a_k \leq q^{k-1} \cdot a_1$, a protože $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} \cdot a_1$ je geometrická řada s kvocientem $q < 1$ (tudíž konvergentní podle věty 1), jsou splněny všechny předpoklady srovnávacího kritéria (věta 8) a tím je dokázáno, že $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je konvergentní řada.

Zároveň je z důkazu podílového (resp. odmocninového) kritéria možno nahlédnout, že pokud má nějaká řada konvergovat podle podílového (resp. odmocninového) kritéria, musí konvergovat alespoň tak „rychle“ jako geometrická řada (více o rychlosti viz příklad 17 a poznámka, která ho následuje).

Toto jsou první čtyři často používaná kritéria při vyšetřování konvergence řad. Uvedené verze podílového a odmocninového kritéria nejsou příliš vhodné pro počítání a spíše se používají jejich limitní verze, která uvedu vzápětí. Na druhou stranu, obecně lze říci, že limitní verze kritérií jsou slabší než nelimitní verze v tom smyslu, že existují řady, o jejichž chování nelze rozhodnout pomocí limitní verze nějakého kritéria, zatímco pomocí nelimitní verze to možné je (viz pozdější příklad 8).

Věta 11 (Limitní srovnávací kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *a* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *jsou dvě řady, pro které platí* $a_k \geq 0$ *a* $b_k > 0$ *pro skoro všechna* $k \in \mathbb{N}$*. Potom je-li* $\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*, tak*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konverguje} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konverguje}$$

[1, str. 93].

Poznámka 16. Znění limitní verze srovnávacího kritéria vlastně říká, že za daných podmínek je chování daných dvou řad ekvivalentní. V případě, že limita $\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k}$ je nulová nebo nekonečná, platí mezi řadami $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ vztah pouze ve formě následujících implikací: je-li $\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = 0$, tak konverguje-li $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, potom konverguje i $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Pokud je $\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = \infty$, tak diverguje-li $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, diverguje i $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Při používání srovnávacích kritérií (limitní i nelimitní verze) obvykle ještě musíme použít nějaké další kritérium, protože tato kritéria většinou používáme k tomu, abychom problém vyšetření chování nějaké řady převedli na problém vyšetření chování nějaké jiné řady, u které to umíme snadněji.

Věta 12 (Limitní podílové kritérium)**.** *Nechť pro řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ platí, že $a_k > 0$ pro skoro všechna $k \in \mathbb{N}$. Potom, je-li*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1,$$

pak je řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentní. Je-li

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1,$$

tak je řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergentní [1, str. 93].

Poznámka 17. Při výpočtu limit je možno použít následující tvrzení: nechť $\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \in (0,1)$, potom $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$. Můžeme si všimnout, že to je přímý důsledek podílového kritéria, protože platí-li $\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \in (0,1)$, potom $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, a protože konverguje, tak splňuje nutnou podmínku konvergence a platí tedy $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$.

Podobně se někdy používá tvrzení: nechť $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k} \in \langle 0,1)$, potom $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$. Toto je přímý důsledek následující věty.

Věta 13 (Limitní odmocninové kritérium)**.** *Nechť pro řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ platí, $a_k \geq 0$ pro skoro všechna $k \in \mathbb{N}$. Potom, je-li*

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k} < 1,$$

pak je řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolutně konvergentní. Je-li*

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k} > 1,$$

pak je řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *divergentní [1, str. 93].*

Příklad 7. Podívejme se ještě jednou na řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$, kterou jsme již vyšetřovali v příkladu 5. Tentokrát na vyšetření jejího chování použijeme limitní podílové kritérium. Ověření předpokladu o kladnosti členů je zde triviální, můžeme rovnou přikročit k výpočtu limity.

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k+1} = 0$$

Protože limita vyšla rovna nule, což je menší než jedna, můžeme říct, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konverguje. ∎

Příklad 8. Zkusme vyšetřit chování řady $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k+1}{3}\right)^k$ pomocí odmocninového kritéria. Nejdříve zkusme použít limitní verzi tohoto kritéria:

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{(-1)^k+1}{3}\right)^k} = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{(-1)^k+1}{3}\right).$$

Snadno nahlédneme, že tato limita neexistuje, což pro nás znamená, že pomocí limitní verze odmocninového kritéria nelze rozhodnout o chování této řady. Nyní použijme nelimitní verzi tohoto kritéria. Zajímá nás, jestli existuje nějaké $q \in (0,1)$ tak, že výraz $\left(\frac{(-1)^k+1}{3}\right) \leq q$ pro skoro všechna k. Ukazuje se, že stačí volit $q = \frac{2}{3}$ a potom je tato nerovnost splněna dokonce pro všechna přirozená k a řada je tedy absolutně konvergentní. Tento příklad ukazuje tu skutečnost, že existují řady, jejichž chování lze vyšetřit pomocí nelimitní verze, ale pomocí verze limitní nelze rozhodnout o chování (například právě proto, že daná limita neexistuje, nebo je rovna jedné). Na druhou stranu v praxi zpravidla nejdříve zkoušíme použít limitní verze kritérií, protože jejich použití je obvykle jednodušší. ∎

Poznámka 18. V limitní verzi podílového a odmocninového kritéria (věty 12 a 13) se žádá, aby limity nějakých výrazů byly ostře menší nebo ostře větší než jedna. Pokud nám tyto limity vyjdou rovny jedné, nemůžeme o konvergenci řady podle těchto kritérií rozhodnout, protože v takovém případě může být řada stejně tak konvergentní ($\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$) jako divergentní (harmonická řada). V takovém případě musíme zkusit použít nějaké jiné kritérium. Vhodným kandidátem bývá například kondenzační kritérium (věta 15) nebo Raabeovo kritérium, které zde ale neuvádím (možno nalézt například zde [1, str. 92]). Druhým problémem limitních verzí kritérií je to, že limity, které tam počítáme, vůbec nemusí existovat (jak jsme viděli výše). Tento nedostatek se dá odstranit tím, že místo toho, abychom pracovali s obyčejnými limitami, tak použijeme limes superior (které existuje vždy), podrobnosti o tomto lze nalézt například zde [2, str. 286]. Tato verze kritérií, kde se používá limes superior namísto obyčejných limit, je pak ekvivalentní (stejně silná) s verzí nelimitní.

V souvislosti s limitními verzemi podílového a odmocninového kritéria uvedu ještě následující větu, která hovoří o vztahu těchto dvou kritérií.

Věta 14. *Nechť $a_k > 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$ a $\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 0$. Potom je*

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

[2, str. 285]

Poznámka 19. Tato věta nám říká, že existuje-li limita $\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$, pak existuje i limita $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k}$ a jsou si rovny (obecně to neplatí naopak). Na druhou stranu, existuje-li $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k}$, tak limita $\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ existovat nemusí, ale pokud také existuje, tak jsou si obě tyto limity rovny. Pokud poožijeme limitní verzi odmocninového nebo podílového kritéria a vyjde nám při výpočtu limita rovna jedné, nemá smysl používat druhé z nich, protože potom je limita také jedna nebo neexistuje.

Mimo jiné můžeme tvrzení této věty využít také při výpočtu limit posloupností, například se podívejme na limitu $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{k}$. Výraz v limitě můžeme interpetovat jako $\sqrt[k]{a_k}$, kde $a_k = k$, a zřejmě platí $k > 0$ pro každé přirozené k. Nyní stačí spočítat jednoduchou limitu $\lim_{k\to+\infty} \frac{k+1}{k} = 1$ a podle věty 14 smíme psát $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{k} = 1$.

Věta 15 (Kondenzační kritérium). *Nechť* $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ *je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Potom*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konverguje absolutně, právě když } \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ konverguje absolutně.}$$

[4, str. 142]

Příklad 9. Vyšetřeme chování řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ v závislosti na parametru α. Použijeme právě představené kondenzační kritérium. Předpokladem tohoto kritéria je, aby příslušná posloupnost byla nerostoucí. Posloupnost $\left\{\frac{1}{k^\alpha}\right\}_{k=1}^{+\infty}$ je zřejmě nerostoucí, je-li $\alpha \geq 0$. Nyní je možno pro $\alpha \geq 0$ aplikovat na řadu toto kritérium. Otázka konvegence řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ se tím převádí na otázku konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{k\alpha}}$, což můžeme upravit na $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k$ a toto je geometrická řada s kvocientem $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$. Jak již víme, geometrická řada s kvocientem q konverguje, právě když $|q| < 1$. Snadno spočteme, že $0 \leq \frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$ tehdy a jen tehdy, je-li $\alpha > 1$. Takže řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ konverguje, právě když $\alpha > 1$. Toto je poměrně užitečný výsledek, proto ho zformuluji do následujícího tvrzení, abych se na něj mohl později snadno odkazovat. Ve spojení se srovnávacím kritériem máme velice silný a rychlý prostředek, jak vyšetřovat chování řad, jejichž k-tý člen je dán nějakou racionální funkcí. ■

Věta 16. *Řada* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ *konverguje absolutně, právě když je* $\alpha > 1$.

Poznámka 20. V předchozím příkladu jsem pracoval s řadou $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$. Pomocí této řady je v analytické teorii čísel definovaná Riemannova funkce ζ následovně:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}.$$

S touto funkcí souvisí jeden z největších dosud nevyřešených problémů matematiky a to je tzv. Riemannova hypotéza, která říká, že všechny netriviální kořeny rozšířené funkce ζ do komplexní roviny mají reálnou část rovnu jedné polovině [7]. Více o této funkci a Riemannově hypotéze je možné nalézt například v populárně naučné knize (DERBYSHIRE, John. *Posedlost prvočísly.* Vyd. 1. Praha: Academia, 2007. ISBN 978-80-200-1479-5.).

Poznámka 21. V předchozím příkladě (příklad 9) jsem se zabýval případem, kdy $\alpha \geq 0$. Snadno se přesvědčíme, že pro $\alpha < 0$ řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ diverguje, protože nesplňuje nutnou podmínku konvergence.

Příklad 10. Vyšetřeme chování řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2-2k+3}{k^5+4k^3-6}$. Obecný postup u takovýchto příkladů je následující: vytkneme dominantní člen (k v nejvyšší mocnině) v čitateli i ve jmenovateli a jejich podíl bude to, s čím budeme řadu srovnávat pomocí limitního srovnávacího kritéria. Takže řada, se kterou budeme naši řadu srovnávat, je $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^5} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$. Nyní tedy musíme spočítat tuto limitu:

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\frac{k^2-2k+3}{k^5+4k^3-6}}{\frac{1}{k^3}} = 1.$$

Protože limita je 1 (vzhledem k tomu, jak jsme volili srovnávací řadu musela vyjít rovna jedné) a řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ konverguje absolutně podle věty 16, je i původní řada absolutně konvergentní. ■

Toto jsou nejčastěji používaná kritéria pro vyšetřování absolutní konvergence. Nyní, ještě než se podíváme na neabsolutní konvergenci, se podívejme, jak tato kritéria využít pro obecné řady.

Nejjednoduším případem jsou řady, jejichž skoro všechny členy jsou nekladé. Máme-li takovou řadu, můžeme z ní vytknout -1, čímž, jak víme z věty 5 (a poznámky, která ji následuje), neovlivníme její chování. Z řady nekladné se tímto postupem stane řada nezáporná a její chování lze vyšetřit pomocí právě představených kritérií. U těchto dvou typů řad (nezáporné a nekladné) jsou pojmy konvergence a absolutní konvergence ekvivalentní. Jak uvidíme dále, u obecných řad bude třeba mezi těmito pojmy rozlišovat.

Máme-li obecnou řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, tak abychom na vyšetření jejího chování mohli použít kritéria pro absolutní konvergenci, musíme místo ní vzít řadu $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Tím máme řadu nezápornou a lze na ní aplikovat všechna výše uvedená kritéria. Problém tohoto postupu je ten, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ může divergovat, ale řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ může být konvergentní. Tímto postupem tedy pouze zjistíme, zda řada konverguje absolutně nebo ne. Tím, jak vyšetřovat obyčejnou konvergenci u obecných řad, se zabývá následující kapitola.

1.3.2 Neabsolutní konvergence

Jak jsem psal, nyní se budu zabývat obecnými řadami. Nejdříve uvedu tři kritéria, kterými je možno vyšetřit obyčejnou konvergenci obecných řad, a poté se podívám na některé vlastnosti obecných řad.

Speciálním případem obecných řad jsou řady alternující. To jsou řady, pro jejichž členy platí $a_k \cdot a_{k+1} < 0$ pro skoro všechna přirozená k. Příkladem takové řady je řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$. O tom, za jakých podmínek konvergují alternující řady, hovoří následující kritérium.

Věta 17 (Leibnizovo kritérium)**.** *Nechť $a_k \geq 0$ pro skoro všechna k a nechť jsou splněny následující podmínky:*

(i) *posloupnost $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ je nerostoucí,*

(ii) $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$.

Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ konverguje [1, str. 96].

Příklad 11. Vyšetřeme chování řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ (tzv. alternující harmonická řada). Snadno nahlédneme, že neplatí, že by skoro všechny členy této řady měly stejné znaménko. Jak jsem již psal, tento problém můžeme odstranit přidáním absolutní hodnoty a vyšetřit chování řady $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. To je harmonická řada, která je, jak víme, divergentní. Tím jsme zjistili, že tato řada určitě nebude absolutně konvergentní. Zkusme použít právě představené Leibnizovo kritérium. Vidíme, že řada je ve tvaru $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cdot a_k$, a posloupnost $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ splňuje vše, co vyžaduje Leibnizovo kritérium. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ tedy dle tohoto kritéria konverguje. A protože konverguje, ale absolutně nekonverguje, tak můžeme psát, že je neabsolutně konvergentní. Tento závěr nemůžeme učinit bez vyšetření absolutní konvergence, viz definice 4. ■

Obecněji o tom, za jakých podmínek konvergují obecné řady hovoří následující kritérium.

Věta 18 (Abel-Dirichletovo kritérium). *Nechť* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *je řada s reálnými členy,* $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ *je nerostoucí posloupnost s nezápornými členy. Potom řada*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$$

konverguje, je-li splněna některá z následujících podmínek:

(i) *(Abel) řada* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje, nebo*

(ii) *(Dirichlet) řada* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *má omezenou posloupnost částečných součtů a* $\lim_{k\to+\infty} b_k = 0$ *[2, str. 289].*

Příklad 12. Vyšetřeme chování řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k}$. Konvergenci této řady ukážeme pomocí Dirichletova kritéria. V tomto případě je posloupností $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ posloupnost s k-tým členem $a_k := \sin k$ a posloupností $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost $b_k := \frac{1}{k}$.

Snadno ověříme, že posloupnost $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ splňuje vše, co od ní vyžaduje Dirichletovo kritérium, zbývá se tedy podívat na posloupnost $(a_k)_{k=1}^{\infty}$. Musíme ukázat že posloupnost částečných součtů řady $\sum_{k=1}^{\infty} \sin k$ je omezená. To lze dokázat pomocí vzorce

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k = \frac{\sin\frac{n}{2}\sin\frac{n+1}{2}}{\sin\frac{1}{2}}.$$

Tím jsme tedy ověřili všechny předpoklady Dirichletova kritéria a řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k}$ je tedy konvergentní. Jak se ukazuje, řada $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\sin k}{k}\right|$ je divergentní, tudíž řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k}$ konverguje neabsolutně. ■

Poznámka 22. Můžeme si všimnout, že Leibnizovo kritérium je speciálním případem Dirichletova kritéria, protože řada $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}$, která vystupuje v Leibnizově kritériu, má omezenou posloupnost částečných součtů, a posloupnost $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ z Leibnizova kritéria splňuje přesně ty podmínky, které jsou vyžadovány od posloupnosti $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ v Dirichletově kritériu. Znamená to tedy i další věc, že kdykoliv můžeme použít Leibnizovo kritérium, můžeme použít i Dirichletovo kritérium (obecně ne naopak). Někomu by se v tomto místě mohlo zdát, že Leibnizovo kritérium není potřeba, když máme k dispozici Dirichletovo kritérium, ale dle mého názoru používání Leibnizovo kritéria má své opodstatnění, protože jeho předpoklady jsou jednodušší na ověřování než předpoklady Dirichletovo kritéria, to znamená, můžeme rychleji říct, že nějaká řada konverguje.

Druhé věci, které je třeba si všimnout, je to, že všechna tato tři kritéria pro neabsolutní konvergenci jsou ve tvaru implikace. To znamená, že jsou schopny rozhodnout pouze o konvergenci. Splňuje-li řada předpoklady některého z těchto tvrzení, potom konverguje, ale pokud je nesplňuje, potom z kritérií neplyne nic. Pomocí těchto kritérií nelze přímo zjišťovat divergenci u obecné řady, lze pouze na základě kritérií z předchozí části (absolutní konvergence) říci, že řada nekonverguje absolutně.

Definice 5 (Kladná a záporná část čísla)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$ potom definujeme:

$$a^+ := \max(a, 0) = \frac{|a| + a}{2},$$

$$a^- := \max(-a, 0) = \frac{|a| - a}{2}.$$

Čísla a^+ nazýváme kladnou částí čísla a, číslo a^- nazýváme zápornou částí čísla a. [1, str. 26]

Poznámka 23. Předchozí definici můžeme číst tak, že je-li $a \geq 0$ potom $a^+ = a$ a je-li $a < 0$ potom $a^- = -a$, přičemž druhé z čísel je vždy nulové. Je třeba si všimnout, že čísla a^+ i a^- jsou vždy obě nezáporná a navíc ještě platí tato rovnost $a = a^+ - a^-$.

Věta 19. *Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je neabsolutně konvergentní řada. Potom platí:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = +\infty$$

a současně platí $\lim_{k\to+\infty} a_k^+ = \lim_{k\to+\infty} a_k^- = 0$. [2, str. 288]

Poznámka 24. Snadno nahlédneme, že je-li $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolutně konvergentní řada, potom díky nerovnostem $0 \leq a_k^+ \leq |a_k|$ a $0 \leq a_k^- \leq |a_k|$ jsou řady

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ konvergentní (dokonce absolutně). Naopak diverguje-li právě jedna z nich, potom diverguje i řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-,$$

což plyne z věty 5. [2, str. 287]

Definice 6 (Přerovnání)**.** Nechť $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce. Potom φ nazýváme přerovnání $\mathbb{N}$. Je-li dána řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a platí-li $b_k = a_{\varphi(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, potom říkáme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ je přerovnáním řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ pomocí přerovnání φ, nebo stručněji, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ je přerovnáním řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. [2, str. 291]

Poznámka 25. Přerovnání z výše uvedené definice si můžeme intuitivně představit jako „nekonečnou“ permutaci na přirozených číslech.

Věta 20. *Nechť řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně. Potom pro její libovolné přerovnání $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ platí:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

[2, str. 291]

Máme-li absolutně konvergentní řadu můžeme ji libovolně přerovnávat a na součet to nebude mít vliv. Znění této věty lze zobecnit tak, že $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nemusí být konvergentní, ale stačí, aby alespoň jedna z řad $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ nebo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ měla součet, potom stále platí: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Co se stane, pokud je $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ neabsolutně konvergentní, hovoří následující věta.

Věta 21 (Věta o přerovnání)**.** *Nechť řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje neabsolutně. Pak pro každé $s \in \mathbb{R}^*$ existuje přerovnání $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ tak, že platí*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = s.$$

[2, str. 292]

Poznámka 26. Hlavní rozdíl mezi absolutně a neabsolutně konvergentními řadami je tedy ten, že zatímco absolutně konvergentní řady můžeme libovolně přerovnávat a jejich součet se nezmění, tak u neabsolutně konvergentních toto možné není.

Tvrzení věty 21 může být pro někoho překvapivé, protože to odporuje naší intuici a tomu, na co jsme zvyklí při sčítání konečně mnoha čísel (komutativitě). Z toho důvodu jsem se rozhodl zde ukázat hlavní myšlenku důkazu této věty.

Mějme neabsolutně konvergentní řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$. Pokusíme se ji přerovnat tak, aby její součet byl nějaké kladné reálné číslo r. Víme, že $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = +\infty$, protože $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je neabsolutně konvergentní. Formální důkaz je založen na tom, že konstruujeme přerovnanou posloupnost $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ tak, aby $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = r$. Celé konstukce se sestává ze dvou hlavních kroků:

- Nezáporné členy posloupnosti $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ dáváme do posloupnosti $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ dokud je částečný součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ menší než r.
- Záporné členy posloupnosti $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ dáváme do posloupnosti $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ dokud je částečný součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ větší než r.

Tyto dva kroky se opakují nekonečněkrát. Výsledkem toho je, že posloupnost $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ je přerovnáním posloupnosti $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ (každý člen $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ je i v $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ a naopak také) a platí $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = r$. To, že v každém kroku máme k dispozici dost (dokonce nekonečně mnoho) nezáporných (resp. záporných) členů, je zajištěno předpokladem o neabsolutní konvergenci $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Příklad 13. Podívejme se na řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Stejným postupem jako v příkladu 11 se můžeme přesvědčit o tom, že je neabsolutně konvergentní, podle Riemmanovy věty ji tedy můžeme přerovnat k libovolnému součtu. Zkusme to udělat. Nejdříve vezměme „nepřerovnanou“ řadu:

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{=\frac{5}{6}} \underbrace{- \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}_{<0} \underbrace{- \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{<0} - \cdots < \frac{5}{6} = \frac{10}{12}.$$

Nyní řadu přerovnejme následujícím způsobem:

$$\underbrace{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}}_{=\frac{389}{420}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}}_{=\frac{7}{198}}+\underbrace{\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{8}}_{=\frac{29}{1560}}+\cdots>\frac{389}{420}>\frac{11}{12}.$$

U tohoto přerovnání vždy vezmeme dva členy s lichým číslem ve jmenovateli (ty jsou kladné) a k tomu jeden člen se sudým číslem ve jmenovateli (ten je záporný). A vidíme, že dvěma přerovnáními jsme získali dva různé výsledky. Pro úplnost bychom ještě měli ukázat, že $-\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}<0$, což je triviální a dále, že $\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}>0$, což je také triviální, proto to ponechávám čtenáři. ■

Kritérií konvergence řad existuje mnohem víc (např. zmiňované Raabeovo kritérium, Gaussovo kritérium, ...), já jsem zde vybral pouze ta základní a nejčastěji používaná, na jejichž použití si vystačíme s teorií limit, pomocí kterých jsou řady definovány. Níže ještě uvádím integrální kritérium, které se také považuje za základní, ale již vyžaduje teorii integrálního počtu.

1.3.3 Integrální kritérium

Jak jsem psal výše, integrální kritérium je také řazeno mezi základní kritéria. Ač jde o kritérium pro řady s nezápornými členy, zařazuji ho zde zvlášť, protože jeho aplikace vyžaduje znalost teorie integrálu. Druhý důvod, proč ho zde zařazuji, je ten, že tímto kritérium chci ukázat, že mezi řadami a integrály existuje jistý vztah.

Věta 22 (Integrální kritérium). *Nechť f je spojitá, nerostoucí a nezáporná funkce na intervalu $\langle 1,+\infty)$. Potom platí:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ konverguje, právě když konverguje } \int_1^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

[2, str. 283]

Poznámka 27. Pomocí tohoto kritéria lze snadno vyšetřit chování řad jako $\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{k}}$ nebo $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arccotg} k$. Tyto příklady zde uvádím bez řešení, pouze pro ilustraci toho, na co je užitečné integrální kritérium.

1.3.4 Obtíže při vyšetřování chování řad

Při vyšetřování chování řad se setkáváme s několika obtížemi. Nemáme žádné univerzální kritérium, musíme se vždy rozhodovat, jaké a jak použijeme. Tato činnost je heuristická (nedeterministická), což pro nás znamená, že ani neexistuje žádný obecný návod, pomocí kterého bychom se vždy dostali k výsledku. Mimo školní praxi ani nemůžeme počítat s tím, že kritérium pro řadu, jejíž chování potřebujeme vyšetřit, bude ležet v dosahu kritérií, která známe.

Další problém je technické užití kritérií, zvláště ověření předpokladů. Často se může stát, že např. spočítat limitu nemusí být o nic menší problém než vyšetření chování řady (protože limity posloupností, narozdíl od limit elementárních funkcí, nejsou deterministicky určitelné).

Kapitola 2

Sčítání řad

2.1 Elementárně sčítatelné řady

V této kapitole se zaměřím hlavně na řady, jejichž součet lze určit elementárními metodami (bez použití technik diferenciálního a integrálního počtu, přesto se zmíním i o řadách, které vyžadují jistou znalost z této části matematiky) a na závěr se podívám na to, jak naší definici součtu řady rozšířit na oscilující řady. Máme-li divergentní řadu k $+\infty$ (resp. $-\infty$), ihned víme, že její součet je právě $+\infty$ (resp. $-\infty$); k tomu, abychom mohli učinit tento závěr, nám stačí vyšetřit chování řady. Dále se tedy budeme zabývat převážně konvergentními řadami.

Při hledání součtu řady budeme obvykle postupovat podle definice, tedy pokusíme se vyjádřit n-tý částečný součet řady s_n v závislosti pouze na n (budeme hledat nějaký vzorec pro s_n). Fakticky hledáme převod z rekurentního zápisu s_n na explicitní. Toto nemusí jít vždy, protože ne vždy existuje k rekurentně zadané posloupnosti její explicitní vyjádření, ale pokud nějaký takový převod nalezneme, dosazením zpět do rekurentního můžeme ověřit jeho správnost. Při ověřování správnosti explicitního vyjádření s_n budeme často používat pro nás již známý vztah mezi členy řady a posloupností částečných součtů:

$$a_n = s_n - s_{n-1} \text{ a } a_1 = s_1. \tag{2.1}$$

Vytvoříme-li nějakou hypotézu ohledně toho, jak vypadá s_n, dosazením do tohoto vztahu snadno ověříme, jestli je naše hypotéza správná či nikoliv (ve skutečnosti jde o důkaz matematickou indukcí). Pokud správná je, stačí už jen spočítat $\lim_{n\to+\infty} s_n$ a tím zjistit součet řady, v případě, že se naše hypotéza nepotvrdí, musíme najít jiný vztah pro s_n.

V této části se podívám na řady geometrické, teleskopické a hypergeometrické, u nichž se zaměřím hlavně na řady typu $\sum_{k=1}^{\infty} P(k) \cdot q^k$, kde $P(k)$ je polynom a $q \in (0,1)$. K tomu se ještě podívám na některé příklady, ve kterých vystupují tyto řady nebo řady, se kterými jsme se již setkali.

2.1.1 Geometrické řady

Příklad 14. Určeme součet geometrické řady:

$$\sum_{k=4}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \frac{32}{243} + \frac{64}{729} + \dots .$$

Vidíme, že se jedná o geometrickou řadu, která ovšem není indexovaná od jedné, jak jsme zatím zvyklí, ale až od čísla tři. Tento nedostatek je možné napravit dvěma způsoby. Buď řadu sečteme od jedné a poté odečteme členy, které jsme sečetli navíc, a nebo použijeme následující postup, který pro jeho praktičnost budeme používat:

$$\sum_{k=4}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{8}{27} \sum_{k=4}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-4} = \frac{8}{27} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{l-1}$$

V druhé rovnosti jsme využili toho, že máme-li řadu, jejiž dolní mez je nějaké $k_0 \neq 1$, lze ji vždy přeindexovat tak, aby dolní mez byla 1 (viz. poznámka 1, technicky vzato jde o substituci, zde konkrétně $l = k - 3$). Součet řady nyní již spočteme snadno:

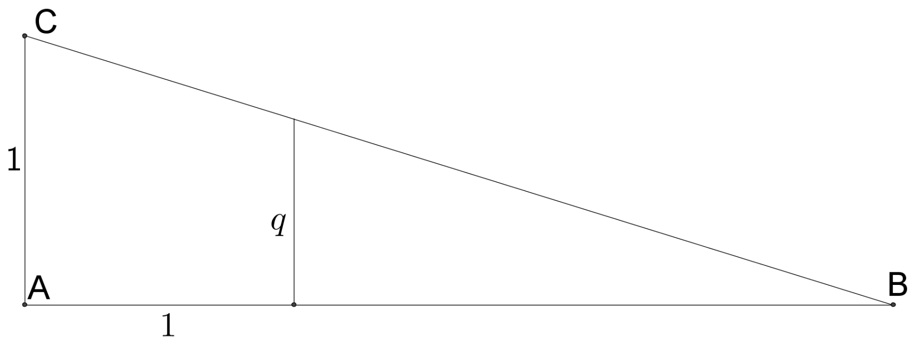
$$\sum_{k=4}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{8}{27} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{l-1} = \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{8}{9}.$$

Obecně tedy geometrická řada $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ s kvocientem $|q| < 1$ má součet

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k = a_n \frac{1}{1-q}.$$

Jak víme, každou geometrickou řadu lze přečíslovat na základní tvar geometrické řady definované v příkladu 1, to je však při počítání konkrétních příkladů složité a je jednodušší používat tento vzorec, proto ho zde uvádím. Je snadné si rozmyslet, že tento vzorec je přímým důsledkem úvah, které jsme prováděli výše. ■

Příklad 15. Je dán trojúhelník ABC a úsečka délky q dle obrázku 2.1 a naším úkolem je určit vzdálenost $|AB|$ v závislosti na q.



Obrázek 2.1: Grafický součet geometrické řady.

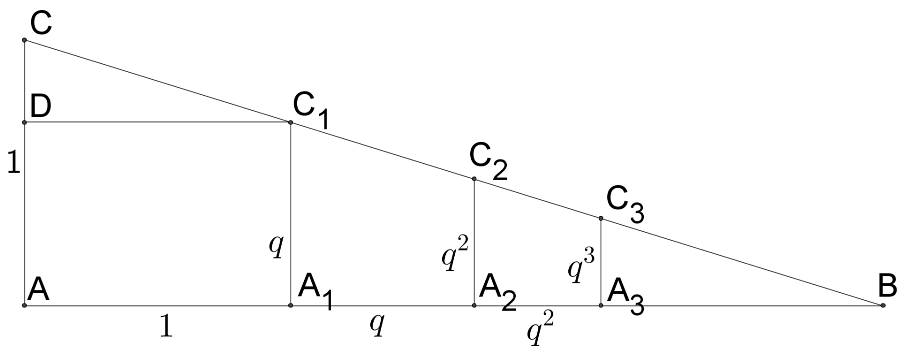
Tento příklad je možno řešit dvěma způsoby a my se zde podíváma na oba dva.

První způsob je založen na tom, že najdeme trojúhelník podobný trojúhelníku ABC, u něhož snadno zjistíme délky stran. Trojúhelník toto splňující je trojúhelník DC_1C (viz obrázek 2.2). Podobnost trojúhelníků ABC a DC_1C je možné ukázat například tím, že mají všechny odpovídající si úhly shodné. Díky podobnosti můžeme psát

$$\frac{|AB|}{|DC_1|} = \frac{|AC|}{|DC|}.$$

Díky tomu, že $|DC_1| = |AC| = 1$ a $|DC| = 1 - q$ je délka $|AB| = \frac{1}{1-q}$.

Druhý způsob je založen také na podobnosti trojúhelníků. Abych zjednodušil vysvětlování tohoto výpočtu, budu se celou dobu odkazovat na obrázek 2.2.



Obrázek 2.2: Grafický součet geometrické řady.

Nejdříve na úsečce AB zkonstruujeme bod A_2 tak, že $|A_1A_2| = |A_1C_1| = q$ a bude nás zajímat délka $|A_2C_2|$. Tuto délku určíme díky podobnosti trojúhelníků následovně:

$$\frac{|A_2C_2|}{|A_1C_1|} = \frac{|A_1C_1|}{|AC|} \Rightarrow \frac{|A_2C_2|}{q} = \frac{q}{1}.$$

Délka $|A_2C_2|$ je tedy rovna q^2. Nyní, podobně jako bod A_2, zkonstruujeme bod A_3, tentokrát má platit $|A_2A_3| = |A_2C_2| = q^2$ a díky podobnosti dopočítáme délku $|A_3C_3|$:

$$\frac{|A_3C_3|}{|A_2C_2|} = \frac{|A_2C_2|}{|A_1C_1|} \Rightarrow \frac{|A_2C_2|}{q^2} = \frac{q^2}{q}.$$

Tím jsme zjistili, že $|A_3C_3| = q^3$ a to je i délka $|A_3A_4|$. Z tohoto postupu je vidět, že na úsečce AB budou postupně vznikat úsečky délek 1, q, q^2, q^3, ... Délka úsečky AB v bude rovna součtu

$$|AB| = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1},$$

což je geometrická řada s kvocientem $q \in (0, 1)$. Předchozím postupem nám vyšlo, že $|AB| = \frac{1}{1-q}$ a tímto, že $|AB| = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$. Z toho vyplývá, že $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \frac{1}{1-q}$. V tomto příkladě se nám tedy povedlo odvodit a dokázat vzorec pro součet geometrické řady geometricky. ■

Příklad 16. Vyjádřeme desetinné číslo $0,\overline{375}$ jako zlomek.

Jedná se o desetinné číslo s nekonečným desetinným rozvojem s periodou délky 3. Naším úkolem je, vyjádřit toto číslo ve formě zlomku $\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$, navíc bychom mohli ještě přidat podmínku, aby $\mathrm{NSD}(p, q) = 1$.

Vzhledem k tomu, že se jedná o číslo s periodickým desetinným rozvojem, můžeme jeho desetinný zápis přepsat následujícím způsobem:

$$0,\overline{375} = 375 \cdot 10^{-3} + 375 \cdot 10^{-6} + 375 \cdot 10^{-9} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} 375 \cdot (10^{-3})^k.$$

Z těchto úprav vidíme, že lze desetinný zápis čísla $0,\overline{375}$ zapsat jako součet geometrické řady řady s prvním členem $0,375$ a kvocientem 10^{-3}. Stačí už jen řadu sečíst a výsledný zlomek případně zkrátit na základní tvar a tím získáme přesně to co jsme chtěli:

$$0,\overline{375} = \sum_{k=1}^{\infty} 375 \cdot (10^{-3})^k = 375 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{1 - 10^{-3}} = \frac{375}{999} = \frac{125}{333}.$$

Vydělením čísla 125 číslem 333 bychom mohli ověřit, že tento výsledek je správný. Postup, který jsme zde právě provedli, je možné aplikovat na desetinné číslo vždy, když je jeho desetinný rozvoj periodický a dokazuje to, že každé periodické číslo je racionální (více o tomto tématu viz [4, str. 148–153]).

■

Příklad 17. Kolik členů řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}}$ je třeba sečíst, abychom získali výsledek s přesností na osm desetinných míst?

Nejdříve zde stručně vysvětlím, co budeme rozumět pojmem „s přesností na osm desetinných míst“. Obecně to neznamená, že prvních osm desetinných míst je správně, ale musíme ten výraz chápat tak, jak se chápe v numerické matematice: výsledek se s přesným výsledkem shoduje na osm desetinných míst, pokud je rozdíl mezi nimi dělený přesným výsledkem menší než 10^{-8}.

Víme, že $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 2$, ale k tomu abychom získali tento výsledek, je třeba sečíst všechny členy řady, kterých je nekonečně mnoho. Chceme tedy najít takové n, které bude splňovat nerovnost

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} - 2}{2} < 10^{-8}.$$

Vzorec pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti známe, takže tuto nerovnost snadno dořešíme a zjistíme, že $n > 8\log_2 10 \doteq 26,6$. Vidíme, že stačí sečíst „pouze“ prvních 27 členů dané geometrické řady, abychom výsledek získali s přesností na osm desetinných míst.

Postup, který jsme použili v tomto příkladě, bohužel nelze používat obecně, protože funguje jen tehdy, jsme-li schopni sečíst prvních n členů řady nebo obecný zbytek řady (řada bez prvních n členů). Pokud toho schopni nejsme, používají se v reálných úlohách odhady zbytku shora. Určujeme, kolik nejméně členů řady je třeba sečíst, aby i horní odhad zbytku byl menší než daná přesnost. $\blacksquare$

Postup, který jsme použili v tomto příkladě, bohužel nelze používat obecně, protože funguje jen tehdy, jsme-li schopni sečíst prvních n členů řady nebo obecný zbytek řady (řada bez prvních n členů). Pokud toho schopni nejsme, používají se v reálných úlohách odhady zbytku shora. Určujeme, kolik nejméně členů řady je třeba sečíst, aby i horní odhad zbytku byl menší než daná přesnost.

V předchozím příkladě jsme se ptali, kolik členů geometrické řady je třeba sečíst, abychom získali výsledek s danou přesností. Tato otázka má smysl pouze u konvergentních řad, protože u řad divergujících k $+\infty$ (resp. $-\infty$) se každý částečný součet liší od výsledku o nekonečno. Místo velikosti rozdílu částečného součtu a úplného součtu se u divergentních řad se můžeme ptát na to, jaký nejmenší počet členů řady musíme sečíst, aby jejich součet byl větší než dané číslo. Čtenář, který je seznámem s pojmem okolí vlastního i nevlastního bodu vidí, že pak je postup u konvergentních a divergentních neoscilujících řad zcela analogický, ptáme se, „jak rychle“ se částečné součty dostanou do zvoleného okolí úplného součtu. V následujícím příkladě se podívám na geometrickou a harmonickou řadu a na to, kolik jejich členů je potřeba k tomu, aby jejich součet přesáhl 100.

Příklad 18. Vezměme si harmonickou řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ a geometrickou řadu $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}$ a zkoumejme, kolik členů je potřeba k tomu, aby jejich součet byl větší než 100.

Začněme s geometrickou řadou. Tentokrát nás zajímá pro jaké n platí: $\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} > 100$. Použitím známého vzorce ze střední školy pro součet členů geometrické posloupnosti zjistíme, že to platí pro $n \geq 7$. Snadno se přesvědčíme o platnosti výsledku, protože

$$\sum_{k=1}^{7} 2^{k-1} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 > 100.$$

Nyní se podívejme na harmonickou řadu. Opět nás zajímá nejmenší n splňující $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > 100$. V tomto případě se nám nepodaří n určit tak přesně jako předtím, ale získáme pouze horní a dolní odhad pro n (horní odhad pro n získáme v přechozím dolním odhadem s_n a horním odhadem s_n zjistíme dolní odhad pro n).

Dolní odhad součtu pro posloupnost částečných součtů jsme již udělali v poznámce 5 a víme, že platí $s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$. Horní odhad součtu provedeme podobným způsobem

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} \cdots + \frac{1}{15}}_{\leq \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}},$$

což nám dává odhad $s_{2^n} < 1 + \frac{1}{2} + n - 1 = \frac{1}{2} + n$. Nás tedy zajímá, pro jaké n platí $s_{2^n} = 100$ a díky právě uvedeným odhadům získáme dvě nerovnosti

$$1 + \frac{n}{2} < 100 < \frac{1}{2} + n,$$

jejímž vyřešením zjistíme, že $n \in (99, 198)$, což pro nás znamená, že počet členů, které je třeba sečíst, aby jejich součet byl 100, leží v intervalu $(2^{99}, 2^{198})$[1]. K tomuto výsledku bych ještě dodal, že u výše zmíněné geometrické řady nám stačí sečíst 99 jejích členů, aby jejich součet byl 2^{99}. Toto nám ukazuje, jak pomalu roste posloupnost částečných součtů harmonické řady, oproti částečným součtům geometrické řady $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}$. Vyplývá to z

[1]Tento odhad lze zlepšit pomocí funkce ln a tzv. Euler-Mascheroniho konstanty, která je založena na tom, že hodnoty posloupnosti částečných součtů hamonické řady jsou velmi blízké hodnotám posloupnosti $\ln n$. Více o této konstantě zde [8].

toho, že harmonická řada splňuje nutnou podmínku konvergence, kdežto řada $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}$ nikoliv. Poznamenejme ale, že i v rámci divergentních řad, splňujících nutnou podmínku konvergence, rostou částečné součty harmonické řady pomalu.

■

2.1.2 Teleskopické řady

Dalším typem řad, které lze sčítat elementárně, jsou tzv. teleskopické řady. Nejdříve zde uvedu několik příkladů, pak se podívám na některé vlastnosti teleskopických řad, a poté uvedu další příklad.

Příklad 19. Najděme součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

Podívejme se rovnou na posloupnost částečných součtů řady a vytvořme nějakou hypotézu ohledně s_n. Posloupnost částečných součtů vypadá následovně:

$$s_1 = \frac{1}{2},\ s_2 = s_1 + \frac{1}{6} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3},\ s_3 = s_2 + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4},\ s_4 = s_3 + \frac{1}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

Přirozeným zobecněním přechozích výsledků je, že n-tý částečný součet by mohl vypadat takto: $s_n = \frac{n}{n+1}$. Pomocí vztahu (2.1) snadno ukážeme, že náš odhad je správný: $s_1 = \frac{1}{2} = a_1$ a $s_n - s_{n-1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} = a_n$. Máme tedy explicitní vyjádření s_n a můžeme přikročit k určení součtu řady, spočtením následující limity:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ je tedy 1.

Právě uvedený postup je správný a vede ke správnému výsledku, ale je založen na heuristickém odhadu s_n, který u složitějších příkladů může být velice obtížný. Jak si ukážeme na této řadě, lze dospět k vyjádření s_n zcela exaktně. Všimněme si, že zřejmě platí

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Pomocí této úpravy spočítejme ještě jednou prvních několik částečných součtů řady:

$$s_1 = 1 - \frac{1}{2},\ s_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3},\ s_3 = s_2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}$$

n-tý člen posloupnosti částečných součtů spočteme následovně:

$$\begin{aligned} s_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Uvědomme se, že jde o konečný součet a ten můžeme přeuzávorkovat zcela libovolně. Pomocí vztahu (2.1) můžeme ještě ukázat, že tento vztah platí, ale není to nutné, protože nyní jsme s_n nijak neodhadovali, jako předtím, nýbrž jsme ho přímo spočítali. Nyní máme s_n a stejně jako výše dopočítáme součet následovně:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

■

Abychom mohli v tomto příkladě spočítat s_n přímo, prováděli jsme rozklad $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Výsledek tohoto rozkladu není náhodným odhadem (jako například první odhad s_n v tomto příkladu), nýbrž ho lze deterministicky určit pomocí metody nazývané rozklad na parciální zlomky. Toto je elementární algebraická metoda, o které může čtenář nalézt více podrobností například v [1, str. 219].

Příklad 20. Najděme součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k(k+1)(k+3)}$.

Pomocí rozkladu na parciální zlomky lze dospět k tomu, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k(k+1)(k+3)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k} - \frac{3}{k+1} + \frac{1}{k+3}\right).$$

Nyní si opět vypíšeme prvních několik členů posloupnosti částečných součtů a pokusíme se určit s_n. To základní co se zde bude dělat je to, že se budeme snažit dostat k sobě členy se stejným jmenovatelem. Mezivýsledky budeme záměrně nechávat ve tvaru součtu a zlomky nebudeme krátit (vždy pouze sečteme zlomky se stejným jmenovatelem), protože jak uvidíme, ukáže se toto jako výhodné. Opět připomínám, že se zde jedná pouze o konečné součty, to znamená, členy můžeme libovolně přeskupovat a uzávorkovat.

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \\
s_2 &= s_1 + a_2 = \left(\frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{2}{2} - \frac{3}{3} + \frac{1}{5}\right) = \\
&= \frac{2}{1} - \frac{1}{2} - \frac{3}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \\
s_3 &= s_2 + a_3 = \left(\frac{2}{1} - \frac{1}{2} - \frac{3}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{6}\right) = \\
&= \frac{2}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \\
s_4 &= s_3 + a_4 = \left(\frac{2}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{2}{4} - \frac{3}{5} + \frac{1}{7}\right) = \\
&= \frac{2}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_n &= \left(\frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{2}{2} - \frac{3}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{6}\right) + \\
&\quad + \left(\frac{2}{n-1} - \frac{3}{n} + \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{2}{n} - \frac{3}{n+1} + \frac{1}{n+3}\right) = \\
&= \frac{2}{1} + \left(-\frac{3}{2} + \frac{2}{2}\right) + \left(-\frac{3}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{2}{4}\right) + \cdots \\
&\quad + \left(\frac{1}{k} - \frac{3}{k} + \frac{2}{k}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{3}{n} + \frac{2}{n}\right) + \\
&\quad + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{3}{n+1}\right) + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} = \\
&= \frac{2}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}
\end{aligned}$$

Součet řady nyní dopočteme opět snadno z definice následovně:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{n(n+1)(n+3)} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right) = \frac{7}{6}.$$

Pokusme se zobecnit a formalizovat demonstrovaný postup výpočtu s_n. Nejdříve si označíme $b_k = \frac{1}{k}$, s tímto označením můžeme psát

$$\frac{2}{k} - \frac{3}{k+1} + \frac{1}{k+3} = 2b_k - 3b_{k+1} + 0b_{k+2} + 3b_{k+2}.$$

Potom lze postup výpočtu s_n schematicky zachytit následující tabulkou: (sloupce představují členy posloupnosti $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ a čísla v nich koeficienty, se kterými jsou tyto členy postupně přidávány do částečných součtů)

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & \dots & b_k & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n & b_{n+1} & b_{n+2} & b_{n+3} \\
2 & -3 & 0 & 1 & & & & & & & & & & & & \\
 & 2 & -3 & 0 & 1 & & & & & & & & & & & \\
 & & 2 & -3 & 0 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & & 2 & -3 & 0 & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & \ddots & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & & \ddots & 0 & \ddots & & & & & & \\
 & & & & & & & \ddots & -3 & \ddots & & & & & & \\
 & & & & & & & \ddots & 2 & \ddots & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & & & & & & \\
 & & & & & & & & & 2 & -3 & 0 & 1 & & & \\
 & & & & & & & & & & 2 & -3 & 0 & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & & 2 & -3 & 0 & 1 & \\
 & & & & & & & & & & & & 2 & -3 & 0 & 1
\end{array}$$

Z této tabulky ihned vidíme, které členy $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ se v s_n odečtou, a které tam zůstanou. ■

V tomto a předchozím příkladě jsme pokaždé měli konvergentní řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, u níž jsme nejdříve a_k přepsali na součet několika zlomků, které měly ve jmenovateli pouze lineární člen n, a poté jsme poměrně snadno určili s_n. Obecněji o tom, za jakých podmínek to je možné, hovoří následující věta.

Věta 23. *Mějme koeficienty* $c_0, \ldots, c_m$*, posloupnost* $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ *a řadu* $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$*, kde* $A_k = c_0 a_k + c_1 a_{k+1} + \cdots + c_m a_{k+m}$*. Potom je-li* $\sum_{k=0}^{m} c_k = 0$*, tak pro* $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq m$ *platí:*

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{l=0}^{k-1} c_l \right) a_k + \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{l=k}^{m} c_l \right) a_{n+k}.$$

Důkaz. Znění této věty dokážeme tak, že členy řady $A_1, \ldots, A_n$ přímo sečteme. Protože nás zajímá součet $A_1 + \cdots + A_n$, napíšeme si členy $A_1, \ldots, A_n$ pod sebe následujícím způsobem a poté všechna čísla v takto vzniklé „tabulce“ sečteme. Budeme je sčítat postupně po diagonálách (zleva do prava), protože díky předpokladu $\sum_{k=0}^{m} c_k = 0$ se nám část sčítanců vynuluje a zbytek dá přesně to co chceme.

$$\begin{aligned}
A_1 &= c_0 a_1 + c_1 a_2 + c_2 a_3 + \cdots + c_{m-1} a_m + c_m a_{m+1} \\
A_2 &= c_0 a_2 + c_1 a_3 + c_2 a_4 + \cdots + c_{m-1} a_{m+1} + c_m a_{m+2} \\
A_3 &= c_0 a_3 + c_1 a_4 + c_2 a_5 + \cdots + c_{m-1} a_{m+2} + c_m a_{m+3} \\
&\vdots \\
A_m &= c_0 a_m + c_1 a_{m+1} + c_2 a_{m+2} + \cdots + c_{m-1} a_{m+m-1} + c_m a_{m+m} \\
A_{m+1} &= c_0 a_{m+1} + c_1 a_{m+2} + c_2 a_{m+3} + \cdots + c_{m-1} a_{m+m} + c_m a_{m+m+1} \\
&\vdots \\
A_n &= c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + c_2 a_{n+2} + \cdots + c_{m-1} a_{m+m-1} + c_m a_{n+m}
\end{aligned}$$

Můžeme tedy psát:

$$\begin{aligned}
A_1 + \cdots + A_n = {} & (c_0 a_1) + (c_0 a_2 + c_1 a_2) + (c_0 a_3 + c_1 a_3 + c_2 a_3) + \cdots \\
& + (c_0 a_m + \cdots + c_{m-1} a_m) \\
& + \underbrace{(c_0 a_{m+1} + \cdots + c_m a_{m+1}) + \cdots + (c_0 a_n + \cdots c_m a_n)}_{=0} \\
& + (c_1 a_{n+1} + \cdots c_m a_{n+1}) + \cdots + (c_m a_{n+m}) = \\
= {} & \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{l=0}^{k-1} c_l \right) a_k + \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{l=k}^{m} c_l \right) a_{n+k}
\end{aligned}$$

Závorky jsou přidány pouze pro názornost, nejsou zde nijak nutné. Čtenář, který nevidí, jak jsme dospěli k jednotlivým součtům, nechť si znovu prohlédne diagonální schéma v předchozím příkladě. $\square$

Definice 7. O řadě $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ z předchozí věty, splňující její předpoklady budeme hovořit jako o teleskopické řadě.

Předchozí věta nám dává přímo návod, jak pro teleskopické řady určit n-tý člen posloupnosti částečných součtů, a tím i návod, jak sečíst takovou řadu. Na závěr této kapitoly o teleskopických řadách se podívejme ještě na jeden příklad.

Příklad 21. Určeme součet řady $\sum_{k=2}^{\infty} \ln \frac{k^2-1}{k^2}$. Předpis řady si nejdříve trochu upravíme pomocí toho, co víme o logaritmech, a navíc si ještě řadu přeindexujeme, aby její součet začínal od jedné.

$$\sum_{k=2}^{\infty} \ln \frac{k^2-1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (\ln k - 2\ln(k+1) + \ln(k+2)).$$

Pro výpočet tohoto příkladu využijeme větu 23. V tuto chvíli je pro nás $A_k = \ln \frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2}$, což jsme upravili na $A_k = \ln k - 2\ln(k+1) + \ln(k+2)$. Vidíme, že tato řada splňuje předpoklady věty 23 a my můžeme spočítat rovnou n-tý částečný součet

$$\begin{aligned} s_n &= 1 \cdot \ln 1 + (1-2)\ln 2 + (-2+1) \cdot \ln(n+1) + 1 \cdot \ln(n+2) \\ &= -\ln 2 + \ln \frac{n+2}{n+1}. \end{aligned}$$

Součet už dopočítáme snadno z definice:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2} = \lim_{n \to +\infty} \left(-\ln 2 + \ln \frac{n+2}{n+1} \right) = -\ln 2.$$

$\blacksquare$

2.1.3 Hypergeometrické řady

Definice 8. Posloupnost $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ se nazývá hypergeometrická, právě když existují polynomy $u(k)$ a $v(k)$ tak, že pro každé přirozené k lze podíl dvou po sobě následujících členů posloupnosti vyjádřit ve tvaru $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{u(k)}{v(k)}$. Řadu budeme nazývat hypergeometrickou, pokud jí příslušná posloupnost bude hypergeometrická.

Pro sčítání hypergeometrických řad lze za jistých podmínek použít tzv. Gosperův algoritmus. To je algoritmus, který využívá pouze algebraických operací s polynomy a je též formalizovatelný do podoby počítačového programu. Algoritmus rozhodne, zda posloupnost částečných součtů hypergeometrické posloupnosti je také hypegeometrickou posloupností a pokud ano, najde její předpis [5]. Součet řady je pak možné určit jako její limitu. Algoritmus svou složitostí překračuje záběr této práce. Ač je svou povahou elementární, rozhodně jeho aplikaci nelze považovat za jednoduchou, proto se jím dále nebudeme zabývat a podíváme se pouze na speciální případ řad typu $\sum P(k)q^k$, kde $P(k)$ je polynom a $q \in (0,1)$ a jejichž součet lze nalézt mnohem jednodušší metodou.

Příklad 22. Nalezněme součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$. Vyšetřeme nejprve konvergenci této řady. Jedná se o řadu s kladnými členy, můžeme použít například limitní verzi odmocninového kritéria věta 13. Musíme tedy spočítat následující limitu:

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\frac{k}{2^k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\sqrt[k]{k}}{\sqrt[k]{2^k}} = \frac{1}{2} < 1^{\ddagger}.$$

Pomocí odmocninového kritéria jsme ukázali, že tato řada je absolutně konvergentní, neboli že její součet je nějaké kladné reálné číslo. Pokusme se jej najít. Při určování součtu této řady budeme postupovat podobně jako v předchozích příkladech, s tím rozdílem, že místo členů posloupnosti částečných součtů si vypíšeme prvních několik členů řady, které pak sečteme a tím určíme s_n, pomocí něhož pak spočteme součet řady. Toto se ukáže výhodné i z toho důvodu, že tato metoda se nechá snadno zobecnit, jak uvidíme za chvíli.

‡Pro důkaz, že $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{k} = 1$ viz poznámka 19 na straně 30.

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\\
a_2 &= \frac{2}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\\
a_3 &= \frac{3}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\\
a_4 &= \frac{4}{16} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\\
&\vdots\\
a_k &= \frac{k}{2^k} = \underbrace{\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}}_{k\text{-krát}}
\end{aligned}
$$

Při tomto zápisu jednotlivých členů řady si můžeme všimnout, že se v každém sloupci objevují pod sebou členy geometrické posloupnosti $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n=k}^{\infty}$. Vzhledem k tomu, že vzorec pro součet členů geometrické posloupnosti známe, určíme s_n snadno následujícím výpočtem:

$$
\begin{aligned}
s_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=k}^{n}\frac{1}{2^k} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1}}{1-\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^n} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right) - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.
\end{aligned}
$$

Máme vyjádřený n-tý částečný součet a stejně jako v ostatních příkladech, součet řady zjistíme spočtením limity $\lim_{n\to+\infty} s_n$.

$$
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k} = \lim_{n\to+\infty}\left(2-\frac{n+2}{2^n}\right) = 2
$$

Když jsme sečetli řadu $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}$, můžeme přistoupit k součtu řady $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{2^k}$, pro jejíž sečtení je předchozí výsledek velice užitečný. Ještě jej však musíme zobecnit na součet řady $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}$. Protože víme, že $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k} = 2$ a $s_{n-1} = 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}$, můžeme na základě věty 3 psát

$$
\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^k}}_{=s_{n-1}} = 2 - 2 + \frac{n+1}{2^{n-1}} = \frac{n+1}{2^{n-1}}.
$$

Z tohoto výpočtu je vidět, přoč jsme předtím určovali s_n. Nyní budeme postupovat rychleji a nebudeme určovat s_n, nýbrž rovnou sečteme celou řadu. Opět jako předtím si vypíšeme prvních několik členů řady.

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\
a_2 &= \frac{4}{4} = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} \\
a_3 &= \frac{9}{8} = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \\
a_4 &= \frac{16}{16} = \frac{4}{16} + \frac{4}{16} + \frac{4}{16} + \frac{4}{16} \\
&\vdots \\
a_k &= \frac{k^2}{2^k} = \underbrace{\frac{k}{2^k} + \frac{k}{2^k} + \cdots + \frac{k}{2^k}}_{k-\text{krát}} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Všimneme si, že podobně jako v předchozím případě se ve sloupcích objevují pod sebou členy jisté posloupnosti. Tentokrát se jedná o posloupnost $\left(\frac{n}{2^n}\right)_{n=k}^{\infty}$. Díky tomuto pozorování můžeme součet snadno dopočítat

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=k}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2^{k-1}} = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2^{k+1}} = 4 \sum_{i=2}^{\infty} \frac{i}{2^i} = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6.$$

■

V tomto příkladě jsme viděli, jak sečíst řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ a na základě jejího součtu sečíst řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$. Nyní bychom stejným způsobem odvodili částečný součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$ a na jeho základě určili součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{2^k}$. Obecně jsme tedy schopni na základě částečného součtu řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^l}{2^k}$ určit osučet řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{l+1}}{2^k}$. Je zřejmé, že základ 2 ve jmenovateli zde nemá žádnou speciální roli, protože umíme sečíst geometrickou řadu s libovolným kvicitentem $|q| < 1$. V důsledku jsme tedy popsaným algoritmem schopni sečíst každou řadu $\sum_{k=1}^{\infty} k^l q^k$ a odtud už je jenom krok k avizovanému výsledku tedy sečtení řady $\sum_{k=1}^{\infty} P(k) q^k$, kde $P(k)$ je polynom a $q \in (0, 1)$. Budeme-li mít polynom $P(k) = a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \cdots + a_1 k + a_0$ můžeme potom řadu $\sum_{k=1}^{\infty} P(k)q^k$ přepsat následovně:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(k)q^k = \sum_{k=1}^{\infty}(a_n k^n + \cdots + a_1 k + a_0)q^k = a_n \sum_{k=1}^{\infty} k^n q^k + \cdots + a_1 \sum_{k=1}^{\infty} k q^k + \sum_{k=1}^{\infty} q^k.$$

A to je součet řad, z nichž umíme každou sečíst.

2.2 Neelementárně sčítatelné řady

Další typy řad jsme schopni sčítat pouze s nějakým použitím výsledků z diferenciálního nebo integrálního počtu, jejichž znalost u čtenáře této práce nepředpokládám. Často však jde o použití jednoho izolovaného výsledku a další odvozování už má elementární charakter. Ukažme si několik takových příkladů.

Příklad 23. Určeme součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. [6]

Součet této řady se obvykle hledá pomocí tzv. Fourierových řad a Parsevalovy rovnosti, což je způsob správný a naprosto korektní (na rozdíl od metody, kterou zde ukážu), ale to rozhodně není metoda, kterou bych nazval elementární. My si ukážeme způsob elementárnější (i když z dnešního hlediska ne zcela korektní), pocházející od Leonharda Eulera, který jako první nalezl součet této řady pomocí právě této metody. Metoda je založena na vztahu mezi kořeny a koeficienty konečných polynomů a předpokládá, že lze tyto vztahy zobecnit na „nekonečné“ polynomy (a zde je právě ona nekorektnost). Výsledek diferenciálního počtu, který zde potřebujeme, je rozvoj funkce sinus v tzv. Taylorovu řadu se středem v nule.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \text{ pro } x \in (-\infty, +\infty) \quad (2.2)$$

Toto je příklad tzv. funkční řady, což se pro čtenáře seznámeného s číselným řadami nejsnadněji chápe jako součet řady s parametrem, v tomto případě x. To, že vzorec (2.2) platí, nechávám čtenáři k uvěření, případně k samostatnému nastudování například zde [1, str. 188], protože není v možnostech ani cílem této práce zabývat se podrobněji teorií Taylorových řad. Nyní přejděme k samotnému součtu řady.

Nejdříve uvažme kvadratickou rovnici s kořeny x_1, x_2, zřejmě platí:

$$a_2(x - x_1)(x - x_2) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

Z Viètových vztahů známe následující vztah mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice:

$$\frac{a_0}{a_2} = x_1x_2, \ -\frac{a_1}{a_2} = x_1 + x_2, \text{ tudíž } -\frac{a_1}{a_0} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}.$$

analogicky i pro kubickou rovnici:

$$a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

$$-\frac{a_0}{a_3} = x_1x_2x_3, \ \frac{a_1}{a_3} = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \ -\frac{a_1}{a_0} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$$

Podobný vztah by platil i pro rovnici čtvrtého stupně a dalších. Obecně lze psát

$$-\frac{a_1}{a_0} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{x_k} \tag{2.3}$$

pro

$$a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0.$$

Nyní přichází problematické místo této sčítací metody, protože vlastnost (2.3) platnou pro konečné polynomy budeme aplikovat na „nekonečný“ polynom (2.2). Vezměme vztah (2.2) a pro $x \neq 0$ je možno psát:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots ,$$

a použitím substituce $x := \sqrt{t}$ můžeme přepsat rovnici $\frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}} = 0$ následovně:

$$0 = \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}} = 1 - \frac{t}{3!} + \frac{t^2}{5!} - \frac{t^3}{7!} + \cdots . \tag{2.4}$$

Protože rovnice $\sin x = 0$ má všechny kořeny ve tvaru $x = k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$, bude mít rovnice (2.4) kořeny ve tvaru $t_k = k^2\pi^2$ (protože $\sqrt{t} = k\pi$), kde $k \in \mathbb{N}$ (nula není kořenem této rovnice).

Na základě toho, co víme o vztahu kořenů a koeficientů rovnice (2.3), učiníme podobný závěr pro „nekonečný“ polynom následovně:

$$\frac{1}{6} = -\frac{a_1}{a_0} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \cdots$$

a vynásobením π^2 získáme požadovanou rovnost:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Výsledek, který jsme zde získali, je správný, ačkoliv jsme k němu došli metodou, která je nekorektní.

Jak se ukazuje, můžeme předchozí výsledek použít k odvození součtů dalších řad ve tvaru $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2l}}$ Ukážeme si případ $l = 2$, který zároveň ukazuje, jak tuto metodu použít pro další hodnoty l.

Máme součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ a odvodíme pomocí něj součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$. Budeme opět využívat znalosti o konečných polynomech a aplikovat tyto vlastnosti na „nekonečné“ polynomy. Když jsme sčítali řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, zajímal nás podíl $\frac{a_1}{a_0}$. Nyní budeme pracovat s podílem $\frac{a_2}{a_0}$. Podobnými úvahami jako v předchozím případě je možné odvodit následující vztah:

$$\frac{a_2}{a_0} = \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1 x_3} + \cdots + \frac{1}{x_2 x_3} + \frac{1}{x_2 x_4} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1} x_n} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=k+1}^{n} \frac{1}{x_k x_l} \qquad (2.5)$$

pro

$$a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Podívejme se ještě jak vznikají výrazy $\frac{1}{x_k x_l}$ v (2.5). Můžeme si všimnout, že dvojice čísel ve jmenovateli jsou dvouprvkové kombinace kořenů polynomu stupně n.

Abychom zjistili součet $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ musíme začít se součinem řad

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} = \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^4}{36}.$$

Sumy na levé straně roznásobíme člen po členu (to je zde bez problému možné vzhledem k nezápornosti těchto řad, podrobnosti viz věta o tzv. Cauchyově součinu [2, str. 312]) a součin $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2}$ bude vypadat následovně:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\frac{\pi^4}{36} & = & 1 & + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{9} & + & \frac{1}{16} & + & \cdots \\
& + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} & + & \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} & + & \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} & + & \cdots \\
& + & \frac{1}{9} & + & \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4} & + & \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} & + & \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{16} & + & \cdots \\
& + & \frac{1}{16} & + & \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} & + & \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{9} & + & \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{16} & + & \cdots \\
& \vdots & & & & & & & & &
\end{array}$$

Můžeme si všimnout že na „diagonále“ vznikají prvky řady, kterou chceme sečíst, pokud bychom tedy uměli sečíst ostatní prvky mimo „diagonálu“, mohli bychom už snadno dopočítat součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$. Podíváme-li se pozorněji na prvky „nad diagonálou“ všimneme si, že se jedná o čísla $\frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{l^2}$, kde $k, l \in \mathbb{N}$ a $k < l$, a navíc díky tomu, že se jedná o dvouprvkové kombinace kořenů, se tam každé takové číslo vyskytuje právě jednou.

Nyní využijeme vztah (2.5), který jsme odvodili pro konečné polynomy, a opět ho aplikujeme na „nekonečný polynom“. Víme totiž, že kořeny rovnice (2.4) jsou ve tvaru $t_k = k^2\pi^2$, kde $k \in \mathbb{N}$, toto když dáme dohromady se vztahem (2.5), získáme rovnost

$$\frac{\pi^4}{120} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{l^2},$$

což je součet všech čísel nad „diagonálou“, který nás zajímá. Nyní už máme vše, co potřebujeme, a můžeme počítat:

$$\frac{\pi^2}{36} = 2 \cdot \frac{\pi^4}{120} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4},$$

z toho

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Součet $\frac{\pi^4}{120}$ musíme brát dvakrát, protože $\frac{\pi^4}{120}$ je součet pouze těch čísel nad „diagonálou“.

Na základě znalosti součtu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ jsme tedy určili součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$. Analogicky bychom z tohoto výsledku mohli odvodit součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}$, to však již provádět nebudeme. Eulerova metoda sčítání řad tvořených převrácenými sudými mocninami přirozených čísel nedává vzorec, jak spočítat $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2l}}$, ale pouze návod, jak k hodnotě součtu dojít [4]. Navíc o tomto postupu můžeme hovořit jako o rekurentním, protože součet řady s k v nějaké mocnině můžeme najít jen na základě znalosti součtu řad s menšími l.

Další relativně elementární metoda (opět je založena na použití izolovaného výsledku z pokročilé analýzy), kterou je možné sečíst řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, je tzv. Bernoulliova metoda, kterou čtenář nalezne v [6]. ■

Příklad 24. Určeme součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots$ na základě znalosti hodnoty součtu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Označme si $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2}$ a $L = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$. Protože obě tyto řady jsou konvergentní (dokonce absolutně), platí: $S + L = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, navíc určitě platí: $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24}$. Takže $L = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{3}{24}\pi^2$. ■

Příklad 25. Sečtěme řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{1}{1} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \frac{1}{25} + \cdots$. Všimněme si, že všechny liché členy této řady jsou záporné a sudé členy kladné. Na základě tohoto poznatku a na základě toho, že tato řada konverguje absolutně, můžeme tuto řadu rozdělit na rozdíl dvou řad, jejichž součet známe z předchozího příkladu, následovně:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = S - L = \frac{\pi^2}{24} - \frac{3\pi^2}{24} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

■

Stejně, jako jsme při odvozování součtu řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ použili Taylorovu řadu fce sin můžeme využít i rozvojů dalších funkcí. Ukážeme si užití řady $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, a to pro speciální případ $x = 1$.

Příklad 26. Najděme součety řad $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!}$ a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!}$.

[4]Obecný vzorec lez odvnodt též, ale pro jeho složitost ho zde neuvádím.

Začneme s řadou $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!}$. Vzhledem k tomu, co víme o faktoriálech, můžeme předpis řady upravit následovně:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!}.$$

Řadu přečíslujeme pomocí substituce $l = k - 1$, čímž získáme řadu $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}$ a to už je řada, jejíž součet známe, tudíž můžeme psát $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} = \mathrm{e}$.

Nyní se podívejme na součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!}$. Budeme postupovat podobně jako u předchozí řady - upravíme předpis řady, přečíslujeme a tím řadu upravíme na řadu, jejíž součet už snadno nalezneme.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k-1)!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l+1}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l}{l!} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} = \mathrm{e} + \mathrm{e} = 2\mathrm{e}.$$

Podobně jako u hypergeometrických řad lze tento postup zobecnit pro řady typu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(k)}{k!}$, kde $P(k)$ je polynom. ■

2.3 Příklady s řadami

Příklad 27. Z bodu A směrem k bodu B vzdáleného 20 kilometrů vyrazí na cestu muž zároveň se psem. Muž se pohybuje rychlostí 4 km/h, pes 30 km/h. Pes doběhne do bodu B, tam se otočí a běží zpět k muži (který za tu dobu o kousek popošel). U něj se otočí a běží zpět do bodu B. Takto běhá, dokud muž také nedorazí do bodu B. Kolik kilometrů pes naběhá?

Tento příklad lze řešit dvěma způsoby. První způsob je založen na tom, že si spočteme, jak dlouho trvá muži cesta z A do B, což je pět hodin, a potom již snadno dopočítáme, kolik kilometrů naběhá pes, protože známe rychlost, kterou se pohybuje, i čas, po který se pohybuje. Z těchto dvou informací snadno dopočítáme, že pes naběhá 150 kilometrů.

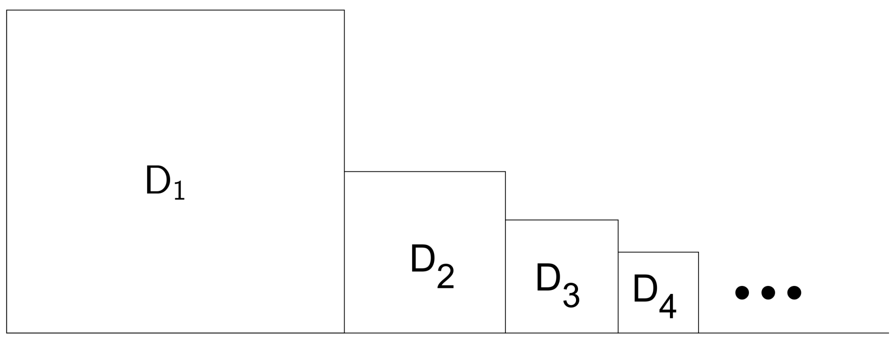
Druhý způsob je mnohem pracnější a delší, proto ho zde nebudu uvádět celý, ale ukážu jeho hlavní myšlenku a tím i využití řad při jeho řešení. Dráhu psa rozdělíme na dvě části. V jedné části budou délky úseků, které naběhá pes, když běží od pána do B, a v druhé části budou délky úseků, které naběhá pes, když běží od B k pánovi. Ukazuje se, že každou z těchto dvou částí je možné sečíst jako geometrickou řadu. Sečtením těchto dvou řad získáme výsledek, který jsme spočetli před chvílí. Rovnost obou výsledků, je pak opět důkazem součtu geometrické posloupnosti, jako tomu bylo i v příkladu 15. ■

Příklad 28. Mějme vedle sebe nekonečně domů, tak jak je zobrazeno na obrázku 2.3. Přední stěna každého domu je čtvercová. Dům D_1 je dlouhý 10 metrů, dům D_2 je dlouhý 5 metrů, k-tý dům je dlouhý $\frac{10}{k}$ metrů. Jak je dlouhý chodník vedoucí okolo těchto domů a kolik barvy by bylo potřeba na natření fasády všech domů za předpokladu, že jeden litr barvy stačí na natření jednoho metru čtverečního fasády?

Délku chodníku vedoucího kolem domů spočteme jako součet délky jednotlivých domů následovně:

$$10 + 5 + \frac{10}{3} + \frac{10}{4} + \ldots + \frac{10}{k} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{10}{k} = 10 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Vidíme, že se zde objevuje harmonická řada, která je divergentní, takže platí, že délka chodníku je nekonečná.



Obrázek 2.3: Obrázek k příkladu 28

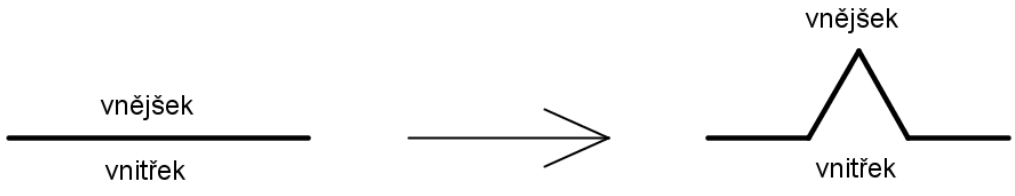
Abychom zjistili objem barvy, kterou budeme potřebovat, je třeba nejdříve spočítat plochu, kerou chceme natřít. Plocha, kterou budeme natírat, je dána součtem ploch předních stěn všech domů. Pro plochy jednotlivých fasád zřejmě platí: $D_1 = 100$, $D_2 = 25$, $D_3 = \left(\frac{10}{3}\right)^2$, ..., $D_k = \left(\frac{10}{k}\right)^2$, což po sečtení dává:

$$100+25+\left(\frac{10}{3}\right)^2+\ldots+\left(\frac{10}{k}\right)^2+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{10}{k}\right)^2=100\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=100\cdot\frac{\pi^2}{6}.$$

Na natření fasády všech domů bude potřeba $100 \cdot \frac{\pi^2}{6} \doteq 165$ litrů barvy.

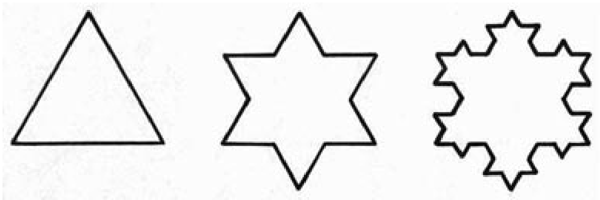
Zamyslíme-li se nad výsledkem tohoto příkladu, je docela zajímavé, že jeden objekt může mít nekonečnou délku, ale konečný obsah. V tomto příkladě máme vedle sebe nekonečně mnoho domů s konečnými rozměry, které tvoří nekonečně dlouhou ulici, přesto na jejich natření stačí pouze konečné množství barvy. V následujícím příkladě se seznámíme s objektem, jehož obvod je nekonečný, obsah je konečný, a na rozdíl od naší ulice je tento objekt omezený. ■

Příklad 29. Určeme obsah Kochovy sněhové vločky. Kochova sněhová vločka je fraktál (přesnou definici nechávám čtenáři k samostatnému nastudování, pro pochopení příkladu není nutné přesně vědět, co je fraktál), který vzniká z rovnostranného trojúhelníka, délku jehož strany si označíme a, nekonečným opakováním (iterací) následující operace: rozdělíme hranici na maximální úsečky (ve smyslu inkluze) a každou z nich nahradíme podle schématu



Obrázek 2.4: Vznik Kochovy sněhové vločky

V každém kroku zvětšujeme obsah a obvod vznikajícího útvaru připojením stále většího počtu podobných trojúhelníků. V nultém kroku vezmeme rovnostranný trojúhelník (obrázek 2.5 vlevo), v prvním kroku „připojíme centrálně“ ke každé straně základního trojúhelníka trojúhelník o straně délky $\frac{a}{3}$ (tak po prvním kroku vznikne „Davidova hvězda“, viz obrázek 2.5 uprostřed). Poté „přilepíme“ ke každé z $3 \cdot 4$ stran rovnostranné trojúhelníky o straně délky $\frac{a}{9}$ (viz obrázek 2.5 vpravo) atd. Tento proces se opakuje nekonečněkrát.



Obrázek 2.5: První tři iterace Kochovy sněhové vločky

Nejdříve spočítáme obsah Kochovy vločky. Snadno se nechá spočítat, že obsah rovnostranného trojúhelníka o straně a je roven $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Obsah nulté iterace Kochovy vločky je $S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, obsah druhé iterace je roven $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{3}\right)^2$, ve třetí iteraci $S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{3}\right)^2 + 3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{9}\right)^2$. Obecně v k-té iterai je obsah

$$S_k = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \ldots + 3 \cdot 4^{k-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{3^k}\right)^2 =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left(1 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{4}{9} + \ldots + \frac{4^{k-1}}{9^{k-1}}\right)\right).$$

Nyní když máme S_k, můžeme limitním přechodem spočítat S, což je obsah celé vločky.

$$S = \lim_{k \to +\infty} S_k = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left(1 + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}\right)$$

$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}$ je geometrická řada s kvocientem $\frac{4}{9}$ a její součet je $\frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9}{5}$. Obsah celé Kochovy vločky je tedy

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left(1 + \frac{3}{5}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{5}a^2.$$

Nyní už zbývá jen spočítat obvod hranice. Na rozdíl od obsahu délku hranice nebudeme počítat pomocí řady, ale určíme ji jako limitu posloupnosti délek hranic jednotlivých iterací. Podívejme se na obvod podrobněji. Označíme-li stranu základního trojúhelníka opět a, je obvod nulté iterace p_0 roven $3a$. V první iteraci vzroste obvod o $3 \cdot \frac{a}{3}$ (přilepujeme tři menší trojúhelníky) na $p_1 = \left(\frac{4}{3}\right) p_0$. Při každém dalším kroku délka každé strany roste přilepením menšího trojúhelníčku na $\frac{4}{3}$ své velikosti a totéž platí i pro obvod: $p_2 = \frac{4}{3}p_1, \ldots$. Proto jsou obvody postupně vznikajících útvarů rovny členům posloupnosti:

$$\left(3a, 3a\frac{4}{3}, 3a\left(\frac{4}{3}\right)^2, \ldots, 3a\left(\frac{4}{3}\right)^k, \ldots\right).$$

Abychom určili délku hranice Kochovy vločky, stačí už jen spočítat limitu této posloupnosti:

$$\lim_{k \to +\infty} 3a\left(\frac{4}{3}\right)^k = +\infty,$$

protože $a > 0$. Vidíme tedy, že délka hranice Kochovy vločky je nekonečná. Čtenář si jistě rozmyslí, že lze vyslovit i silnější tvrzení tvrzení: nekonečná je i délka hranice Kochovy vločky mezi libovolnými dvěma jejími body. ■

2.4 Sčítání divergentních řad

V této kapitole se podívám na sčítání divergentních řad a mimo jiné ukážu, jak přiřadit řadě $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}$ součet. Téměř veškerá teorie v této kapitole je čerpána z [3]. Více o sčítání divergentních řad je možno nalézt v knize Divergent Series od G.H. Hardyho.

Mnohým čtenářům by se mohl zdát název této kapitoly paradoxní, přesto divergentní řady a jejich sčítání mají různé aplikace (např. v astronomii). Divergentní řady, na které se chci zaměřit v této kapitole, byly na dlouhou dobu z matematiky vypuzeny, protože matematici docházeli při neopatrné práci s nimi ke sporným výsledkům (stejně jako třeba při práci s nekonečně malými veličinami). Co se stane při nekorektní práci s divergentní řadou, ukážu v následujícím příkladu.

Příklad 30. Označme $s = 1+2+4+8+\cdots = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}$. Při tomto označení je možno psát $s-1 = 2+4+8+\cdots$. Pokud si nedáme pozor, snadno dojdeme k chybnému výsledku, protože $s = 1+2+4+8+\cdots = 1+2(1+2+4+\cdots)$, neboli $s = 1+2s$. Vyřešíme-li tuto rovnost v $\mathbb{R}$, dospějeme k výsledku $s = -1$. Chyba spočívá v tom, že součet řady může být i nekonečný, proto je třeba tuto rovnici řešit v $\mathbb{R}^*$, kde má druhé – správné – řešení $+\infty$. ■

Představy o tom, jak přiřazovat součet divergentním řadám, vznikaly zvolna spolu s objevy příslušných sčítacích postupů, které dnes obvykle nazýváme sčítací metody. Od sčítacích metod se požaduje, aby konvergentní řadě přiřadily její (obyčejný) součet (tzv. regularita sčítací metody, pokud metoda zachovává i součty $+\infty$ a $-\infty$, mluví se o tzv. silné regularitě). Druhým požadavkem je netriviálnost sčítací metody: měla by sečíst alespoň jednu divergentní řadu. Dalším přirozeným požadavkem na sčítací metodu je zachování platnosti věty o součtu v aritmetice řad (věta 5). Jinak bychom požadavkům regularity a netriviálnosti mohli vyhovět třeba tak, že bychom každé oscilující řadě přiřadili součet 0. Pak by však 5 neplatila, protože jinak by např.

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} \left((-1)^k + \frac{1}{2^k} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 0 + 1 = 1,$$

což je pro nás samozřejmě nepřijatelné. Všechny jmenované požadavky splňuje řada metod, my si zde ukážeme tu patrně nejjednodušší z nich. Uvědomíme-li si, že platí následující vztah:

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| < 1 : \frac{1}{1+x} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^{k-1},$$

můžeme definovat nově součet následovně:

$$(N) \sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{x \to 1-} \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{k-1}.$$

U této metody lze dokázat její regularitu, my se podíváme na to, že je netriviální. Sečteme řadu $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} = \lim_{x\to 1-}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}x^{k-1} = \lim_{x\to 1-}\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}.$$

Vezmeme-li řadu $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}$, lze za předpokladu existence součtu dospět k jeho hodnotě $\frac{1}{2}$ i následujícím postupem. Označíme $s = 1-1+1-\cdots$, dospějeme k rovnici $s = 1 - s$, která má v $\mathbb{R}^*$ řešení $s = \frac{1}{2}$.

Neexistuje sčítací metoda, která by každé řadě přiřadila součet. Pro každou řadu můžeme najít sčítací metodu, která ji sečte, ale nikdy nebude fungovat pro všechny řady najednou.

Závěr

V této práci jsem dosáhl většiny vytyčených cílů. Teorii konvergence řad se mi podařilo konzistentně vyložit v jiném pořadí, než je obvyklé, ve shodě se záměrem, aby byl čtenář od počátku seznámen s pojmy, se kterými bude pracovat. Všechny výsledky v této práci jsem se snažil odvozovat elementárními metodami. U některých příkladů to nebylo možné, ty jsou ovšem jasně odděleny od ostatních příkladů a vždy se v nich využívá pouze nějaký izolovaný výsledek z matematické analýzy a další odvozování je již na elementární úrovni. Ve druhé kapitole (Sčítání řad) jsem shrnul všechny základní metody sčítání řad. Cením si především rozšíření teorie teleskopických řad.

Vzhledem k elementární povaze odvozování se domnívám, že tuto práci si mohou přečíst již studenti na střední škole, kteří jeví zájem o tuto část matematiky. Druhou skupinou čtenářů by mohli být vysokoškolští studenti, kteří v této práci naleznou trochu jiný pohled na řady a hlavně na problematiku sčítání.

Čtenář, kterého by toto téma zaujalo, by mohl na něj navázat zaměřením se na pokročilejší kritéria konvergence nebo neelementární metody sčítání řad.

Literatura

[1] VESELÝ, Jiří. *Matematická analýza pro učitele.* První díl. Vyd. 2., upr. Praha: Matfyzpress, 2001. ISBN 80-85863-62-6.

[2] VESELÝ, Jiří. *Matematická analýza pro učitele.* Druhý díl. Vyd. 2., upr. Praha: Matfyzpress, 2001. ISBN 80-85863-62-6.

[3] VESELÝ, Jiří. Sčítání divergentních řad. In: *Světonázorová výchova v matematice.* Sborník vybraných referátů z letních škol MPS JČSMF. Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1987, s. 169-186.

[4] JARNÍK, Vojtěch. *Diferenciální počet I.* 4. vyd. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1955.

[5] HORA, Jaroslav. Gosperův algoritmus pro určení součtu řady. In: *7. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol.* Mariánské lázně: Jednota českých matematiků a fyziků, 2000, s. 89-94.

[6] MOŠNA, František. The sum of one series.*Sutra: International Journal of Mathematical Science Education.* 2010, vol. 3, no. 1, 8-15. ISSN 0974 3340.

[7] *Riemann hypothesis.* In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2013-04-25]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_hypothesis

[8] *EulerMascheroni constant.* In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikime-

dia Foundation, 2001- [cit. 2013-05-08]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/Euler%E2%80%93Mascheroni_constant