Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Matúš Čellár

Podmíněná rozdělení a podmíněné střední hodnoty

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2013

Na tomto mieste by som sa rád poďakoval doc. RNDr. Danielovi Hlubinkovi, Ph.D. za čas, ktorý mi venoval a postrehy, ktoré mi pri písaní značne pomohli. Pod jeho vedením bolo pracovanie na bakalárskej práci príjemným zážitkom.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Podmíněná rozdělení a podmíněné střední hodnoty

Autor: Matúš Čellár

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Tématem práce jsou podmíněná rozdělení a podmíněné střední hodnoty, jejich zavedení a základní vlastnosti. Začneme definicí podmíněné pravděpodobnosti a ukážeme některá tvrzení, která budeme demonstrovat na příkladu. Odtud přejdeme k podmiňování náhodným jevem a diskrétní náhodnou veličinou. V obecném případě si pomůžeme definicí podmíněné střední hodnoty jakožto náhodní veličiny, ukážeme její vlastnosti, způsoby vyjádření a fakt, že zavedení v diskrétním případě není ve sporu s obecnou definicí. Dále odvodíme za jakých předpokladů existuje podmíněné rozdělení náhodné veličiny a v závěru si vyřešíme několik teoretických problémů.

Klíčová slova: podmíněné rozdělení, podmíněná střední hodnota, regulární podmíněné rozdělení, Radonova-Nikodýmova věta

Title: Conditional distributions and conditional expectations

Author: Matúš Čellár

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This paper discusses conditional distributions and conditional expectations, their introduction and basic properties. We begin with the definition of conditional probability, show a few theorems and demonstrate their application on an example. From there we move on to the conditioning with respect to random events and discrete random variables. In the general case we help ourselves with the definition of conditional expectation as random variable, show its properties, ways of expression and the fact that the introduction in the discrete case does not lead to a contradiction with the general definition. Then we deduce the criteria that have to be met for the conditional distribution to exist and in the last part we solve a number of theoretical problems.

Keywords: conditional distribution, conditional expectation, Radon-Nikodým theorem, regular conditional distribution

Názov práce: Podmienené rozdelenia a podmienené stredné hodnoty

Autor: Matúš Čellár

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci bakalárskej práce: doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Témou práce sú podmienené rozdelenia a podmienené stredné hodnoty, ich zavedenie a základné vlastnosti. Začneme definíciou podmienenej pravdepodobnosti a ukážeme niektoré tvrdenia, ktoré budeme demonštrovať na príklade. Odtiaľ prejdeme k podmieňovaniu náhodným javom a diskrétnou náhodnou veličinou. Vo všeobecnom prípade si pomôžeme definíciou podmienenej strednej hodnoty ako náhodnej veličiny, ukážeme jej vlastnosti, spôsoby vyjadrenia a fakt, že zavedenie v diskrétnom prípade nie je v spore so všeobecnou definíciou. Ďalej odvodíme za akých predpokladov existuje podmienené rozdelenie náhodnej veličiny a v závere si vyriešime niekoľko teoretických problémov.

Kľúčové slová: podmienené rozdelenie, podmienená stredná hodnota, Radonova-Nikodýmova veta, regulárne podmienené rozdelenie

Obsah

Úvod

Podmieňovanie má veľký význam v teoretických odvetviach pravdepodobnosti ako aj v jej aplikáciách. Je intuitívne jasné ako podmieňovať javmi s kladnou pravdepodobnosťou. Pri podmieňovaní náhodnými veličinami sa objavuje nutnosť podmieňovania javmi $[X = x]$, ktoré môžu mať aj nulovú pravdepodobnosť (ako je tomu napríklad pri náhodných veličinách so spojitým rozdelením). Teória podmienenej pravdepodobnosti v tomto prípade nestačí a musíme vybudovať pojem podmienenej strednej hodnoty a podmienenej pravdepodobnosti vzhľadom k σ-algebre. Od nich je jednoduché prejsť k podmieňovaniu náhodnou veličinou a podmienenému rozdeleniu. Pri zavádzaní týchto pojmov sa obraciame na poznatky z teórie miery. Vo svojej práci ukazujem postupné budovanie tejto teórie a v závere jej aplikáciu na jednoduché problémy. Základom je podmienená pravdepodobnosť, s ktorou si vystačíme pri podmieňovaní náhodnými javmi a diskrétnymi náhodnými veličinami.

Kapitola 1

Podmienená pravdepodobnosť

Buď $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ pravdepodobnostný priestor, A,B ľubovoľné javy z $\mathcal{A}$. Často nás zaujíma podmienená pravdepodobnosť javu A za podmienky B — pravdepodobnosť, že nastane jav A, pričom predpokladáme, že nastal jav B. Túto pravdepodobnosť značíme $\mathsf{P}(A|B)$.

Definícia 1. *Buď $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pravdepodobnostný priestor A,$B \in \mathcal{A}$ také, že $P(B) > 0$. Potom definujeme podmienenú pravdepodobnosť javu A za podmienky B ako*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{1.1}$$

Poznámka. Všimnime si, že v definícii podmienenej pravdepodobnosti je podmienka $\mathsf{P}(B) > 0$ veľmi dôležitá, pretože inak by sme vo vzorci (1.1) mali v menovateli 0 a teda dostávame nedefinovaný výraz. Mohli by sme sa pokúsiť využiť limitný prechod $P(B_n) \to 0$, ale nie je jasné, čo by sme vo všeobecnom prípade dostali. Zatiaľ sme ale neukázali, že $\mathsf{P}(A|B)$ je naozaj pravdepodobnosť. To plynie z nasledujúcej vety.

Veta 1. *Buď $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pravdepodobnostný priestor, $B \in \mathcal{A}$ taký, že $P(B) > 0$. Potom $(\Omega, \mathcal{A}, P(\cdot|B))$ je pravdepodobnostný priestor.*

Dôkaz. Potrebujeme ukázať, že:

1. $\mathsf{P}(A|B) \geq 0, A \in \mathcal{A}$,
2. $\mathsf{P}(\emptyset|B) = 0, \mathsf{P}(\Omega|B) = 1$,
3. $\forall \{A_n\}_{n=1}^{\infty}, A_n \in \mathcal{A}$, splňujúcu $\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$ platí, že:

$$\mathsf{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n|B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n|B).$$

Využitím toho, že P je pravdepodobnostná miera na $\mathcal{A}$ a $\mathsf{P}(B) > 0$ dostávame:
ad (1): zvoľme ľubovoľnú $A \in \mathcal{A}$, potom

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)} \geq 0.$$

ad (2):

$$\mathsf{P}(\emptyset|B) = \frac{\mathsf{P}(\emptyset \cap B)}{\mathsf{P}(B)} = \frac{\mathsf{P}(\emptyset)}{\mathsf{P}(B)} = 0, \quad \mathsf{P}(\Omega|B) = \frac{\mathsf{P}(\Omega \cap B)}{\mathsf{P}(B)} = \frac{\mathsf{P}(B)}{\mathsf{P}(B)} = 1.$$

ad (3): buď $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ako v (3). Potom

$$\mathsf{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n|B) = \frac{\mathsf{P}(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \cap B)}{\mathsf{P}(B)} = \frac{\mathsf{P}(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B))}{\mathsf{P}(B)}.$$

Keďže P je pravdepodobnostná miera na $\mathcal{A}$ a javy $A_n \cap B$ sú disjunktné môžeme ďalej upraviť:

$$\frac{\mathsf{P}(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B))}{\mathsf{P}(B)} = \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n \cap B)}{\mathsf{P}(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathsf{P}(A_n \cap B)}{\mathsf{P}(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n|B).$$

❑

Definícia 2. *Buď* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *pravdepodobnostný priestor, A,B ľubovoľné javy z* $\mathcal{A}$*. Povieme, že javy A,B sú nezávislé práve vtedy, keď* $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$*.*

Poznámka. Pri podmieňovaní nezávislým javom platí nasledujúci vzťah:

$$\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A) \Leftrightarrow A, B \text{ sú nezávislé javy a } \mathsf{P}(B) > 0.$$

Tento vzťah bude mať svoje analógie aj neskôr pri podmieňovaní náhodnými veličinami a podmienenej strednej hodnote.

Stačí si uvedomiť, že z platnosti $\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A)$. Potom nutne $\mathsf{P}(B) > 0$ a platí, že

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)} \Leftrightarrow \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A \cap B).$$

Teda javy A,B sú nezávislé.

Naopak, keď $\mathsf{P}(B) > 0$ a A,B sú nezávislé javy. Potom

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)} = \frac{P(A) \cdot \mathsf{P}(B)}{\mathsf{P}(B)} = \mathsf{P}(A).$$

Nasledujúca veta má veľký význam pri počítaní s podmienenými pravdepodobnosťami, ako si ukážeme neskôr na príklade.

Veta 2 (O úplnej pravdepodobnosti)**.** *Buď* $A \in \mathcal{A}$*, I indexová množina, ktorá je konečná, alebo spočítateľná. Nech* $\{B_i\}_{i \in I}$ *je disjunktný rozklad* Ω*, t.j.* $\forall i \neq j : B_i \cap B_j = \emptyset$ *a* $\bigcup\limits_{i \in I} B_i = \Omega$*, kde* $\forall i : P(B_i) > 0$*. Potom platí:*

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A|B_i) \cdot P(B_i).$$

Dôkaz. Z definície podmienenej pravdepodobnosti a predpokladu, že $\forall i\ \mathsf{P}(B_i) > 0$ dostávame, že

$$\mathsf{P}(A|B_i) \cdot \mathsf{P}(B_i) = \mathsf{P}(A \cap B_i).$$

Z toho, že $\{B_i\}_{i \in I}$ je disjunktný rozklad máme $\forall i \neq j$, že

$$(A \cap B_i) \text{ sú disjunktné a } \bigcup_{i \in I}(A_i \cap B) = A.$$

Odtiaľ

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}\left(\bigcup_{i \in I}(A \cap B_i)\right) = \sum_{i \in I} \mathsf{P}(A \cap B_i) = \sum_{i \in I} \mathsf{P}(A|B_i) \cdot \mathsf{P}(B_i).$$

□

Príklad. Majme nasledujúci pokus. Hádžeme mincou, až pokým nepadne hlava. Potom hádžeme šesťstennou kockou toľkokrát, koľkokrát sme hádzali mincou. Aká je pravdepodobnosť, že aspoň raz padne šestka?

Označme:
A jav, že hodíme aspoň jednu šestku pri našom pokuse
A^C jav, že žiadnu šestku nehodíme
B_k jav, že hlava padla pri k-tom hode mincou

$B_k, k \in \mathbb{N}$ tvorí rozklad Ω, pretože hádzanie mincou končí po tom ako prvý krát padne hlava, teda javy sú disjunktné a aj vyčerpávajú všetky možnosti.

Spočítajme pravdepodobnosti využité vo vete 2 o úplnej pravdepodobnosti:
$\mathsf{P}(A^C|B_k) = (\frac{5}{6})^k$ ... vieme, že kockou hádžeme k-krát, nechceme aby padla šestka
$\mathsf{P}(B_k) = (\frac{1}{2})^{k-1}(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^k$ ... musí padnúť $(k-1)$-krát znak a potom hlava
Využitím vety o úplnej pravdepodobnosti dostávame:

$$1 - \mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A^C) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(A^C|B_k) \cdot \mathsf{P}(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^k = \frac{5}{7}.$$

Teda odpoveďou na našu otázku je $\mathsf{P}(A) = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$.

Kapitola 2

Náhodné veličiny podmienené náhodným javom

Podmienenú pravdepodobnosť využívame aj pri skúmaní náhodných veličín. Ich rozdelenie môžeme podmieňovať náhodným javom, ale aj inými náhodnými veličinami. Zaujímať nás budú aj vlastnosti podmienených rozdelení.

Definícia 3. *Buď $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (S, \mathcal{S})$ náhodná veličina, $B \in \mathcal{A}, \mathsf{P}(B) > 0$ ľubovoľný náhodný jav s kladnou pravdepodobnosťou. Podmieneným rozdelením X pri B rozumieme pravdepodobnostnú mieru $\mathsf{P}_{X|B}(A) = \mathsf{P}(X \in A|B), A \in \mathcal{S}$. Buď ďalej X reálna náhodná veličina, potom podmienenou distribučnou funkciou X pri B nazývame funkciu $F(x|B) = \mathsf{P}_{X|B}(X \leq x) = \mathsf{P}(X \leq x|B), x \in \mathbb{R}$. Ak je distribučná funkcia $F(x|B)$ absolútne spojitá, potom jej derivácia $f(x|B) = F'(x|B)$ je podmienená hustota X pri B.*

Poznámka. Ak položíme $B = \Omega$, tak dostávame pôvodnú nepodmienenú distribučnú funkciu.

Príklad. Nech náhodná veličina X má exponenciálne rozdelenie s parametrom $\lambda > 0$. Toto rozdelenie sa využíva napríklad pri modelovaní doby čakania na danú udalosť. Vo fyzike sa využíva konkrétne pre modelovanie dĺžky života rádioaktívneho atómu. Spočítajme teda jej rozdelenie za podmienky, že sa atóm do času $t_0 > 0$ nerozpadne.

X má exponenciálne rozdelenie s parametrom $\lambda > 0$, teda X má spojité rozdelenie s hustotou

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}, x > 0.$$

Potom môžeme spočítať distribučnú funkciu X

$$F(x) = \mathsf{P}(X \leq x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \lambda \cdot e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}, x > 0.$$

Ďalej počítajme podmienenú distribučnú funkciu X za podmienky $[X > t_0]$

$$F(x|X > t_0) = \mathsf{P}(X \leq x|X > t_0) = \frac{\mathsf{P}(X \leq x, X > t_0)}{\mathsf{P}(X > t_0)}.$$

Pre prípad, že $x \leq t_0$ dostávame v čitateli 0, pre $x > t_0$ máme

$$\frac{\mathsf{P}(X \leq x, X > t_0)}{\mathsf{P}(X > t_0)} = \frac{F(x) - F(t_0)}{F(t_0)} = \frac{e^{-\lambda t_0} - e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda t_0}} = 1 - e^{-\lambda(x - t_0)}.$$

Dostávame výslednú podmienenú distribučnú funkciu a podmienenú hustotu X za podmienky $[X > t_0]$ spočítame jej deriváciou

$$\begin{aligned} F(x|X > t_0) &= 1 - e^{-\lambda(x-t_0)}, && x > t_0, \\ f(x|X > t_0) &= F'(x|X > t_0) = \lambda \cdot e^{-\lambda(x-t_0)}, && x > t_0. \end{aligned}$$

Odtiaľ vidíme, že X podmienená javom $[X > t_0]$ má rovnaké rozdelenie ako náhodná veličina $Y = X + t_0$.

Definícia 4. *Buď X reálna náhodná veličina a A buď jav s kladnou pravdepodobnosťou. Definujeme podmienenú strednú hodnotu X za podmienky A ako*

$$\mathsf{E}(X|A) = \int_\Omega X \, \mathrm{d} \, \mathsf{P}_{X|A},$$

ak má výraz napravo zmysel.

Poznámka. Z vety 1 plynie, že $\mathsf{P}_{X|A}$ je opäť pravdepodobnostná miera. Teda využitím definície podmienenej strednej hodnoty $\mathsf{E}\,(X|A)$ zisťujeme, že má rovnaké vlastnosti ako nepodmienená stredná hodnota (linearitu, monotóniu, …).

Veta 3. *Buď X reálna náhodná veličina, pre ktorú je $\mathsf{E}\,|X| < \infty$ a A buď jav s kladnou pravdepodobnosťou. Potom pre podmienenú strednú hodnotu platí*

$$\mathsf{E}(X|A) = \frac{\mathsf{E}(X \cdot I_A)}{\mathsf{P}(A)},$$

ak má jedna strana zmysel a kde I_A značí indikátor javu A (náhodnú veličinu $I_A(\omega) = 1, \omega \in A$ a $I_A(\omega) = 0$ inak).

Dôkaz. Ukážme tvrdenie najprv pre $X = I_B$, kde B je ľubovoľná.

$$\mathsf{E}\,(X|A) = \int_\Omega X \, \mathrm{d} \, \mathsf{P}_{X|A} = \frac{1}{\mathsf{P}(A)} \int_A I_B \, \mathrm{d} \, \mathsf{P} = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\mathsf{E}\,(X \cdot I_A)}{\mathsf{P}(A)}.$$

Ďalej využitím linearity strednej hodnoty a využitím vývojovej metódy dostávame tvrdenie najprv pre lineárnu kombináciu indikátorov. Využitím majoranty $|X|$ pre limitný prechod dostávame tvrdenie pre nezápornú náhodnú veličinu a rozkladom na X^+ a X^- dostávame tvrdenie pre ľubovolnú náhodnú veličinu. □

Poznámka. Ak $F(x|A)$ je podmienená distribučná funkcia X pri A a $f(x|A)$ podmienená hustota X pri A, potom platí

$$\mathsf{E}\,(X|A) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, \mathrm{d}F(x|A) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x|A) \, \mathrm{d}x.$$

Príklad. Spočítajme pre X náhodnú veličinu s normálnym rozdelením s nulovou strednou hodnotou a jednotkovým rozptylom jej podmienenú strednú hodnotu $\mathsf{E}\,(X|X>0)$.

Využitím predchádzajúcej vety

$$\mathsf{E}\,(X|X>0) = \frac{\mathsf{E}\,(X \cdot I_{[X>0]})}{\mathsf{P}(X>0)} = 2 \cdot \mathsf{E}\,(X \cdot I_{[X>0]}) = 2 \cdot \int\limits_0^\infty \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

Ďalej pomocou substitúcie $y = \frac{x}{\sqrt{2}}$ upravíme na tvar:

$$\mathsf{E}\,(X|X>0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty 2y \cdot e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty e^{-z}\,\mathrm{d}z = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Teda naša hľadaná podmienená stredná hodnota X pri $[X>0]$ je $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Kapitola 3

Podmieňovanie diskrétnou náhodnou veličinou

Označme Y počet hodov mincou v príklade na konci prvej kapitoly. Potom Y je diskrétna náhodná veličina s rozdelením daným vzťahom $\mathsf{P}(Y = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$, $k \in \mathbb{N}$. Pravdepodobnosti $\mathsf{P}(A|B_k) = \mathsf{P}(A|Y = k)$ sú čísla závislé na k. Chceli by sme aj v prípade všeobecnej náhodnej veličiny nájsť vzťah, ktorý túto závislosť opisuje. V prípade diskrétnej náhodnej veličiny si pomôžeme podmienenou pravdepodobnosťou.

3.1 Pravdepodobnosť podmienená diskrétnou náhodnou veličinou

Buď teda X ľubovoľná diskrétna náhodná veličina definovaná na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ a buďte $x_k, k \in \mathbb{N}$ všetky hodnoty, ktoré veličina X nadobúda s kladnou pravdepodobnosťou a $B \in \mathcal{A}$ ľubovoľný jav. Definujme zobrazenie $\mathsf{P}_X(B) : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ vzťahom

$$\mathsf{P}_X(B)(\omega) = \mathsf{P}(B|X = x_k), \text{ pre } X(\omega) = x_k. \tag{3.1}$$

Potom $\mathsf{P}_X(B)$ nadobúda hodnoty zo spočetnej množiny $\{\mathsf{P}(B|X = x_k), k \in \mathbb{N}\}$ a platí vzťah

$$[\omega \in \Omega : \mathsf{P}_X(B)(\omega) = \mathsf{P}(B|X = x_k)] = [\omega \in \Omega : X = x_k] \in \mathcal{A}.$$

Vidíme, že $\mathsf{P}_X(B)$ je $\mathcal{A}$-merateľné zobrazenie a teda náhodná veličina. Ďalej budeme potrebovať pojem σ-algebry generovanej náhodnou veličinou, ktorý si hneď zadefinujeme pre všeobecný prípad. Poznamenajme, že veličinu $\mathsf{P}_X(B)$ môžeme písať aj v tvare

$$\mathsf{P}_X(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(B|X = x_k) \cdot I_{[X=x_k]}.$$

Definícia 5. *Buď $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pravdepodobnostný priestor, $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (S, \mathcal{S})$, σ-algebra generovaná náhodnou veličinou X je $\sigma(X) = \{[X \in B], B \in \mathcal{S}\} \subset \mathcal{A}$, kde $[X \in B] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in B\}$.*

Poznámka. Zo vzťahov

$$\left[X \in \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [X \in C_n] \text{ a } [X \in C_1 \setminus C_2] = [X \in C_1] \setminus [X \in C_2], C_k \in \mathcal{S}$$

plynie, že σ-algebra generovaná X je skutočne σ-algebra. Navyše je to najmenšia σ-algebra (v zmysle inklúzie), voči ktorej je zobrazenie $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (S, \mathcal{S})$ merateľné.

Veta 4. *Buď X diskrétna náhodná veličina definovaná na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ a $\mathsf{P}_X(B)$ náhodná veličina definovaná vzťahom* (3.1). *Potom pre ľubovoľné $A \in \sigma(X)$, $B \in \mathcal{A}$ platí*

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \int_A \mathsf{P}_X(B) \,\mathrm{d}\,\mathsf{P}. \tag{3.2}$$

Dôkaz. Keďže $A \in \sigma(X)$, tak existuje $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, že $A = [X \in C]$. Označme javy $[X = x_k]$ ako A_k. Zrejme pre každé $k \in \mathbb{N}$ je buď $A_k \subset A$, alebo $A_k \cap A = \emptyset$, A_k sú disjunktné javy a $\mathsf{P}_X(B)$ je konštantná na A_k. Teda potom

$$\int_A \mathsf{P}_X(B) \,\mathrm{d}\,\mathsf{P} = \int_\Omega \mathsf{P}_X(B) I_A \,\mathrm{d}\,\mathsf{P} = \int_\Omega \mathsf{P}_X(B) I_{[X \in C]} \,\mathrm{d}\,\mathsf{P} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(B|X = x_k) I_{[x_k \in C]} \cdot$$
$$\cdot \mathsf{P}(X = x_k) = \sum_{x_k \in C} \mathsf{P}(B|A_k)\, \mathsf{P}(A_k) = \sum_{x_k \in C} \mathsf{P}(B \cap A_k) =$$
$$= \mathsf{P}\left(B \cap [X \in C]\right) = P(A \cap B).$$

□

Veličina $\mathsf{P}_X(B)$ má význam podmienenej pravdepodobnosti javu B pri danej hodnote náhodnej veličiny X. Chceme tento pojem zovšeobecniť pre ľubovoľnú náhodnú veličinu a to tak, aby platil vzťah (3.2). Ak by sme chceli zadefinovať $\mathsf{P}_X(B)$ pre všeobecnú náhodnú veličinu X vzťahom (3.1), tak hneď v prípade spojitej náhodnej veličiny narážame na problém. Doteraz sme podmienenú pravdepodobnosť definovali iba v prípade, že podmieňujúci jav má kladnú pravdepodobnosť, ale pre spojitú náhodnú veličinu je $\mathsf{P}(X = x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

3.2 Stredná hodnota podmienená diskrétnou náhodnou veličinou

Podobne ako sme zaviedli podmienenú pravdepodobnosť javu B pri danej hodnote X môžeme zaviesť aj podmienenú strednú hodnotu náhodnej veličiny Y pri danej hodnote X v diskrétnom prípade. Tá má význam očakávanej hodnoty Y, ak vieme akú hodnotu nadobudla veličina X.

Buď X diskrétna náhodná veličina definovaná na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ a buďte $x_k, k \in \mathbb{N}$ všetky hodnoty, ktoré veličina X nadobúda s kladnou pravdepodobnosťou. Ďalej nech Y je ľubovolná náhodná veličina taká, že $\mathsf{E}\,|Y| < \infty$. Definujme $\mathsf{E}_X Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ vzťahom

$$\mathsf{E}_X Y(\omega) = \mathsf{E}(Y|X = x_k), \text{ pre } X(\omega) = x_k. \tag{3.3}$$

Podobne ako v prípade $P_X(B)$ sa dá ukázať, že $E_X Y$ je náhodná veličina, ktorú môžeme písať aj v tvare

$$\mathsf{E}_X Y = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\,(Y|X = x_k) \cdot I_{[X=x_k]}.$$

Veta 5. *Buďte X a Y náhodné veličiny ako vyššie a $\mathsf{E}_X Y$ definovaná vzťahom* (3.3). *Potom pre $A \in \sigma(X)$ platí*

$$\int_A \mathsf{E}_X Y \,\mathrm{d}\,\mathsf{P} = \int_A Y \,\mathrm{d}\,\mathsf{P}. \tag{3.4}$$

Dôkaz. Keďže $A \in \sigma(X)$, tak existuje $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, že $A = [X \in C]$. Označme javy $[X = x_k]$ ako A_k. Zrejme pre každé $k \in \mathbb{N}$ je buď $A_k \subset A$, alebo $A_k \cap A = \emptyset$, A_k sú disjunktné javy a $\mathsf{E}_X Y$ je konštantná na A_k. Teda potom aj s využitím vety 3 dostávame

$$\int_A \mathsf{E}_X Y \,\mathrm{d}\,\mathsf{P} = \int_\Omega \mathsf{E}_X Y \cdot I_A \,\mathrm{d}\,\mathsf{P} = \int_\Omega \mathsf{E}_X Y \cdot I_{[X\in C]} \,\mathrm{d}\,\mathsf{P} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\,[Y|X = x_k] \cdot$$
$$\cdot I_{[x_k\in C]}\,\mathsf{P}(X = x_k) = \sum_{x_k\in C} \frac{\mathsf{E}\,[Y \cdot I_{A_k}]}{\mathsf{P}(A_k)}\,\mathsf{P}(A_k) = \sum_{x_k\in A} \mathsf{E}\,(Y \cdot I_{A_k}) =$$
$$= \mathsf{E}\,(Y \cdot I_A) = \int_A Y \,\mathrm{d}\,\mathsf{P}.$$

□

Veličina $\mathsf{E}_X Y$ má význam podmienenej strednej hodnoty Y pri danej hodnote X. Opäť budeme chcieť tento pojem zovšeobecniť aj pre prípad ľubovoľnej náhodnej veličiny X a to tak, aby platil vzťah (3.4). Definícia $\mathsf{E}\,(Y|X)$ pomocou (3.3) nám ale nepomôže, pretože podobne ako v prípade podmienenej pravdepodobnosti B pri danej hodnote X narážame na problém, že by sme podmieňovali javom s nulovou pravdepodobnosťou.

Kapitola 4

Podmienená stredná hodnota

Pri skúmaní rozdelení podmienených všeobecnou náhodnou veličinou sa zaoberáme podmienenými pravdepodobnosťami $\mathsf{P}(B|X)$, kde X je ľubovoľná náhodná veličina a B je daný jav. Pri nepodmienených pravdepodobnostiach platí vzťah $\mathsf{P}(B) = \mathsf{E}\,(I_B)$ a ním sa budeme inšpirovať aj pri definovaní $\mathsf{P}(B|X)$. Preto je rozumné začať od zavedenia podmienenej strednej hodnoty podmienenej náhodnou veličinou. V ďalšom texte budeme potrebovať Radonovu-Nikodýmovu vetu.

Veta 6 (Radonova-Nikodýmova veta)**.** *Nech $\mathcal{A}$ je σ-algebra podmnožín množiny Ω, $\mu(A)$ nech je miera na $\mathcal{A}$ a $\nu(A)$ nech je reálna spočítateľne aditívna funkcia na $\mathcal{A}$. Nech μ je σ-konečná (teda Ω je zjednotenie spočítateľného počtu množín $\Omega_k \in \mathcal{A}$ takých, že $\mu(\Omega_k) < \infty$). Nech ďalej ν je absolútne spojitá vzhľadom k μ (teda ak pre $A \in \mathcal{A}$ je $\mu(A) = 0$, tak pre ľubovoľnú množinu $B \subset A, B \in \mathcal{A}$ je $\nu(B) = 0$). Potom existuje funkcia $f(\omega)$, merateľná vzhľadom k $\mathcal{A}$ a taká, že pre každú množinu $A \in \mathcal{A}$ platí, že*

$$\nu(A) = \int_A f(\omega)\,\mathrm{d}\mu. \tag{4.1}$$

Ak existuje iná funkcia $g(\omega)$, vyhovujúca tvrdeniu vety, potom $f(\omega) = g(\omega)$ skoro všade vzhľadom k miere μ(teda ak A_0 je množina všetkých bodov ω, že $f(\omega) \neq g(\omega)$, potom $\mu(A_0) = 0$). Ak funkcia ν je nezáporná, tak $f(\omega) \geq 0$(skoro všade).

Funkciu $f(\omega)$ vo vzťahu (4.1) *budeme značiť* $\mathrm{d}\nu/\mathrm{d}\mu$ *a budeme ju nazývať deriváciou množinovej funkcie ν podľa miery μ.*

Dôkaz. viď (2) strana 114 □

Poznámka. Kvôli zjednodušeniu zápisu si zaveďme pre $1 \leq p < \infty$ symbol $L_p(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ktorý značí systém náhodných veličín na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ktoré majú konečný p-ty absolútny moment.

Zadefinujme si najskôr pojem podmienenej strednej hodnoty podmienenej σ-algebrou, od ktorého sa potom pohneme k podmieňovaniu náhodnými veličinami.

4.1 Zavedenie podmienenej strednej hodnoty

Definícia 6. *Buď X náhodná veličina na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\mathsf{E}\,|X| < \infty$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ buď σ-algebra. Podmienená stredná hodnota X pri $\mathcal{F}$ je náhodná veličina $\mathsf{E}(X|\mathcal{F})$, ktorá splňuje podmienky:*

1. $\mathsf{E}(X|\mathcal{F}) \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}^{|\mathcal{F}})$

2. $\forall B \in \mathcal{F}$ *platí:*

$$\int_B X \, \mathrm{d}\, \mathsf{P} = \int_B \mathsf{E}(X|\mathcal{F}) \, \mathrm{d}\, \mathsf{P}$$

Naviac pre $A \in \mathcal{A}$ podmienenou pravdepodobnosťou javu A pri $\mathcal{F}$ rozumieme $\mathsf{P}(A|\mathcal{F}) = \mathsf{E}(I_A|\mathcal{F})$.

Poznámka. Symbol $\mathsf{P}^{|\mathcal{F}}$ značí pravdepodobnostnú mieru P zúženú na množiny z $\mathcal{F}$. Prvá požiadavka v predchádzajúcej definícii znamená, že $\mathsf{E}(X|\mathcal{F})$ je $\mathcal{F}$-merateľná a má konečný prvý absolútny moment. Pri overovaní tejto požiadavky sa stačí sústrediť na merateľnosť, pretože konečnosť absolútneho momentu vyplýva z predpokladu $\mathsf{E}\,|X| < \infty$ a druhej požiadavky v definícii.

Zaujímalo by nás, či pre ľubovoľné X a $\mathcal{F}$ existuje $\mathsf{E}(X|\mathcal{F})$ a či je určená jednoznačne. To nám prezradí nasledujúca veta.

Veta 7. *Buď $X \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ buď σ-algebra. Potom $\mathsf{E}(X|\mathcal{F})$ existuje a je určená $\mathsf{P}^{|\mathcal{F}}$-skoro iste jednoznačne (ak Y je iná náhodná veličina vyhovujúca definícii podmienenej strednej hodnoty X pri $\mathcal{F}$, potom existuje $M \in \mathcal{F}, \mathsf{P}(M) = 1$ taká, že $Y(\omega) = \mathsf{E}(X|\mathcal{F})(\omega), \omega \in M$).*

Dôkaz. Položme

$$\nu(A) = \int_A X \, \mathrm{d}\, \mathsf{P}, A \in \mathcal{F}$$

Potom pre ľubovoľnú $A \in \mathcal{F}, \mathsf{P}(A) = 0$ platí, že $\forall B \subset A, B \in \mathcal{F}$ je $\mathsf{P}(B) = 0$ a teda aj $\nu(B) = 0$, z čoho plynie, že ν je absolútne spojitá vzhľadom k $\mathsf{P}^{|\mathcal{F}}$, ktorá je konečná a Radonova-Nikodýmova veta 6 nám dáva existenciu náhodnej veličiny $Y \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}^{|\mathcal{F}})$ tak, že splňuje

$$\nu(B) = \int_B Y \, \mathrm{d}\, \mathsf{P}^{|\mathcal{F}}$$

Dostali sme teda existenciu podmienenej strednej hodnoty pri $\mathcal{F}$, jednoznačnosť $\mathsf{P}^{|\mathcal{F}}$-skoro iste vyplýva tiež z Radonovej-Nikodýmovej vety 6. Naviac je vidieť, že $\mathsf{E}(X|\mathcal{F})$ zodpovedá Radonovej-Nikodýmovej derivácii ν podľa $\mathsf{P}^{|\mathcal{F}}$. □

4.2 Vlastnosti podmienenej strednej hodnoty

Máme teda zaručenú existenciu a jednoznačnosť $\mathsf{P}^{|\mathcal{F}}$-skoro iste. O tom, aké má podmienená stredná hodnota pri $\mathcal{F}$ vlastnosti nám viac povie nasledujúca veta.

Veta 8. *Buďte X,$Y \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, $\mathcal{S} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ σ-algebry. Potom platí:*

1. *a,b,$c \in \mathbb{R} : \mathsf{E}(aX + bY + c|\mathcal{F}) = a\,\mathsf{E}(X|\mathcal{F}) + b\,\mathsf{E}(Y|\mathcal{F}) + c$ s.i.(skoro iste).*

2. *ak $X \leq Y$ s.i., potom $\mathsf{E}(X|\mathcal{F}) \leq \mathsf{E}(Y|\mathcal{F})$ s.i.*

3. *$\mathsf{E}[\mathsf{E}(X|\mathcal{F})] = \mathsf{E}\,X$.*

4. *ak X je $\mathcal{F}$-merateľná, potom $E(X|\mathcal{F}) = X$ s.i.*

5. $E[E(X|\mathcal{F})|\mathcal{S}] = E[E(X|\mathcal{S})|\mathcal{F}] = E(X|\mathcal{S})$ *s.i.*

6. *ak $\sigma(X)$ a $\mathcal{F}$ sú nezávislé systémy javov, potom $E(X|\mathcal{F}) = E\,X$ s.i.*

Dôkaz. Tvrdenia budeme ukazovať hlavne overením požiadavok definície a vyplynú zo skoro istej jednoznačnosti podmienenej strednej hodnoty.

ad (1): $a\,\mathsf{E}\,(X|\mathcal{F}) + b\,\mathsf{E}\,(Y|\mathcal{F}) + c \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P^{|\mathcal{F}})$, volme $B \in \mathcal{F}$

$$\int\limits_B (a\,\mathsf{E}\,(X|\mathcal{F}) + b\,\mathsf{E}\,(Y|\mathcal{F}) + c)\,\mathrm{d}\,\mathsf{P} = a\int\limits_B \mathsf{E}\,(X|\mathcal{F})\,\mathrm{d}\,\mathsf{P} + b\int\limits_B \mathsf{E}\,(Y|\mathcal{F})\,\mathrm{d}\,\mathsf{P} + c\,\mathsf{P}(B) =$$

$$= a\int\limits_B X\,\mathrm{d}\,\mathsf{P} + b\int\limits_B Y\,\mathrm{d}\,\mathsf{P} + c\,\mathsf{P}(B) = \int\limits_B (aX + bY + c)\,\mathrm{d}\,\mathsf{P}$$

Teda $a\,\mathsf{E}\,(X|\mathcal{F}) + b\,\mathsf{E}\,(Y|\mathcal{F}) + c$ vyhovuje definícii podmienenej strednej hodnoty $aX + bY + c$ pri $\mathcal{F}$ a teda platí $a\,\mathsf{E}\,(X|\mathcal{F}) + b\,\mathsf{E}\,(Y|\mathcal{F}) + c = \mathsf{E}\,(aX + bY + c|\mathcal{F})$ (s.i.).

ad (2): tvrdenie dokážeme sporom.
Položme $D = [\mathsf{E}\,(X|\mathcal{F}) > \mathsf{E}\,(Y|\mathcal{F})] \in \mathcal{F}$ z $\mathcal{F}$-merateľnosti podmienených stredných hodnôt a nech $\mathsf{P}(D) > 0$. Potom

$$\int\limits_D X\,\mathrm{d}\,\mathsf{P} = \int\limits_D \mathsf{E}\,(X|\mathcal{F})\,\mathrm{d}\,\mathsf{P} > \int\limits_D \mathsf{E}\,(Y|\mathcal{F})\,\mathrm{d}\,\mathsf{P} = \int\limits_D Y\,\mathrm{d}\,\mathsf{P} \geq \int\limits_D X\,\mathrm{d}\,\mathsf{P} \quad \text{a máme spor.}$$

ad (3):

$$\mathsf{E}\,[\mathsf{E}\,(X|\mathcal{F})] = \int\limits_\Omega \mathsf{E}\,(X|\mathcal{F})\,\mathrm{d}\,\mathsf{P} = \int\limits_\Omega X\,\mathrm{d}\,\mathsf{P} = \mathsf{E}\,X$$

ad (4): tvrdenie je zrejmé priamo z definície.
ad (5): 2. rovnosť plynie z toho, že $\mathsf{E}\,(X|\mathcal{S})$ je $\mathcal{S}$-merateľná, teda aj $\mathcal{F}$-merateľná. Pre prvú rovnosť stačí overiť druhú požiadavku definície:

$$B \in \mathcal{S}: \int\limits_B \mathsf{E}\,[\mathsf{E}\,(X|\mathcal{F})|\mathcal{S}]\,\mathrm{d}\,\mathsf{P} = \int\limits_B \mathsf{E}\,(X|\mathcal{F})\,\mathrm{d}\,\mathsf{P} = \int\limits_B X\,\mathrm{d}\,\mathsf{P} = \int\limits_B \mathsf{E}\,(X|\mathcal{S})\,\mathrm{d}\,\mathsf{P}$$

odtiaľ vidíme, že $\mathsf{E}\,[\mathsf{E}\,(X|\mathcal{F})|\mathcal{S}] = \mathsf{E}\,(X|\mathcal{S})$ (s.i.) zo skoro istej jednoznačnosti podmienenej strednej hodnoty pri $\mathcal{S}$.
ad (6): zrejme $\mathsf{E}\,X \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}^{|\mathcal{F}})$ ako konštanta

$$B \in \mathcal{F}: \int\limits_B \mathsf{E}\,X\,\mathrm{d}\,\mathsf{P} = \mathsf{P}(B) \cdot \mathsf{E}\,X$$

využitím nezávislosti dostávame:

$$\int\limits_B \mathsf{E}\,X\,\mathrm{d}\,\mathsf{P} = \mathsf{P}(B) \cdot \mathsf{E}\,X = \int\limits_\Omega I_B \cdot X\,\mathrm{d}\,\mathsf{P} = \int\limits_B X\,\mathrm{d}\,\mathsf{P}$$

$\square$

Základné vlastnosti máme zhrnuté v predošlej vete. Okrem nich nás ešte budú zaujímať limitné vlastnosti podmienenej strednej hodnoty. Hlavne predpoklady, za ktorých môžeme zamieňať limitu a podmienenú strednú hodnotu. O tom hovorí nasledujúca veta.

Veta 9. *Buďte* $X_n, n \in \mathbb{N}$ *a* X *reálne náhodné veličiny na* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$*,* $X_n \to X$ *skoro iste a* $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ σ*-algebra. Potom platí:*

1. *Ak* $\mathsf{E}\,|X| < \infty$*,* $X_1 \geq 0$ *s.i. a* $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} \geq X_n$ *s.i. Potom* $\mathsf{E}(X_n|\mathcal{F}) \to E(X|\mathcal{F})$ *s.i.*

2. *Ak existuje* $Y \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$*, že* $\forall n \in \mathbb{N}, |X_n| \leq Y$ *s.i. Potom* $\mathsf{E}(X_n|\mathcal{F}) \to E(X|\mathcal{F})$ *s.i.*

Dôkaz. Prvé tvrdenie je obdobou Leviho vety a druhé Lebesgueovej vety o zámene integrálu.

ad(1): Z nerovnosti $0 \leq X_n \leq X, n \in \mathbb{N}$ (s.i.) plynie, že $X_n \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Využitím (2) z predošlej vety 8 máme $0 \leq \mathsf{E}\,(X_1|\mathcal{F}) \leq \mathsf{E}\,(X_2|\mathcal{F}) \leq ...$ s.i.
Položme za $Y = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathsf{E}\,(X_n|\mathcal{F}) \leq \mathsf{E}\,(X|\mathcal{F})$ s.i.
A položme $Z = Y \cdot I_{Y \in \mathbb{R}}$. Keďže $\mathsf{E}\,|X| < \infty$, tak sme Y zmenili nanajvýš na množine miery 0. Zostáva overiť požiadavky definície. Merateľnosť je jasná, pretože ide o supremum merateľných funkcií. Buď teda $B \in \mathcal{F}$ ľubovolná.

$$\int\limits_B Z \,\mathrm{d}\,\mathsf{P} = \int\limits_B \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathsf{E}\,(X_n|\mathcal{F})\,\mathrm{d}\,\mathsf{P}$$

Využitím Leviho vety o zámene integrálu a monotónie dostávame.

$$\int\limits_B \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathsf{E}\,(X_n|\mathcal{F})\,\mathrm{d}\,\mathsf{P} = \int\limits_B \lim_{n \to \infty} \mathsf{E}\,(X_n|\mathcal{F})\,\mathrm{d}\,\mathsf{P} = \lim_{n \to \infty} \int\limits_B X_n \,\mathrm{d}\,\mathsf{P} = \int\limits_B X \,\mathrm{d}\,\mathsf{P}$$

ad (2):
Položme

$${}_*X_n = \inf_{k \geq n} X_k,$$

čo je neklesajúca postupnosť náhodných veličín (v zmysle skoro iste) a ${}_*X_n \to X$ s.i.

$${}^*X_n = \sup_{k \geq n} X_k$$

je nerastúca postupnosť náhodných veličín a ${}^*X_n \to X$ s.i.
Použitím predpokladov dostávame nasledujúce nerovnosti platiace skoro iste

$$0 \leq_* X_1 + Y \leq_* X_2 + Y \leq ... \text{ a naopak } 0 \leq Y -^* X_1 \leq Y -^* X_2 \leq ...$$

Využitím základných nerovností (s.i.) týkajúcich sa infima a suprema dostávame, že

$$({}_*X_n + Y) - Y \leq X_n \leq Y - (Y -^* X_n)$$

$$\mathsf{E}\,({}_*X_n + Y|\mathcal{F}) - \mathsf{E}\,(Y|\mathcal{F}) \le \mathsf{E}\,(X_n|\mathcal{F}) \le \mathsf{E}\,(Y|\mathcal{F}) - \mathsf{E}\,(Y -^* X_n|\mathcal{F})$$

Pravá aj ľavá strana konvergujú podľa linearity a prvej časti dôkazu skoro iste k $\mathsf{E}\,(X|\mathcal{F})$ a dostávame tvrdenie. □

Limitné vlastnosti podmienenej strednej hodnoty sú významné najmä pri dôkazoch tvrdení a umožňujú nám v nich využívať vývojovú metódu. Ako v nasledujúcom dôsledku.

Dôsledok. Buď $X \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, Y reálna náhodná veličina, pre ktoré $X \cdot Y \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a nech $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ je σ-algebra. Ak Y je $\mathcal{F}$-merateľná, potom $\mathsf{E}\,(X \cdot Y|\mathcal{F}) = Y \cdot \mathsf{E}\,(X|\mathcal{F})$ s.i.

Dôkaz. Dôkaz prebehne vývojovou metódou. Začneme najskôr s $A \in \mathcal{F}$, $Y = I_A$. Chceme ukázať, že $I_A\,\mathsf{E}\,(X|\mathcal{F})$ je podmienená stredná hodnota $\mathsf{E}\,(X \cdot I_A|\mathcal{F})$. Zrejme $I_A\,\mathsf{E}\,(X|\mathcal{F}) \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P^{|\mathcal{F}})$. Buď teda $B \in \mathcal{F}$:

$$\int\limits_B I_A\,\mathsf{E}\,(X|\mathcal{F})\,\mathrm{d}\,\mathsf{P} = \int\limits_{A\cap B} \mathsf{E}\,(X|\mathcal{F})\,\mathrm{d}\,\mathsf{P} = \int\limits_{A\cap B} X\,\mathrm{d}\,\mathsf{P} = \int\limits_B I_A \cdot X\,\mathrm{d}\,\mathsf{P}$$

Z linearity podmienenej strednej hodnoty a prvej časti dostávame tvrdenie pre jednoduché náhodné veličiny $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i I_{A_i}, c_i \in \mathbb{R}, A_i \in \mathcal{F}$.
Pre nezáporné X,Y existuje postupnosť jednoduchých náhodných veličín, že $Y_n \nearrow Y$ s.i. Z predchádzajúcej časti a predošlej vety dostávame platnosť tvrdenia pre $X \ge 0, Y \ge 0$ s.i.
Všeobecné X,Y náhodné veličiny potom stačí rozložiť na kladnú a zápornú časť a využiť linearitu podmienenej strednej hodnoty.

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\,(XY|\mathcal{F}) &= \mathsf{E}\,(X^+Y^+|\mathcal{F}) + \mathsf{E}\,(X^-Y^-|\mathcal{F}) - \mathsf{E}\,(X^+Y^-|\mathcal{F}) - \mathsf{E}\,(X^-Y^+|\mathcal{F}) = \\ &= Y^+\,\mathsf{E}\,(X^+|\mathcal{F}) + Y^-\,\mathsf{E}\,(X^-|\mathcal{F}) - Y^-\,\mathsf{E}\,(X^+|\mathcal{F})|\mathcal{F}) - Y^+\,\mathsf{E}\,(X^-|\mathcal{F}) = \\ &= Y\,\mathsf{E}\,(X|\mathcal{F})\end{aligned}$$

Pričom rovnosti platia skoro iste vzhľadom k miere $\mathsf{P}^{|\mathcal{F}}$. □

Od pojmu strednej hodnoty podmienenej σ-algebrou prejdeme jednoducho k pojmu podmienenej strednej hodnoty podmienenej náhodnou veličinou. Jej existencia, jednoznačnosť a vlastnosti vyplývajú z už dokázaných tvrdení.

Definícia 7. *Buď $X \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (S,\mathcal{S})$ náhodná veličina. Podmienenou strednou hodnotou X pri Y rozumieme $\mathsf{E}(X|Y) = \mathsf{E}(X|\sigma(Y))$ a pre $B \in \mathcal{A}$ podmienenou pravdepodobnosťou B pri Y rozumieme $P(B|Y) = P(B|\sigma(Y))$.*

4.3 Vyjadrenia podmienenej strednej hodnoty

V tejto podkapitole sa budeme venovať rôznemu pohľadu na podmienenú strednú hodnotu. Na začiatok budeme potrebovať nasledujúce tvrdenie.

Veta 10. *Buďte* $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (S, \mathcal{S})$, $Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *náhodné veličiny a* $\sigma(Y) \subset \sigma(X)$. *Potom existuje merateľná funkcia* $f : (S, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *taká, že* $Y(\omega) = f(X(\omega)), \omega \in \Omega$.

Dôkaz. viď (3) kapitola 2, §4, Veta 3. □

Buďte teda $X \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, $Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (S,\mathcal{S})$ náhodná veličina. Potom použitím predošlej vety, kde rolu X^* hrá teraz Y a rolu Y^* hrá $\mathsf{E}\,(X|Y)$ dostávame, že existuje merateľná funkcia $f : (S,\mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tak, že $\mathsf{E}\,(X|Y) = f(Y)$ skoro iste. To nám umožňuje položiť nasledujúcu definíciu.

Definícia 8. *Pre* $X \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (S,\mathcal{S})$ *definujeme podmienenú strednú hodnotu* X *pri* $Y = y$ *ako* $\mathsf{E}(X|Y = y) = f(y)$, *kde pre* f *platí* $f(Y) = \mathsf{E}(X|Y)$ *s.i.*
Pre $A \in \mathcal{A}$ *podmienenou pravdepodobnosťou* A *pri* $Y = y$ *rozumieme* $\mathsf{E}(I_A|Y = y)$.

Poznámka. Ak zmeníme $\mathsf{E}\,(X|Y = y)$ na množine P_Y-miery 0, tak dostávame tzv. verziu $\mathsf{E}\,(X|Y = y)$.

Ak poznáme $\mathsf{E}\,(X|Y = y)$ vieme z nej jednoducho zrekonštruovať $\mathsf{E}\,(X|Y)$ (stačí za y dosadiť Y) a naopak. Prirodzenejšie a intuitívnejšie je počítať s $\mathsf{E}\,(X|Y = y)$ ako s funkciou, ktorá opisuje ako sa mení očakávaná hodnota X pri zmene hodnoty Y. Avšak s $\mathsf{E}\,(X|Y)$ ako $\sigma(Y)$-merateľnou náhodnou veličinou sa v teórii lepšie pracuje.

4.4 Príklady

Diskrétne rozdelenie. Buď $Y \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ a X diskrétna náhodná veličina s hodnotami v množine $\{x_1, x_2, ...\}$. V tretej kapitole sme zaviedli podmienenú strednú hodnotu Y pri X ako náhodnú veličinu

$$\mathsf{E}_X\, Y = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\,(Y|X = x_k) \cdot I_{[X=x_k]}.$$

Podľa Vety 5 platí

$$\forall A \in \sigma(X) : \int_A \mathsf{E}_X\, Y \,\mathrm{d}\,\mathsf{P} = \int_A Y \,\mathrm{d}\,\mathsf{P}\,.$$

Zo vzťahu

$$[\omega \in \Omega : \mathsf{E}_X\, Y(\omega) = \mathsf{E}\,(Y|X = x_k)] = [\omega \in \Omega : X = x_k] \in \sigma(X).$$

plynie merateľnosť $\mathsf{E}_X\, Y$ a teda vyhovuje definícii podmienenej strednej hodnoty Y pri X zavedenej v tejto kapitole. Potom $\mathsf{E}_X\, Y = \mathsf{E}\,(Y|X)$ skoro iste a

$$\mathsf{E}\,(Y|X = x_k) = \frac{1}{\mathsf{P}(X = x_k)}\,\mathsf{E}\,(Y \cdot I_{X=x_k}).$$

Pre $x \notin \{x_1, x_2, ...\}$ položíme $\mathsf{E}(Y|X = x) = 0$ a dostávame verziu $\mathsf{E}(Y|X = x)$.

Podobne pre $B \in \mathcal{A}$ sme zaviedli podmienenú pravdepodobnosť B pri danej hodnote X ako

$$\mathsf{P}_X(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(B|X = x_k) \cdot I_{[X=x_k]}.$$

Podľa Vety 4 máme, že

$$\forall A \in \sigma(X) : \int_A I_B \, \mathrm{d}\,\mathsf{P} = \mathsf{P}(A \cap B) = \int_A \mathsf{P}_X(B) \, \mathrm{d}\,\mathsf{P}\,.$$

Teda $\mathsf{P}_X(B)$ vyhovuje definícii podmienenej pravdepodobnosti B pri X, platí $\mathsf{P}(B|X) = \mathsf{P}_X(B)$ skoro iste a

$$\mathsf{P}(B|X = x_k) = \frac{\mathsf{P}(B \cap [X = x_k])}{\mathsf{P}(X = x_k)}.$$

Pre $x \notin \{x_1, x_2, ...\}$ položíme $\mathsf{P}(B|X = x) = 0$ a dostávame verziu $\mathsf{P}(B|X = x)$.

Spojité rozdelenie. Majme náhodný vektor (X,Y) so spojitým rozdelením s hustotou $f_{XY}(x,y), x,y \in \mathbb{R}$. Položme

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)},$$

pre $f_Y(y) > 0$ a 0 inak, kde $f_Y(y)$ je marginálna hustota Y.

Uvedomme si najskôr, že pre $A \in \mathcal{A}$ je $\mathsf{P}(A|Y = y) = h(y)$ pričom $\mathsf{P}(A|Y) = h(Y)$ skoro iste. Využitím vlastností podmienenej pravdepodobnosti a prenosu integrácie dostávame sériu rovností pre ľubovoľné $C = [Y \in D] \in \sigma(Y)$

$$\mathsf{P}(A \cap [Y \in D]) = \int_C I_A \, \mathrm{d}\,\mathsf{P} = \int_C \mathsf{P}(A|Y) \, \mathrm{d}\,\mathsf{P} = \int_{[Y \in D]} h(Y) \, \mathrm{d}\,\mathsf{P} = \int_D h(y) \, \mathrm{d}\,\mathsf{P}_Y(y).$$

Množiny $[Y \in D], D \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ vyčerpávajú $\sigma(Y)$ a je vidno, že na to, aby sme overili, že $h(y)$ je verziou $\mathsf{P}(A|Y = y)$ stačí overiť podmienku

$$\mathsf{P}(A \cap [Y \in D]) = \int_D h(y) \, \mathrm{d}\,\mathsf{P}_Y(y), D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Buď $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ľubovoľná. Ukážeme, že pre $f_{X|Y}(x|y)$ platí nasledujúci vzťah

$$\mathsf{P}([X \in C] \cap [Y \in D]) = \int_D \left[\int_C f_{X|Y}(x|y) \, \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}\,\mathsf{P}_Y(y).$$

Postupne úpravou pravej strany dostávame

$$\int_D \left[\int_C f_{X|Y}(x|y) \, \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}\,\mathsf{P}_Y(y) = \int_D \left[\int_C f_{X|Y}(x|y) \, \mathrm{d}x \right] f_Y(y) \, \mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_{C\times D} f_{X|Y}(x|y) f_Y(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{C\times D} f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mathsf{P}([X\in C]\cap[Y\in D]).$$

Teda sme zistili, že pre každú $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ platí

$$P(X \in C|Y=y) = \int\limits_C f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x \text{ , pre } P_Y\text{-skoro všetky } y.$$

Podobnou cestou môžeme ukázať, že

$$\mathsf{E}\,(X|Y=y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x \text{ , pre } P_Y\text{-skoro všetky } y.$$

Kapitola 5

Podmienené rozdelenia

Máme zadefinované podmienené pravdepodobnosti vzhľadom k σ-algebre. Vo všeobecnom prípade sa ale s týmito náhodnými veličinami nedá pracovať ako s pravdepodobnostnými mierami závislými na ω. To si ukážeme v nasledujúcej časti.

Buďte B_1,B_2,... disjunktné náhodné javy z pravdepodobnostného priestoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ σ-algebra. Potom platí

$$\mathsf{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n|\mathcal{F}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(B_n|\mathcal{F}) \text{ (s.i.)} \tag{5.1}$$

Pri dôkaze sa stačí oprieť o nezápornosť indikátorov a prvú časť vety 9. Dôležité však je, že táto rovnosť je splnená iba v zmysle skoro iste a teda $\mathsf{P}(\cdot|\mathcal{F})(\omega)$ nemusí byť pravdepodobnostná miera. Dokonca ani miera množiny $\omega \in \Omega$, pre ktoré $\mathsf{P}(\cdot|\mathcal{F})(\omega)$ nie je pravdepodobnostná miera, nemusí byť nulová. Keďže ak označíme $\mathcal{N}(B_1,B_2,...)$ množinu tých $\omega \in \Omega$, pre ktoré v (5.1) neplatí rovnosť, tak potom množina ω, pre ktoré $\mathsf{P}(\cdot|\mathcal{F})(\omega)$ nie je pravdepodobnostná miera je

$$\mathcal{N} = \bigcup_{\{B_n\} \subset \mathcal{A}} \mathcal{N}(B_1,B_2,...)$$

$\mathcal{N}$ teda môže byť aj nespočítateľné zjednotenie množín s mierou 0. Preto môže mať kladnú mieru, čo v praktických príkladoch často nastáva. Jednou z možností ako sa tejto situácii vyhnúť je obmedziť sa na regulárne podmienené pravdepodobnosti a ukázať, že pri rozumných predpokladoch regulárne verzie podmienených pravdepodobností existujú.

Definícia 9. *Funkcia $P(\omega, B), \omega \in \Omega, B \in \mathcal{F}$, kde $\mathcal{F}$ je σ-algebra, je regulárna podmienená pravdepodobnosť pri σ-algebre $\mathcal{F}$ práve vtedy, keď*

1. *$\forall \omega \in \Omega : P(\omega, \cdot)$ je pravdepodobnostná miera na $\mathcal{F}$;*

2. *pre každú $B \in \mathcal{F}$ platí, že $P(\omega, B) = P(B|\mathcal{F})(\omega)$ s.i.*

Zaveďme ďalej regulárne podmienené rozdelenie X pri $\mathcal{F}$ ako regulárnu verziu podmienenej pravdepodobnosti $\mathsf{P}(X \in B|\mathcal{F})$. Odtiaľ je potom už len malý krok k regulárnej distribučnej funkcii X pri $\mathcal{F}$.

Definícia 10. *Buď* $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (S, \mathcal{S})$ *náhodná veličina,* $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ *buď* σ*-algebra. Funkcia* $Q(\omega, B), \omega \in \Omega, B \in \mathcal{S}$ *je regulárne podmienené rozdelenie* X *pri* $\mathcal{F}$ *práve vtedy, keď*

1. $\forall \omega \in \Omega : Q(\omega, B)$ *je pravdepodobnostná miera na* $(S, \mathcal{S})$
2. *pre každú* $B \in \mathcal{S} : Q(\omega, B) = \mathsf{P}(X \in B|\mathcal{F})(\omega)$ *s.i.*

Definícia 11. *Pre* X *reálnu náhodnú veličinu a* $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ σ*-algebru definujeme regulárnu distribučnú funkciu* X *pri* $\mathcal{F}$ *ako funkciu* $F(\omega, x), \omega \in \Omega, x \in \mathbb{R}$ *splňujúcu*

1. $F(\omega, x)$ *je pre každé* $\omega \in \Omega$ *distribučná funkcia v* x*.*
2. $\forall x \in \mathbb{R} : F(\omega, x) = P(X \leq x|\mathcal{F})(\omega)$ *s.i.*

Nasledujúca veta nás ubezpečuje, že pojem regulárneho rozdelenia je dostatočne všeobecný, aby nám umožnil vyšetrovať podmienené rozdelenia reálnych náhodných veličín.

Veta 11. *Pre ľubovoľnú reálnu náhodnú veličinu* X *a* σ*-algebru* $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ *existuje regulárna distribučná funkcia* X *pri* $\mathcal{F}$ *a regulárne podmienené rozdelenie* X *pri* $\mathcal{F}$*.*

Dôkaz. viď (3) kapitola 2, §7, Veta 4. □

Záver predchádzajúcej vety možno zovšeobecniť aj na Borelovské priestory, teda merateľné priestory Borelovsky ekvivalentné nejakej Borelovskej podmnožine reálnej priamky.

Definícia 12. *Merateľný priestor* $(S, \mathcal{S})$ *je Borelovský priestor práve vtedy, keď existuje bijekcia* $\varphi : (S, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*, že*

1. $\varphi(S) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
2. φ *je* $\mathcal{S}$*-merateľná*
3. φ^{-1} *je* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*-merateľná*

Veta 12. *Buď* X *náhodná veličina s hodnotami v Borelovskom priestore* $(S, \mathcal{S})$*. Potom existuje regulárne podmienené rozdelenie* X *pri* σ*-algebre* $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$*.*

Dôkaz. Označme φ bijekciu z definície Borelovkého priestoru. Potom $\varphi(X)$ je reálna náhodná veličina vďaka druhej vlastnosti z predchádzajúcej definície. Podľa vety 11 dostávame regulárne podmienené rozdelenie $\varphi(X)$ pri $\mathcal{F}$: $Q(\omega, A), A \subset \varphi(S), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Položme $Q^*(\omega, B) = Q(\omega, \varphi(B)), B \in \mathcal{S}$. Tretia vlastnosť z predošlej definície dáva, že $\varphi(B) \subset \varphi(S), \varphi(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ a teda máme dobre definovanú $Q^*(\omega, B)$. Z regularity $Q(\omega, A)$ vyplýva, že $Q^*(\omega, B)$ je pravdepodobnostná miera pre každé $\omega \in \Omega$. Zostáva ešte overiť druhú požiadavku definície regulárneho podmieneného rozdelenia. Buď $B \in \mathcal{S}$ ľubovoľná. Potom využitím toho, že φ je bijekcia dostávame

$$Q^*(\omega, B) = Q(\omega, \varphi(B)) = P(\varphi(X) \in \varphi(B)|\mathcal{F}) = \mathsf{P}(X \in B|\mathcal{F}) \text{ s.i.}$$

Teda $Q^*(\omega, B)$ je hľadané regulárne podmienené rozdelenie X pri $\mathcal{F}$. □

Využitím toho, že úplné separabilné metrické priestory sú Borelovské, dostávame záver.

Dôsledok. Ak X je náhodná veličina s hodnotami v separabilnom úplnom metrickom priestore a $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ je σ-algebra, potom existuje regulárne podmienené rozdelenie X pri $\mathcal{F}$.

Teda rozdelenie náhodnej veličiny s hodnotami v separabilnom úplnom metrickom priestore (ako je napríklad $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)), n \in \mathbb{N}$) môžeme podmieňovať ľubovoľnou náhodnou veličinou a podľa predchádzajúceho dôsledku vieme, že podmienené rozdelenie bude existovať.

Kapitola 6

Problémy

1. problém Buď X reálna náhodná veličina a $\mathcal{F}$ σ-algebra. Potom X a $\mathcal{F}$ sú nezávislé (teda pre každé $B \in \mathcal{F}$ sú X a I_B nezávislé náhodné veličiny) práve vtedy, keď $\mathsf{E}\,(g(X)|\mathcal{F}) = \mathsf{E}\; g(X)$ s.i. pre každú Borelovskú funkciu s $\mathsf{E}\;|g(X)| < \infty$.

Dôkaz. Začneme implikáciou zľava doprava. Teda predpokladáme, že X a $\mathcal{F}$ sú nezávislé. Buď g Borelovská funkcia, pre ktorú $\mathsf{E}\;|g(X)| < \infty$. Potom $g(X)$ je náhodná veličina a $g(X)$ a $\mathcal{F}$ sú nezávislé. Buďte $B \in \mathcal{F}, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ľubovoľná, využitím nezávislosti dostávame

$$P(g(X) \in A,B) = P(g(X) \in A,I_B = 1) = P(g(X) \in A)P(I_B = 1) =$$

$$= P(g(X) \in A)P(B)$$

teda σ-algebry $\sigma(g(X))$ a $\mathcal{F}$ sú nezávislé. Podľa 6. časti z vety 8 dostávame, že $\mathsf{E}\,(g(X)|\mathcal{F}) = \mathsf{E}\; g(X)$ s.i.

Pre druhú implikáciu voľme $B \in \mathcal{F}$ ľubovoľnú. Chceme ukázať, že X a I_B sú nezávislé. Buď teda $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ľubovoľná. Využitím vlastností podmienej strednej hodnoty a predpokladu pre $g(X) = I_{X \in A}$ dostávame

$$P(X \in A, I_B = 1) = \int\limits_{\Omega} I_{[X \in A] \cap B}\, \mathrm{d}P = \int\limits_{B} I_{X \in A}\, \mathrm{d}P = \int\limits_{B} g(X)\, \mathrm{d}P =$$

$$= \int\limits_{B} \mathsf{E}\,(g(X)|\mathcal{F})\, \mathrm{d}P = \int\limits_{B} \mathsf{E}\; g(X)\, \mathrm{d}P = \mathsf{E}\; g(X) \int\limits_{B} \mathrm{d}P = P(X \in A)P(I_B = 1)$$

Využitím tohto záveru dostávame

$$P(X \in A, I_B = 0) = P(X \in A) - P(X \in A, I_B = 1) =$$

$$= P(X \in A) - P(X \in A)P(I_B = 1) = P(X \in A)P(I_B = 0)$$

Teda vidíme, že X a I_B sú nezávislé náhodné veličiny. □

2. problém Buď X nezáporná náhodná veličina $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ σ-algebra. Potom $\mathsf{E}\,(X|\mathcal{F}) < \infty$ s.i. práve vtedy, keď miera $Q(A) = \int\limits_{A} X\, \mathrm{d}P, A \in \mathcal{F}$ je σ-konečná.

Dôkaz. Začneme implikáciou zľava doprava. Predpokladáme, že $\mathsf{E}\,(X|\mathcal{F}) < \infty$ s.i. Potom pre náhodnú veličinu $Y = \mathsf{E}\,(X|\mathcal{F}) \cdot I_{[\mathsf{E}\,(X|\mathcal{F})<\infty]}$ platí $Y = \mathsf{E}\,(X|\mathcal{F})$ s.i. a Y je $\mathcal{F}$-merateľná. Potrebujeme nájsť postupnosť $\{D_n\} \subset \mathcal{F}$ tak, aby $D_n \nearrow \Omega$ a $Q(D_n) < \infty, n \in \mathbb{N}$. Položme

$$D_n = [Y \leq n] \in \mathcal{F}$$

Potom využitím predpokladov máme, že $D_n \nearrow \Omega$ a

$$Q(D_n) = \int\limits_{D_n} X \, \mathrm{d}P = \int\limits_{D_n} \mathsf{E}\,(X|\mathcal{F}) \, \mathrm{d}P = \int\limits_{D_n} Y \, \mathrm{d}P \leq n$$

Teda Q je σ-konečná.

Pre dôkaz opačnej implikácie budeme postupovať sporom. Buď

$$D \in \mathcal{F} : \mathsf{E}\,(X|\mathcal{F})(\omega) = \infty, \omega \in D \text{ a nech } P(D) > 0$$

Vďaka σ-konečnosti si môžeme zobrať $\{A_n\} \subset \mathcal{F}, A_n \nearrow \Omega, Q(A_n) < \infty, n \in \mathbb{N}$. Keďže $D \subset \Omega$, tak existuje $p \in \mathbb{N}$, pre ktoré je $D \subset A_p$. Potom

$$\infty = Q(D) \leq Q(A_p) < \infty \text{ a máme spor.}$$

□

Záver

Táto práca bola zameraná na priblíženie teoretických vlastností podmienených pravdepodobností a stredných hodnôt. Od intuitívneho pojmu podmienenej pravdepodobnosti sme sa cez pojem podmienenej strednej hodnoty vzhľadom k σ-algebre postupne prepracovali až k regulárnym distribučným funkciám a rozdeleniam. Zistili sme, že pre typický prípad podmieňovania náhodnej veličiny s hodnotami v $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)), n \in \mathbb{N}$ ľubovoľnou všeobecnou náhodnou veličinou máme zaručenú existenciu regulárneho podmieneného rozdelenia. Na jednoduchých príkladoch teoretických problémov v poslednej kapitole sme si ukázali aplikáciu dokázaných tvrdení.

Podmieňovanie, ako významná kapitola teórie pravdepodobnosti, je vďačným námetom na ďalšie štúdium. Zaujímať by nás mohlo, ktoré ďalšie vlastnosti pravdepodobnosti podmienenej javom s kladnou pravdepodobnosťou je možné zovšeobecniť aj pre prípad podmieňovania všeobecnou náhodnou veličinou.

Zoznam použitej literatúry

[1] Rényi, A. (1972): *Teorie pravděpodobnosti.* 1. české vydání Academia, Praha.

[2] Štěpán, J. (1987): *Teorie pravděpodobnosti.* 1. vydání Academia, Praha.

[3] Shiryaev, A.N. (1995): *Probability, Second Edition.* Springer, New York. ISBN 0-387-94549-0

[4] Chaumont, L. a Yor, M. (2003) *Exercises in Probability.* Cambridge University Press, Cambridge. ISBN 0-521-82585-7