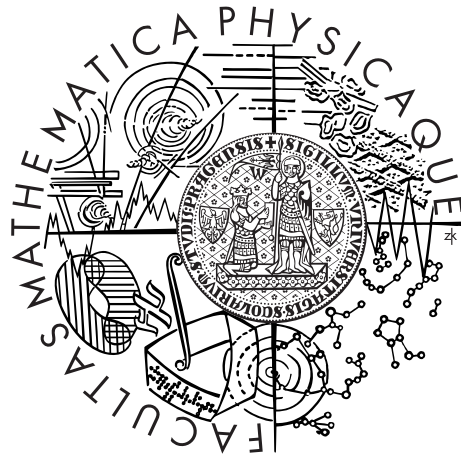


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Bc. Alexander Nikolaev

Modely chování úrokových sazeb

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Tomáš Němeček

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Praha 2013

Nejdřív bych chtěl poděkovat svému spolužákovi a dlouhodobému kamarádovi Františku Žákovi, který mi velmi pomáhal a podporoval mě během mého studia a poskytl mi cenné podněty k první kapitole diplomové práce.

Zvláštní poděkování si zaslouží moje spolužačka Barbora Zuzáková, která měla trpělivost pečlivě si přečíst celou diplomovou práci a opravit mnoho chyb a nepřesností. Nicméně veškerou zodpovědnost za případné nedostatky textu přebírá autor.

Dále bych chtěl poděkovat rodině za její podporu během mého studia. Mé sestře Anastacii Nikolaevové za přečtení a rady nejenom k této práci. Mým rodičům, Natalii Nikolaevové a Nikolaji Nikolaevovi, za morální a finanční podporu během celého mého studia.

V neposlední řadě děkuji svému vedoucímu, který si na mě i přes pracovní vytíženost našel čas.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne

Podpis autora

Název práce: Modely chování úrokových sazeb

Autor: Bc. Alexander Nikolaev

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Tomáš Němeček

Abstrakt: Diplomová práce pojednává o modelech chování úrokových sazeb. V posledních desetiletích jich bylo několik vyvinuto, které se snaží co nejdříve popsat chování výnosové křivky. Základní model byl vyvinut v roce 1977 Vašíčkem, na který následně navázali ostatní. Dnes již existuje velké množství modelů od těch nejjednodušších po ty nejkomplicovanější. Hlavním cílem diplomové práce je seznámit čtenáře nejenom se základním Vašíčkovým modelem, ale také s více sofistikovanými, jako například Brennan-Schwartzův či Longstaff-Schwartzův.

Klíčová slova: Jednofaktorové úrokové modely, Vašíčkův model, Brennan-Schwartzův model, Longstaff-Schwartzův model

Title: Interest Rate Models

Author: Bc. Alexander Nikolaev

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Tomáš Němeček

Abstract: This diploma thesis deals with short-term interest rate models. Many interest models have been developed in the last decades. They focus on accuracy of prediction. The pioneering one was developed by Vasicek in 1977 followed by the work of others. Nowadays these vary in their level of comprehensiveness and technical difficulty. The main aim of the thesis is to introduce not only a basic Vasicek's work but also more sophisticated models such as Brennan-Schwartz or Longstaff-Schwartz.

Keywords: One-factor interest rate models, Vasicek's model, Brennan-Schwartz model, Longstaff-Schwartz model

Obsah

Úvod	2
1 Základní pojmy	4
1.1 Výnosová křivka	4
1.1.1 Tvar výnosové křivky	4
1.2 Faktory	5
1.3 Heuristické odvození stochastické rovnice	5
1.4 Itoův proces	8
1.5 Typy úrokových modelů	8
1.6 Afinní časové struktury	9
1.7 Jaké problémy řeší úrokové modely?	9
1.7.1 Souvislost s tržním rizikem	9
1.7.2 Oceňování dluhopisů a derivátů	10
2 Jednofaktorové úrokové modely	11
2.1 Mertonův model	11
2.2 Vašíčkův model	11
2.2.1 Speciální případy	14
2.2.2 Oceňování opce	16
2.3 Cox-Ingersoll-Rossův (CIR) model	16
2.4 Hull-Whiteův model	17
2.4.1 Rozšíření Vašíčkova modelu	17
2.4.2 Oceňování opcí pomocí rozšířeného Vašíčkova modelu	20
3 Brennan-Schwartzův (BS) model	22
3.1 Popis modelu	22
3.1.1 Oceňování opce	26
3.2 Speciální případ	27
4 Longstaff-Schwartzův (LS) dvoufaktorový model	29
4.1 Obecný popis modelu	29
4.2 Odhad ceny dluhopisu	33
4.2.1 Výnos do splatnosti	35
Závěr	36
Příloha 1: Stanovení ceny 10-letého státního dluhopisu Vašíčkovým modelem.	37
Příloha 2: Modelování předpovědi PRIBOR sazby pomocí CIR modelu	39
Příloha 3: Odhad ceny dluhopisu LS modelem	42
Seznam použité literatury	43

Úvod

V dnešní době mají úrokové sazby obrovský dopad na bankovní trh. Stačí si vzpomenout na manipulaci sazby LIBOR¹, která byla odhalena v létě 2012. LIBOR se často využívá jako referenční úroková sazba. Vzhledem k velkému objemu finančních produktů (zhruba 350 bilionů USD) může mít malá změna úrokové sazby velký dopad na hodnotu finančních aktiv. Snaha mít co nejpřesnější odhady úrokových sazeb vedla k objevu mnoha modelů, jejichž přehled je v tabulce 1. První byl uveden v roce 1973 a je dnes znám po svém objeviteli jako *Mertonův model*. V roce 1977 byl představen Vašíčekův model, který dále sloužil jako základ pro ostatní modely. V současné době neexistuje univerzální model, i když, jak mnozí věří (např. Málek 2005 [10]), je jeho dosažení otázkou času. Osobně si však nemyslím, že by někdo vynalezl univerzální model. Jedná se z mého pohledu o velmi komplikovanou problematiku.

Tabulka 1: Přehled některých úrokových modelů.

Merton (1973)	$dr_t = \alpha dt + \sigma dW_t$
Vašíček (1977)	$dr_t = \alpha(\beta - r_t)dt + \sigma dW_t$
Dothan (1978)	$dr_t = \sigma r_t dW_t$
Brennan-Schwartz (1980)	$dr_t = (\beta + \alpha r_t)dt + \sigma r_t dW_t$
Cox-Ingersoll-Ross (CIR)(1985)	$dr_t = \alpha(\beta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$
Ho-Lee (1986)	$dr_t = \theta_t dt + \sigma dW_t$
Exponential Vašíček (EV)	$dr_t = r_t(\eta_t - a \log r_t)dt + \sigma r_t dW_t$
Black-Derman-Toy (1990)	$d(\log r_t) = (\theta_t + \frac{\sigma_t}{\sigma_t} \log r_t)dt + \sigma_t dW_t$
Hull-White Extended (1990)	$dr_t = [\beta_t - \alpha_t r_t]dt + \sigma_t \sqrt{r_t} dW_t$
Black-Karazinsky (1991)	$d(\log r_t) = \phi_t[\log \mu_t - \log r_t]dt + \sigma_t dW_t$
Geometric Brownian Motion (GBM)	$dr_t = \beta r_t dt + \sigma r_t dW_t$
Marsh-Rosenfeld (1983)	$dr_t = (\beta r_t^{-(1-\gamma)} + \alpha r_t)dt + \sigma r_t^{\gamma/2} dW_t$

Úrokové deriváty jsou finanční instrumenty, jejichž cena závisí na hodnotě úrokové míry, a objem jejich obchodů zdaleka převyšuje všechny ostatní. Patří mezi ně opce a futures na dluhopisy, úrokové swapy, FRA² atd. Pohyb úrokové míry má náhodný charakter, který je možno zapsat stochastickou diferenciální rovnicí.

Na úvod bych se ještě chtěl zmínit o problematice záporných úrokových sazeb, které se začaly objevovat ve zprávách. Tak například v prosinci 2012 se objevila zpráva [15], že dvě největší banky ve Švýcarsku Credis Suisse (CS) a UBS oficiálně oznámily, že na frankových depozitech zavádějí negativní úrok. Neboli ať se klienti připraví na to, že za jejich peníze jim banka nezplatí, ale dokonce musí ji

¹London Interbank Offered Rate je průměrná úroková sazba, za níž si banky jsou ochotny půjčovat na londýnském mezibankovním trhu peníze.

²FRA obchod (Forward Rate Agreement) je smlouva mezi bankou a klientem, jejíž předmětem je dohoda o budoucí úrokové sazbě na určitý termínový vklad nebo úvěr v určitém sjednaném budoucím časovém období.

zaplatit oni jí za to, že peníze drží. Platí se za „pohodlí“, jinak by si lidé museli pořídit domů sejf, vybrat hotovost a při každé větší transakci prokazovat, odkud že ty peníze jsou. Nejedná se přitom o peníze všech klientů, ale o hotovost jiných finančních institucí uloženou na účtech CS a UBS. Banky se tím brání obrovskému přílivu hotovosti, pro kterou už nemají uplatnění.

Modelování úrokových sazeb je velice důležité ve finanční matematice a aktuárských vědách. V posledních desetiletích bylo vyvinuto několik modelů, které se snaží co nejvěrohodněji popsat chování výnosové křivky. Tyto modely většinou využívají aparát z teorie pravděpodobnosti a náhodných procesů. Modely úrokových sazeb se v praxi používají pro predikci výnosové křivky, na jejímž základě se provádí určitá rozhodnutí s cílem maximalizovat zisk či minimalizovat riziko.

V první kapitole jsou zavedeny základní definice a pojmy, které budu používat v diplomové práci. Předpokládáme však, že čtenář je již seznámen se základními pojmy finanční matematiky a zná základy náhodných procesů. Ve druhé kapitole popíšu některé jednofaktorové modely, jež posloužily jako základ pro rozvoj ostatních pokročilých modelů. Ve třetí kapitole se podíváme na Brennan-Schwartzův model, který se liší od ostatních modelů použitím dlouhodobé úrokové sazby. Na závěr je popsán Longstaff-Schwartzův dvoufaktorový model, za jehož základ lze považovat jeden z modelů popsaných ve druhé kapitole.

Jednotlivě modely jsme zkoumali i prakticky s použitím programu *Mathematica 9.0.0.0* k simulaci a ocenění dluhopisu pomocí některých modelů. V přílohách na posledních stránkách práce je popis praktického použití modelů.

V diplomové práci jsme nedávali důraz na množství popsaných modelů, ale zaměřili jsme se na jejich důsledný popis a použitelnost. Doufám, že čtenáři to ocení. Příjemné čtení!

1. Základní pojmy

V této kapitole si zavedeme základní pojmy, se kterými budeme dále pracovat. Ačkoliv předpokládám, že čtenář je již seznámen se základními pojmy finanční matematiky, alespoň podle rozsahu povinných předmětů oboru Finanční matematika na MFF UK. Nicméně považuji za nutné uvést zde pár pojmů pro pochopení látky.

1.1 Výnosová křivka

Vztah mezi výnosem do splatnosti¹ a dobou do splatnosti dluhopisů se obecně označuje jako *výnosová křivka* (*yield curve*). Výnosová křivka vypovídá věrohodně o závislosti výnosu na době splatnosti jen tehdy, je-li konstruována na základě konkrétních dluhopisů lišících se pouze dobou splatnosti, ale jinak přibližně shodnými vlastnosti (typ emitenta, ratingové hodnocení, zdanění apod.). Z tohoto důvodu budeme již v dalším textu uvažovat pouze bezrizikovou úrokovou sazbu. Při vztahování výnosových křivek jednotlivých dluhopisů k vybrané výnosové křivce státních dluhopisů stačí tuto křivku navýšit o hodnotu označovanou jako *kreditní spread* daného dluhopisu.

1.1.1 Tvar výnosové křivky

V odlišných ekonomických situacích jsou různé tvaru výnosových křivek. Ve většině případů bývají sice krátkodobé úrokové míry nižší než dlouhodobé, v některých obdobích je tomu ale naopak. Například v březnu 1980 byly v USA všechny úrokové míry vysoké a krátkodobé vyšší než dlouhodobé, proto křivka klesala. V červenci 1987 byly naopak všechny úrokové míry nízké a krátkodobé nižší než dlouhodobé, tudíž je křivka rostoucí.

Rostoucí tvar výnosové křivky se vyskytuje častěji, proto se nazývá „normální“. Naproti tomu, klesající výnosová křivka se vyskytuje méně často, proto se nazývá „inverzní“. Někdy může být výnosová křivka i konstantní, tj. se stejnou úrokovou mírou pro všechny doby do splatnosti, taková se nazývá „plochá“ (k tomu došlo např. v lednu 1982 v USA). „Vyboulený“ tvar výnosové křivky může nastat předpokládáme-li, že na trhu jsou např. banky, které preferují investice do krátkodobých dluhopisů, investiční fondy preferující investice do dlouhodobých dluhopisů a jen málo institucí upřednostňujících dluhopisy střednědobé a situace na straně nabídky bude „neutrální“. Je tomu tak proto, že oběma koncům výnosové křivky, kde je vyšší poptávka, budou odpovídat vyšší ceny a tím nižší výnosnosti dluhopisů, zatímco v prostřední části se drží nižší ceny (a vyšší výnosy).

Centrální banka také může ovlivnit hodnotu úrokové míry. Chce-li centrální banka oživit ekonomiku, zvýší nabídku peněz, což vede k poklesu úrokových sazeb. Chce-li centrální banka naopak omezit růst inflace, sníží nabídku peněz, což vede k růstu úrokových sazeb. To platí o obecné výši úrokových sazeb, politika centrální banky má ale vliv i na tvar výnosové křivky. Bude-li např. cílem centrální banky

¹Je průměrný roční výnos, který investor získá okamžitým zakoupením dluhopisu za aktuální tržní cenu P a jeho držbou až do data splatnosti.

snížit vysokou inflaci, sníží nabídku peněz a tím dojde ke zvýšení úrokových sazeb. Konkrétně ale dojde především ke zvýšení krátkodobých úrokových sazeb. Současně tento krok bude mít za následek snížení očekávané dlouhodobé inflace a tudíž pokles dlouhodobých sazeb.

V současné době je možnost České národní banky reagovat tímto způsobem na uvedené podněty omezena snahou o plnění Maastrichtských kritérií v souvislosti se vstupem do Evropské unie. Jedním z nich je i udržení výše úrokové míry v určitém daném poměru vzhledem k úrokové míře v Evropské unii. Tudíž pro provádění svojí politiky ztrácí prostor (ve prospěch vlivu Evropské centrální banky).

Výnosová křivka může být ještě ovlivněna vývojem ekonomiky. Jestliže je ekonomika ve fázi růstu, bývá tento růst doprovázen vyšším tempem růstu cen, tj. růstem inflace. To má za následek zvýšení úrokových sazeb. Jestliže je ekonomika ve fázi recese, klesá poptávka po penězích, což má za následek pokles úrokových měr. Krátkodobé úrokové míry přitom na vývoj ekonomiky reagují výraznějšími výkyvy než dlouhodobé.

1.2 Faktory

Faktor obecně označuje přítomnost náhodné složky (zdroj nejistoty) v modelu. Například jednofaktorové modely jsou modely, které mají jednu složku náhody ovlivňující cenu dluhopisu. V takovém modelu jsou ceny dokonale korelovány. Jinými slovy, jestliže známe změnu jedné veličiny (např. bezrizikové sazby $r(t)^2$), pak snadno určíme změnu podkladového aktiva. Uvažujme konkrétní opci, jejíž cena je odvozena z rozdílu mezi roční a pětiletou sporovou sazbou. Jednofaktorové modely zřejmě cenu této opce přecení, neboť předpokládají, že pětiletá úroková míra je více korelovaná s jednoletou, než jak je to ve skutečnosti.

Naproti tomu vícefaktorové modely používají více složek náhodných procesů. V tomto případě změna na vstupu není dokonale korelovaná s výslednou cenou na výstupu. Faktory, jež jsme zvolili na vstupu, musí mít přímý dopad na cenu podkladového aktiva, aby byly schopny co nejpřesněji určit jeho hodnotu. Například Longstaff a Schwartz ve svém modelu, kterému se podrobněji budeme věnovat ve čtvrté kapitole, zahrnují do svého modelu krátkodobou úrokovou sazbu a okamžitý rozptyl změn v této sazbě.

1.3 Heuristické odvození stochastické rovnice

Itoův integrál je srozumitelně popsán v [16]. Zde se budeme zabývat pouze *jednorozměrnou (one-dimensional)* verzí. Uvažujme model růstu populace

$$\frac{dN}{dt} = a(t)N(t), \quad N(0) = N_0 \text{ konstanta,} \quad (1.1)$$

kde $N(t)$ je velikost populace v čase t , a $a(t)$ je relativní růst v čase t . Funkce $a(t)$ není většinou známa a je vyjádřena jako

²V průběhu práce budu také používat ekvivalentní zápis r_t .

$$a(t) = r(t) + \text{”šum”},$$

kde $r(t)$ je skutečný růst či pokles populace bez náhodné složky, který se snažíme odhadnout. Rovnice (1.1) se dá obecněji zapsat jako

$$\frac{dX}{dt} = \mu(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \cdot B_t. \quad (1.2)$$

Na základě mnoha pozorování (např. v inženýrství) můžeme, alespoň zhruba předpokládat, že B_t má následující vlastnosti

- (i) $t_1 \neq t_2 \Rightarrow B_{t_1}$ a B_{t_2} jsou nezávislé,
- (ii) $\{B_t\}$ je stacionární proces, tj. distribuční funkce $\{B_{t_1+t}, \dots, B_{t_k+t}\}$ je nezávislá na t ,
- (iii) $E[B_t] = 0$ pro všechny t .

Nicméně se ukazuje, že žádný rozumný proces splňující podmínky (i) a (ii) v klasickém smyslu neexistuje [16]. Dále se tím zabývat již nebudeme a pokusíme najít místo B_t vhodný stochastický proces. Nechť $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = t$ a přepíšme (1.2) do diskrétní podoby

$$X_{k+1} - X_k = \mu(t_k, X_k) \Delta t_k + \sigma(t_k, X_k) B_k \Delta t_k, \quad (1.3)$$

kde

$$X_j = X(t_j), \quad B_k = B_{t_k}, \quad \Delta t_k = t_{k+1} - t_k.$$

Zaměníme zápis $B_k \Delta t_k$ na $\Delta V_k = V_{t_{k+1}} - V_{t_k}$, kde $\{V_t\}_{t \geq 0}$ je vhodný stochastický proces. Aby V_t mohl splnit předpoklady (i), (ii) a (iii), musí mít V_t *stacionárně nezávislé přírůstky* a *střední hodnotu rovné 0*. Jediný proces, který to splňuje, je *Wienerův proces* W_t [20]. Je definován jako náhodný proces $\{W_t, t \geq 0\}$ s následujícími vlastnostmi:

1. $W_0 = 0$ s.j. a $\{W_t, t \geq 0\}$ má spojité trajektorie.
2. Pro libovolné časové okamžiky $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ jsou přírůstky $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ nezávislé náhodné veličiny.
3. Pro libovolné časové okamžiky $0 \leq t < s$ mají přírůstky $W_s - W_t$ normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem $\sigma^2(s-t)$, kde σ^2 je kladná konstanta. Speciálně, pro každé $t \geq 0$ je $E W_t = 0$ a $\text{var} W_t = \sigma^2 t$.

Položme $V_t = W_t$ a dosazením do (1.3) dostaneme

$$X_k = X_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \mu(t_j, X_j) \Delta t_j + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma(t_j, X_j) \Delta W_j.$$

Ukazuje se, že za rozumných předpokladů limita pravé strany pro $\Delta t_j \rightarrow 0$ existuje a integrál lze zavést, pokud druhý člen budeme chápat jako Itoův integrál vůči Wienerovu procesu:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s.$$

Definice 1. Nechť máme dánu stochastickou bázi $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, (W_t)_{t \geq 0})$, kde (Ω, \mathcal{F}, P) je pravděpodobnostní prostor, W je Wienerův proces, \mathcal{F}_t je kanonická filtrace Wienerova procesu. Nechť $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S, T)$ je množina funkcí

$$f(t, \omega) : [0, \infty] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

takové, že

- (i) $(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega)$ je $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ -měřitelná, kde \mathcal{B} je borelovská σ -algebra na $(0, \infty)$.
- (ii) $f(t, \omega)$ je \mathcal{F}_t -adaptovatelná.
- (iii) $E[\int_S^T f(t, \omega)^2 dt] < \infty$.

Itoův integrál $\int f dW$ se dá zavést i pro větší množinu funkcí než \mathcal{V} . Podmínku (ii) ve výše uvedené definici můžeme přepsat do tvaru:

- (ii)' Nechť existuje rostoucí posloupnost σ -algeber $\mathcal{H}_t : t \geq 0$ takové, že
 - a) \mathcal{B}_t je martingal vůči \mathcal{H}_t a
 - b) f_t je \mathcal{H}_t -adaptovatelná.

Všimněte si, že z a) vyplývá $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{H}_t$. Podstata tohoto rozšíření spočívá v tom, že f_t je závislá na větší množině než \mathcal{F}_t dokud \mathcal{B}_t je martingál vzhledem k minulosti, tj. $f_s : s \leq t$.

Nyní můžeme definovat Itoův proces a zavést pro nás velmi důležité Itoovo lemma.

Definice 2 (Itoův proces). Nechť W_t je Wienerův proces na (Ω, \mathcal{F}, P) . Proces $\{X_t\}$ na (Ω, \mathcal{F}, P) nazveme Itoův proces, jestliže jej lze vyjádřit ve tvaru

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s, \quad (1.4)$$

kde $\sigma \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}$, tak že

$$P \left[\int_0^t \sigma(s, X_s)^2 ds < \infty \text{ pro všechny } t \geq 0 \right] = 1.$$

Předpokládáme dále, že funkce $\mu(s, X_s)$ patří do skupiny \mathcal{H}_t -adaptovatelných funkcí a

$$P \left[\int_0^t |\mu(s, X_s)| ds < \infty \text{ pro všechny } t \geq 0 \right] = 1.$$

Rovnice (1.4) bývá často vyjádřena ve zkrácené formě

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t.$$

Lemma 1 (Itoovo lemma). *Nechť $\{X_t\}$ je Itoův proces tvaru*

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t.$$

Nechť $f(t, x) \in C^2([0, \infty] \times \mathbb{R})$ (dvakrát spojitě diferencovatelná). Potom pro stochastický proces $\{f(t, X_t)\}$ platí³

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)(dX_t)^2 = \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) + \frac{\partial f}{\partial x} \mu(t, X_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sigma^2(t, X_t) \right] dt + \frac{\partial f}{\partial x} \sigma(t, X_t) dW_t, \end{aligned}$$

kde $(dX_t)^2 = (dX_t) \cdot (dX_t)$.

Důkaz Itoova lemmatu a podrobnější konstrukci zavedení Itoova integrálu lze nalézt [16].

1.4 Itoův proces

Obecné schéma finančních modelů ve spojitém čase je *Itoův proces (difuzní proces)* [3]. Jestliže malé změny v proměnné r v čase t značíme dr_t^4 , pak obvyklý zápis tohoto zobecněného Wienerova procesu $\{r_t, t \geq 0\}$ je

$$dr_t = f(r_t, t)dt + \rho(r_t, t)dW_t \quad \text{pro } t \geq 0, \quad (1.5)$$

kde W_t je Wienerův proces. Tento model má driftovou složku $f(r_t, t)dt$ modelující trend a difuzní složku $\rho(r_t, t)dW_t$ modelující volatilitu. Jak uvidíme dále, modely využívané v praxi mají většinou blíže specifikovaný tvar driftového a difuzního koeficientu. Jejich výstupem bývá vyjádření ceny dluhopisu $P(t, s, r)$ a okamžité míry zisku $r(t)$ a tedy následné vyjádření výnosové křivky $R(t, T)$ pomocí těchto koeficientů.

1.5 Typy úrokových modelů

Existují dva odlišné typy úrokových modelů.

Rovnovážné a krátkodobé modely jsou založené na předpokladu fungování ekonomie. Berou v potaz různé preference rizika investorů a snaží se dosáhnout rovnováhy mezi jejich nabídkou a poptávkou po dluhopisech. Nás bude především zajímat, jak ekonomie ovlivňuje časovou strukturu úrokových sazeb. U jednofaktorových modelů to obvykle znamená konstrukci stochastického modelu pro průběh bezrizikové sazby.

³platí $dt \cdot dt = dt \cdot dW_t = dW_t \cdot dt = 0$ a $dW_t \cdot dW_t = dt$.

⁴Méně formální zápis je $\Delta r_t = r_t - r_{t-1}$.

Modely založené na neexistenci arbitráže používají okamžitou úrokovou sazbu k predikci budoucí sazby. Arbitráž je způsob, jak využít výhody odlišných cen na různých trzích. Tím, že identické zboží kupujeme na jednom trhu a prodáváme na jiném trhu za odlišnou cenu, dosahujeme bezrizikového zisku. Tato situace je značně nepřirozená a v modelu finančního trhu nežádoucí.

1.6 Afinní časové struktury

Jestliže hodnota dluhopisu je dána vztahem $P(t, s) = F(t, s, r(t))$, kde F má tvar

$$F(t, s, r(t)) = A(t, s) \exp[-B(t, s)r(t)] \quad (1.6)$$

přitom $A(t, T)$ a $B(t, T)$ jsou deterministické funkce, pak řekněme, že model má *afinní časovou strukturu*. Tyto modely jsou relativně snadno řešitelné a poměrně obecné. Tuto strukturu vykazují např. Vašíčkův nebo CIR model, které budou popsány ve druhé kapitole.

1.7 Jaké problémy řeší úrokové modely?

Rádi bychom ještě nastínili problémy, které řeší úrokové modely.

1.7.1 Souvislost s tržním rizikem

Uveďme jednoduchý příklad [4], který ukazuje zmíněnou souvislost mezi tržním rizikem a úrokovými sazbami dluhopisů s různou dobou do splatnosti.

Příklad 1. Podnikatel chce na 18 měsíců uložit ve formě termínovaného devizového vkladu 248 500 Kč. Je pro něj výhodnější:

- a) systém šestiměsíčních termínovaných vkladů s nominální úrokovou mírou 7,65% p.a. nebo
- b) systém měsíčních termínovaných vkladů s nominální úrokovou mírou 7,59% p.a.?

Řešení: a) částka 248 500 Kč se za 18 měsíců zúročí na:

$$S = P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^h = 248\,500\left(1 + \frac{0,0765}{2}\right)^3 = 278\,120,$$

kde P je základ, j roční úroková míra, m frekvence úročení za rok a h počet úrokovacích období.

- b) částka 248 500 se za 18 měsíců zúročí na:

$$S = P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^h = 248\,500\left(1 + \frac{0,0759}{12}\right)^{18} = 278\,365.$$

Při využití systému b) dostane podnikatel na konci úrokovacího období částku 278 365 Kč, což je více než 278 120 Kč v případě systému a). Pro podnikatele je tedy výhodnější systém b).

Jak se změní výsledek, když opustíme nerealistický předpoklad, že úroková míra pro následující úrokovací období bude stejná jako pro výchozí? Zkusme například změnit zadání tak, že nominální úroková míra u šestiměsíčních vkladů pro druhý a třetí půlrok bude vyšší, a to 7,76% p.a. (u měsíčních vkladů v případě b) předpokládejme, že bude odpovídat původnímu zadání):

- a) systém šestiměsíčních termínovaných vkladů s nominální úrokovou mírou 7,65%, 7,76% a 7,76%, pak částka 248 500 Kč se za 18 měsíců zúročí na:

$$S = 248\,500 \left(1 + \frac{0,0765}{2}\right) \left(1 + \frac{0,0776}{2}\right) \left(1 + \frac{0,0776}{2}\right) = 278\,414 \text{ Kč,}$$

místo původních 278 120 Kč.

V daném případě již je výhodnější pro podnikatele systém **a)**. Už při malé změně budoucí úrokové míry oproti původně očekávané hodnotě může tedy být výhodnější jiný systém. Proto je důležité a výhodné snažit se odhadnout budoucí vývoj chování úrokových sazeb.

Uvedený zjednodušený příklad ukazuje obecnou skutečnost, že výsledek finančního rozhodování závisí na budoucím vývoji úrokových sazeb⁵. V tomto případě se jedná o tržní riziko pro podnikatele. Ke kvantifikaci tržního rizika se používají míry jako např. *Value at Risk (VaR)* nebo *durace*, při jejichž stanovování můžeme využít právě scénáře vývoje výnosových křivek.

Výše úrokových sazeb je důležitá také pro bankovní sektor. Pro banku je výhodné umět co nejpřesněji kvantifikovat vývoj výnosových křivek, neboť pak mohou přesněji kvantifikovat i tržní riziko, a tudíž přesněji stanovit kapitálový požadavek⁶.

1.7.2 Oceňování dluhopisů a derivátů

V práci se budeme zabývat oceňováním dluhopisů a derivátů. Kromě toho by se úrokové modely daly použít k oceňování závazků.

Dalším základním důležitým využitím těchto modelů je možnost na jejich základě odvodit vzorce pro ocenění finančních aktiv. Většina derivátů, které jsou obchodovány, se dají ocenit pomocí Black-Scholesova vzorce nebo úrokových modelů. Jsou však deriváty, pro které analytický vzorec neexistuje. K oceňování v daném případě by se dala použít teorie úrokových modelů. Touto problematikou se zabývat nebudeme. Jedná se o velmi těžkou disciplínu, pro níž není k dispozici dostatečné množství zdrojů k nastudování.

⁵V Příloze 2 jsme se pokusili předpovědět vývoj PRIBOR sazby.

⁶Kapitálový požadavek CAD (*Capital Adequacy Directive*) se určí jako poměr kapitálu a rizika $\frac{\text{kapitál}}{\text{kreditní riziko} + \text{tržní riziko}} \geq 8\%$.

2. Jednofaktorové úrokové modely

Strukturou úrokových sazeb se obvykle míní vztahy mezi výnosy do splatnosti investic reprezentovaných především dluhopisy [3] (na dluhopis lze totiž pohlížet jako na investiční půjčku). Úrokové sazby závisí na celé řadě faktorů, ale zde se budeme zabývat výhradně její závislosti na době splatnosti, tj. časovou strukturou úrokových sazeb. Přitom vztah mezi výnosem do splatnosti a dobou splatnosti se označuje jako *výnosová křivka*. Informace k této kapitole jsme převážně čerpali z [2] a [4].

V této části budou představeny jednofaktorové modely včetně Vašíčkova, který je považován za jeden ze základních. Modely jsou zobecněny pomocí stochastické diferenciální rovnice

$$dr_t = \alpha_t(\beta_t - r_t)dt + \sigma_t r_t dW_t,$$

kde $\alpha_t, \beta_t, \sigma_t$ jsou deterministické funkce času a W_t je Wienerův proces.

2.1 Mertonův model

V roce 1973 Merton [1] navrhl následující stochastickou rovnici

$$dr_t = \alpha dt + \sigma dW_t,$$

kde α a σ jsou kladné konstanty. Snadno se pak dá odvodit řešení této rovnice:

$$\begin{aligned} r_t &= r_0 + \int_0^t \alpha ds + \int_0^t \sigma dW_s = r_0 + \alpha t + \sigma W_t \\ \Rightarrow r_t &= r_u + \alpha(t - u) + \sigma(W_t - W_u). \end{aligned}$$

V tomto případě má r normální rozdělení z čehož vyplývá, že může nabývat záporných hodnot.

2.2 Vašíčkův model

Nejznámější model, Vašíčkův, byl publikován v roce 1977 [2]. Jedná se o jednofaktorový model, tzn. že zahrnuje jen jeden úrokový faktor $r(t)$.

Uvažujme bezkupónový dluhopis, jehož jednotková nominální hodnota je splatná v čase s . Hodnotu tohoto dluhopisu v čase t ($t \leq s = t+T$) označme symbolem $P(t, s)$, tak že platí $P(s, s) = 1$. Spojitý výnos do splatnosti v čase t tohoto dluhopisu označovaný symbolem $R(t, T)$ je

$$R(t, T) = -\frac{1}{T} \log P(t, t+T), \quad \text{pro } T > 0, \quad (2.1)$$

neboť zřejmě splňuje rovnici spojitého diskontování

$$P(t, t+T) = e^{-R(t, T) \cdot T}.$$

Nyní definujme okamžitou spotovou míru zisku v čase t

$$r(t) = R(t, 0) = \lim_{T \rightarrow 0} R(t, T).$$

Přívlastek „okamžitá“ vyjadřuje skutečnost, že při aplikaci této úrokové míry na nějakou kapitálovou částku Z v čase je kapitálový přírůstek během krátkého časového intervalu dt přibližně roven

$$dZ = Zr(t)dt \quad (2.2)$$

Poznámka 1. V teorii úrokových modelů pracujeme s okamžitou úrokovou sazbou, tedy sazbou, která by měla odpovídat nekonečné krátkému časovému intervalu. Taková sazba nicméně na trhu neexistuje, potřebujeme proto stanovit vhodného kandidáta. Je možné pracovat s O/N sazbou. Jak však ukázal Myška 2008 [17] pomocí shlukové analýzy dat, není vhodné využívat O/N sazbu, jelikož je příliš „nepodobná“ ostatním sazbám. Okamžitou úrokovou sazbu je praktičtější využívat pro 2W, 1M, 3M, 6M nebo dokonce i 1Y.

Z hlediska časového okamžiku t je tedy $r(t)$ bezriziková, takže i na výnos (2.2) lze pohlížet v krátkém časovém intervalu dt jako na bezrizikový. Dále budeme předpokládat, že $r(t)$ je stochastický proces za následujících podmínek

1. $r(t)$ je spojitá funkce času,
2. $r(t)$ je markovský proces.

Za výše uvedených předpokladů je budoucí průběh $r(t)$ zcela nezávislý na minulosti. Zavedeme následující předpoklad:

(P1) Spotová sazba je spojitý markovský proces.

Procesy jež jsou markovské a zároveň spojitě jsou nazývány difuzními procesy, které jsou popsány vztahem (1.5). Je zcela přirozené předpokládat, že hodnota dluhopisu je určena průběhem spotové sazby během jeho platnosti (myšleno od emise do splatnosti). Proto zavedeme další předpoklad:

(P2) Hodnota $P(t, s)$ diskontního dluhopisu v čase t je určena průběhem $\{r(\tau), t \geq \tau \geq s\}$ během doby platnosti dluhopisu.

Poslední předpoklad, na němž jsou založeny modely je:

(P3) Trh je efektivní, tj.:

- neexistují transakční náklady,
- informace jsou dostupné pro všechny účastníky trhu,
- každý investor se chová racionálně.

Pokud se trhy chovají efektivně, pak velmi rychle absorbují všechny kurzotvorné informace (včetně efektivního zpracování těchto informací do tržních cen). Na takových trzích pak nelze najít podhodnocené či nadhodnocené tituly.

Z předpokladů (P1) a (P2) plyne, že

$$P(t, s) = P(t, s, r(t)).$$

Cena dluhopisu je dána vztahem $P = P(t, s, r(t))$, což je funkce $r(t)$. Pak aplikací Itoova lemmatu na difuzní proces (1.5) dostaneme vyjádření P ve formě difuzního procesu

$$dP = P\mu(t, s)dt + P\sigma(t, s)dW_t, \quad (2.3)$$

kde parametry $\mu(t, s) = \mu(t, s, r(t))$, a $\sigma(t, s) = \sigma(t, s, r(t))$ jsou dány

$$\mu(t, s, r) = \frac{1}{P(t, s, r)} \left(\frac{\partial}{\partial t} + f \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) P(t, s, r), \quad (2.4)$$

$$\sigma(t, s, r) = -\frac{1}{P(t, s, r)} \rho \frac{\partial}{\partial r} P(t, s, r), \quad (2.5)$$

kde funkce $\mu(t, s, r)$ je střední hodnotou (trendový koeficient) a $\sigma(t, s, r)^2$ je rozptyl okamžitých výnosů v čase t (difuzní koeficient) se splatností s při okamžité spotové sazbě $r(t) = r$.

Nyní si představme investora, který v čase t emituje dluhopis ve výši Z_1 s dobou splatnosti s_1 a zároveň nakoupí dluhopis v hodnotě Z_2 se splatností s_2 . Celková hodnota portfolia pak tedy bude $Z = Z_2 - Z_1$ a případné změny v čase jsou z rovnice (2.3) vyjádřeny jako

$$dZ = (Z_2\mu(t, s_2) - Z_1\mu(t, s_1)) dt - (Z_2\sigma(t, s_2) - Z_1\sigma(t, s_1)) dW_t. \quad (2.6)$$

Nyní předpokládejme, že hodnoty Z_1 a Z_2 jsou určeny dle následujícího poměru $\sigma(t, s_2)$ a $\sigma(t, s_1)$

$$Z_1 = Z \frac{\sigma(t, s_2)}{\sigma(t, s_1) - \sigma(t, s_2)} \quad (2.7)$$

$$Z_2 = Z \frac{\sigma(t, s_1)}{\sigma(t, s_1) - \sigma(t, s_2)}. \quad (2.8)$$

Po dosazení do rovnice (2.6) se vykrátí náhodná složka dW_t a dostaneme pak

$$dZ = Z \frac{\mu(t, s_2)\sigma(t, s_1) - \mu(t, s_1)\sigma(t, s_2)}{\sigma(t, s_1) - \sigma(t, s_2)} dt. \quad (2.9)$$

Jak si můžete všimnout, portfolio skládající se z těchto dluhopisů je v daném okamžiku bezrizikové (*instaneously riskless*), jelikož byla vykrácená stochastická složka dW_t . Jedná se tedy o stejné výnosy jako (2.2). Dáme-li do rovnosti (2.2) a (2.9), obdržíme

$$\frac{\mu(t, s_2)\sigma(t, s_1) - \mu(t, s_1)\sigma(t, s_2)}{\sigma(t, s_1) - \sigma(t, s_2)} = r(t),$$

nebo ekvivalentně

$$\frac{\mu(t, s_1) - r(t)}{\sigma(t, s_1)} = \frac{\mu(t, s_2) - r(t)}{\sigma(t, s_2)}. \quad (2.10)$$

Jelikož výše uvedený vzorec platí pro libovolné doby splatnosti s_1, s_2 , z čehož plyne, že poměr $\frac{\mu(t,s)-r(t)}{\sigma(t,s)}$ je nezávislý na s . Nechť $q(t, r)$ je roven tomuto poměru pro dluhopis s libovolnou dobou splatnosti a okamžitou spotovou sazbou $r(t) = r$,

$$q(t, r) = \frac{\mu(t, s, r) - r}{\sigma(t, s, r)}, \quad \text{pro } s \geq t, \quad (2.11)$$

hodnota $q(t, r)$ se nazývá tržní cena rizika. Rovnici (2.11) můžeme přepsat na tvar

$$\mu(t, s, r) - r = q(t, r)\sigma(t, s, r).$$

Po substituci μ a σ z rovnic (2.4), (2.5) a následné úpravě dostaneme

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (f + \rho q) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \rho^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0, \quad \text{pro } t \leq s. \quad (2.12)$$

Předchozí vztah je základní rovnicí (*term structure equation*) pro stanovení cen diskontních dluhopisů na trhu za předpokladu (P1), (P2) a (P3). Jakmile je znám průběh spotové sazby $r(t)$ a tržní hodnota rizika, cenu dluhopisu stanovíme vyřešením rovnice (2.12) za počátečních podmínek

$$P(s, s, r) = 1.$$

Časová struktura úrokových sazeb (podobně jako (2.1)) je pak určena

$$R(t, T) = -\frac{1}{T} \log P(t, t + T, r(t)). \quad (2.13)$$

2.2.1 Speciální případy

Ilustraci obecného modelu časové struktury úrokových sazeb si nyní ukážeme explicitně, a to za následujících předpokladů:

1. Tržní hodnota rizika je konstantní, tj. $q(t, r) = q$ nezávislé na čase t ani spotové sazbě r .
2. Spotová sazba $r(t)$ představuje tak zvaný *Ornstein-Uhlenbeckův proces*

$$dr = \alpha(\gamma - r)dt + \rho dW,$$

kde $\alpha > 0$. Výše uvedený vzorec jsme obdrželi volbou $f(t, r) = \alpha(\gamma - r)$ a $\rho(t, r) = \rho$ v rovnici (1.5).

Ornstein-Uhlenbeckův proces s kladnou konstantou $\alpha > 0$ je také nazývan elastickou náhodnou procházkou. Tento proces je na rozdíl od klasické náhodné procházky stabilní a v dlouhodobém časovém horizontu nemůže nabývat nekonečných hodnot. I když se jedná o náhodný proces, jeho průběh pohybuje kolem nějaké střední úrovně γ . Rychlost, se kterou se proces vrací zpět k této hodnotě γ , určuje konstanta α , které se také říká *návrat ke středu (mean reversion)*. Lze ukázat, že za výše uvedených předpokladů (1) a (2) má řešení parciální diferenciální rovnice (2.12) tvar

$$P(t, s, r(t)) = \exp \left[\frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(s-t)}) \left(\gamma + \frac{\rho q}{\alpha} - \frac{\rho^2}{2\alpha^2} - r(t) \right) - \left(\gamma + \frac{\rho q}{\alpha} - \frac{\rho^2}{2\alpha^2} \right) (s-t) - \frac{\rho^2}{4\alpha^3} (1 - e^{-\alpha(s-t)}) \right]^2. \quad (2.14)$$

Střední hodnotu μ a směrodatnou odchylku σ okamžitého dluhopisového výnosu (2.3) můžeme zapsat jako

$$\begin{aligned} \mu(t, s, r(t)) &= r(t) + \frac{\rho q}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(s-t)}), \\ \sigma(t, s, r(t)) &= \frac{\rho}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(s-t)}). \end{aligned}$$

Všimněme se, že s rostoucí dobou do splatnosti $T = s - t$ se zvyšuje směrodatná odchylka σ okamžitého dluhopisového výnosu¹.

Konečně, časová struktura úrokových sazeb v čase t (výnosová křivka) podle (2.1) je

$$R(t, T) = \gamma + \frac{\rho q}{\alpha} - \frac{\rho^2}{2\alpha^2} - \frac{1}{\alpha T} (1 - e^{-\alpha T}) \left(\gamma + \frac{\rho q}{\alpha} - \frac{\rho^2}{2\alpha^2} - r(t) \right) + \frac{\rho^2}{4\alpha^3 T} (1 - e^{-\alpha T})^2. \quad (2.15)$$

Co se týče tvaru výnosové křivky, (2.15) snadno se ukáže (viz soubor *Vasicek_prubeh_vynosove_krivky.nb*), že

1. $R(t, 0) = r(t)$,
2. $\lim_{T \rightarrow \infty} R(t, T) = \gamma + \frac{\rho q}{\alpha} - \frac{\rho^2}{2\alpha^2}$,
3. $R(t, T)$ má rostoucí průběh (resp. zvrát rostoucího na klesající průběh; resp. klesající průběh), je-li $r(t) \leq \gamma + \frac{\rho q}{\alpha} - \frac{3\rho^2}{4\alpha^2}$ (resp. $\gamma + \frac{\rho q}{\alpha} - \frac{3\rho^2}{4\alpha^2} < r(t) < \gamma + \frac{\rho q}{\alpha}$; resp. $r(t) \geq \gamma + \frac{\rho q}{\alpha}$).

Ve speciálním případě, je-li tržní cena rizika q nulová, pak lze (2.14) přepsat do afinního tvaru časové struktury (1.6)

$$P(t, s, r(t)) = A(t, s) \exp(-B(t, s)r(t)), \quad (2.16)$$

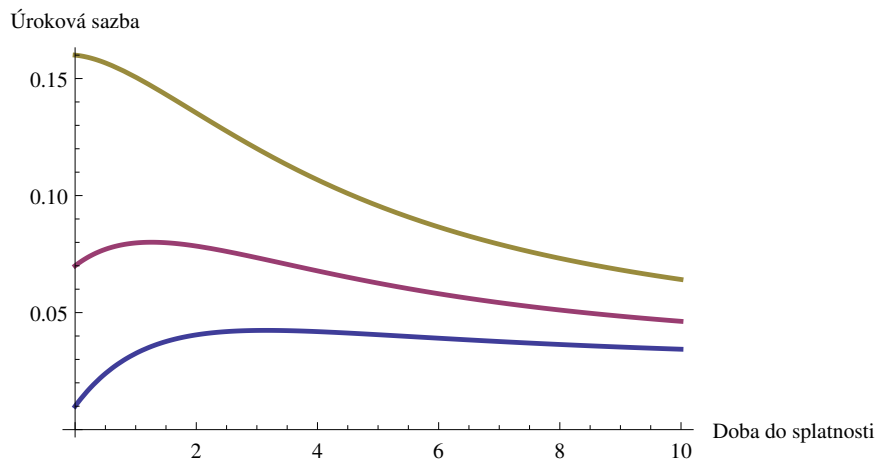
kde

$$A(t, s) = \exp \left(\frac{(B(t, s) - s + t)(\alpha^2 \gamma - \frac{\rho^2}{2})}{\alpha^2} - \frac{\rho^2 B(t, s)^2}{4\alpha} \right), \quad (2.17)$$

$$B(t, s) = \frac{1 - e^{-\alpha(s-t)}}{\alpha}. \quad (2.18)$$

¹ $\lim_{(s-t) \rightarrow \infty} \mu(t, s, r(t)) = r(t) + \frac{\rho q}{\alpha}$, a $\lim_{(s-t) \rightarrow \infty} \sigma(t, s, r(t)) = \frac{\rho}{\alpha}$.

Obrázek 2.1: Znázornění průběhu výnosové křivky (2.15) pro $\alpha = 0.5$, $\rho = 0.25$, $\gamma = 0.05$, $q = 0.2$ a různé úrokové míry $r = 0.001$, $r = 0.07$ a $r = 0.16$.



2.2.2 Oceňování opce

Vašíčkův model se dá také využít pro oceňování opci. Nechť cena evropské CALL opce navázané na bezkupónový dluhopis s dobou splatnosti S a podkladovým aktivem s realizační cenou K a datem realizace T (kde $T < S$) je dle [13] dána

$$V(t) = P(t, S)\Phi(d_1) - KP(t, T)\Phi(d_2),$$

kde

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{\sigma_p} \log \frac{P(t, S)}{KP(t, T)} + \frac{\sigma_p}{2}, \\ d_2 &= d_1 - \sigma_p, \\ \sigma_p &= \frac{\sigma}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(S-T)}) \sqrt{\frac{1 - e^{-2\alpha(T-t)}}{2\alpha}}, \end{aligned}$$

kde $\Phi(z)$ je distribuční funkce normálního rozdělení. Podrobný důkaz výše uvedeného lze nalézt například v [13].

2.3 Cox-Ingersoll-Rossův (CIR) model

Hlavním nedostatkem Vašíčkova modelu je možnost nabývání záporných hodnot úrokových sazeb. Z ekonomického hlediska záporné hodnoty úrokových sazeb nemají smysl². CIR model odstraňuje tento nedostatek, tudíž řešení $P(t, s, r(t))$ nemůže nabývat záporných hodnot. Úprava spočívá v modifikaci difuzního procesu (1.5) do tvaru

$$dr_t = \alpha(\gamma - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t.$$

²Některé země jako např. Dánsko či Švýcarsko měly v historii záporné hodnoty. Praktické zkušenosti však ukazují, že to není optimální řešení (viz [5]).

Jinými slovy, difuzní koeficient není konstantní jako v případě Vašíčkova modelu, ale je úměrný hodnotě $\sqrt{r_t}$. V případě nulové tržní ceny rizika q má nyní dle [4] řešení parciální diferenciální rovnice tvar

$$P(t, s, r(t)) = A(t, s) \exp[-B(t, s)r(t)],$$

kde

$$A(t, s) = \left[\frac{2\delta e^{(\alpha+\delta)(s-t)\frac{1}{2}}}{2\delta + (\alpha + \delta)(e^{\delta(s-t)} - 1)} \right]^{\frac{2\alpha\gamma}{b^2}},$$

$$B(t, s) = \frac{2(e^{\delta(s-t)} - 1)}{2\delta + (\alpha + \delta)(e^{\delta(s-t)} - 1)},$$

kde δ je rovno

$$\delta = \sqrt{\alpha^2 + 2\sigma^2}.$$

V příloze 1 jsme provedli simulaci a předpověď PRIBOR sazby s využitím CIR modelu.

2.4 Hull-Whiteův model

Nechť nyní máme úrokovou míru jakožto stochastický proces $r(t)$, jehož vývoj se řídí stochastickou diferenciální rovnicí

$$dr_t = a(\gamma - r_t)dt + \sigma r_t^\beta dW_t, \quad (2.19)$$

kde $\beta = 0$ pro Vašíčkův model a $\beta = \frac{1}{2}$ pro CIR model. a, γ, σ a β jsou kladné konstanty. Ty ale nezohledňují závislost na čase. Pokud přidáme $a(t)$ a $\sigma(t)$ závislé na čase, $\theta(t)$ časově závislý drift, pak se proces krátkodobé úrokové míry bude řídit vztahem

$$dr_t = (\theta(t) + a(t)(\gamma - r(t))dt + \sigma(t)r(t)^\beta dW_t,$$

kde $\theta(t)$ spolu s proměnnou γ a $a(t)$ tvoří návrat se středu. Výše uvedený vztah můžeme totiž přepsat do tvaru

$$dr_t = a(t) \left(\frac{\theta(t)}{a(t)} + \gamma - r_t \right) dt + \sigma(t)r_t^\beta dW_t,$$

kde $\frac{\theta(t)}{a(t)} + \gamma$ je návrat ke středu (*mean reversion*).

2.4.1 Rozšíření Vašíčkova modelu

Uvažujme nyní rovnici, kterou obdržíme dosazením $f(r_t, t) = \theta(t) + a(t)(\gamma - r(t))$ a $\rho(r_t, t) = \sigma(t)$ do (1.5) a $\beta = 0$

$$dr_t = (\theta(t) + a(t)(\gamma - r(t)))dt + \sigma(t)dW_t. \quad (2.20)$$

Analogicky jako (2.4) a (2.5) zapíšeme střední hodnotu $\mu(t, s) = \mu(t, s, r(t))$ a rozptyl $\sigma(t, s)^2 = \sigma(t, s, r(t))^2$ jako

$$\mu(t, s, r) = \frac{1}{P(t, s, r)} \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\theta(t) + a(t)(\gamma - r)) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho^2(t) \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] P(t, s, r), \quad (2.21)$$

$$\sigma(t, s, r) = -\frac{1}{P(t, s, r)} \rho(t) \frac{\partial}{\partial r} P(t, s, r). \quad (2.22)$$

Dosazením (2.21) a (2.22) do obecné rovnice (2.12) po úpravách dostaneme

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\theta(t) + a(t)(\gamma - r) - q(t, r)\rho(t)) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \rho^2(t) \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0. \quad (2.23)$$

Označme nyní f jako cenu finančního derivátu závisící na úrokové míře. Dle (2.23) f musí splňovat

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\theta(t) + a(t)(\gamma - r) - q(t, r)\rho(t)) \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2} \rho^2(t) \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - rf = 0. \quad (2.24)$$

Výše uvedenou rovnici můžeme také přepsat do tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\Phi(t) - a(t)r) \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2} \rho^2(t) \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - rf = 0, \quad (2.25)$$

kde

$$\Phi(t) = \theta(t) + a(t)\gamma - q(t, r)\rho(t).$$

Cena diskontního dluhopisu, který v čase $T = t + s$ vyplácí jednotku měny, je řešením rovnice (2.25).

Zavedme funkci tvaru

$$f = A(t, s) \exp[-B(t, s)r], \quad (2.26)$$

a zjistíme, co musí funkce $A(t, s)$ a $B(t, s)$ splňovat. Pro zjednodušení dalšího zápisu budeme psát místo $A(t, s)$ a $B(t, s)$ pouze A a B .

Dosadíme nyní funkci f ve tvaru (2.26) do (2.25) a po úpravě dostaneme

$$\frac{\partial A}{\partial t} e^{-Br} - A e^{-Br} r \frac{\partial B}{\partial t} - (\Phi(t) - a(t)r) A B e^{-Br} + \frac{1}{2} \rho^2 A B^2 e^{-Br} - A e^{-Br} r = 0 \quad (2.27)$$

Rovnici (2.27) vydělíme e^{-Br} . Porovnáním členu u r a vydělením A dostaneme

$$\frac{\partial B}{\partial t} - a(t)B + 1 = 0 \quad (2.28)$$

a porovnáním koeficientů u ostatních členů musí platit

$$\frac{\partial A}{\partial t} - \Phi(t)AB + \frac{1}{2} \rho^2 AB^2 = 0. \quad (2.29)$$

Aby byla splněna okrajová podmínka pro f , tedy v čase $s = t + T$ je její hodnota 1, musí také platit, že

$$A(s, s) = 1, \quad B(s, s) = 0. \quad (2.30)$$

Jestliže jsou rovnice (2.28) a (2.29) vyřešeny vzhledem k podmínkám (2.30), pak rovnice (2.26) vyjadřuje cenu diskontního dluhopisu se splatností v čase T . Za předpokladu, že $a(t)$, $\Phi(t)$ a $\rho(t)$ jsou konstantní, dostaneme Vašíčkův vzorec pro ocenění dluhopisu³

$$B(t, s) = \frac{(1 - e^{-\alpha(s-t)})}{\alpha}, \quad (2.31)$$

$$A(t, s) = \exp \left[\frac{(B(t, s) - s + t)(\alpha\gamma - \frac{\rho^2}{2})}{\alpha^2} - \frac{\rho^2 B(t, s)^2}{4\alpha} \right]. \quad (2.32)$$

Zderivováním rovnic (2.28) a (2.29) podle s dostaneme

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t \partial s} - a(t) \frac{\partial B}{\partial t} = 0, \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t \partial s} - \Phi(t) \left(\frac{\partial A}{\partial s} B + A \frac{\partial B}{\partial s} \right) + \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{\partial A}{\partial s} B^2 + 2AB \frac{\partial A}{\partial s} \right) = 0. \quad (2.34)$$

Vyjádřením $a(t)$ z rovnice (2.28) do (2.33) dostaneme rovnici

$$\frac{\partial B}{\partial t} \frac{\partial B}{\partial s} - B \frac{\partial^2 B}{\partial t \partial s} + \frac{\partial B}{\partial s} = 0 \quad (2.35)$$

a analogicky vyjádřením $\Phi(t)$ z rovnice (2.29) a dosazením do (2.34) dostáváme rovnici

$$AB \frac{\partial^2 A}{\partial t \partial s} - B \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial A}{\partial s} - A \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial B}{\partial s} + \frac{\rho^2}{2} A^2 B^2 \frac{\partial B}{\partial s} = 0. \quad (2.36)$$

Nyní hledáme řešení (2.35) a (2.36) za podmínek (2.30). Dle [6] řešením těchto rovnic je

$$\begin{aligned} \widehat{A}(t, s) &= \widehat{A}(0, T) - \widehat{A}(0, t) - B(t, s) \frac{\partial \widehat{A}(0, t)}{\partial t} - \\ &- \frac{1}{2} \left(B(t, s) \frac{\partial B(0, t)}{\partial t} \right)^2 \int_0^t \left(\frac{\rho(\tau)}{\partial B(0, \tau) / \partial \tau} \right)^2 d\tau, \end{aligned} \quad (2.37)$$

kde $\widehat{A}(t, s) = \log A(t, s)$. Analogicky pro $B(t, s)$ dostaneme

$$B(t, s) = \frac{B(0, s) - B(0, t)}{\partial B(0, t) / \partial t}. \quad (2.38)$$

Dosazením do rovnic (2.29) a (2.28) získáme vyjádření $a(t)$ a $\Phi(t)$

³V rámci diplomové práce jsme provedli ocenění dluhopisu v programu *Mathematica* (soubor *Vasicek_Bond_Valuation.nb*) a Příloha 1.

$$a(t) = -\frac{\partial^2 B(0, t)/\partial t}{\partial B(0, t)/\partial t},$$

$$\Phi(t) = -a(t)\frac{\partial \hat{A}(0, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \hat{A}(0, t)}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial B(0, t)}{\partial t}\right) \int_0^t \left(\frac{\rho(\tau)}{\partial B(0, \tau)/\partial \tau}\right)^2 d\tau.$$

2.4.2 Oceňování opcí pomocí rozšířeného Vašíčkova modelu

Nyní se budeme zabývat oceňováním opcí s využitím Vašíčkova modelu. Podobně jako v předchozím textu, máme cenu dluhopisu v čase t s dobou splatnosti s a úrokovou sazbou r ve tvaru

$$P(t, s, r) = A(t, s)e^{-B(t, s)r}. \quad (2.39)$$

Využitím Itoova lemmatu je rozptyl $P(t, s, r)$ roven $\rho(t)B(t, s)$, neboť volatilita $\sigma(t, s, r)^2$ z rovnice (2.3) je v tomto případě dle (2.5) rovna

$$\sigma(t, s, r) = -\frac{1}{A(t, s)e^{-B(t, s)r}}\rho(t)A(t, s)e^{-B(t, s)r}(-B(t, s)) = \rho(t)B(t, s).$$

Uvažujme evropskou CALL opci vázanou na diskontní dluhopis s realizační cenou X dobou splatnosti v čase T a dobou splatnosti dluhopisu v čase s , přičemž platí $t \leq T \leq s$. Tuto opci si můžeme představit jako možnost vyměnit X jednotek diskontního dluhopisu se splatností T za jednu jednotku diskontního dluhopisu v čase s . Definujme rozptyly $\alpha_1(\tau)$ a $\alpha_2(\tau)$ ceny dluhopisů v čase τ se splatnostmi v časech T a s . Uvažujme dále okamžitou korelaci $\beta(\tau)$ těchto dluhopisů v čase τ . Cenu opce C pak dle [6] určíme

$$C = P(t, s, r)N(\bar{h}) - X \cdot P(t, s, r)N(\bar{h} - \rho_P), \quad (2.40)$$

kde

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \frac{1}{\rho_P} \log \frac{P(t, s, r)}{P(t, T, r)X} + \frac{\rho_P}{2}, \\ \rho_P^2 &= \int_t^T [\alpha_1(\tau)^2 - 2\beta(\tau)\alpha_1(\tau)\alpha_2(\tau) + \alpha_2(\tau)^2] d\tau, \end{aligned}$$

kde $N(\cdot)$ je distribuční funkce normálního rozdělení. Jelikož Vašíčkův model je jednofaktorový proto $\beta = 1^4$. Navíc

$$\begin{aligned} \alpha_1(\tau) &= \rho(\tau)B(\tau, s), \\ \alpha_2(\tau) &= \rho(\tau)B(\tau, T). \end{aligned}$$

Tedy

⁴Ceny dvou dluhopisů s různými dobami splatností u jednofaktorových modelů mají korelaci rovnou jedné.

$$\rho_P^2 = \int_t^T \rho(\tau)^2 [B(\tau, s) - B(\tau, T)]^2 d\tau.$$

Užitím rovnice (2.38) dostáváme

$$\rho_P^2 = [B(0, s) - B(0, T)]^2 \int_t^T \left[\frac{\rho(\tau)}{\partial B(0, \tau) / \partial \tau} \right]^2 d\tau.$$

3. Brennan-Schwartzův (BS) model

Brennan a Schwartz ve svém článku [7] zpochybnili jeden z hlavních předpokladů mnoha modelů. Většina ostatních modelů zahrnuje informaci ohledně budoucí úrokové sazby v okamžité spotové sazbě, tj. všechny bezrizikové dluhopisy¹ mohou být vyjádřeny pomocí časově závislé funkce okamžité spotové sazby. BS zavedli předpoklad, že hodnota dluhopisu závisí jak na *krátkodobé úrokové míře* $r(t)$, tak na *dlouhodobé úrokové míře* $l(t)$ (*long-term interest rate*), která je určena mírou výnosnosti perpetuity (obligace s nekonečnou dobou splatnosti neboli konzoly) a obsahuje v sobě veškerou informaci o budoucím vývoji okamžité úrokové sazby. Model tedy bere v úvahu dva krajní body časové struktury úrokových sazeb a předpokládá, že vnitřní body křivky jsou určeny hodnotami těchto krajních bodů. Tento model je dvoufaktorový, kde druhým faktorem je právě dlouhodobá úroková sazba.

Informace pro tuto kapitolu jsme převážně čerpali z [7], [10] a [8].

3.1 Popis modelu

Zavedme následující značení

$r(t)$... je okamžitá úroková sazba,

$l(t)$... je dlouhodobá úroková sazba.

Nechť je krátkodobá a dlouhodobá úroková sazba, $r(t)$ a $l(t)$, řízena následujícími stochastickými procesy

$$dr = \beta_1(r, l, t)dt + \eta_1(r, l, t)dW_1 \quad (3.1)$$

$$dl = \beta_2(r, l, t)dt + \eta_2(r, l, t)dW_2 \quad (3.2)$$

kde t je současný čas a

dW_1, dW_2 ... jsou Wienerovy procesy,

$\beta_1(\cdot), \beta_2(\cdot)$... jsou očekávané okamžité změny r a l ,

$\eta_1^2(\cdot), \eta_2^2(\cdot)$... jsou okamžité rozptyly r a l ,

ρ ... je okamžitá korelace mezi dW_1 a dW_2 (tj. $dW_1dW_2 = \rho dt$).

Nechť $B(r, l, \tau)$ je cena bezkupónového dluhopisu s dobou splatnosti $T = t + \tau$ a jednotkovou hodnotou v době splatnosti. Jelikož cena tohoto dluhopisu je funkcí dvou sazeb a doby do splatnosti τ , můžeme využít Itoovo lemma²

¹Většinou se jedná o státní dluhopisy, jež ve většině vyspělých zemí můžeme považovat za bezrizikové.

²Platí, že $\tau = T - t$ pak tedy $\frac{\partial}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial t}$.

$$\begin{aligned}
dB &= \frac{\partial B}{\partial r} dr + \frac{\partial B}{\partial l} dl + \frac{\partial B}{\partial \tau} d\tau + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} dr dr + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial l^2} dl dl + \frac{\partial^2 B}{\partial r \partial l} dr dl = \\
&= \frac{\partial B}{\partial r} (\beta_1 dt + \eta_1 dW_1) + \frac{\partial B}{\partial l} (\beta_2 dt + \eta_2 dW_2) - \frac{\partial B}{\partial \tau} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial l^2} \eta_2^2 dt + \frac{\partial^2 B}{\partial r \partial l} \eta_1 \eta_2 \rho dt,
\end{aligned}$$

cenu dluhopisu můžeme tedy zapsat ve tvaru

$$\frac{dB}{B} = \mu(r, l, \tau) dt + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \eta_1 dW_1 + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial l} \eta_2 dW_2, \quad (3.3)$$

kde

$$\begin{aligned}
\mu(r, l, \tau) &= \frac{1}{B} \left(\beta_1 \frac{\partial B}{\partial r} + \beta_2 \frac{\partial B}{\partial l} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} \eta_1^2 dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial l^2} \eta_2^2 dt + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 B}{\partial r \partial l} \eta_1 \eta_2 \rho dt - \frac{\partial B}{\partial \tau} \right). \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Nyní uvažujme portfolio tří dluhopisů s různými dobami splatnosti. Nechť

P ... portfolio tří dluhopisů s různými dobami splatnosti

$$x_i \dots \text{cena dluhopisu se splatností } \tau_i, \quad i = 1, 2, 3 \text{ a } \sum_{i=1}^3 x_i = 1.$$

Abychom odvodili parciální diferenciální rovnici pro hodnotu dluhopisu, musíme nejdříve eliminovat náhodné složky. V předchozích postupech (např. ve druhé kapitole při odvození Vašíčkova modelu), kde byla přítomna pouze jedna náhodná složka, jsme k odvození použili portfolio dvou aktiv. Nyní máme dvě náhodné složky, a proto musíme sestavit portfolio ze tří dluhopisů.

Mějme tedy tři bezkupónové dluhopisy. Nechť x_1 , x_2 a x_3 jsou relativní investice do prvního, druhého a třetího dluhopisu. Změna hodnoty každého dluhopisu splňuje rovnici (3.3). Proto změna hodnoty portfolio P je rovna součtu změn hodnoty jednotlivých dluhopisů násobených příslušnými váhami x_i

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{P} &= [x_1 \mu(\tau_1) + x_2 \mu(\tau_2) + x_3 \mu(\tau_3)] dt + \\
&\quad + \left[x_1 \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \eta_1 + x_2 \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \eta_1 + x_3 \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \eta_1 \right] dW_1 + \\
&\quad + \left[x_1 \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \eta_2 + x_2 \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \eta_2 + x_3 \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \eta_2 \right] dW_2.
\end{aligned}$$

Tento výnos se dá vyjádřit jako deterministický, položíme-li koeficienty Wienerova procesu rovné nule

$$x_1 \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \eta_1 + x_2 \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \eta_1 + x_3 \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \eta_1 = 0, \quad (3.5)$$

$$x_1 \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \eta_2 + x_2 \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \eta_2 + x_3 \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \eta_2 = 0. \quad (3.6)$$

K omezení arbitrážních výdělků výnos portfolia musí být roven bezrizikové úrokové sazbě, tj.:

$$x_1\mu(\tau_1) + x_2\mu(\tau_2) + x_3\mu(\tau_3) = r,$$

pak

$$x_1 [\mu(\tau_1) - r] + x_2 [\mu(\tau_2) - r] + x_3 [\mu(\tau_3) - r] = 0. \quad (3.7)$$

Rovnice (3.5), (3.6) a (3.7) jsou tři lineární homogenní rovnice se třemi neznámými. Tato soustava rovnic je konzistentní, jestliže

$$\begin{aligned} \mu(\tau_1) &= \lambda_1(r, l, t) \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \eta_1 + \lambda_2(r, l, t) \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \eta_2, \\ \mu(\tau_2) &= \lambda_1(r, l, t) \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \eta_1 + \lambda_2(r, l, t) \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \eta_2, \\ \mu(\tau_3) &= \lambda_1(r, l, t) \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \eta_1 + \lambda_2(r, l, t) \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \eta_2 \end{aligned}$$

a tyto rovnosti platí pro libovolnou dobu splatnosti τ , tj.:

$$\mu(\tau) = \lambda_1(r, l, t) \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \eta_1 + \lambda_2(r, l, t) \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \eta_2. \quad (3.8)$$

Funkce $\lambda_1(r, l, t)$ a $\lambda_2(r, l, t)$ jsou nezávislé na době splatnosti dluhopisu. Dodatečný výnos dluhopisu oproti bezrizikové sazbě je požadovaná prémie pro kompenzaci dodatečného rizika pro investora. Rovnice (3.8) vyjadřuje okamžitou rizikovou prémie diskontního dluhopisu jako součet dvou faktorů. Tyto dva faktory jsou úměrné (proporcionální) parciální kovarianci výnosů dluhopisů s neočekávanými změnami v každém ze dvou faktorů. Tato parciální kovariance je vyjádřena jako

$$\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \eta_1 \quad \text{a} \quad \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \eta_2.$$

Úměrné faktory $\lambda_1(r, l, t)$ a $\lambda_2(r, l, t)$ mohou být interpretovány jako tržní cena rizika krátkodobé a dlouhodobé úrokové sazby. Tyto tržní ceny rizika jsou nezávislé na užitkové funkci každého investora.

Dosadíme-li (3.4) do (3.8), dostaneme parciální diferenciální rovnici diskontního dluhopisu

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial r} (\beta_1 - \lambda_1 \eta_1) + \frac{\partial B}{\partial l} (\beta_2 - \lambda_2 \eta_2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} \eta_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial l^2} \eta_2^2 + \\ + \frac{\partial^2 B}{\partial r \partial l} \rho \eta_1 \eta_2 - \frac{\partial B}{\partial \tau} - rB = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ocenění dluhopisu je závislé na dvou tržních cenách rizika (λ_1 a λ_2). Předpokládejme, že l je výnos *perpetuity* a pomocí ní se dokážeme zbavit dlouhodobé tržní ceny rizika $\lambda_2(r, l, t)$. Perpetuita představuje dluhopis s nekonečnou dobou splatnosti a vyplácí konstantní kupón ve výši 1 na konci každého roku. Nechť $V(l)$ je jeho cena, tj.:

$$V(l) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1+l)^i} = \begin{cases} \frac{1}{l} = l^{-1} & \text{pro } l > 0, \\ \infty & \text{pro } l \leq 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Aplikujeme-li Itoovo lemma na $V(l)$ dostáváme³

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial l} dl + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial l^2} dl dl = \\ &= -\frac{1}{l^2} (\beta_2 dt + \eta_2 dW_2) + \frac{1}{l^3} \eta_2^2 dt, \end{aligned} \quad (3.11)$$

pak

$$\frac{dV}{V} = \left(\frac{\eta_2^2}{l^2} - \frac{\beta_2}{l} \right) dt - \left(\frac{\eta_2}{l} \right) dW_2, \quad (3.12)$$

kde $-\frac{\eta_2^2}{l}$ je parciální kovariance dluhopisu s okamžitým výnosem s neočekávanými změnami v l . Okamžitý výnos perpetuity $\mu(\infty)$ se skládá z kapitálového výnosu a kupónové platby

$$\mu(\infty) = \frac{\eta_2^2}{l^2} - \frac{\beta_2}{l} + l.$$

Jelikož se nacházíme v bezrizikovém prostředí, tak perpetuitní výnos musí vyjadřovat bezrizikovou úrokovou sazbu, a proto musí platit dle (3.8)

$$\begin{aligned} \mu(\infty) - r &= \lambda_2(r, l, t) \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial l} \eta_2 \\ \frac{\eta_2^2}{l^2} - \frac{\beta_2}{l} + l - r &= \lambda_2(r, l, t) \left(-\frac{\eta_2}{l} \right) \\ \Rightarrow \lambda_2(r, l, t) &= -\frac{\eta_2}{l} + \frac{\beta_2 - l^2 + rl}{\eta_2}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Vyjádřili jsme tržní cenu dlouhodobé úrokové sazby jako funkci r , l a parametrů stochastického procesu l . To nám umožňuje zredukovat počet faktorů ve vyjádření ceny dluhopisu. Dosazením (3.13) do vzorce pro výpočet ceny dluhopisu (3.9) dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial l^2} \eta_2^2 + \frac{\partial^2 B}{\partial r \partial l} \rho \eta_1 \eta_2 + \frac{\partial B}{\partial \tau} (\beta_1 - \lambda_1 \eta_1) + \\ + \frac{\partial B}{\partial l} \left(l^2 - rl + \frac{\eta_2^2}{l} \right) - \frac{\partial B}{\partial \tau} - rB = 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

což je nezávislé jak na tržní ceně dlouhodobé úrokové sazby λ_2 , tak na očekávaném míře výnosu perpetuity. Využijeme-li okrajovou podmínku $B(r, l, 0) = 1$, pak můžeme určit cenu dluhopisu s jakoukoliv splatností. Jelikož celá časová struktura úrokových sazeb může být vyčíslená, vzorec (3.14) je funkcí pouze tří parametrů r , l a λ_1 .

³Platí, že $\frac{\partial V}{\partial l} = -\frac{1}{l^2}$ a $\frac{\partial^2 V}{\partial l^2} = \frac{2}{l^3}$.

Zvolíme-li l jako výnos perpetuity, jsme schopni určit cenu dluhopisu nezávisle na λ_2 a β_2 . Protože perpetuita je obchodovatelná, tak riziko spojené s l může být zajištěno (*hedging*) a musí platit

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial r}(\beta_1 - \lambda_1 \eta_1) + \frac{\partial V}{\partial l}(\beta_2 - \lambda_2 \eta_2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \eta_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial l^2} \eta_2^2 + \\ + \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial l} \rho \eta_1 \eta_2 - \frac{\partial V}{\partial \tau} - rV = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Vynásobením $\frac{\partial B}{\partial l} / \frac{\partial V}{\partial l}$ a odečtením (3.9) dostaneme

$$\begin{aligned} \beta_1 \left(\frac{\partial B}{\partial r} - \left(\frac{\partial B}{\partial l} \frac{\partial V}{\partial r} \right) / \frac{\partial V}{\partial l} \right) + \frac{1}{2} \eta_1^2 \left(\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} - \left(\frac{\partial B}{\partial l} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right) / \frac{\partial V}{\partial l} \right) + \\ + \frac{1}{2} \eta_2^2 \left(\frac{\partial^2 B}{\partial l^2} - \left(\frac{\partial B}{\partial l} \frac{\partial^2 V}{\partial l^2} \right) / \frac{\partial V}{\partial l} \right) + \\ + \rho \eta_1 \eta_2 \left(\frac{\partial B}{\partial r \partial l} - \left(\frac{\partial B}{\partial l} \frac{\partial V}{\partial r \partial l} \right) / \frac{\partial V}{\partial l} \right) + \left(\frac{\partial B}{\partial l} \frac{\partial V}{\partial \tau} + rV \frac{\partial B}{\partial l} \right) / \frac{\partial V}{\partial l} - \\ - \lambda_1 \eta_1 \left(\frac{\partial B}{\partial r} - \left(\frac{\partial B}{\partial l} \frac{\partial V}{\partial r} \right) / \frac{\partial V}{\partial l} \right) - \frac{\partial B}{\partial \tau} - rB = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Víme, že platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial l} &= -\frac{1}{l^2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial l^2} &= 2\frac{1}{l^3} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial l} &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \tau} = -\frac{\partial V}{\partial t} &= -1 \end{aligned}$$

Tento model má odhadovanou složitost stejnou jako jednofaktorový, a přitom jeho komplexnost odpovídá dvoufaktorovému.

3.1.1 Oceňování opce

Rovnice (3.14) platí pro libovolný derivát, který závisí pouze na okamžité úrokové míře, dlouhodobé úrokové míře a čase do splatnosti. Ukážeme si nyní krátce, jak bychom takovou opci ohodnotili. Budeme uvažovat evropskou CALL opci s kratší životností než je životnost podkladového dluhopisu. Okrajová podmínka pro opci je určena stejně jako v Black-Scholesově modelu hodnotou opce v době splatnosti

$$c(r, l, 0) = \max [B(r, l, \tau_c) - K, 0], \quad (3.17)$$

kde τ_c je čas zbývající do splatnosti dluhopisu v okamžiku splatnosti opce a K je realizační cena opce.

Abychom mohli takovou opci ocenit, musíme nejdříve určit cenu dluhopisu. Řešíme tedy rovnici (3.14) s okrajovou podmínkou $B(r, l, 0) = 1$ pro dluhopis. Tím dostaneme hodnotu dluhopisu v okamžiku splatnosti opce v závislosti na možných hodnotách r a l . Potom znovu řešíme rovnici (3.14) s novými okrajovými podmínkami (3.17) pro opci.

3.2 Speciální případ

Brennan a Schwartz provedli dva empirické výzkumy. Parametry jsou odhadnuté na základě statistických metod a pro zjednodušení je λ_1 konstantní.

První empirický výzkum se týkal kanadských dluhopisů, kde očekávaný nadvýnos perpetuity oproti okamžité úrokové míře je úměrný dlouhodobé úrokové míře (jak uvedeno ve vzorci (3.14)) pro vyjádření očekávané úrokové míry

$$\beta_2(r, l, t) = l^2 - rl + \frac{\eta_2^2}{l} + \lambda_2 \eta_2, \quad (3.18)$$

kde λ_2 je konstantní.

Další předpoklady jsou zavedené pro zachování kladné hodnoty sazby. Směrodatná odchylka okamžité změny úrokové sazby je úměrná současné hodnotě

$$\begin{aligned} \eta_1(r, l, t) &= r\sigma_1, \\ \eta_2(r, l, t) &= l\sigma_2, \\ \text{a } \beta_1(0, l, t) &\geq 0, \\ \text{což zajišťuje } \beta_2(r, 0, t) &\geq 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

kde σ_1 a σ_2 jsou konstantní. K určení funkce $\beta_1(r, l, t)$ BS předpokládá, že dlouhodobá úroková sazba l zahrnuje veškerou informaci pro budoucí vývoj okamžité úrokové sazby jelikož r konverguje k l . Pak

$$d \ln r = \alpha(\ln l - \ln p - \ln r)dt + \sigma_1 dW_1. \quad (3.20)$$

Z rovnice (3.1) dostáváme

$$\begin{aligned} d \ln r &= \left(\frac{\beta_1}{r} - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) dt + \sigma_1 dW_1 \\ \Rightarrow \beta_1 &= r \left(\alpha \ln \left(\frac{l}{pr} \right) + \frac{\sigma_1^2}{2} \right), \end{aligned}$$

kde α je *návrat ke středu* (*speed of reversion*) $\ln(r)$ k $\ln \frac{l}{p}$, kde p je *faktor změny měřítka* (*scaling factor*).

Rovnice (3.1) lze přepsat do tvaru

$$dr = r \left(\alpha \ln \left(\frac{l}{pr} \right) + \frac{\sigma_1^2}{2} \right) dt + r\sigma_1 dW_1. \quad (3.21)$$

Využitím předpokladu (3.19) na rovnici (3.18) dostaneme

$$\beta_2 = l(l - r + \sigma_2^2 + \sigma_2 \lambda_2),$$

pak (3.2) je rovna

$$dl = l(l - r + \sigma_2^2 + \sigma_2\lambda_2) + l\sigma_2dW_2. \quad (3.22)$$

Chování úrokových sazeb je nyní vyjádřeno jako systém nelineárních stochastických diferenciálních rovnic (3.21) a (3.22). Pro empirický odhad $p, \alpha, \sigma_1, \sigma_2$ a λ_2 BS linearizuje a diskretizuje systém v proměnných r a l jako funkce $\ln r$ a $\ln l$.

Další empirický výzkum byl proveden na amerických dluhopisech od roku 1958-1979. Tento výzkum již nebudu popisovat, zájemci se však mohou podívat do [8].

Model má zásadní problém se stabilitou, jelikož proces $l(t)$ může nabývat nekonečných hodnot v konečném čase. Úpravu tohoto modelu navrhl Hogan v roce 1993 [14], který zároveň také dokázal, že proces je nestabilní.

Věta 1. (Hogan 1993) *Nechť máme*

$$dB(t) = (r(t)B(t) - 1)dt - B(t)^2\sigma_l(r, l)dW_l(t)$$

a obecnou stochastickou diferenciální rovnicí pro $r(t)$

$$dr(t) = \mu_r(r, l)dt + \sigma_r(r, l)dW_r(t),$$

kde $\text{corr}[W_r, W_l] = \rho$, $-1 < \rho < 1$. Dále předpokládejme, že $\sigma_r(r, l) = \eta_1(r)$ a $\sigma_l(r, l) = \eta_2(l)$ a $\eta_1(r)$, $\eta_2(l)$ splňují Lipschitzovu podmínku⁴. Pokud je alespoň jeden z výrazů roven

1. $\mu_r(r, l) = \alpha + \beta(l - r)$,
2. $\mu_r(r, l) = \alpha + \beta r(l - r)$,
3. $\mu_r(r, l) = \alpha r + \beta r \ln \frac{l}{r}$,

pak proces je nestabilní, tj. $r(t)$ nebo $l(t)$ nabudou nekonečných hodnot v konečném čase skoro jistě.

Důkaz. viz Hogan⁵ [14]. □

Povšimněte si, že v případě 3 se jedná o Brennan-Schwartzův model.

Hogan (1993) dokázal, že existuje určitá skupina vícefaktorových modelů, které jsou nestabilní. I když BS je model (1979) založen na rozumných předpokladech, které mají ekonomický smysl, musíme být přesto opatrní se stabilitou. Rebonato v roce 1998 navrhl úpravený BS model (viz [13]).

BS může být úspěšně využit při opatrném zacházení a kalibraci, v opačném případě dává nestabilní výsledky.

⁴Podmínka kladoucí omezení na přírůstek funkce vzhledem k nějaké proměnné. Jestliže funkce f je definována na intervalu $D \subset (-\infty, \infty)$ a existuje konstanta L taková, že platí $f(x) - f(y) \leq L(x - y)$ pro všechna $x, y \in D$, pak se říká, že f splňuje na D Lipschitzovu podmínku a L je její Lipschitzova konstanta.

⁵Čtenáře bych chtěl upozornit, že v článku je několik chyb včetně uvedené věty.

4. Longstaff-Schwartzův (LS) dvoufaktorový model

Longstaff a Schwartz navrhli dvoufaktorový rovnovážný model založený na časové struktuře CIR popsaného v první kapitole. Dva faktory, které LS zahrnuly do svého modelu, jsou krátkodobá úroková míra a okamžitý rozptyl změn v této míře. Rozptyl, druhý faktor v tomto modelu, byl vybrán z důvodu jeho silné provázovanosti s oceněním potenciálního nároku (*contingent claim*).

Informace pro tuto kapitolu jsme převážně čerpali z [8] a [9].

4.1 Obecný popis modelu

Časová struktura je modelovaná pomocí spojitého času, kde je fyzická investice provedena v ekonomice spojitého času¹ (*continuous time economy*) a konstantního výnosu². Všechny fyzické investice jsou převedeny na zboží, které je buď spotřebováno nebo reinvestováno do výroby. Výnosy realizované z investic jsou vyjádřeny stochastickým procesem

$$\frac{dQ}{Q} = (\mu X + \theta Y)dt + \sigma\sqrt{Y}dW_1, \quad (4.1)$$

kde μ , θ , a σ jsou kladné konstanty, X a Y jsou stavové proměnné (*state variable*), a W_1 je Wienerův proces. X představuje ekonomický faktor vyjádřující očekávané výnosy, ale nemá žádný vliv na neurčitost výroby (*production uncertainty*), Y ovlivňuje očekávané výnosy a rozptyl. Z toho vyplývá, že očekávané výnosy a rozptyl výroby nejsou silně korelovány. Pro zajištění nezápornosti úrokové míry je $\theta > \sigma$. Proměnné jsou modelované jako

$$dX = (a - bX)dt + c\sqrt{X}dW_2, \quad (4.2)$$

$$dY = (d - eY)dt + f\sqrt{Y}dW_3, \quad (4.3)$$

kde a , b , c , d , e a f jsou kladné konstanty a W_2 , W_3 jsou Wienerovy procesy. Jelikož X je nekorelovaná s neurčitostí výroby, požadujeme, aby W_2 byl také nekorelovan s W_1 .

Trhy jsou považované za spojitě a konkurenční s fixním počtem investorů, které mají časovou závislost (*time-additive preferences*) ve tvaru

$$E_t \left[\int_t^\infty \exp(-\rho s) \ln(C(s)) ds \right], \quad (4.4)$$

kde $C(s)$ je úroveň spotřeby v čase s a užitková funkce je logaritmického tvaru. Diskontní faktor exponenciálního tvaru zahrnuje předdefinovanou konstantu ρ . Každý investor si přeje maximalizovat užitek (4.4) za podmínky omezeného rozpočtu vyjádřeného jako

¹Někdy také označovanou jako keynesovská ekonomie.

²Anglické označení *constant-returns-to-scale* znamená, že procentuální navýšení na výstupu se rovná stejnému procentuálnímu navýšení ve všech vstupech.

$$dW = W \frac{dQ}{Q} - C dt, \quad (4.5)$$

kde W je bohatství investora v čase t . Investor může v čase t veškeré bohatství buď celé spotřebovat, nebo jeho část danou vztahem (4.1) investovat za účelem navýšení budoucí spotřeby. Obdržená užitková funkce je pak ve tvaru

$$J(W, X, Y, t) = \frac{\exp(-\rho t)}{\rho} \ln W + G(X, Y, T). \quad (4.6)$$

Optimální spotřeba a investiční výše také tvoří část maximalizační úlohy. V roce 1985 navrhli Cox, Ingersoll, Ross užitkovou funkci ve tvaru

$$C^*(W, X, Y, t) = \frac{\rho W}{1 - \exp(-\rho(T - t))},$$

spočítáme-li limitu pro $T \rightarrow \infty$ dostaneme ρW . Dosadíme-li vzorec (4.1) do (4.5), pak bude rovnovážné bohatství (*equilibrium wealth*) vyjádřeno jako

$$dW = (\mu X + \theta Y - \rho)W dt + \sigma W \sqrt{Y} dW_1. \quad (4.7)$$

Rovnice (4.2), (4.3) a (4.7) tvoří sdružený markovský proces, jejichž proměnné vysvětlují stav ekonomické situace.

Nyní předefinujeme proměnné

$$x = \frac{X}{c^2} \quad \text{a} \quad y = \frac{Y}{f^2},$$

a definujeme $H(x, y, \tau)$ jako cenu potenciálního nároku se splatností τ . Hodnota H je určena dle [8] pomocí parciální diferenciální rovnice tvaru

$$\frac{x}{2} H_{xx} + \frac{y}{2} H_{yy} + (\gamma - \delta x) H_x + \left(\eta - \xi y - \left(\frac{-J_{WW}}{J_W} \right) \text{cov}(dW, dY) \right) H_y - rH = H_\tau, \quad (4.8)$$

kde r je okamžitá bezriziková úroková míra, $\text{cov}(dW, dY)$ je okamžitá kovariance změn bohatství W a Y a

$$\gamma = \frac{a}{c^2}, \quad \eta = \frac{d}{f^2}, \quad \delta = b, \quad \xi = e.$$

Po této substituci přejdou rovnice (4.2) a (4.3) do tvaru

$$\begin{aligned} dx &= (\gamma - \delta x) dt + \sqrt{x} dW_2, \\ dy &= (\eta - \xi y) dt + \sqrt{y} dW_3. \end{aligned}$$

Rovnice (4.8) obsahuje u koeficientu H_y časově závislý výraz, jež vyjadřuje rizikovou premii související s množstvím výroby a neurčitosti Y . Na rovnice (4.3), (4.6) a (4.7) můžeme ukázat, že

$$\frac{-J_{WW}}{J_W} \text{cov}(dW, dY) = \lambda y, \quad (4.9)$$

kde λ je konstanta. Výše uvedený vzorec odvodíme z (4.6)

$$\begin{aligned}
J_W &= \frac{1}{\rho W} e^{-\rho t} \\
J_{WW} &= -\frac{1}{\rho W^2} e^{-\rho t} \\
\Rightarrow -\frac{J_{WW}}{J_W} &= \frac{1}{W}.
\end{aligned}$$

Za předpokladu, že σ , f a $E[dW_1 dW_3]$ jsou konstantní, pak z (4.3) a (4.7) dostaneme

$$\text{cov}(dW, dY) = WY\sigma f E dW_1 dW_3,$$

za předpokladu, že λ je konstantní vyplývá (4.9).

Jak vidíme ve vzorci (4.9), tržní cena rizika λ je přímo úměrná y . V daném případě je tržní cena rizika konstantní. Určením okamžité bezrizikové úrokové míry r , jako vyjádření x , y nám umožní vyřešit (4.8) jako cenu potenciálního nároku.

Rovnovážná bezriziková úroková míra je vyjádřena jako³

$$r = \alpha x + \beta y, \quad (4.10)$$

kde $\alpha = \mu c^2$ a $\beta = (\theta - \sigma^2)f^2$. Využitím Itoova lemmatu na (4.10) dostaneme stochastický proces popisující r

$$\begin{aligned}
dr &= \alpha dx + \beta dy = \\
&= \alpha(\gamma - \delta x)dt + \beta(\eta - \xi y)dt + \alpha\sqrt{x}dW_2 + \beta\sqrt{y}dW_3.
\end{aligned} \quad (4.11)$$

Spočítáme-li očekávané hodnoty výše uvedeného dostaneme vyjádření okamžité změny V . Nejprve určíme střední hodnoty

$$\begin{aligned}
E[dr] &= \alpha(\gamma - \delta x)dt + \beta(\eta - \xi y)dt \\
\Rightarrow (E[dr])^2 &= 0
\end{aligned}$$

a jelikož W_1 a W_3 jsou nekorelovaná tak

$$E[(dr)^2] = \alpha^2 x dt + \beta^2 y dt.$$

Pak se tedy V rovná

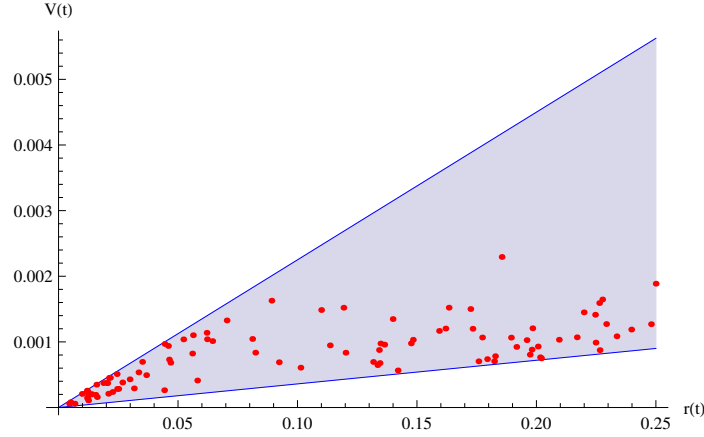
$$\begin{aligned}
V = \frac{\text{var}(dr)}{dt} &= E[(dr - E[dr])^2] = \\
&= E[(dr)^2] - (E[dr])^2 = \\
&= \alpha^2 x + \beta^2 y.
\end{aligned} \quad (4.12)$$

³Z rovnice (4.1) od očekávané výnosnosti odečteme rozptyl výroby. Dostaneme pak po substituci proměnných

$$\begin{aligned}
r &= \mu c^2 x + \theta f^2 y - \sigma^2 f^2 y = \\
&= \mu c^2 x + (\theta - \sigma^2) f^2 y.
\end{aligned}$$

Poznámka 2. Snadno se dá ukázat, je-li $\alpha < \beta$ pak okamžitý rozptyl je omezen v každém čase v rozmezí $[\alpha r(t), \beta r(t)]$. Z toho vyplývá, že je vhodné pro plné využití tohoto modelu volit α a β „daleko od sebe“ (viz soubor *Longstaff-Schwartz-Simulation.nb*).

Obrázek 4.1: Znázornění, že okamžitá volatilita V_t je omezená v intervalu $[\alpha r(t), \beta r(t)]$.



Nyní řešíme soustavy rovnic (4.10) a (4.12), kde x a y mohou být vyjádřeny jako funkce r a V . Je-li $\alpha \neq \beta$, máme

$$x = \frac{\beta r - V}{\alpha(\beta - \alpha)}, \quad (4.13)$$

$$y = \frac{V - \alpha r}{\beta(\beta - \alpha)}, \quad (4.14)$$

Dosadíme tyto hodnoty do (4.11) a dostáváme

$$dr = \mu_r dt + \sigma_{1,r} dW_2 + \sigma_{2,r} dW_3, \quad (4.15)$$

kde

$$\begin{aligned} \mu_r &= \alpha\gamma + \beta\eta - \frac{\beta\delta - \alpha\xi}{\beta - \alpha}r - \frac{\xi - \delta}{\beta - \alpha}V, \\ \sigma_{1,r} &= \alpha\sqrt{\frac{\beta r - V}{\alpha(\beta - \alpha)}}, \\ \sigma_{2,r} &= \beta\sqrt{\frac{V - \alpha r}{\beta(\beta - \alpha)}}. \end{aligned}$$

Stejně tak z (4.12) dostaneme pro stochastický proces V

$$dV = \mu_V dt + \sigma_{1,V} dW_2 + \sigma_{2,V} dW_3, \quad (4.16)$$

kde

$$\begin{aligned}\mu_V &= \alpha^2\gamma + \beta^2\eta - \frac{\alpha\beta(\delta - \xi)}{\beta - \alpha}r - \frac{\beta\xi - \alpha\delta}{\beta - \alpha}V, \\ \sigma_{1,V} &= \alpha^2\sqrt{\frac{\beta r - V}{\alpha(\beta - \alpha)}}, \\ \sigma_{2,V} &= \beta^2\sqrt{\frac{V - \alpha r}{\beta(\beta - \alpha)}}.\end{aligned}$$

Za předpokladu, že r a V jsou kladné, vyplývá, že parametry $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$ a ξ jsou také kladné⁴.

Jelikož r je závislá na V a naopak, pak tyto dva procesy tvoří sdružený markovský proces.

4.2 Odhad ceny dluhopisu

Nechť $P(r, V, \tau)$ je cena diskontního bezrizikového dluhopisu s dobou splatnosti τ . Hodnota tohoto dluhopisu musí splňovat parciální diferenciální rovnici hodnoty potenciálního nároku (4.8) v rámci dříve popsané rovnovážné ekonomie.

Rovnovážná cena $P(x, y, \tau)$ se dá nalézt řešením (4.8) za okrajové podmínky $P(x, y, 0) = 1$. Rovnovážná cena má pak tvar

$$P(x, y, \tau) = A^{2\gamma}(\tau)B^{2\eta}(\tau) \exp[\kappa\tau + (\delta - \phi)(1 - A(\tau))x + (\nu - \psi)(1 - B(\tau))y], \quad (4.17)$$

kde

$$A(\tau) = \frac{2\phi}{(\delta + \phi)(e^{\phi\tau} - 1) + 2\phi}, \quad (4.18)$$

$$B(\tau) = \frac{2\psi}{(\nu + \psi)(e^{\psi\tau} - 1) + 2\psi} \quad (4.19)$$

a

$$\begin{aligned}\nu &= \xi + \lambda, \\ \phi &= \sqrt{2\alpha + \delta^2}, \\ \psi &= \sqrt{2\beta + \nu^2}, \\ \kappa &= \gamma(\delta + \phi) + \eta(\nu + \psi).\end{aligned}$$

Vyjádříme nyní cenu dluhopisu pomocí r a V . Nejprve z (4.13) a (4.14) dosadíme do exponentu rovnice (4.17), pak získáme

⁴Je zapotřebí pouze šest parametrů k popisu celého modelu. Ostatní parametry $\mu, \theta, \sigma^2, a, c, d$ a f jsou závislé na parametrech α, β, γ a η .

$$\begin{aligned}
& (\kappa\tau + (\delta - \phi)(1 - A(\tau))x + (\nu - \psi)(1 - B(\tau))y = \\
& = (\kappa\tau + (\delta - \phi)(1 - A(\tau))\frac{\beta r - V}{\alpha(\beta - \alpha)} + (\nu - \psi)(1 - B(\tau))\frac{V - \alpha r}{\beta(\beta - \alpha)} = \\
& = \kappa\tau + \left(\frac{\beta(\delta - \phi)(1 - A(\tau))}{\alpha(\beta - \alpha)} - \frac{\alpha(\nu - \psi)(1 - B(\tau))}{\beta(\beta - \alpha)} \right) r + \\
& \quad + \left(\frac{(\nu - \psi)(1 - B(\tau))}{\beta(\beta - \alpha)} - \frac{(\delta - \phi)(1 - A(\tau))}{\alpha(\beta - \alpha)} \right) V.
\end{aligned}$$

Z (4.18) a (4.19) máme

$$\begin{aligned}
1 - A(\tau) &= \frac{(\delta + \phi)(e^{\phi\tau} - 1)A(\tau)}{2\phi}, \\
1 - B(\tau) &= \frac{(\nu + \psi)(e^{\psi\tau} - 1)B(\tau)}{2\psi},
\end{aligned}$$

stejně tak

$$\begin{aligned}
\delta^2 - \phi^2 &= -2\alpha, \\
\nu^2 - \psi^2 &= -2\beta.
\end{aligned}$$

Pak tedy platí

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\beta(\delta - \phi)(1 - A(\tau))}{\alpha(\beta - \alpha)} - \frac{\alpha(\nu - \psi)(1 - B(\tau))}{\beta(\beta - \alpha)} \right) r + \\
& \quad + \left(\frac{(\nu - \psi)(1 - B(\tau))}{\beta(\beta - \alpha)} - \frac{(\delta - \phi)(1 - A(\tau))}{\alpha(\beta - \alpha)} \right) V = \\
& = \left(-\frac{\beta(e^{\phi\tau} - 1)A(\tau)}{\phi(\beta - \alpha)} + \frac{\alpha(e^{\psi\tau} - 1)B(\tau)}{\psi(\beta - \alpha)} \right) r + \\
& \quad + \left(-\frac{(e^{\psi\tau} - 1)B(\tau)}{\psi(\beta - \alpha)} + \frac{(e^{\phi\tau} - 1)A(\tau)}{\phi(\beta - \alpha)} \right) V = \\
& = \frac{\alpha\phi(e^{\psi\tau} - 1)B(\tau) - \beta\psi(e^{\phi\tau} - 1)A(\tau)}{\phi\psi(\beta - \alpha)} r + \frac{\psi(e^{\phi\tau} - 1)A(\tau) - \phi(e^{\psi\tau} - 1)B(\tau)}{\phi\psi(\beta - \alpha)} V.
\end{aligned}$$

Cena dluhopisu může být vyjádřena jako

$$P(r, V, \tau) = A^{2\gamma}(\tau)B^{2\eta}(\tau) \exp[\kappa\tau + C(\tau)r + D(\tau)V], \quad (4.20)$$

kde

$$\begin{aligned}
C(\tau) &= \frac{\alpha\phi(e^{\psi\tau} - 1)B(\tau) - \beta\psi(e^{\phi\tau} - 1)A(\tau)}{\phi\psi(\beta - \alpha)}, \\
D(\tau) &= \frac{\psi(e^{\phi\tau} - 1)A(\tau) - \phi(e^{\psi\tau} - 1)B(\tau)}{\phi\psi(\beta - \alpha)}.
\end{aligned}$$

V programu *Mathematica* jsme provedli odhad ceny dluhopisu pomocí výše popsaného modelu (viz soubor *Longstaff_Schwartz_Bond_Valuation.nb* a Příloha 3).

4.2.1 Výnos do splatnosti

Nechť $Y(\tau)$ je výnos do splatnosti diskontního dluhopisu. Pak

$$\begin{aligned} P(r, V, \tau) &= e^{-Y(\tau)\tau} \\ \Rightarrow e^{-Y(\tau)\tau} &= A^{2\gamma}(\tau)B^{2\eta}(\tau) \exp[\kappa\tau + C(\tau)r + D(\tau)V] \\ \Rightarrow Y(\tau) &= -\frac{2\gamma \ln A(\tau) + 2\eta \ln B(\tau) + \kappa\tau + C(\tau)r + D(\tau)V}{\tau}, \end{aligned}$$

což nám ukazuje, že výnos do splatnosti je lineární funkce proměnných r a V . Ukážeme nyní, že $\lim_{\tau \rightarrow 0} Y(\tau) = r$. Použitím L'Hospitalova pravidla dostáváme⁵

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} Y(\tau) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} - \left(\frac{2\gamma A'(\tau)}{A(\tau)} + \frac{2\eta B'(\tau)}{B(\tau)} + \kappa + C'(\tau)r + D'(\tau)V \right) = \\ &= -(-\gamma(\delta + \phi) - \eta(\nu + \psi) + \kappa - r) = \\ &= r, \end{aligned}$$

což je zcela konzistentní s předpokladem, že r je okamžitá úroková míra. Využitím L'Hospitalova pravidla opět dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} Y(\tau) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} - \left(\frac{2\gamma A'(\tau)}{A(\tau)} + \frac{2\eta B'(\tau)}{B(\tau)} + \kappa + C'(\tau)r + D'(\tau)V \right) = \\ &= -(-2\gamma\phi - 2\eta\psi + \kappa) = \\ &= \gamma(\phi - \delta) + \eta(\psi - \nu), \end{aligned}$$

což je nezávislé na r a V . Jinými slovy s rostoucí dobou splatnosti τ je hodnota dluhopisu $Y(\tau)$ méně ovlivněna r a V .

Tento rovnovážný model má řadu výhod při zachycení průběhu výnosové křivky a ceny dluhopisu. Například derivace $\frac{\partial P(r, V, \tau)}{\partial r}$ může být záporná i kladná. Zejména pro malé hodnoty τ je derivace záporná, ale se zvyšující se dobou splatností může nabývat i kladných hodnot. Tuto vlastnost nemůžeme pozorovat například u Vašíčkova nebo CIR modelu, jelikož se jedná o jednofaktorové modely závislé pouze na okamžité úrokové míře r_t .

Pomocí LS modelu se dají oceňovat i opce. Tím se však v této práci zabývat nebudeme a čtenáře odkážu na článek [9].

⁵Poslední rovnost plyne z definice $\kappa = \gamma(\delta + \phi) + \eta(\nu + \psi)$.

Závěr

V diplomové práci byly popsány nejpoužívanější modely chování úrokových sazeb. Důraz nebyl kladen na množství modelu, ale na důsledné zpracování. Pro zvědavého čtenáře jsme se snažili vždy uvádět použité zdroje, z nichž bylo čerpáno a ze kterých by bylo možno získat další informace.

Jak jsme se již zmínili v úvodu, doposud nebyl a dle mého názoru nikdy nebude objeven univerzální model. Mnozí autoři tomu však věří a doufají! Úrokové deriváty představují velmi komplikované aktivum, které není možno popsat ani pomocí multifaktorových modelů. Příkladem může posloužit černý pátek v říjnu 1987, kdy se většina obchodníků na Wall Streetu domnívala, že modely jsou nastaveny tak, aby zabránily výraznému poklesu trhu. Opak byl však pravdou. Čtenáři bych velmi doporučil přečíst si na toto téma knihu od Nicholase Taleba Černá labuť.

Na závěr bych chtěl uvést velmi vystízný citát od Alberta Einsteina, bývalého profesora na Karlově Univerzitě: *"Everything should be made as simple as possible, but no simpler"*.

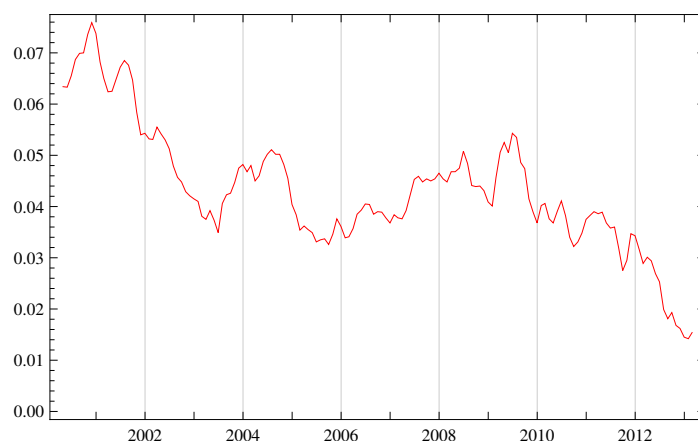
Příloha 1: Stanovení ceny 10-letého státního dluhopisu Vašíčkovým modelem.

Vypočítali jsme cenu diskontního dluhopisu pomocí Vašíčkova modelu popsaného ve druhé kapitole. Níže uvádím postup, který je praktický demonstrován v programu *Mathematica* (zdrojový kód lze nalézt v souboru *Vasicek_Bond_Valuation.nb*).

Krok 1. Nastavíme výchozí adresář a načteme data ze vstupního souboru *vyнос_10leteho_statniho_dluhopisu.txt*, které uložíme do proměnné *datadatumy*. Data jsou stažena ze systému časových řad ARAD ČNB [18].

Krok 2. Načtená data je nutné upravit do formátu *List*, aby se s nimi dalo pohodlně pracovat (např. vykreslovat grafy atd.).

Obrázek 4.2: Výnosy 10-letého státního dluhopisu od roku 01/2000 do 02/2013.



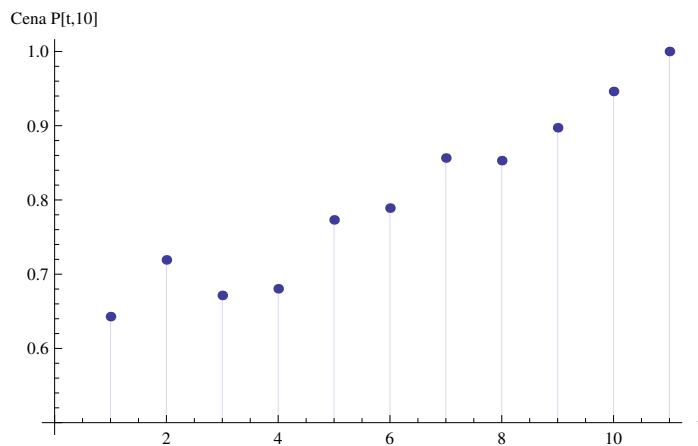
Upravíme následně vstupní údaje:

- pro správnost výpočtu převedeme procenta uvedená ve vstupním souboru *.txt* na desetinná čísla
- data z prvního sloupce vstupního *.txt* souboru převedeme na dny (a uložíme do proměnné *datadny*), kde nejstarší den budeme považovat za den 0. Převod dat z kalendářního formátu do řadového je nezbytně nutné, neboť funkce programu *Mathematica*, které budeme v dalších výpočtech používat, vyžadují právě tento zápis.

Krok 3. Zvolíme rok T , ve kterém chceme zjistit cenu 10-letého dluhopisu. V tomto případě jsme zvolili rok $T = 2004$. Z proměnné *datadatumy*, kde máme načtená celá data od roku 01/2000 do 02/2013, je nutné vybrat data do roku 2004, které nám následně poslouží k simulaci předpovědi. Naprogramovali jsme funkci *NechRok*[$T1, T2, data$], kde je $T1$ a $T2$ jsou roky, které chceme ponechat spolu se úrokovými sazbami v proměnné *data*. Rozhodli jsme se, že pro budoucí simulaci ponecháme pouze sazby z předchozích dvou let, tj. $T1 = T - 2 = 2002$ a $T2 = T - 1 = 2003$.

Krok 4. Nyní odhadneme parametry CIR modelu pomocí předdefinované funkce `FindProcessParameters[]` a nasimulujeme průběh úrokové míry na následujících 10 let. Definujeme vzorce (2.16), (2.17) a (2.18) pro výpočet ceny dluhopisu. Výsledná cena jednotkového 10-letého ($T = 10$) dluhopisu nám vyšla 0.642.

Obrázek 4.3: Vývoj ceny 10-letého dluhopisu v závislosti na čase.



Příloha 2: Modelování předpovědi PRIBOR sazby pomocí CIR modelu

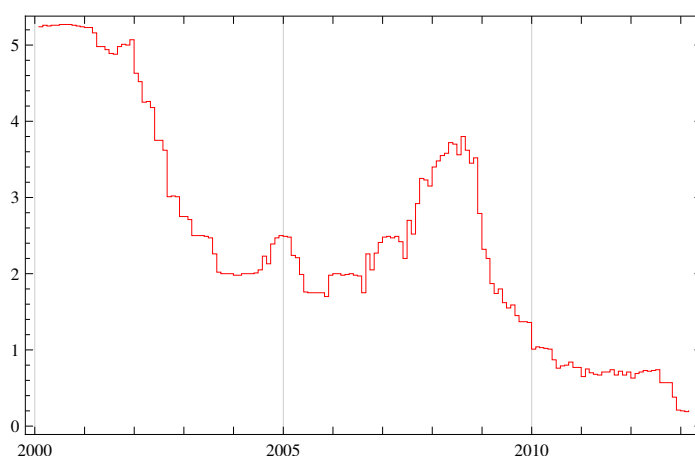
PRIBOR (Prague InterBank Offered Rate), jak jsme se již zmínili v úvodu, je průměrná sazba, za kterou jsou si banky ochotny půjčovat likviditu na českém mezibankovním trhu. Často se využívá jako referenční sazba u některých úvěrů⁶. PRIBOR počítá (fixuje) kalkulační agent pro Czech Forex Club z kotací referenčních bank pro prodej depozit (offer). Algoritmus je podrobně popsán na webových stránkách ČNB [19]. V zásadě se jedná o aritmetický průměr sazeb podaných referenčními bankami daného dne.

První kroky jsou podobné s Přílohou 1, proto to již nebudeme podrobně popisovat. K předpovědi jsme použili CIR model popsáný ve druhé kapitole. Níže uvádíme okomentovaný kód v programu *Mathematica* (viz soubor *CIRModel_PTRIBOR_FORECAST.nb*).

Krok 1. Zkusíme nejprve nasimulovat průběh 6M PRIBOR sazby. Nastavíme výchozí adresář a načteme knihovnu *HypothesisTesting* pro výpočet intervalů spolehlivosti, které využijeme dále.

Krok 2. Načteme data ze souboru *vyvoj_pribor.txt*, která jsou stažena z ARAD ČNB [18]. Chceme-li vývoj sazby znázornit graficky, je nutné si uvědomit, že se jedná o průměrné měsíční údaje a proto bude průběh schodovitý (po celý měsíc sazba zůstává neměnná).

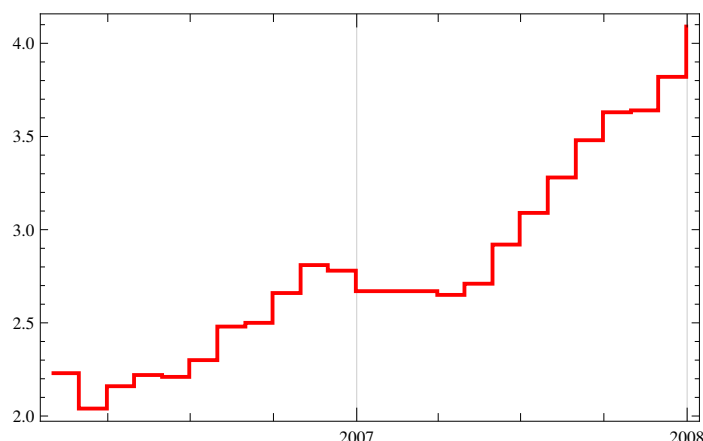
Obrázek 4.4: Graf vývoje sazby PRIBOR od roku 2000 do 2013.



Krok 3. Pro předpověď si zvolíme rok $T = 2008$ a pomocí námi naprogramované funkce *NechRok*[$T1, T2, data$] ponecháme údaje ve formátu *List* mezi roky $T1$ a $T2$. Tentokrát jsme zvolili $T1 = T - 2 = 2006$ a $T2 = T - 1 = 2007$.

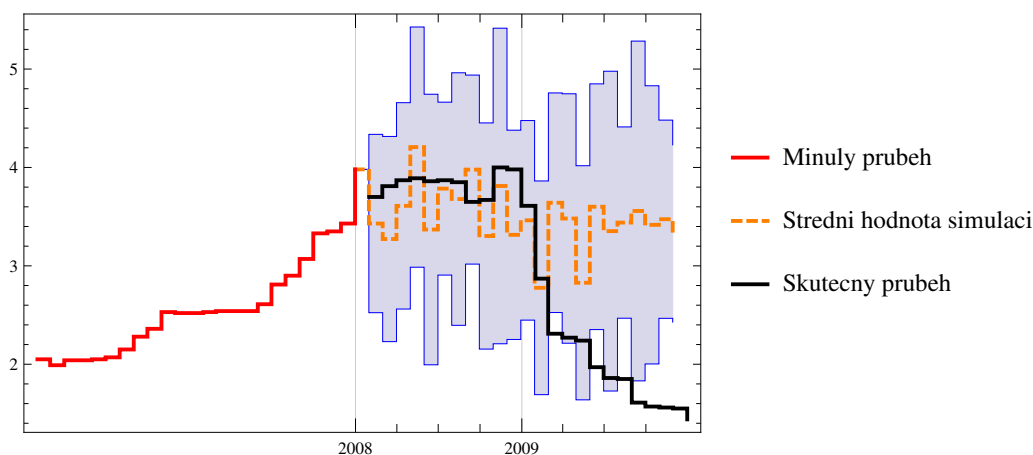
⁶Například na českém trhu to využívá mBanka.

Obrázek 4.5: Průběh sazby PRIBOR 2006-2007.



Krok 4. Nejprve odhadneme parametry γ , σ a α CIR modelu. Nyní již můžeme nasimulovat možné vývoje PRIBOR sazby. Z těchto dat následně spočítáme střední hodnotu a určíme 99% intervaly spolehlivosti.

Obrázek 4.6: Znázornění předpovědi 6M PRIBOR sazby s 99% intervalem spolehlivosti.



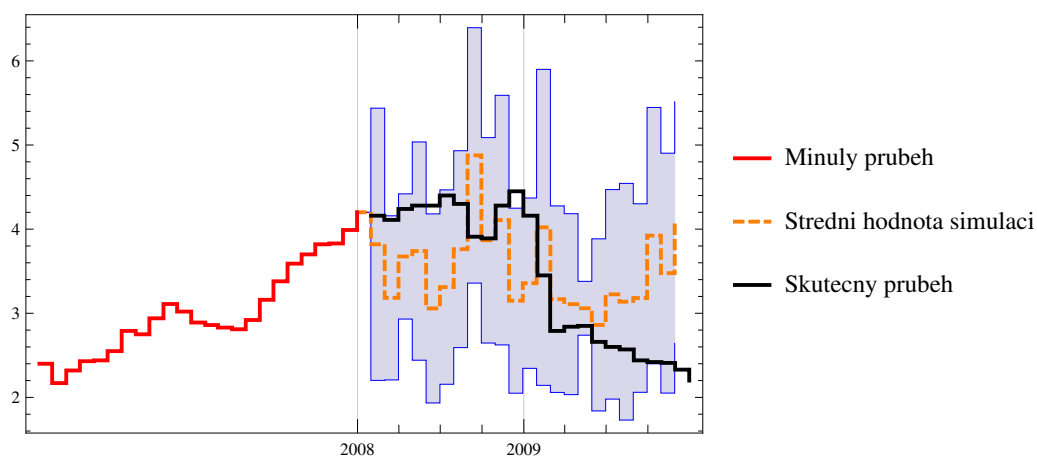
Stejný postup jsme aplikovali i na 1M a 1Y PRIBOR sazby. Ukázalo se, že čím je delší fixace, tím je předpověď méně spolehlivá. Je nutné také podotknout, že v roce 2008 a 2009 vypukla finanční krize, která zvýšila rozptyl PRIBOR sazby (např. výrazný pokles sazeb kolem roku 2009). 1Y nezaznamenala tak velký pokles jako například 1M sazba.

Je vůbec otázkou, zdá je vhodné modelovat sazbu PRIBOR. Jak jsme se již zmínili, často se používá jako referenční sazba pro úvěry, a pro banky její předpověď hraje zásadní roli pro budoucí vývoj cash-flow. Jelikož se sazba počítá jako aritmetický průměr referenčních bank může dojít k jejímu ovlivňování. Stačí si vzpomenout na léto 2012, kdy byly britské banky (Barclays atd.) obviněny z manipulace sazby LIBOR (London InterBank Offered Rate), která se určuje podobným principem jako PRIBOR.

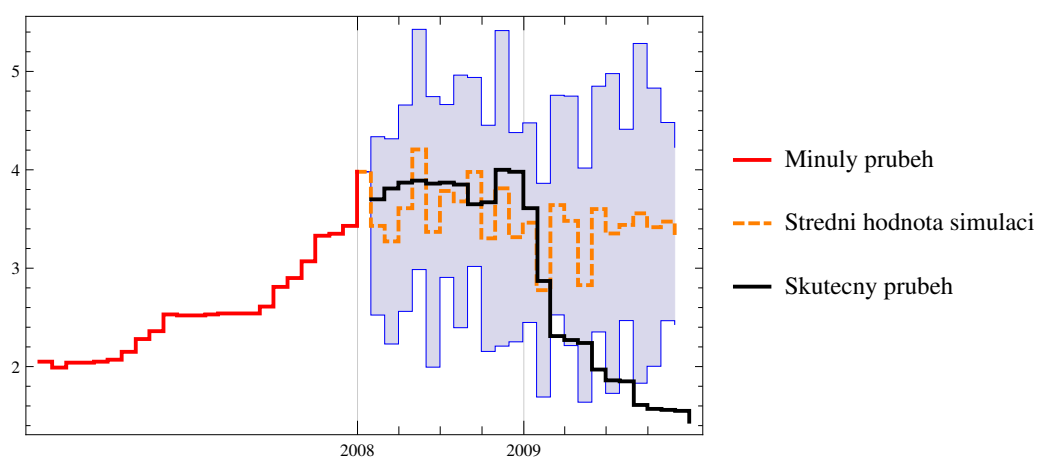
Obecně se dá říct, že pokud finanční trhy nezažívají velké fluktuace a ekono-

mická situace je stabilní (včetně výhledu⁷), pak se můžeme spolehnout na výše uvedený model. Zatím žádný finanční model nedokázal zachytit se blížíící finanční krizi.

Obrázek 4.7: Znázornění předpovědi 1Y PRIBOR sazby s 99% intervalem spolehlivosti.



Obrázek 4.8: Znázornění předpovědi 1M PRIBOR sazby s 99% intervalem spolehlivosti.



⁷Dal by se například určit z reportu ratingových agentur, které to uvádějí ve svém hodnocení.

Příloha 3: Odhad ceny dluhopisu LS modelem

Pokusili jsme se odhadnout hodnotu dluhopisu užitím LS modelu. Níže uvedený postup lze považovat za dokumentaci souboru *Longstaff_Schwartz_Bond_Valuation.nb* programu *Mathematica*.

Krok 1. Definujme nejprve cenu dluhopisu podle vzorce (4.20) a následně pomocné funkce $C(\tau)$ a $D(\tau)$. Jelikož jsou funkce C a D v programu *Mathematica* již předdefinované, označme si je jako $Ce(\tau)$ resp. $De(\tau)$.

Krok 2. Nyní již můžeme spočítat cenu jednotkového dluhopisu pro vstupní parametry $\tau = 4$, $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 1$, $\delta = 0.33$, $\eta = 0.25$, $\nu = 14$, $r = 0.05$ a $V = 0.11$. Parametry jsou převzaty z článku [9], které byly aplikovány na *U.S. Treasury Bill*. Výsledná cena je 0.582.

Výsledný vzorec LS modelu je velmi komplikovaný. Pokoušeli jsme se odhadnout vstupní parametry, ale žádný přístup nepřinesl požadovaný výsledek. Longstaff Schwartz ve svém článku [9] odhadují parametry užitím GMM (*Generalized Method of Moments*). Následně jsme zkoušeli odhadnout vstupní parametry numeric-ky v programu *Mathematica*, ale žádný algoritmus nedoběhl v pro nás přijatelném čase.

Domníváme se, že LS model je jeden z komplikovanějších modelů v této práci. Bohužel se nám nepodařilo ověřit jeho přesnost z důvodu jeho složitosti.

Seznam použité literatury

- [1] Dervis Bayazit, *Yield Curve Estimation and Prediction with Vasicek Model*, A Thesis Submitted to the Graduate School of Applied Mathematics of the Middle East Technical University, The Department of Financial Mathematics, June 2004.
- [2] Oldrich Vasicek, *An Equilibrium characterization of the term structure*, Journal of Financial Economics, 5: 177-188, 1977.
- [3] Tomáš Cipra, *Finanční ekonometrie*, EKOPRESS, s.r.o., 2008.
- [4] Tomáš Cipra, *Matematika cenných papírů*, HZ, Praha 2000.
- [5] Allen Mattich, *The Dangers of Negative Interest Rates*, July 6, 2012. URL: <http://blogs.wsj.com/eurocrisis/2012/07/06/the-dangers-of-negative-interest-rates/>.
- [6] John Hull, Alan White, *Pricing Interest-Rate-Derivative Securities*, The Review of Financial Studies, p. 573 - 592, 1990.
- [7] M.J.Brennan, E.S.Schwartz, *A continuous time approach to the pricing bonds*, Journal of Banking and Finance, p.33-155, 1979.
- [8] Svoboda Simona, *Interest Rate Modelling*, Palgrave Macmillan, 2004.
- [9] Francis A.Longstaff, Eduardo S.Schwartz, *Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model*, Journal of Finance, Vol. XLVII, No. 4, September 1992.
- [10] Jiří Málek, *Dynamika úrokových měr a úrokové deriváty*, EKOPRESS, s.r.o., 2005.
- [11] Cox, J. Ingersoll, J. Ross, S., *A Theory of the Term Structure of Interest Rate*, Econometrica 53: 385-407, 1985.
- [12] Věra Davidová, *Modely úrokových měr*, Bakalářská práce MFF UK, 2008.
- [13] Andrew J.G. Cairns, *Interest Rate Models. An Introduction.*, Princeton University Press, 2004.
- [14] Hogan, M., *Problems in certain two-factors term-structure models*, The Annals of Applied Probability 1993, vol. 3, No. 2, 576-581.
- [15] By FXstreet.com, *Forex: Swissy negative rates vs RBA easing outlook, opportunity on AUD vs CHF?*, December 4, 2012. URL: <http://www.nasdaq.com/article/forex-swissy-negative-rates-vs-rba-easing-outlook-opportunity-on-aud-vs-chf-cm195619#.UUbucRzFGso>.
- [16] Bernt Oksendal, *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications.*, Sixth Edition, Springer, 2003.

- [17] Petr Myška, *Modely úrokových sazeb - teorie a praxe.*, materiály k semináři aktuárských věd na KPMS MFF UK, 2008.
- [18] ČNB, *ARAD systém časových řad*, February, 2013. URL: <http://www.cnb.cz/docs/ARADY/HTML/index.htm>.
- [19] Robert Holman, *Pravidla pro referenční banky a výpočet (fixing) referenčních úrokových sazeb (PRIBID a PRIBOR)*, Duben, 2006. URL: http://www.cnb.cz/miranda2/export/sites/www.cnb.cz/cs/legislative/vestnik/2006/download/v_2006_03_20206610.pdf
- [20] Knight, F.B., *Essentials of Brownian Motion*, American Mathematical Society, 1981.