Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Petra Jirůtková

Pokrývací věty

Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce:	prof. RNDr. Luboš Pick, CSc., DSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Matematická analýza

Praha 2013

Chtěla bych poděkovat vedoucímu mé diplomové práce panu profesoru Luboši Pickovi za věnovaný čas a za cenné rady a připomínky. Také bych ráda poděkovala panu profesoru Jaroslavu Lukešovi a panu docentu Stanislavu Henclovi za poskytnutí materiálů a za zapůjčení literatury.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne .... Podpis autora

Název práce: Pokrývací věty

Autor: Petra Jirůtková

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Luboš Pick, CSc., DSc., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: V této práci se zabýváme různými pokrývacími větami a jejich aplikacemi. Kromě klasických pokrývacích vět (Vitaliova, Besicovitchova a Whitneyova věta) zde uvádíme i některá jejich zobecnění a další pokrývací věty. Tyto věty pak používáme v důkazech dalších vět, některé jsou typickými aplikacemi pokrývacích vět jako například Lebesgueova věta o derivování, slabý typ (1,1) maximálního operátoru nebo Calderónovo-Zygmundovo lemma, v jejichž důkazech hrají pokrývací věty klíčovou roli. Dále se zabýváme nerovnostmi mezi operátory, pomocí pokrývacích vět dokazujeme vztahy mezi Hardyovým-Littlewoodovým maximálním operátorem, maximálním singulárním integrálním operátorem a ostrým maximálním operátorem.

Klíčová slova: pokrývací věty Vitaliova, Besicovitchova a Whitneyova typu; Hardyův-Littlewoodův maximální operátor

Title: Covering theorems

Author: Petra Jirůtková

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: prof. RNDr. Luboš Pick, CSc., DSc., Department of Mathematical Analysis

Abstract: In this work we study covering theorems and their applications. Apart from classic covering theorems (Vitali, Besicovitch and Whitney theorem) we state some of their generalizations and some other covering theorems. We use them then to prove other theorems. Typical applications are for example Lebesgue differentiation theorem, weak type (1,1) of maximal operator or Lemma of Calderón and Zygmund, in their proves covering theorems are essential. We also deal with inequalities containing operators. Covering theorems help us to prove some relations among the maximal operator of Hardy and Littlewood, the maximal singular integral operator and the sharp maximal operator.

Keywords: covering theorems of Vitali, Besicovitch and Whitney type; Hardy-Littlewood maximal operator

Obsah

Úvod

Pokrývací věty jsou velice užitečné, používají se v různých odvětvích matematiky, například v teorii míry a v teorii integrálu, při zkoumání vlastností Hardyova-Littlewoodova maximálního operátoru nebo při zkoumání nerovností mezi různými maximálními operátory jako je Hardyův-Littlewoodův maximální operátor, maximální singulární integrální operátor a ostrý maximální operátor.
V první kapitole nejprve uvádíme značení, které budeme v následujícím textu používat, a definice základních pojmů, kterými se budeme zabývat. Druhá kapitola je rozdělena na čtyři části - věty Vitaliova typu, věty Besicovitchova typu, věty Whitneyova typu a další pokrývací věty. Tato kapitola tedy obsahuje klasické pokrývací věty a některá jejich zobecnění. Čerpáme především z [6], [9] a [10].
V dalších třech kapitolách jsou uvedeny typické aplikace pokrývacích vět jednotlivých typů, zde opět vycházíme především z výše uvedených zdrojů. Dále pomocí [6] a [3] studujeme maximální operátor příslušný různým systémům množin.
V poslední kapitole užíváme pokrývací věty v důkazech nerovností mezi maximálními operátory, zde čerpáme z [1], [2], [4] a [5].

Kapitola 1

Základní definice a značení

1.1 Značení

V tomto textu značí $\mathbb{N}$ přirozená, $\mathbb{Z}$ celá a $\mathbb{R}$ reálná čísla, $\mathbb{R}^n$ značí n-rozměrný reálný prostor s euklidovskou metrikou značenou $|x|$, maximovou normu $x \in \mathbb{R}^n$ značíme $||x||_{\max}$ a (P, ρ) je metrický prostor. Dále $|x|$ značí absolutní hodnotu reálného čísla x, $|\mathrm{A}|$ je Lebesgueova míra množiny A. Vnější Lebesgueovu míru značíme $|A|_e$, vnější míru k míře μ značíme μ^*.
Vzdálenost dvou množin A, B v metrickém prostoru značíme $\operatorname{dist}(A, B)$, dále $\operatorname{int}(A)$ je vnitřek množiny, ∂A je hranice a $\delta(A)$ je diametr množiny.
Značíme χ_A charakteristickou funkci množiny A, $L(\mathbb{R}^n)$ množinu všech integrovatelných funkcí na $\mathbb{R}^n$, $L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ množinu všech lokálně integrovatelných funkcí na $\mathbb{R}^n$ a $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ spojité funkce.
V metrickém prostoru (P, ρ) je $B(x, r)$ otevřená koule se středem v bodě $x \in P$ a poloměrem $r > 0$.
V celém textu je aQ, pro nějaké $a > 0$ a krychli $Q \subset \mathbb{R}^n$ se středem v bodě $x \in \mathbb{R}^n$ a s délkou hrany $r > 0$, krychle se stejným středem jako Q s a-násobnou délkou hrany oproti Q, tedy krychle se středem v x s délkou hrany ar. Podobně pro kouli $B(x, r) \subset P$ a $a > 0$ je $aB(x, r)$ koule v (P, ρ) soustředná s $B(x, r)$, která má a-krát větší poloměr než $B(x, r)$, tedy $B(x, ar)$.
V důkazech bude c konstanta, která se však v průběhu daného důkazu může měnit.

1.2 Definice základních pojmů

Definice 1. *Uzavřená* (resp. *otevřená*) *krychle* v $\mathbb{R}^n$ se středem v bodě $x \in \mathbb{R}^n$ a hranou délky $a > 0$ je množina těch bodů $y \in \mathbb{R}^n$, které splňují $(x_i - \frac{a}{2}) \leq y_i \leq (x_i + \frac{a}{2})$ (pro otevřenou krychli ostré nerovnosti, tedy $(x_i - \frac{a}{2}) < y_i < (x_i + \frac{a}{2})$), $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Poznámka 1. Krychle v $\mathbb{R}^n$ má tedy hrany rovnoběžné se souřadnicovými osami.

Definice 2. Řekneme, že posloupnost množin $\{V_k\}_k$ *se smršťuje k bodu* x v $\mathbb{R}^n$, jestliže pro každé $k \in \mathbb{N}$ je $x \in V_k$ a $\lim_{k \to \infty} \delta(V_k) = 0$.

Definice 3. Řekneme, že míra μ na $\mathbb{R}^n$ je *zdvojovací*, jestliže existuje konstanta $C > 0$ tak, že pro každou krychli $Q \subset \mathbb{R}^n$ platí

$$\mu(2Q) \leq C\mu(Q).$$

Definice 4. Pro funkci $f \in L_{loc}(\mathbb{R})$ definujeme v bodě $x \in \mathbb{R}$ funkci Mf takto

$$Mf(x) := \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(s)| \, \mathrm{d}s.$$

Operátor $M : f \in L_{loc}(\mathbb{R}) \longmapsto Mf \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ se pak nazývá *centrovaný Hardyův-Littlewoodův maximální operátor*. Kde $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ značí prostor všech měřitelných reálných funkcí definovaných na $\mathbb{R}$.

Takto definovaná funkce Mf je měřitelná, neboť množina $\{Mf > \lambda\}$ je otevřená pro každé $\lambda > 0$. Skutečně:
Buď $x \in \{Mf > \lambda\}$, pak existují $n \in \mathbb{N}$ a $h_0 > 0$ tak, že $\frac{1}{2h_0} \int_{x-h_0}^{x+h_0} |f(s)| \, \mathrm{d}s > (1 + \frac{1}{n})\lambda$. Pak pro $0 < \delta < \frac{h_0}{n}$ a $y \in B(x, \delta)$ je

$$Mf(y) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \int_{y-h}^{y+h} |f(s)| \, \mathrm{d}s \geq \frac{1}{2(h_0 + \delta)} \int_{y-h_0-\delta}^{y+h_0+\delta} |f(s)| \, \mathrm{d}s$$

$$\geq \frac{2h_0}{2h_0 + 2\delta} \frac{1}{2h_0} \int_{x-h_0}^{x+h_0} |f(s)| \, \mathrm{d}s \geq \frac{1}{1 + \frac{\delta}{h_0}} (1 + \frac{1}{n})\lambda > \frac{1}{1 + \frac{h_0}{h_0 n}} (1 + \frac{1}{n})\lambda = \lambda,$$

tedy $B(x, \delta) \subset \{Mf > \lambda\}$.

Zobecnění:

Definice 5. Pro $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ a $x \in \mathbb{R}^n$ definujeme

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} |f(y)| \, \mathrm{d}y,$$

kde $Q(x, r)$ značí krychli v $\mathbb{R}^n$ se středem v bodě x a délkou hrany $r > 0$. Operátor $M : f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n) \longmapsto Mf \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ se nazývá *Hardyův-Littlewoodův maximální operátor*. Kde $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ značí prostor všech měřitelných reálných funkcí definovaných na $\mathbb{R}^n$.

Definice 6. Pro $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ a $x \in \mathbb{R}^n$ definujeme maximální operátor $\tilde{M} : L_{loc}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ takto

$$\tilde{M}f(x) := \sup \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| \, \mathrm{d}y,$$

kde bereme supremum přes všechny krychle Q v $\mathbb{R}^n$ obsahující bod x.

Poznámka 2. Opět jsou množiny $\{Mf > \lambda\}$ a $\{\tilde{M}f > \lambda\}$ otevřené. První případ se dá ukázat podobně jako výše, pro druhý si stačí uvědomit, že je-li $x \in \{\tilde{M}f > \lambda\}$, pak existuje otevřená krychle Q obsahující bod x tak, že $\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(s)| \, \mathrm{d}s > \lambda$, pak ale pro každý bod $y \in Q$ je $\tilde{M}f(y) \geq \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(s)| \, \mathrm{d}s > \lambda$. Podobně jako výše se dá definovat maximální operátor vzhledem k jiným systémům množin než jsou centrované (resp. necentrované) krychle. Více detailů uvedeme v kapitole 6.

Definice 7. Funkci $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, která je kladná skoro všude a měřitelná, budeme nazývat *váha*.

Definice 8. Řekneme, že váha $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *patří do třídy* A_∞, značíme $w \in A_\infty$, jestliže existují konstanty $A, p \in (1, \infty)$ takové, že pro každou měřitelnou funkci f a pro každé $\lambda > 0$ platí

$$\int_{\{\tilde{M}f>\lambda\}} w(x)\,\mathrm{d}x \le A\,\lambda^{-p} \int |f(x)|^p w(x)\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka 3.

- Je-li míra μ absolutně spojitá vůči Lebesgueově míře a daná integrací funkce w, pak značíme $w(E) := \int_E w(x)\,\mathrm{d}x$.
- Je-li $w \in A_\infty$, pak podle [4] str. 248 platí:
  1. existují konstanty $C, p \in (1, \infty)$ takové, že pro každou krychli Q a pro každou její měřitelnou podmnožinu $E \subset Q$ platí $\frac{w(Q)}{w(E)} \le C \left(\frac{|Q|}{|E|}\right)^p$, kde ztotožňujeme $\tilde{w}(E) := \int_E w(x)\,\mathrm{d}x$ a w,
  2. existují konstanty $\tilde{C}, \delta \in (1, \infty)$ takové, že pro každou krychli Q a pro každou její měřitelnou podmnožinu $E \subset Q$ platí $\frac{w(E)}{w(Q)} \le \tilde{C} \left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^\delta$,
  3. pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pro každou krychli Q v $\mathbb{R}^n$ a pro každou její měřitelnou podmnožinu E platí
  $$|E| < \delta|Q| \;\Rightarrow\; w(E) < \varepsilon w(Q).$$
- Je-li $w \in A_\infty$, pak w definuje zdvojovací míru. Skutečně: pro libovolnou krychli $Q \subset \mathbb{R}^n$ máme:
  $$\frac{w(2Q)}{w(Q)} \le C \left(\frac{|2Q|}{|Q|}\right)^p = C(2^n)^p \quad \Rightarrow w(2Q) \le cw(Q),$$
  kde konstanta $c := C(2^n)^p$ nezávisí na zvolené krychli.

Definice 9. Nechť μ je míra na $\mathbb{R}^n$ a g je funkce měřitelná vzhledem k μ. Definujeme *nerostoucí přerovnání* funkce g vzhledem k míře μ předpisem

$$g_\mu^*(t) := \inf\{\lambda > 0 : \mu(\{x : |g(x)| > \lambda\}) \le t\}, \;\; t \in (0, \infty).$$

Definice 10. Dále definujeme g_μ^{**} předpisem

$$g_\mu^{**}(t) := \frac{1}{t} \int_0^t g_\mu^*(s)\,\mathrm{d}s, \;\; t \in (0, \infty).$$

Definice 11. Operátor $T : L_{loc}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, který je subaditivní (tj. $\forall f_1, f_2 \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ a s.v. $x \in \mathbb{R}^n$ platí $|T(f_1 + f_2)(x)| \le |Tf_1(x)| + |Tf_2(x)|$), se nazývá

- *slabého typu (p,p)*, kde $1 \le p < \infty$, pokud existuje konstanta $c > 0$ (nezávislá na f a λ) tak, že $\forall \lambda > 0$, $\forall f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$:
  $$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| \le \left(\frac{c||f||_p}{\lambda}\right)^p,$$
- *silného typu (p,p)*, kde $1 \le p \le \infty$, pokud existuje konstanta $c > 0$ (nezávislá na f) tak, že $\forall f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$:
  $$||Tf||_p \le c||f||_p.$$

Poznámka 4. Operátor $T: L_{loc}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, který je silného typu (p,p), kde $1 \leq p < \infty$, je i slabého typu (p,p).
Skutečně: pro $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ a $\lambda > 0$ označme $A_\lambda := \{x : |Tf(x)| > \lambda\}$, potom

$$|\{x : |Tf(x)| > \lambda\}| = \int \chi_{A_\lambda}(x)\,\mathrm{d}x \leq \int \frac{|Tf(x)|^p}{\lambda^p}\,\mathrm{d}x \leq \left(\frac{c||f||_p}{\lambda}\right)^p.$$

Definice 12. Nechť $K(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, splňuje následující podmínky

(i) $|K(x)| \leq \frac{C}{|x|^n}$, $x \neq 0$,

(ii) $\int_{\{\alpha<|x|<\beta\}} K(x)\,\mathrm{d}x = 0$, $0 < \alpha < \beta$,

(iii) $|K(x-y) - K(x)| \leq \frac{C|y|}{|x|^{n+1}}$, pokud $0 < 2|y| \leq |x|$,

pak K nazýváme *Calderónovo-Zygmundovo jádro*.
Pro $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ položme $T_\varepsilon f(x) := \int_{\{y:|x-y|>\varepsilon\}} K(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y$. Definujeme singulární integrál vzhledem k jádru K jako $K * f = \lim_{\varepsilon \searrow 0} T_\varepsilon f$ a definujeme *maximální singulární integrální operátor* jako $Tf := \sup_{\varepsilon>0} |T_\varepsilon f|$.

Poznámka 5. Lokální integrovatelnost funkce f v předchozí definici nezaručuje absolutní konvergenci integrálu z definice $T_\varepsilon f(x)$, proto $T_\varepsilon f(x)$ chápeme jako

$$T_\varepsilon f(x) = \lim_{R\to\infty} \int_{\varepsilon<|x-y|\leq R} K(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y,$$

pokud limita existuje, jinak uvažujeme $|T_\varepsilon f(x)| = \infty$

Definice 13. Nechť $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ a $x \in \mathbb{R}^n$, pak definujeme *ostrou maximální funkci* k funkci f předpisem

$$f^{\#}(x) := \sup \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q|\,\mathrm{d}y,$$

kde bereme supremum přes všechny krychle Q v $\mathbb{R}^n$ obsahující bod x a $f_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)\,\mathrm{d}y$. Operátor $f \longmapsto f^{\#}$ nazýváme *ostrý maximální operátor.*

Kapitola 2

Pokrývací věty

2.1 Pokrývací věty Vitaliova typu

Vitaliova věta vybírá z daného konečného pokrytí nějaké množiny G v metrickém prostoru (P, ρ) koulemi takovou posloupnost $\{B_k\}_k$, jejíž prvky jsou po dvou disjunktní a která pokrývá velkou část G, přesněji $G \subset \cup_k cB_k$. Nebo vybírá z daného pokrytí množiny G v $\mathbb{R}^n$ krychlemi takovou posloupnost $\{Q_k\}_k$, jejíž prvky jsou po dvou disjunktní a která pokrývá velkou část G, zde ve smyslu $|G \backslash (\cup_k Q_k)| = 0$.

Věta 1 (Vitaliova věta pro konečně mnoho koulí v metrickém prostoru)**.** *Nechť (P, ρ) je metrický prostor, $\{B_j\}_{j=1}^N$ je konečný systém koulí v (P, ρ), potom existuje podsystém $\{B_i\}_{i=1}^K$ systému $\{B_j\}_{j=1}^N$ po dvou disjunktních koulí tak, že platí*

$$\cup_{j=1}^N B_j \subset \cup_{i=1}^K 3B_i.$$

Důkaz. Koule ze systému $\{B_j\}_{j=1}^N$ seřadíme podle velikosti poloměrů sestupně.
Výběr koulí B_i :
Za B_1 vybereme kouli ze systému $\{B_j\}_{j=1}^N$, která má největší poloměr. Pokud platí $B_1 \cap B_j \neq \emptyset$ pro každé $j = 1, \ldots, N$, pak výběr koulí končí. Za B_2 vezmeme kouli z $\{B_j\}_{j=1}^N$, která neprotíná vybranou kouli B_1 a má z takových koulí největší poloměr. Pokud $B_2 \cap B_j \neq \emptyset$ pro každou dosud nevybranou kouli z $\{B_j\}_j$, pak výběr koulí končí. Obecně: máme-li vybrané koule $B_1, \ldots, B_{i-1}$, tak za B_i vybereme kouli z $\{B_j\}_{j=1}^N$ takovou, která neprotíná žádnou z dosud vybraných koulí a má z takových koulí největší poloměr. Pokud $B_i \cap B_j \neq \emptyset$ pro všechny zbylé B_j, pak výběr končí.
Z konstrukce plyne, že koule z vybraného systému jsou po dvou disjunktní.
Uvažme libovolnou kouli B_j ze systému $\{B_j\}_{j=1}^N$, pak máme dvě možnosti:

- B_j byla vybraná do systému $\{B_i\}_{i=1}^K$, tedy platí $B_j \subset B_i$, pro nějaké $i \in \{1, \ldots, K\}$. Zřejmě pak platí i $B_j \subset 3B_i$.

- B_j nebyla vybraná, tedy protíná nějakou kouli B_i ze systému $\{B_i\}_{i=1}^K$ o větším poloměru.

Máme tedy, že pro každou kouli B_j ze systému $\{B_j\}_{j=1}^N$ existuje nějaká koule B_i ze systému $\{B_i\}_{i=1}^K$ tak, že $B_j \cap B_i \neq \emptyset$ a $r_j \leq r_i$.

Označíme r_k poloměr B_k a x_k střed B_k. Mějme $x \in B_j$ a $z \in B_j \cap B_i$ libovolná, pak

$$\rho(x, x_i) \leq \rho(x, x_j) + \rho(x_j, z) + \rho(z, x_i) \leq r_j + r_j + r_i \leq 3r_i.$$

Protože $x \in B_j$ bylo libovolné, tak platí $B_j \subset 3B_i$ a B_j jsme uvažovali také libovolnou, takže platí i $\cup_{j=1}^{N} B_j \subset \cup_{i=1}^{K} 3B_i$.

□

Poznámka 6. Pokud $P = \mathbb{R}^n$, pak Věta 1 platí i pro případ, kdy místo koulí uvažujeme krychle.
Nechť $\{Q_j\}_{j=1}^{N}$ je konečný systém krychlí v $\mathbb{R}^n$, potom existuje podsystém $\{Q_i\}_{i=1}^{K}$ systému $\{Q_j\}_{j=1}^{N}$ po dvou disjunktních krychlí tak, že platí

$$\cup_{j=1}^{N} Q_j \subset \cup_{i=1}^{K} 3Q_i,$$

kde $3Q_i$ značí krychli se středem jako Q_i, která má třikrát větší délku hrany než Q_i.

Důkaz. Ze systému $\{Q_j\}_{j=1}^{N}$ vybereme systém $\{Q_i\}_{i=1}^{K}$ po dvou disjunktních krychlí podobně jako v důkazu předchozí věty, jen vybíráme podle délek hran. Uvažme libovolnou krychli Q_j ze systému $\{Q_j\}_{j=1}^{N}$, pak máme opět dvě možnosti: Buď byla Q_j vybraná do systému $\{Q_i\}_{i=1}^{K}$, tedy platí $Q_j \subset Q_i$, pro nějaké $i \in \{1, \ldots, K\}$. Nebo Q_j nebyla vybraná, tedy protíná nějakou krychli Q_i ze systému $\{Q_i\}_{i=1}^{K}$ s delší hranou. Potom pro každou krychli Q_j ze systému $\{Q_j\}_{j=1}^{N}$ existuje nějaká krychle Q_i ze systému $\{Q_i\}_{i=1}^{K}$ tak, že $Q_j \cap Q_i \neq \emptyset$ a $a_j \leq a_i$, tedy i $\delta(Q_j) \leq \delta(Q_i)$. Označíme a_k délku hrany krychle Q_k a x_k její střed. Mějme $x \in Q_j$ a $z \in Q_j \cap Q_i$, pak

$$|x - x_i| \leq |x - z| + |z - x_i| \leq \delta(Q_j) + \frac{1}{2}\,\delta(Q_i) \leq \frac{3}{2}\,\delta(Q_i).$$

Tedy každý bod krychle Q_j je od středu x_i krychle Q_i vzdálen nejvýše $\frac{3}{2}\,\delta(Q_i)$, tedy leží v krychli se středem jako Q_i s trojnásobným diametrem než má Q_i, tedy s trojnásobnou délkou hrany než má Q_i, odtud $Q_j \subset 3Q_i$. □

Věta 2. *Nechť Ω je měřitelná podmnožina $\mathbb{R}^n$ taková, že $|\Omega| < \infty$. Nechť $\mathcal{F}$ je systém krychlí pokrývající Ω. Pak existuje konečně mnoho disjunktních krychlí $Q_1, \ldots, Q_K \in \mathcal{F}$ tak, že*

$$|\Omega| \leq 4^n \sum_{k=1}^{K} |Q_k|.$$

Důkaz. Z vnitřní regularity Lebesgueovy míry lze Ω aproximovat zevnitř kompaktními množinami, tedy bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že Ω je kompaktní. Pokud nemáme otevřené krychle, tak ke každé krychli $Q \in \mathcal{F}$ s délkou hrany $a > 0$ lze vzít otevřenou krychli $\tilde{Q}$ se středem jako Q a s délkou hrany $\frac{4}{3}\,a$. Z otevřeného pokrytí kompaktu lze vybrat konečné podpokrytí $\{\tilde{Q}_k\}_{k=1}^{N}$. Z něj lze podle předchozí Poznámky 6 vybrat podposloupnost po dvou disjunktních krychlí $\{\tilde{Q}_k\}_{k=1}^{K}$ tak, že příslušné krychle $\{Q_k\}_{k=1}^{K}$ splňují $3\tilde{a}_k = 3\frac{4}{3}\,a_k = 4a_k$, jsou po dvou disjunktní a platí

$$|\Omega| \leq |\cup_{k=1}^{N} \tilde{Q}_k| \leq \sum_{k=1}^{K} |3\tilde{Q}_k| \leq \sum_{k=1}^{K} |4Q_k| = 4^n \sum_{k=1}^{K} |Q_k|.$$

□

Poznámka 7. V předchozích tvrzeních lze uvažovat krychle (resp. koule) otevřené, nebo uzavřené.

Věta 3 (Vitali)**.** *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ a pro každé $x \in A$ je dána posloupnost $\{Q_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ uzavřených krychlí se středem v x, které se smršťují k x. Potom lze ze systému $\mathcal{T} := \{Q_k(x), x \in A, k \in \mathbb{N}\}$ vybrat posloupnost $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ po dvou disjunktních krychlí takovou, že platí*

$$|A \setminus \cup_k S_k| = 0.$$

Důkaz. Důkaz provedeme ve dvou krocích:

1. Nejprve předpokládejme, že $A \subset \operatorname{int}(Q)$, kde Q je jednotková krychle v $\mathbb{R}^n$, která má vrchol v bodě $(0, \dots, 0)$ a v $(1, \dots, 1)$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že všechny krychle ze systému $\mathcal{T}$ jsou obsaženy v $\operatorname{int}(Q)$, jinak je ze systému vyloučíme. Z definice suprema lze nalézt $S_1 \in \mathcal{T}$ tak, že $|S_1| \geq \frac{1}{2} \sup\{|I|, I \in \mathcal{T}\}$. Dále nalezneme S_2 z T takovou, že platí $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ a $|S_2| \geq \frac{1}{2} \sup\{|I|, I \in \mathcal{T}, I \cap S_1 = \emptyset\}$. Máme-li vybrané množiny $S_1, \dots, S_{k-1}$, vybereme množinu $S_k \in \mathcal{T}$ tak, aby $S_k \cap (\cup_{i=1}^{k-1}) S_i = \emptyset$ a $|S_k| \geq \frac{1}{2} \sup\{|I|, I \in \mathcal{T}, I \cap (\cup_{i=1}^{k-1} S_i) = \emptyset\}$. Tímto postupem získáme konečnou nebo spočetnou posloupnost $\{S_k\}$ po dvou disjunktních krychlí.
   Nyní ukážeme, že $|A \setminus \cup_k S_k| = 0$:
   Je-li posloupnost konečná, pak $A \subset \cup_k S_k$, tedy tvrzení platí. Pokud je nekonečná, budeme dále potřebovat, že pro každou $I \in \mathcal{T}$ platí $I \cap (\cup_{k=1}^{\infty} S_k) \neq \emptyset$. Pro spor předpokládejme, že existuje $S \in \mathcal{T}$ taková, že $S \cap (\cup_{k=1}^{\infty} S_k) = \emptyset$ a $|S| > \frac{1}{2} \sup\{|I|, I \in \mathcal{T}, I \cap (\cup_{k=1}^{\infty} S_k) = \emptyset\}$. Množiny S_k leží v Q a jsou po dvou disjunktní, a proto $\lim_{k\to\infty} |S_k| = 0$, tedy existuje $j_0 \in \mathbb{N}$, že $|S_{j_0}| < \frac{1}{2} |S|$. Potom máme:

   $$\frac{1}{2} |S| > |S_{j_0}| \geq \frac{1}{2} \sup\{|I|, I \in \mathcal{T}, I \cap (\cup_{k=1}^{j_0-1} S_k) = \emptyset\} \geq \frac{1}{2} |S|,$$

   což je spor.
   Chceme ukázat, že $|A \setminus \cup_{k=1}^{\infty} S_k| = 0$. K tomu stačí, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $h \in \mathbb{N}$ tak, že $|A \setminus \cup_{k=1}^{h} S_k|_e < \varepsilon$.
   K danému $\eta > 0$ nalezneme $h \in \mathbb{N}$, že $\sum_{k=h}^{\infty} |S_k| \leq \eta$. Takové h existuje, neboť krychle S_k tvoří po dvou disjunktní spočetnou posloupnost množin, jejichž sjednocení leží v omezené množině Q, tedy

   $$\sum_{k=1}^{\infty} |S_k| = |\cup_{k=1}^{\infty} S_k| \leq |Q| < \infty$$

   a zbytek konvergentní řady jde udělat libovolně malý.
   Nyní máme

   $$\begin{aligned} A \setminus (\cup_{k=1}^{h} S_k) &\subset \cup\{S \in T, S \cap (\cup_{k=1}^{h} S_k) = \emptyset\} \\ &= \cup\{S \in T, S \cap (\cup_{k=1}^{h} S_k) = \emptyset, S \cap (\cup_{k=h+1}^{\infty} S_k) \neq \emptyset\} \\ &= \cup_{j=h}^{\infty}\{\cup\{S \in \mathcal{T}, S \cap (\cup_{k=1}^{j} S_k) = \emptyset, S \cap S_{j+1} \neq \emptyset\}\} \\ &\subset \cup_{j=h}^{\infty}\{\cup\{S \in \mathcal{T}, |S| \leq 2|S_{j+1}|, S \cap S_{j+1} \neq \emptyset\}\}. \end{aligned}$$

První inkluze platí, protože pro každé x z otevřené množiny $A\backslash(\cup_{k=1}^{h} S_k)$ je $\mathrm{dist}(x, \cup_{k=1}^{h} S_k) > 0$ a krychle $Q_m(x)$ se smršťují k x, tedy existuje krychle $Q_j(x) \in T$ tak, že $Q_j(x) \cap (\cup_{k=1}^{h} S_k) = \emptyset$. Dále už víme, že pro každé $I \in \mathcal{T}$ je $I \cap (\cup_{k=1}^{\infty} S_k) \neq \emptyset$, odkud získáváme první rovnost. V následující rovnosti je inkluze $\supset$ zřejmá. Naopak buď $I \in \cup\{S \in T, S \cap (\cup_{k=1}^{h} S_k) = \emptyset, S \cap (\cup_{k=h+1}^{\infty} S_k) \neq \emptyset\}$. Vezměme $j_0 \in \mathbb{N}$ že $S \cap S_{j_0} \neq \emptyset$ a j_0 je nejmenší takové, pak $j_0 \geq h+1$, $I \cap (\cup_{k=1}^{j_0-1} S_k) = \emptyset$ a $S \cap S_{j_0} \neq \emptyset$. Poslední inkluze plyne z konstrukce takto: nechť $S \cap (\cup_{k=1}^{j} S_k) = \emptyset$, pak $|S_{j+1}| \geq \frac{1}{2} \sup\{|I|, I \in \mathcal{T}, I \cap (\cup_{k=1}^{j} S_k) = \emptyset\} \geq \frac{1}{2}|S|$ a stačí nerovnost přenásobit dvojkou.
Odtud plyne

$$|A\backslash(\cup_{k=1}^{h} S_k)|_e \leq |\cup_{j=h+1}^{\infty} \{\cup\{S \in \mathcal{T}, |S| \leq 2|S_j|, S \cap S_j \neq \emptyset\}\}|_e$$

$$\leq \sum_{j=h+1}^{\infty} |\cup \{S \in \mathcal{T}, |S| \leq 2|S_j|, S \cap S_j \neq \emptyset\}|_e$$

$$\leq \sum_{j=h+1}^{\infty} 5^n |S_j| \leq 5^n \eta,$$

kde první nerovnost platí z dokázané inkluze a monotonie vnější míry a druhá ze subaditivity vnější míry. Třetí nerovnost: z podmínky $|S| \leq 2|S_j|$ dostaneme, že $a \leq \sqrt[n]{2}\, a_j$, kde a, a_j značí délku hrany krychle S, S_j. Dále z $S \cap S_j \neq \emptyset$ dostáváme, že množina $\cup\{S \in \mathcal{T}, |S| \leq 2|S_j|, S \cap S_j \neq \emptyset\}$ je obsažena v krychli se středem jako S_j a s délkou hrany $a + a_j + a = 2a + a_j \leq 2\sqrt[n]{2}\, a_j + a_j = (2\sqrt[n]{2} + 1)\, a_j$, odkud vidíme, že vnější míra množiny $\cup\{S \in \mathcal{T}, |S| \leq 2|S_j|, S \cap S_j \neq \emptyset\}$ je menší nebo rovna míře krychle s hranou délky $(2\sqrt[n]{2} + 1)a_j$, tedy menší nebo rovna $(2\sqrt[n]{2} + 1)^n |S_j|$ a $(2\sqrt[n]{2} + 1) \leq 5$. Stačí tedy k danému $\varepsilon > 0$ volit $\eta > 0$ tak, aby $5^n \eta < \varepsilon$.

2. Pro množinu A, která neleží ve vnitřku množiny Q použijeme již dokázané na množinu $A \cap \mathrm{int}(\tilde{Q})$ pro každou krychli $\tilde{Q} \in \mathbb{R}^n$ o hraně délky 1, která má vrcholy s celočíselnými souřadnicemi. Takových krychlí je spočetně mnoho (označíme je $\tilde{Q}_i$ pro $i \in \mathbb{N}$), tedy získáme posloupnosti $\{S_k^i\}_k$, $i \in \mathbb{N}$, které podle kroku (1) tohoto důkazu splňují

$$|(A \cap \mathrm{int}(\tilde{Q}_i))\backslash(\cup_k S_k^i)| = 0, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}.$$

Systém $\{S_k^i\}_{k,i}$ je spočetný, lze uspořádat do posloupnosti a splňuje

$$|A\backslash(\cup_{k,i} S_k^i)|_e = |\cup_i((A \cap \mathrm{int}(\tilde{Q}_i))\backslash(\cup_k S_k^i))|_e \leq \sum_i |(A \cap \mathrm{int}(\tilde{Q}_i))\backslash(\cup_k S_k^i)| = 0,$$

tedy $|A\backslash(\cup_{k,i} S_k^i)| = 0$, což jsme chtěli dokázat.

□

Definice 14. Řekneme, že systém $\mathcal{S}$ měřitelných množin v $\mathbb{R}^n$ je *regulární*, jestliže existuje $c < \infty$ (koeficient regularity) tak, že

$$\forall\, S \in \mathcal{S}\ \exists \text{ krychle } Q \text{ taková, že } S \subset Q \text{ a } |Q| \leq c|S|.$$

Věta 4. *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ a pro každé $x \in A$ je daná posloupnost $\{K_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ kompaktních množin obsahujících x, které se smršťují k x. Nechť každá z těchto posloupností je regulární s koeficientem $c(x) \in \mathbb{R}$. Pak lze ze systému $\mathcal{V} := \{K_k(x), x \in A, k \in \mathbb{N}\}$ vybrat disjunktní posloupnost $\{S_k\}_k$ tak, že*

$$|A \backslash (\cup_k S_k)| = 0.$$

Důkaz. **(a)** pro $\sup\{c(x), x \in A\} \leq H < \infty$ provedeme důkaz stejně jako u Věty 3, pouze míra množiny $V := \cup\{S \in \mathcal{V} : |S| \leq 2|S_j|, S \cap S_j \neq \emptyset\}$ je omezena jiným násobkem míry S_j. Pro S_j pevnou existuje podle předpokladů krychle Q_j, že $S_j \subset Q_j$ a $|Q_j| \leq H|S_j|$ a ke každé $S \in \mathcal{V}$ existuje krychle Q_S: $S \subset Q_S$ a $|Q_S| \leq H|S| \leq 2H|S_j|$. Pokud označíme a_j, a_S délky hran krychlí Q_j, Q_S, pak je $a_j^n = |Q_j| \leq H|S_j|$ a $a_S^n = |Q_S| \leq 2H|S_j|$, odkud máme $a_j \leq \sqrt[n]{H|S_j|}$ a $a_S \leq \sqrt[n]{2H|S_j|}$. Množina V je obsažena v krychli o hraně délky $2a_S + a_j$, míra této krychle je

$$(2a_S + a_j)^n \leq \left(2\sqrt[n]{2H|S_j|} + \sqrt[n]{H|S_j|}\right)^n = (2\sqrt[n]{2H} + \sqrt[n]{H})^n |S_j|,$$

stačí tedy k $\varepsilon > 0$ volit $\eta > 0$ tak, aby $(2\sqrt[n]{2H} + \sqrt[n]{H})^n \eta < \varepsilon$.

(b) pro $\sup\{c(x), x \in A\} = \infty$ označme nejprve $A_1 := \{x \in A, c(x) \leq 1\}$. Použijeme již dokázanou část (a) na množinu A_1, dostaneme tak disjunktní posloupnost $\{S_k^1\}_k$ prvků z $\mathcal{V}$ takovou, že platí $|A_1 \backslash \cup_k S_k| = 0$. V části (a) jsme k danému $\varepsilon > 0$ našli $h \in \mathbb{N}$, že platilo $|A \backslash \cup_{k=1}^{h} S_k|_e < \varepsilon$, tedy k $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$ najdeme $h_1 \in \mathbb{N}$, že

$$|A_1 \backslash \cup_{k=1}^{h_1} S_k|_e < \frac{1}{2}.$$

Uvažme tedy konečnou část $\{S_k^1\}_k$ a označme ji $\{S_i\}_{i=1}^{h_1}$. Dále obecně pro $k \in \mathbb{N}$ označme $A_k := \{x \in (A \backslash \cup_{i=1}^{h_{k-1}} S_i), c(x) \leq k\}$. Z množin z $\mathcal{V}$, které jsou disjunktní s $\cup_{i=1}^{h_{k-1}} S_i$, vybereme konečnou posloupnost splňující následující nerovnost, posloupnost označíme $\{S_i\}_{i=h_{k-1}}^{h_k}$

$$|A_k \backslash (\cup_{i=h_{k-1}+1}^{h_k} S_i)|_e < \frac{1}{2^k}. \tag{2.1}$$

Takto nakonec získáme posloupnost $\{S_k\}$ takovou, že platí

$$\begin{aligned}
|A \backslash \cup_{k=1}^{\infty} S_k|_e &= |(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) \backslash (\cup_{k=1}^{\infty} S_k)|_e \\
&= |((\cup_{k=1}^{N} A_k) \backslash (\cup_{k=1}^{h_N} S_k)) \cup ((\cup_{k=N+1}^{\infty} A_k) \backslash (\cup_{k=N+1}^{\infty} S_k))|_e \\
&\leq |(\cup_{k=1}^{N} A_k) \backslash (\cup_{k=1}^{h_N} S_k)|_e + |(\cup_{k=N+1}^{\infty} A_k) \backslash (\cup_{k=h_N+1}^{\infty} S_k))|_e \\
&= |A_N \backslash (\cup_{k=1}^{h_N} S_k)|_e + |\cup_{k=N+1}^{\infty} (A_k \backslash (\cup_{i=h_{k-1}+1}^{h_k} S_i))|_e \\
&< \frac{1}{2^N} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k},
\end{aligned}$$

kde využíváme rovnosti množin, subaditivitu vnější míry, konstrukci posloupnosti $\{S_k\}$, ze které plyne $(\cup_{k=1}^{N} A_k) \backslash (\cup_{k=1}^{h_N} S_k) = A_N \backslash (\cup_{k=1}^{h_N} S_k)$, a (2.1). Pak k danému $\varepsilon > 0$ stačí nalézt $N \in \mathbb{N}$ tak, aby $\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon$, pak $|A \backslash \cup_{k=1}^{\infty} S_k|_e < \varepsilon$, z čehož plyne $|A \backslash \cup_{k=1}^{\infty} S_k| = 0$.

□

Věta 5 (Vitaliova věta v $\mathbb{R}$). *Nechť μ je míra definovaná na intervalech v $\mathbb{R}$ a μ^* je její vnější míra. Nechť $A \subset \mathbb{R}$, $\mu^*(A) < \infty$, a pro každé $x \in A$ je dána posloupnost $\{I_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ nedegenerovaných uzavřených intervalů, které se smršťují k x. Pak lze ze systému $\mathcal{V} := \{I_k(x), x \in A, k \in \mathbb{N}\}$ vybrat disjunktní posloupnost intervalů $\{S_k\}_k$, že*

$$\mu^*(A \backslash (\cup_k S_k)) = 0.$$

Důkaz. Důkaz lze provést stejně jako u Věty 3 (v první části důkazu se uvažuje vnitřek jednotkové krychle a to je v $\mathbb{R}$ interval $(0,1)$, v druhé části důkazu se zde uvažují intervaly $(k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$) , pouze na konci použijeme

$$|\cup \{S \in \mathcal{V}, |S| \leq 2|S_j|, S \cap S_j \neq \emptyset\}| \leq 2|S_j| + |S_j| + 2|S_j| = 5|S_j|,$$

tedy k $\varepsilon > 0$ volíme $\eta > 0$ tak, aby $5\eta < \varepsilon$. □

Důkaz následující věty Vitaliova typu využívá Besicovitchovu větu, uveden je proto až v aplikacích Besicovitchovy věty v kapitole 4.

Věta 6. *Nechť μ je míra na $\mathbb{R}^n$ definovaná na lebesgueovsky měřitelných množinách v $\mathbb{R}^n$. Nechť μ^* je vnější míra příslušná míře μ, tedy*

$$\forall P \subset \mathbb{R}^n : \ \mu^*(P) := \inf\{\mu(H) : P \subset H, H \text{ je } \mu\text{-měřitelná}\}.$$

Nechť pro každé $x \in A \subset \mathbb{R}^n$ je dána posloupnost $\{Q_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ uzavřených krychlí se středem v x, které se smršťují k x. Pak lze ze systému $\mathcal{T} := \{Q_k(x), x \in A, k \in \mathbb{N}\}$ vybrat posloupnost $\{S_k\}_k$ tak, že platí

$$\mu^*(A \backslash \cup_k S_k) = 0.$$

2.2 Pokrývací věty Besicovitchova typu

Pokud máme pro každý bod $x \in A$ danou nějakou množinu $K(x)$, pak lze za určitých předpokladů použít Besicovitchovu větu, která nám umožní vybrat posloupnost ze systému $\{K(x), x \in A\}$, jenž stále pokrývá A, přičemž množiny z vybrané posloupnosti se příliš nepřekrývají a lze je rozdělit do skupin tak, že každá skupina obsahuje po dvou disjunktní množiny.

Věta 7 (Besicovitchova věta pro krychle). *Nechť A je omezená podmnožina $\mathbb{R}^n$ a pro každé $x \in A$ je dána uzavřená krychle $Q(x)$ se středem v x. Pak lze z $\{Q(x), x \in A\}$ vybrat posloupnost $\{Q_k\}_k$ (spočetnou nebo konečnou) tak, že platí:*

(i) $A \subset \cup_k Q_k$,

(ii) *každý bod $\mathbb{R}^n$ je nejvýše v θ_n krychlích posloupnosti $\{Q_k\}_k$,*
tedy $\forall z \in \mathbb{R}^n : \ \sum_k \chi_{Q_k}(z) \leq \theta_n$,

(iii) *posloupnost $\{Q_k\}_k$ lze rozdělit do ξ_n skupin disjunktních krychlí.*

Konstanty θ_n a ξ_n závisí pouze na n.

Důkaz. Položme $a_0 := \sup\{\delta(Q(x)), x \in A\}$. Pokud $a_0 = \infty$, pak jediná (vhodně zvolená) krychle $Q(x)$, $x \in A$, pokryje A, neboť A je omezená. Jestliže $a_0 < \infty$, zvolme $Q_1 \in \{Q(x), x \in A\}$ se středem v bodě $x \in A$ takovou, že $\delta(Q_1) > \frac{1}{2}\, a_0$ a položme $a_1 := \sup\{\delta(Q(x)), x \in A \backslash Q_1\}$. Dále zvolme $Q_2 \in \{Q(x), x \in A \backslash Q_1\}$ se středem v bodě $x_2 \in A \backslash Q_1$, že $\delta(Q_2) > \frac{1}{2}\, a_1$. Obecně volíme Q_k, pokud už máme vybrány krychle $Q_1, \ldots, Q_{k-1}$, z množiny $\{Q(x), x \in A \backslash (\cup_{i=1}^{k-1} Q_i)\}$ se středem v bodě

$$x_k \in A \backslash (\cup_{i=1}^{k-1} Q_i), \tag{2.2}$$

že

$$\delta(Q_k) > \frac{1}{2} \sup\{\delta(Q(x)), x \in A \backslash (\cup_{i=1}^{k-1} Q_i)\}. \tag{2.3}$$

Pro takto získanou posloupnost $\{Q_k\}$ platí:

(a) pro $i > j$ platí $x_i \notin Q_j$ a $\delta(Q_j) > \frac{1}{2}\, \delta(Q_i)$,
(z (2.2) vidíme, že později vybraná krychle nemůže mít střed v žádné z předchozích krychlí, z (2.3) máme, že diametr dříve vybrané krychle je větší než polovina diametru jakékoliv později vybrané krychle)

(b) $\frac{1}{3}\, Q_i \cap \frac{1}{3}\, Q_j = \emptyset \ \ \forall i \neq j$. Skutečně:
Nechť a_i, a_j značí délky hran krychlí Q_i, Q_j a x_i, x_j jejich středy. Nechť $i \neq j$ a bez újmy na obecnosti nechť $i > j$, pak z (a) máme $x_i \notin Q_j$ a $\delta(Q_j) > \frac{1}{2}\, \delta(Q_i)$, tedy i $a_j > \frac{1}{2} a_i$. Platí

$$x_i \notin Q_j \ \Rightarrow \ ||x_i - x_j||_{\max} > \frac{1}{2}\, a_j$$

a

$$\forall m \in \mathbb{N}: \ x \in Q_m \ \Rightarrow \ ||x - x_m||_{\max} \leq \frac{1}{2}\, a_m.$$

Odtud

$$\forall m \in \mathbb{N}: \ x \in \frac{1}{3}\, Q_m \ \Rightarrow \ ||x - x_m||_{\max} \leq \frac{1}{6}\, a_m$$

Nechť pro spor existuje $y \in \frac{1}{3}\, Q_i \cap \frac{1}{3}\, Q_j$, pak platí

$$\frac{1}{2}\, a_j < ||x_i - x_j||_{\max} \leq ||x_i - y||_{\max} + ||y - x_j||_{\max}$$

$$\leq \frac{1}{6}\, a_i + \frac{1}{6}\, a_j < \frac{1}{3}\, a_j + \frac{1}{6}\, a_j = \frac{1}{2}\, a_j,$$

odkud dostáváme $\frac{1}{2}\, a_j < \frac{1}{2}\, a_j$, což je požadovaný spor.

(c) posloupnost $\{\delta(Q_k)\}$ diametrů krychlí je buď konečná (pro konečnou posloupnost) nebo má limitu nula. Máme-li spočetnou posloupnost, tak pro spor předpokládejme, že existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\delta(Q_k) > \delta$. Z (b) plyne, že $\frac{1}{3}\, Q_i \cap \frac{1}{3}\, Q_j = \emptyset$ pro každé $i \neq j$. Z omezenosti A existuje $K \in \mathbb{N}$, že $K\frac{\delta}{3} > |A + B(0, a_0)|$, tedy by se proces vybírání krychlí musel po konečně mnoha krocích zastavit, my ale máme spočetnou posloupnost a to je spor.

Nyní dokážeme, že zkonstruovaná posloupnost splňuje body (i)-(iii) z tvrzení věty.

(i) Máme-li konečnou posloupnost, tak je podmínka (i) splněna, jinak by totiž proces vybírání krychlí nezkončil. Když máme spočetnou posloupnost a $x \in A \setminus \cup_{k=1}^{\infty} Q_k$, tak kdyby $\frac{1}{2}\,\delta(Q(x)) < \delta(Q_k)$, $\forall k$, pak by výběr nezkončil. Tedy existuje $j_0 \in \mathbb{N}$, že $\frac{1}{2}\delta(Q(x)) \geq \delta(Q_{j_0})$, tedy $\delta(Q(x)) \geq 2\delta(Q_{j_0})$, a protože je limita diametrů krychlí rovna 0, tak existuje $j_1 \in \mathbb{N}$, že $\delta(Q(x)) > 2\delta(Q_{j_1})$, tedy $Q(x)$ musela být vybrána (nejpozději) v j_1-ním kroku - skutečně: mějme krychle $Q_1, \ldots, Q_{j_1-1}$, a nechť supremum diametrů zbylých krychlí je $K \in \mathbb{R}$. V dalším kroku byla vybraná krychle Q_{j_1} s $\delta(Q_{j_1}) > \frac{1}{2}K$. Pro krychli $Q(x)$ platí:

$$\delta(Q(x)) > 2\delta(Q_{j_1}) > 2\,\frac{1}{2}\,K = K,$$

to je ale spor, diametr $Q(x)$ totiž nemůže být větší než K, protože K je supremum diametrů krychlí, mezi které patří i $Q(x)$. Tedy $Q(x)$ musela být vybrána (nejpozději) v j_1-ním kroku, což je ale spor s předpokladem, že $x \in A \setminus \cup_{k=1}^{\infty} Q_k$.

(ii) Bodem $z \in \mathbb{R}^n$ vedeme nadroviny rovnoběžné se souřadnicovými osami a rozdělíme tak $\mathbb{R}^n$ na 2^n hyperkvadrantů. Nechť krychle Q_i, Q_j, se středy x_i, x_j ve stejném hyperkvadrantu, obsahují bod z. Pak větší z nich, bez újmy na obecnosti předpokládejme, že je to Q_i, obsahuje střed té menší, tedy $x_j \in Q_i$ a $\delta(Q_i) > \delta(Q_j)$. Z výše dokázaných vlastností posloupnosti vidíme, že Q_i musela být vybrána později než Q_j, tedy $i > j$, a odtud máme $\delta(Q_i) < 2\delta(Q_j)$. Celkem tedy $\delta(Q_j) < \delta(Q_i) < 2\delta(Q_j)$.
Nyní nechť Q_j značí první krychli z vybrané posloupnosti, která má střed x_j v daném hyperkvadrantu a která obsahuje bod z. Pak každá další krychle Q_i, která obsahuje bod z a má střed x_i v daném hyperkvadrantu, splňuje $x_i \notin Q_j$, $x_j \in Q_i$ a $\delta(Q_j) < \delta(Q_i) < 2\delta(Q_j)$.
Potřebujeme zjistit, kolik je krychlí v posloupnosti $\{Q_k\}$, které obsahují bod z a jejich středy leží v daném hyperkvadrantu. Známe horní a dolní odhad na jejich diametry ($\delta(Q_j) < \delta(Q_i) < 2\delta(Q_j)$) (tedy i pro délky hran platí $a_j < a_i < 2a_j$) a krychlí Q_i bude nejvíc, když budou mít co nejmenší diametry, také proto že každý další střed leží mimo již vybrané krychle. Vzdálenost středů takových krychlí je pak větší než $\frac{a_j}{2}$. Tedy krychlí Q_i bude nejvýše tolik kolik existuje krychlí s délkou hrany $\frac{a_j}{2}$, které mají s Q_j neprázdný průnik, mají střed v daném hyperkvadrantu a mají po dvou disjunktní vnitřky. Jejich počet označme $M(n) \in \mathbb{R}^n$, je to číslo závislé pouze na dimenzi prostoru.
Pak každý bod $z \in \mathbb{R}^n$ leží v nejvýše $M(n) + 1$ krychlích posloupnosti $\{Q_k\}$ se středy ve stejném hyperkvadrantu a těch je 2^n. Položme $\theta_n := (M(n) + 1)2^n$.
Jeden z odhadů na $M(n)$:
Ke každé krychli Q existuje 3^n krychlí (mezi nimi je i Q), které mají stejnou délku hrany jako Q, které mají s Q neprázdný průnik, ale mají disjunktní vnitřky. Dále každá krychle s hranou délky a obsahuje 2^n krychlí s hranou

délky $\frac{a}{2}$, které mají disjunktní vnitřky. Tedy

$$M(n) \le \frac{3^n - 1}{2} 2^n,$$

protože nejvýše polovina z $3^n - 1$ stejně velkých krychlí kolem Q_j (ve výše uvedeném smyslu) leží v daném hyperkvadrantu a každá z nich obsahuje 2^n polovičních krychlí.

(iii) Nechť Q_h je libovolná krychle z vybrané posloupnosti, pak pro každé $m < h$ platí

$$\delta(Q_m) > \frac{1}{2}\delta(Q_h), \text{ neboli } 2\delta(Q_m) > \delta(Q_h),$$

neboť každá vybraná krychle má diametr větší než $\frac{1}{2}$ diametru libovolné z dosud nevybraných krychlí. Uvažme množinu všech vrcholů všech krychlí obsažených v Q_h, kde krychle získáme rozdělením Q_h nadrovinami rovnoběžnými se souřadnicovými osami, které vedeme středem Q_h. Tuto množinu označme $\mathcal{V}_h$, pak $\mathcal{V}_h$ obsahuje nejvýše $2^n 2^n$ bodů a platí:

$$Q_m \cap Q_h \neq \emptyset,\ m < h \Rightarrow Q_m \text{ obsahuje alespoň jeden z bodů } \mathcal{V}_h$$

a každý bod z $\mathcal{V}_h$ je dle (ii) nejvýše v θ_n krychlích vybrané posloupnosti. Označme $\xi_n := 4^n\theta_n + 1$ a rozdělme krychle $\{Q_k\}$ do disjunktních systémů takto: pro $k = 1, \ldots, \xi_n$ přiřadíme Q_k do systému I_k. Krychle Q_{ξ_n+1} má neprázdný průnik s nejvýše $\xi_n - 1$ předchozími krychlemi, tedy existuje $k_0 \in \{1, \ldots, \xi_n\}$ tak, že $Q_{\xi_n+1} \cap Q_{k_0} = \emptyset$. Krychli Q_{ξ_n+1} přidáme do systému I_{k_0}. Další krychle $Q(x_{k^*})$ má neprázdný průnik s nejvýše $\xi_n - 1$ předešlými krychlemi, tedy je disjunktní se všemi krychlemi nějakého systému I_k, kam tedy krychli přidáme.

□

Poznámka 8. (Besicovitchova věta pro neomezenou množinu)
Besicovitchova věta, Věta 7, platí i pro neomezenou množinu, pokud k předpokladům věty přidáme požadavek $\sup\{\delta(Q(x)), x \in A\} = M < \infty$.

Důkaz. Rozdělíme $\mathbb{R}^n$ na disjunktní krychle I_i s hranou délky M a použijeme Větu 7 na množiny $A \cap I_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Dostaneme tak posloupnosti $\{Q_k^i\}_{k\ge1}$ příslušné různým $A \cap I_i$, $i = 1, 2, \ldots$, které splňují:

(i) $A \cap I_i \subset \cup_{k\ge1} Q_k^i$,

(ii) každý bod $\mathbb{R}^n$ je nejvýše v θ_n krychlích posloupnosti $\{Q_k^i\}_{k\ge1}$, Tedy $\forall z \in \mathbb{R}^n : \sum_{k\ge1} \chi_{Q_k^i}(z) \le \theta_n$,

(iii) posloupnost $\{Q_k^i\}_{k\ge1}$ lze rozdělit do ξ_n skupin disjunktních krychlí.

Nyní ukážeme, že body (i) - (iii) z Věty 7 splňuje i systém $\{Q_k^i\}_{k\ge1, i=1,2,\ldots}$, který lze uspořádat do posloupnosti.

(i) $A = \cup_{i=1,2,\ldots}(A \cap I_i) \subset \cup_{i=1,2,\ldots}(\cup_{k\ge1} Q_k^i) = \cup_{k\ge1, i=1,2,\ldots} Q_k^i$.

(ii) Každý bod $z \in \mathbb{R}^n$ může být v nějaké krychli z nejvýše 3^n systémů $\{Q_k^i\}_{k\geq 1}$ příslušných $A \cap I_i$ a každý bod z $A \cap I_i$ může být nejvýše v θ_n krychlích z $\{Q_k^i\}_{k\geq 1}$, tedy každý bod $z \in \mathbb{R}^n$ může být nejvýše v $3^n\theta_n$ krychlích systému $\{Q_k^i\}_{k\geq 1, i=1,2,\dots}$.

(iii) Každá krychle ze systému, který pokrývá $A \cap I_i$, má prázdný průnik s každou krychlí ze systému, který pokrývá $A \cap I_j$, kdykoliv lze $A \cap I_j$ dostat posunutím $A \cap I_i$ o vhodné celočíselné násobky $3M$ ve všech n souřadnicových směrech. A každý systém $\{Q_k^i\}_{k\geq 1}$ lze rozdělit do ξ_n skupin disjunktních krychlí. Tedy celý systém $\{Q_k^i\}_{k\geq 1, i=1,2,\dots}$ lze rozdělit do $3^n\xi_n$ systémů disjunktních krychlí.

□

Poznámka 9. Věta 7 platí i pro otevřené krychle nebo krychle, které uvažujeme jen s částí hranice. Dále věta platí i v případě, že máme $A \subset \mathbb{R}^n$ omezenou a pro každé $x \in A$ je předem daný uzavřený interval $R(x)$ se středem v x, pokud platí, že když posuneme dva intervaly $R(x_1)$ a $R(x_2)$ do stejného středu, tak jeden z nich obsahuje ten druhý. Konstanty θ_n, ξ_n mohou být jiné než ve Větě 7, ale stále jsou závislé jen na dimenzi prostoru.

Na závěr tohoto oddílu uvádíme původní znění Besicovitchovy věty, její důkaz lze nalézt v [7] na str. 87.

Věta 8 (Besicovitch)**.** *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je omezená a pro každé $x \in A$ je dána uzavřená koule $\bar{B}(x, r(x))$ se středem v x a poloměrem $r(x) > 0$. Pak lze ze systému $\{\bar{B}(x, r(x)), x \in A\}$ vybrat posloupnost koulí $\{B_k\}_k$ splňující*

(i) $A \subset \cup_k B_k$,

(ii) *každý bod $\mathbb{R}^n$ je nejvýše v θ_n koulích posloupnosti $\{B_k\}_k$, tedy $\forall z \in \mathbb{R}^n : \sum_k \chi_{B_k}(z) \leq \theta_n$,*

(iii) *posloupnost $\{B_k\}_k$ lze rozdělit do ξ_n skupin disjunktních koulí.*

Konstanty θ_n a ξ_n závisí pouze na n.

2.3 Pokrývací věty Whitneyova typu

Whitneyova věta nevybírá pokrývající posloupnost dané množiny G v $\mathbb{R}^n$ z libovolného předem daného pokrytí G, ale pracuje se systémem takzvaných dyadických krychlí. Umožňuje zkonstruovat takovou posloupnost nepřekrývajících se krychlí, jejichž sjednocením je právě zadaná množina G a délka hrany vybraných krychlí souvisí se vzdáleností krychle od hranice.

Definice 15. Zavedeme pojem dyadických krychlí v $\mathbb{R}^n$: označme D_0 systém všech uzavřených krychlí se stranou délky 1 a vrcholy s celočíselnými souřadnicemi. Označme D_1 systém všech uzavřených krychlí se stranou délky 2 a vrcholy s celočíselnými násobky 2. Označme D_2 systém všech uzavřených krychlí se stranou délky 4 a vrcholy s celočíselnými násobky 4. Obecně pro $k \in \mathbb{Z}$ označme D_k systém všech uzavřených krychlí se stranou délky 2^k a vrcholy s celočíselnými násobky 2^k. Systém $D := \cup_{k\in\mathbb{Z}} D_k$ nazýváme systém všech *dyadických krychlí* v $\mathbb{R}^n$.

Poznámka 10 (Vlastnosti dyadických krychlí). Pro dyadické krychle platí:

- pro každé $j \in \mathbb{Z}$ platí, že každý bod z $\mathbb{R}^n$ je buď ve vnitřku právě jedné krychle z D_j, nebo je z hranice nejvýše 2^n krychlí z D_j,
- každá krychle z D_j je sjednocením 2^n krychlí z D_{j-1},
- D_j má hranu délky 2^j, $j \in \mathbb{Z}$,
- pro $Q_1 \in D_j$, $Q_2 \in D_k$, $j \leq k$ platí buď $\operatorname{int}(Q_1) \cap \operatorname{int}(Q_2) = \emptyset$, nebo $Q_1 \subset Q_2$,
- každý systém D_j obsahuje spočetně mnoho krychlí, $j \in \mathbb{Z}$,
- systém $D := \cup_{k\in\mathbb{Z}} D_k$ všech dyadických krychlí v $\mathbb{R}^n$ je spočetný.

Věta 9 (Whitney). *Nechť $F \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná uzavřená a $G := \mathbb{R}^n \backslash F$. Pak existuje posloupnost uzavřených krychlí $\{Q_k\}_k$, která splňuje:*

(i) $G = \cup_k Q_k$,

(ii) $\operatorname{int}(Q_k) \cap \operatorname{int}(Q_j) = \emptyset$, *pro každé* $k \neq j$,

(iii) $\delta(Q_k) \leq \operatorname{dist}(Q_k, F) \leq 4\delta(Q_k)$, *pro každé* k.

Důkaz. Označme pro $c > 0$ pevné $G_k := \{x \in G : c\,2^k \leq \operatorname{dist}(x, F) < c\,2^{k+1}\}$ a $\mathcal{G} := \cup_{k\in\mathbb{Z}}\{Q \in D_k : Q \cap G_k \neq \emptyset\}$, kde D_k jsou systémy z Definice 15. Pak krychle z $\mathcal{G}$ splňují bod (iii) z tvrzení věty. Skutečně, vezměme si $Q \in \mathcal{G}$, pak $Q \in D_k$, pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$, a tedy existuje $x \in Q \cap G_k$. Navíc $\delta(Q) = \sqrt{n}2^k$, odkud máme

$$\operatorname{dist}(Q, F) \leq \operatorname{dist}(x, F) \leq c2^{k+1}$$

a

$$\operatorname{dist}(Q, F) \geq \operatorname{dist}(x, F) - \delta(Q) \geq c2^k - \sqrt{n}2^k = (c - \sqrt{n})2^k.$$

Volme tedy $c := 2\sqrt{n}$. Potom

$$\delta(Q) = \sqrt{n}2^k \leq \operatorname{dist}(Q, F) \leq 2\sqrt{n}2^{k+1} = 4\delta(Q).$$

Speciálně $Q \subset G$, pro každé $Q \in \mathcal{G}$, dále z definice $\mathcal{G}$ máme $G \subset \cup_{Q\in\mathcal{G}} Q$. Tedy systém $\mathcal{G}$ splňuje (i) a (iii). Nyní z $\mathcal{G}$ vybereme systém krychlí s disjunktními vnitřky. Pokud $\operatorname{int}(Q_1) \cap \operatorname{int}(Q_2) \neq \emptyset$, tak větší z nich obsahuje tu menší. Pro každou krychli $Q \in \mathcal{G}$ nalezneme $\tilde{Q}$ maximální krychli v $\mathcal{G}$ takovou, že $Q \subset \tilde{Q}$. Pak z vlastností dyadických krychlí, Poznámka [?], a vlastností systému $\mathcal{G}$ plyne: Systém všech maximálních krychlí lze uspořádat do posloupnosti $\{Q_k\}$, která splňuje:

(i) $G = \cup_k Q_k$, neboť $Q_k \subset G$ a $G \subset \cup_{Q\in\mathcal{G}} Q = \cup_k Q_k$, protože ke každé krychli z $\mathcal{G}$ máme v posloupnosti $\{Q_k\}$ příslušnou maximální krychli,

(ii) $\operatorname{int}(Q_k) \cap \operatorname{int}(Q_j) = \emptyset$, pro každé $k \neq j$, jinak bychom dostali spor s maximalitou,

(iii) $\delta(Q_k) \leq \operatorname{dist}(Q_k, F) \leq 4\delta(Q_k)$, pro každé $k \in \mathbb{N}$.

$\square$

Věta 10. *Nechť G je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$ s neprázdnou hranicí ∂G. Pak existuje posloupnost $\{Q_k\}_k$ otevřených krychlí taková, že platí $G = \cup_k Q_k$ a*

(i) $\operatorname{dist}(Q_k, \partial G) = 3\delta(Q_k)$,

(ii) $\sum_k \chi_{Q_k}(z) \leq \alpha_n$, *pro každé $z \in \mathbb{R}^n$, kde konstanta α_n, závisí pouze na dimenzi.*

Důkaz využívá Větu 7, uveden je proto až v aplikacích Besicovitchovy věty v kapitole 4.

2.4 Některé další pokrývací věty

V tomto oddílu se zabýváme některými dalšími pokrývacími větami, kterým nelze jednoznačně přiřadit jeden z předchozích typů. Nejprve uvedeme větu, která má znaky všech tří předchozích typů pokrývacích vět, věta hovoří o množině v metrickém prostoru, což je typické pro Vitaliovu větu, ve větě se vybírá posloupnost, jejíž množiny se nemohou příliš překrývat (typický požadavek u Besicovitchovy věty) a jejíž množiny mají diametr porovnatelný se vzdáleností množiny od hranice (typická vlastnost pokrytí z Whitneyovy věty). Dále zde uvádíme Feffermanův pokrývací problém a jeho řešení pro krychle. Nakonec dokazujeme dvě pokrývací věty, které využijeme v kapitole 7 v důkazech nerovností mezi maximálním operátorem $\tilde{M}$, ostrým maximálním operátorem a funkcí f.

Věta 11. *Nechť (P, ρ) je metrický prostor splňující následující podmínku homogeneity: Existuje $N \in \mathbb{N}$ (nezávislé na x, r) tak, že pro každé $x \in P$ a každé $r > 0$ existuje nejvýše N bodů $\{x_i\}$ v $B(x, r) = \{z \in P : \rho(z, x) < r\}$ takových, že $\rho(x_i, x_j) \geq \frac{r}{2}$ pokud $i \neq j$.*
Potom každou G otevřenou podmnožinu P s neprázdnou hranicí ∂G lze zapsat ve tvaru

$$G = \cup_k B(x_k, r_k)$$

tak, že každý bod $z \in G$ je v nejvýše $12N$ množinách $B(x_k, r_k)$ a pro každé k platí

$$\delta(B(x_k, r_k)) \leq \operatorname{dist}(B(x_k, r_k), \partial G) \leq 4\delta(B(x_k, r_k)).$$

Důkaz. Označme pro $k \in \mathbb{Z}$

$$M_k := \{B(x, 2^{k-1}), x \in G\},$$

$$G_k := \{x \in G : c2^k < \operatorname{dist}(x, \partial G) \leq c2^{k+1}\},$$
$$\mathcal{G} := \cup_{k \in \mathbb{Z}} \{B \in M_k : B \cap G_k \neq \emptyset\}.$$

Potom pro každou kouli $B(x, r) \in \mathcal{G}$ platí $\delta(B(x, r)) \leq \operatorname{dist}(B(x, r), \partial G) \leq 4\delta(B(x, r))$. Skutečně, existuje totiž $k \in \mathbb{Z}$ tak, že $B(x, r) \in M_k$ a existuje bod $y \in B(x, r) \cap G_k$, pak ale

$$\operatorname{dist}(B(x, r), \partial G) \leq \operatorname{dist}(y, \partial G) \leq c2^{k+1}$$

$$\operatorname{dist}(B(x, r), \partial G) \geq \operatorname{dist}(y, \partial G) - \delta(B(x, r)) > c2^k - 2^k = 2^k(c - 1),$$

neboť $\delta(B(x,r)) = 2r = 2^k$. Pro $c := 2$ v definici G_k máme

$$\delta(B(x,r)) = 2^k = 2^k(c-1) \leq \operatorname{dist}(B(x,r), \partial G) \leq 2^{k+2} = 4\delta(B(x,r)).$$

Odtud plyne, že každá koule $B \in \mathcal{G}$ splňuje $B \subset G$, na druhou stranu zřejmě $G \subset \cup_{B\in\mathcal{G}} B$, tedy $G = \cup_{B\in\mathcal{G}} B$.
Pro $z \in G$ označme $d := \operatorname{dist}(z, \partial G)$, pak existuje $k_0 \in \mathbb{Z}$ tak, že $2^{k_0} < d \leq 2^{k_0+1}$. Pro každou kouli $B \in \mathcal{G}$ s poloměrem r obsahující bod z platí $2r \leq \operatorname{dist}(B, \partial G) \leq d$ a

$$8r \geq \operatorname{dist}(B, \partial G) \geq d - 2r,$$

odkud máme

$$\frac{1}{10}\, 2^{k_0} < \frac{1}{10}\, d \leq r \leq \frac{1}{2}\, d \leq \frac{1}{2}\, 2^{k_0+1} = 2^{k_0}$$
$$2^{k_0-3} \leq r \leq 2^{k_0}$$

Tedy každá koule z $\mathcal{G}$ obsahující bod z má takto omezený poloměr. Uvažme kouli $B(z, 2^{k_0-3})$, pak z předpokladu homogeneity existuje nejvýše N koulí o poloměru 2^{k_0-3}, které bod z obsahují. Podobně pro další poloměry $2^{k_0-2}, 2^{k_0-1}, 2^{k_0}$. Tedy každá koule z $\mathcal{G}$ obsahující daný bod z má jeden ze čtyř možných poloměrů, dále existuje nejvýše N koulí s daným poloměrem, které z obsahují, celkem tedy může být bod z v nejvýše $4N$ koulích systému $\mathcal{G}$.
(i) Pro G omezenou je $a_0 := \sup\{r > 0 : \exists B(x,r) \in \mathcal{G}\} \leq K < \infty$, tedy vezměme nějakou kouli z $\mathcal{G}$ s poloměrem větším než $\frac{a_0}{2}$ a označme ji $B(x_1, r_1)$. Indukcí vybíráme koule $B(x_k, r_k) \in \mathcal{G}$ tak, že $x_k \in G \backslash (\cup_{i=1}^{k-1} B(x_i, r_i))$, $r_k > \frac{1}{2} \sup\{r > 0 : \exists B(x,r) \in \mathcal{G}, x \in G\backslash(\cup_{i=1}^{k-1} B(x_i, r_i))\}$. Pokud je vybraná posloupnost konečná, tak zřejmě $G = \cup B(x_k, r_k)$. Pokud vybraná posloupnost není konečná a existuje $x \in G\backslash(\cup B(x_k, r_k))$, tak když označíme $d := \operatorname{dist}(x, \partial G)$ a uvážíme kouli $B(x, \frac{d}{3})$, tak z konstrukce vidíme, že buď byla tato koule vybraná (což je spor s volbou x), nebo všechny vybrané koule mají poloměr větší než $\frac{d}{6}$, pak by se ale proces vybírání krychlí nemohl zastavit, protože by zbyl nepokrytý "pás" u hranice G "šířky" $\frac{d}{3}$.
(ii) Pro G neomezenou uvažme $x_0 \in \partial G$, pak lze množiny

$$P_{m-1} := G \cap (B(x_0, 2^{m-1}) \backslash B(x_0, 2^{m-2})),\ m = 2, 3, \ldots, P_0 := G \cap B(x_0, 1),$$

zapsat podle předchozí části důkazu ve tvaru

$$P_{m-1} = \cup_{k=1}^{\infty} B^{m-1}(x_k, r_k)$$

tak, že každý bod $z \in P_{m-1}$ je nejvýše ve $4N$ množinách $B^{m-1}(x_k, r_k)$ a pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\delta(B^{m-1}(x_k, r_k)) \leq \operatorname{dist}(B^{m-1}(x_k, r_k), \partial G) \leq 4\delta(B^{m-1}(x_k, r_k)).$$

Potom zřejmě $G = \cup_m P_{m-1} = \cup_m \cup_{k=1}^{\infty} B^{m-1}(x_k, r_k)$. Nechť $z \in G_k$ je střed nějaké koule $B(z, r)$ z vybraného pokrytí a označme $R := \operatorname{dist}(z, \partial G)$. Z definice G_k je $R \in (2^{k+1}, 2^{k+2}]$ a z vlastnosti pokrytí je $\frac{R}{9} \leq r \leq \frac{R}{3}$. Odtud

$$R - r \geq R - \frac{R}{3} = \frac{2}{3}\, R > \frac{1}{2}\, R > \frac{1}{2}\, 2^{k+1} = 2^k$$

$$R + r \leq \frac{4}{3} R < 2\,2^{k+2} = 2^{k+3}.$$

Tedy koule se středem v G_k mají vzdálenost od ∂G alespoň 2^k a nejvzdálenější bod mohou mít ve vzdálenosti 2^{k+3}, tedy koule mohou protínat jen G_{k-1} a G_{k+1}. Vidíme, že množině P_{m-1} vždy odpovídá nějaká G_k tak, že $P_{m-1} \cap G_k \neq \emptyset$ a $P_{m-1} \cap G_{k+1} = \emptyset$, konkrétně je to G_{m-3}, největší možné koule v pokrytí P_{m-1} mají tedy střed v G_{m-3}. Dále platí $\operatorname{dist}(P_{m-1}, P_{m+1}) = \operatorname{dist}(G_{m-3}, G_{m-1})$. Koule se středem v G_{m-3} protínají jen sousední G_{m-4} a G_{m-2} šířky $\operatorname{dist}(G_{m-5}, G_{m-3})$ a $\operatorname{dist}(G_{m-3}, G_{m-1})$, tedy koule se středem v P_{m-1} mohou protínat jen okolí P_{m-1} šířky $\operatorname{dist}(G_{m-5}, G_{m-3}) = \operatorname{dist}(P_{m-3}, P_{m-1})$ $(m \geq 3)$ a $\operatorname{dist}(G_{m-3}, G_{m-1}) = \operatorname{dist}(P_{m-1}, P_{m+1})$, tedy jen množiny P_{m-2} $(m \geq 2)$ a P_m. Celkem máme, že každý bod $z \in G$ může ležet v koulích z pokrytí nejvýše tří množin P_{m-1} a dle předchozího je každý bod z P_{m-1} nejvýše ve $4N$ množinách $\{B^{m-1}(x_k, r_k)\}_k$, odtud $12N$. □

Věta 12 (Homogenní metrický prostor)**.** *Nechť (P, ρ) je metrický prostor a na P existuje netriviální Borelovská míra μ splňující podmínku:*

$$\exists c \in \mathbb{R}\, \forall x \in P,\, \forall R > 0\ : \mu(B(x, 2R)) \leq c\mu\,(B(x, R)).$$

Potom prostor P splňuje podmínku homogeneity z Věty 11, tj. $\forall x \in P$ a $\forall r > 0$ existuje nejvýše N bodů x_i v $B(x, r) = \{z \in P : \rho(z, x) < r\}$ takových, že $\rho(x_i, x_j) \geq \frac{r}{2}$, $\forall\, i \neq j$.

Důkaz. Dokážeme, že $N = c^4$:
Předpokládejme, že $B(y, r) \subset P$ obsahuje body $y_1, \ldots, y_m$ tak, že platí $\rho(y_i, y_j) > \frac{r}{2}$, $\forall\, i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, m\}$. Pak platí

$$B(y_i, \frac{r}{2}) \subset B(y, 2r) \text{ a } B(y_i, \frac{r}{4}) \cap B(y_j, \frac{r}{4}) = \emptyset,\ \forall\, i \neq j, i, j = 1, \ldots, m.$$

Odkud dostaneme

$$\mu(B(y, 2r)) \geq \mu(\cup_{i=1}^m B(y_i, \frac{r}{4})) = \sum_{i=1}^m (\mu B(y_i, \frac{r}{4})). \tag{2.4}$$

A na druhou stranu z předpokladu na míru a z inkluze $B(y_i, 2r) \supset B(y, r)$ dostaneme

$$\mu(B(y, r)) \leq \mu(B(y_i, 2r)) \leq c\mu(B(y_i, r)) \leq c^2\mu(B(y_i, \frac{r}{2})) \leq c^3\mu(B(y_i, \frac{r}{4})). \tag{2.5}$$

Z předpokladu na míru a z (2.4) a (2.5) plyne:

$$c\mu(B(y, r)) \geq \mu(B(y, 2r)) \geq \sum_{i=1}^m \mu(B(y_i, \frac{r}{4})) \geq \sum_{i=1}^m \frac{1}{c^3}\, \mu(B(y, r)) = \frac{m}{c^3}\, \mu(B(y, r)).$$

Tedy pokud je $\mu(B(y, r)) \neq 0$, pak je $m \leq c^4$, tj. platí $N = c^4$, což jsme chtěli dokázat. Zbývá ukázat, že $\mu(B(y, r)) \neq 0$, to ale plyne z předpokladů věty, kde máme, že μ je netriviální míra. Skutečně, kdyby v P existovala koule $B(z, \lambda)$ taková, že $\mu(B(z, \lambda)) = 0$, pak pro každou kouli $B(u, R) \subset P$ existuje $j_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $B(u, R) \subset B(z, 2^{j_0}\lambda)$. Pak platí

$$0 \leq \mu(B(u, R)) \leq \mu(B(z, 2^{j_0}\lambda)) \leq c^{j_0}\mu(B(z, \lambda)) = c^{j_0} 0 = 0,$$

odkud vidíme, že $\mu(B(u, R)) = 0$ pro každou kouli v P, což je spor. □

Poznámka 11 (Feffermanův pokrývací problém). Platí následující tvrzení? Pro každou $G \subset \mathbb{R}^2$ otevřenou omezenou existuje posloupnost $\{R_k\}_k$ otevřených intervalů (otevřeným intervalem v $\mathbb{R}^2$ rozumíme kartézský součin otevřených intervalů (a,b), $(c,d) \subset \mathbb{R}$, kde $a,b,c,d \in \mathbb{R}$) tak, že platí:

1. $G \subset \cup_k R_k$,
2. $\sum_k |R_k| \leq c|G|$, kde $c \in \mathbb{R}$ nezávisí na G,
3. pro každý interval $R \subset G$ existuje $h \in \mathbb{N}$ tak, že $R \subset R_h$.

Věta 13 (Řešení Feffermanova pokrývacího problému pro krychle)**.** *Pro každou $G \subset \mathbb{R}^2$ otevřenou omezenou existuje posloupnost $\{Q_k\}_k$ otevřených krychlí tak, že platí:*

1. $G \subset \cup_k Q_k$,

2. $\sum_k |Q_k| \leq c|G|$, kde $c \in \mathbb{R}$ nezávisí na G,

3. pro každou krychli $Q \subset G$ existuje $h \in \mathbb{N}$ tak, že $Q \subset Q_h$.

Důkaz. Nechť $(Q_\alpha)_{\alpha\in A}$ jsou všechny otevřené krychle obsažené v G, označme

$$a_0 := \sup\{|Q_\alpha|, \alpha \in A\} =: \tilde{a}^2.$$

Vybereme z $(Q_\alpha)_{\alpha\in A}$ krychli Q_1^* tak, aby $|Q_1^*| > \frac{a_0}{4} = (\frac{\tilde{a}}{2})^2$. Nechť Q_1 je krychle se stejným středem jako Q_1^*, pro kterou platí

$$|Q_1| = 64|Q_1^*|. \tag{2.6}$$

Nechť a_1, a_1^* značí délku hrany krychle Q_1, Q_1^* (podobně v celém důkazu např. a_k značí délku hrany krychle Q_k). Potom

$$a_1 > 4\tilde{a}, \tag{2.7}$$

protože

$$a_1^2 = |Q_1| = 64|Q_1^*| = 8^2(a_1^*)^2 > 8^2(\frac{\tilde{a}}{2})^2 = (4\tilde{a})^2.$$

Ze systému $(Q_\alpha)_{\alpha\in A}$ vyloučíme ty krychle, které mají s Q_1^* neprázdný průnik a zbylý systém označíme $(Q_\alpha)_{\alpha\in A_1}$. Z tohoto systému podobně vybereme krychli Q_2, ze zbylého systému $(Q_\alpha)_{\alpha\in A_2}$ vybereme krychli Q_3, ..., získáme posloupnost $\{Q_k\}_k$, o které nyní dokážeme, že splňuje (i) - (iii):

(i) Pro spor předpokládejme, že $x \in G\backslash(\cup_k Q_k)$, tedy $x \notin Q_k$, $x \notin Q_k^*$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Pokud by v G existovala krychle $Q(x)$ se středem v x taková, že $Q(x) \cap Q_k^* = \emptyset$, $\forall k$, pak by proces vybírání krychlí nezkončil. Tedy pro každou krychli $Q(x) \subset G$ se středem v x existuje $k \in \mathbb{N}$, že $Q(x) \cap Q_k^* \neq \emptyset$. Tedy pro každou krychli $Q(x) \subset G$ se středem v x existuje $k \in \mathbb{N}$, že $Q(x) \cap Q_k^* \neq \emptyset$ a $Q(x) \cap Q_j^* = \emptyset$ $\forall j < k$. Protože v k-tém kroku byla vybraná krychle Q_k (nejdřív Q_k^*) a ne $Q(x)$, tak $a_k^* > \frac{a(x)}{2}$. Dále z $Q(x) \cap Q_k^* \neq \emptyset$ plyne díky předpokladu $x \notin Q_k$, že $\frac{a(x)}{2} > \frac{7}{2}\, a_k^*$. Celkem

$$a_k^* > \frac{a(x)}{2} > \frac{7}{2}\, a_k^*$$

a to je spor.

(ii) Platí
$$\sum_k |Q_k| = 8^2 \sum_k |Q_k^*| = 8^2 |\cup_k Q_k^*| \le 8^2 |G|,$$
tedy $c = 8^2$ nezávisí na G. První rovnost máme z (2.6), dále používáme vlastnosti krychlí z $\{Q_k^*\}_k$ (disjunktnost, $Q_k^* \subset G$) a vlastnosti Lebesgueovy míry (aditivita, monotonie).

(iii) Pro spor nechť krychle $Q \subset G$ není podmnožinou žádné krychle z vybrané posloupnosti $\{Q_k\}_k$. Pak z $Q \subset G$ plyne existence $j \in \mathbb{N}$, pro které je $Q \cap Q_j^* \neq \emptyset$. Uvažme nejmenší j, které to splňuje, pak platí jedna z následujících možností:

- $Q \subset Q_j^* \subset Q_j$, což je ve sporu s předpokladem,
- $Q \cap Q_j^* \neq \emptyset$, $a_Q < \frac{7a_j^*}{2}$, což by ale dalo $Q \subset Q_j$ a to je spor,
- $Q \cap Q_j^* \neq \emptyset$, $a_Q \ge \frac{7a_j^*}{2}$, uvažme krychli $\tilde{Q}^* \subset G$ se středem jako Q a s délkou hrany $2a_j^*$, pak by z konstrukce posloupnosti $\{Q_k\}_k$ musela být vybrána $\tilde{Q}^*$, tedy do posloupnosti $\{Q_k\}_k$ by byla vybraná příslušná $\tilde{Q}$ splňující $\tilde{a} = 8\tilde{a}^*$, pak by ale platilo $Q \subset \tilde{Q}$ a to je spor.

□

Věta 14. *Existuje konstanta $B \in \mathbb{R}$ taková, že pro každou otevřenou $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ s $w(\Omega) < \infty$, kde $w \in A_\infty$, existuje posloupnost uzavřených krychlí $\{Q_k\}_k$ splňující:*

(i) $\Omega \subset \cup_k Q_k$,

(ii) $\mathrm{int}(Q_k) \cap \mathrm{int}(Q_j) = \emptyset$, $\forall k \neq j$,

(iii) $w(Q_k) \le B w(Q_k \cap \Omega)$, $\forall k \in \mathbb{N}$,

(iv) $|Q_k| \le 2|Q_k \cap (\mathbb{R}^n \backslash \Omega)|$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Důkaz. Nejprve uvažme dvě krychle Q, Q' se stejnou délkou hrany, které jsou obsaženy v krychli $3Q$, pak existuje konstanta $c \ge 1$ tak, že $w(Q) \le c w(Q')$, skutečně:
$$w(Q) \le w(3Q) \le C \left(\frac{|3Q|}{|Q'|} \right)^p w(Q') = C\, 3^{np} w(Q'),$$
stačí tedy volit $c := C\, 3^{np}$. Tedy existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $w(3Q) \ge (1+\varepsilon) w(Q)$:
$$w(3Q) = \int_{3Q} w(x)\, \mathrm{d}x \ge \int_Q w + \int_{Q'} w = w(Q) + w(Q')$$
$$\ge w(Q) + \frac{1}{c} w(Q) = (1+\varepsilon) w(Q),$$
kde Q' má stejnou délku hrany jako Q, $Q' \subset 3Q$, $Q' \cap Q = \emptyset$ a $\varepsilon := \frac{1}{c}$. Indukcí dostaneme $w(3^k Q) \ge (1+\varepsilon)^k w(Q)$, tedy lze vzít krychli s libovolně velkou w-mírou.
Vezměme krychli Q_1 se středem v počátku, že $w(Q_1) \ge cBw(\Omega)$, přičemž volíme $B > A^2 2^{np}$, kde konstanta A splňuje $\frac{w(Q)}{w(E)} \le A \left(\frac{|Q|}{|E|} \right)^p$ (vlastnost $w \in A_\infty$ z

Poznámky 3). Pro každé $m \in \mathbb{N}$ rozdělíme množinu $3^m Q_1 \backslash 3^{m-1} Q_1$ na $3^n - 1$ podkrychlí s délkou hrany jako $3^{m-1}Q_1$, pak každá z nich má w-míru větší nebo rovnu $\frac{1}{c}\, w(3^{m-1}Q_1)$ (plyne z úvahy na začátku důkazu). Tedy máme $\mathbb{R}^n$ pokryto krychlemi s délkami hran 3^{m-1}, $m \in \mathbb{N}$, které mají disjunktní vnitřky a každá z nich splňuje $w(Q) \geq cBw(\Omega)$, neboť

$$w(Q) = w(3^{m-1}Q_1) \geq (1+\varepsilon)^{m-1} w(Q_1) \geq (1+\varepsilon)^{m-1} cBw(\Omega) \geq cBw(\Omega).$$

Z tohoto systému vyloučíme ty krychle, které jsou s Ω disjunktní. Každou zbylou krychli Q rozdělíme na 2^n podkrychlí $\tilde{Q}$, které mají disjunktní vnitřky a mají poloviční délku hrany než Q. Pak z $w \in A_\infty$ dostáváme

$$Bw(\tilde{Q} \cap \Omega) \leq Bw(\Omega) \leq cBw(\Omega) \leq w(Q) \leq A \left(\frac{|Q|}{|\tilde{Q}|} \right)^p w(\tilde{Q}) = A 2^{np} w(\tilde{Q}).$$

Krychli $\tilde{Q}$ zahrneme do vybíraného pokrytí, pokud $w(\tilde{Q}) \leq Bw(\tilde{Q} \cap \Omega)$, jinak opakujeme proces induktivně, rozdělíme krychli $\tilde{Q}$ na 2^n podkrychlí atd.
Pokud $B > A2^{np}$, tak každý bod z Ω je prvkem nějaké vybrané krychle. Skutečně: nechť $x \in \Omega$ neleží v žádné vybrané krychli. Už víme, že pro každou z uvažovaných krychlí $\tilde{Q}$ je $Bw(\tilde{Q} \cap \Omega) \leq A2^{np} w(\tilde{Q})$, což spolu v podmínkou $B > A2^{np}$ dává $w(\tilde{Q} \cap \Omega) < w(\tilde{Q})$. Protože x je prvkem otevřené množiny, tak existuje mezi uvažovanými krychlemi taková krychle Q, která leží celá v Ω, pak ale dle předchozího $w(Q) = w(Q \cap \Omega) < w(Q)$, což je spor. A tedy $\Omega \subset \cup_k Q_k$. Dále pro každou vybranou krychli $\tilde{Q}$ platí $w(\tilde{Q}) \leq A \left(\frac{|\tilde{Q}|}{|\tilde{Q} \cap \Omega|} \right)^p w(\tilde{Q} \cap \Omega)$, odkud dostáváme:

$$\left(\frac{|\tilde{Q} \cap \Omega|}{|\tilde{Q}|} \right)^p \leq Aw(\tilde{Q} \cap \Omega) \frac{1}{w(\tilde{Q})} \leq A \frac{A}{B} 2^{np} w(\tilde{Q}) \frac{1}{w(\tilde{Q})} = \frac{A^2 2^{np}}{B} < 2^{-p},$$

neboť platí $B > \frac{A^2 2^{np}}{2^p}$. Tedy $|\tilde{Q} \cap \Omega| < 2^{-1} |\tilde{Q}|$, odkud dostáváme

$$|\tilde{Q}| = |\tilde{Q} \cap (\mathbb{R}^n \backslash \Omega)| + |\tilde{Q} \cap \Omega| \leq |\tilde{Q} \cap (\mathbb{R}^n \backslash \Omega)| + \frac{1}{2} |\tilde{Q}|,$$

tedy $|\tilde{Q}| \leq 2 |\tilde{Q} \cap (\mathbb{R}^n \backslash \Omega)|$, což nám zbývalo dokázat. □

Věta 15. *Existuje konstanta $C \in \mathbb{R}$ taková, že pro každou otevřenou $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ s $w(\Omega) < \infty$, kde $w \in A_\infty$, existuje posloupnost uzavřených krychlí $\{Q_k\}_k$ splňující:*

(i) $\Omega \subset \cup_k Q_k$,

(ii) $\operatorname{int}(Q_k) \cap \operatorname{int}(Q_j) = \emptyset$, $\forall k \neq j$,

(iii) $\sum_k w(Q_k) \leq Cw(\Omega)$,

(iv) *pokud* $Q \cap Q_k \neq \emptyset$ *a* $|Q_k| \leq |Q|$, *pak* $|Q| \leq 2 |Q \cap (\mathbb{R}^n \backslash \Omega)|$.

Důkaz. Označme $\tilde{\Omega} := \{x \in \mathbb{R}^n : \tilde{M}\chi_\Omega(x) > 2^{-n-1}\}$, pak podle Poznámky 2 je $\tilde{\Omega}$ otevřená, zřejmě $\Omega \subset \tilde{\Omega}$ a z definice A_∞ je $w(\tilde{\Omega}) \leq A2^{(n+1)p} w(\Omega)$. Na $\tilde{\Omega}$ použijeme Větu 14, získáme tak posloupnost krychlí $\{Q_k\}_k$, splňující $\tilde{\Omega} \subset \cup_k Q_k$, $\operatorname{int}(Q_k) \cap \operatorname{int}(Q_j) = \emptyset$, $w(Q_k) \leq Bw(Q_k \cap \tilde{\Omega})$, $|Q_k| \leq 2|Q_k \cap (\mathbb{R}^n \backslash \tilde{\Omega})|$. Tato posloupnost pokrývá i Ω, neboť $\Omega \subset \tilde{\Omega}$ a má po dvou disjunktní vnitřky, zbývá tedy dokázat bod (iii) a (iv). Z vlastností posloupnosti $\{Q_k\}_k$ máme

$$\sum_k w(Q_k) \le B \sum_k w(Q_k \cap \tilde{\Omega}) = B \sum_k \int_{Q_k \cap \tilde{\Omega}} w = B \int_{\cup_k (Q_k \cap \tilde{\Omega})} w$$

$$\le B \int_{\tilde{\Omega}} w = Bw(\tilde{\Omega}) \le BA\, 2^{(n+1)p} w(\Omega),$$

tedy pokud zvolíme $C := BA\, 2^{(n+1)p}$, tak $\sum_k w(Q_k) \le Cw(\Omega)$. Dále pokud pro libovolnou krychli $Q \subset \mathbb{R}^n$ máme $Q \cap Q_k \neq \emptyset$ a $|Q_k| \le |Q|$, pak uvažme $\tilde{Q}$ krychli obsahující Q i Q_k takovou, že $|\tilde{Q}| = 2^n |Q|$. Z bodu (iv) předchozí věty plyne, že $Q_k \cap (\mathbb{R}^n \backslash \tilde{\Omega}) \neq \emptyset$, tedy platí i $\tilde{Q} \cap (\mathbb{R}^n \backslash \tilde{\Omega}) \neq \emptyset$, tedy pro $x \in \tilde{Q} \cap (\mathbb{R}^n \backslash \tilde{\Omega})$ je $2^{-n-1} \ge \tilde{M}\chi_\Omega(x) \ge \frac{|\tilde{Q} \cap \Omega|}{|\tilde{Q}|}$. Potom

$$|Q \cap \Omega| \le |\tilde{Q} \cap \Omega| \le 2^{-n-1} |\tilde{Q}| = \frac{|Q|}{2},$$

odkud opět dostáváme pomocí $|Q| = |Q \cap \Omega| + |Q \cap (\mathbb{R}^n \backslash \Omega)| \le |Q \cap \Omega| + \frac{|Q|}{2}$, že

$$|Q| \le 2|Q \cap (\mathbb{R}^n \backslash \Omega)|.$$

Tato posloupnost tedy splňuje všechny požadavky věty. $\square$

Kapitola 3

Aplikace vět Vitaliova typu

3.1 Základní vlastnosti Hardyova-Littlewoodova maximálního operátoru

Pro $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ a $x \in \mathbb{R}^n$ jsme definovali

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} |f(y)| \, \mathrm{d}y,$$

kde $Q(x,r)$ značí krychli v $\mathbb{R}^n$ se středem v bodě x a délkou hrany $r > 0$. Operátor $M : f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n) \longmapsto Mf \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ jsme nazvali Hardyův-Littlewoodův maximální operátor.

Operátor M zřejmě splňuje:

- $\forall f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ a $\forall x \in \mathbb{R}^n$ platí $Mf(x) \geq 0$,
- $\forall f_1, f_2 \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ a $\forall x \in \mathbb{R}^n$ platí $M(f_1 + f_2)(x) \leq Mf_1(x) + Mf_2(x)$,
- $\forall f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ a $\forall x \in \mathbb{R}^n$ platí $M(\lambda f)(x) = |\lambda| Mf(x)$.
- $||Mf||_\infty \leq ||f||_\infty$, tedy je to operátor silného typu (∞, ∞).

Věta 16. *Hardyův-Littlewoodův operátor M je slabého typu* $(1,1)$.

Důkaz. Chceme ukázat, že existuje konstanta $c > 0$ tak, že pro každou funkci $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ a každé $\lambda > 0$ platí $|\{x : |Mf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{c||f||_1}{\lambda}$.
Buď tedy $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ a $\lambda > 0$, označme $A := \{x \in \mathbb{R}^n : |Mf(x)| > \lambda\}$. Nechť $K \subset A$ je kompakt. Pro každé $x \in K$ nalezneme otevřenou krychli $Q(x)$ se středem v x tak, že $\frac{1}{|Q(x)|} \int_{Q(x)} |f(y)| \, \mathrm{d}y > \lambda$. Protože K je kompakt, tak z pokrytí $\{Q(x)\}_{x \in K}$ lze vybrat konečné podpokrytí $\{Q_j\}_{j=1}^N$ a z tohoto systému lze podle Poznámky 6 vybrat po dvou disjunktní systém $\{Q_i\}_{i=1}^k$ tak, že $K \subset \cup_{i=1}^k 3Q_i$. Tedy máme

$$|K| \leq |\cup_{i=1}^k 3Q_i| \leq \sum_i |3Q_i| = 3^n \sum_i |Q_i| \leq \frac{3^n}{\lambda} \sum_i \int_{Q_i} |f(y)| \, \mathrm{d}y$$

$$\leq \frac{3^n}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \, \mathrm{d}y = \frac{3^n \, ||f||_1}{\lambda},$$

přičemž tento odhad platí pro každý kompakt $K \subset A$. Tedy $|A| \leq \frac{c||f||_1}{\lambda}$ a stačí položit $c := 3^n$.

□

Tento odhad lze ještě vylepšit na $|\{Mf > \lambda\}| \leq \frac{2c}{\lambda} \int_{\{|f| > \frac{\lambda}{2}\}} |f|$. Skutečně, stačí zadefinovat

$$f_1(x) := \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{když } |f(x)| > \frac{\lambda}{2} \\ f(x) & \text{když } |f(x)| \leq \frac{\lambda}{2} \end{array} \right\}$$

a $f_2(x)$ definujeme tak, aby $f = f_2 + f_1$. Potom $Mf(x) \leq Mf_2(x) + Mf_1(x)$, tedy $\{Mf > \lambda\} \subset \{Mf_2 > \frac{\lambda}{2}\} \cup \{Mf_1 > \frac{\lambda}{2}\}$, přičemž $\{Mf_1 > \frac{\lambda}{2}\} = \emptyset$. Dostáváme

$$|\{Mf > \lambda\}| \leq |\{Mf_2 > \frac{\lambda}{2}\}| \leq \frac{2c}{\lambda} \int |f_2| = \frac{2c}{\lambda} \int_{\{|f| > \frac{\lambda}{2}\}} |f|.$$

Následující interpolační větu a její důkaz lze nalézt v [9] na str. 21, je to speciální případ Marcinkiewiczovy interpolační věty.

Věta 17. *Nechť pro všechny $f, g \in L(\mathbb{R}^n) + L^\infty(\mathbb{R}^n) := \{f = f_1 + f_2 : f_1 \in L(\mathbb{R}^n), f_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)\}$ a pro každé $\lambda > 0$ operátor T splňuje*

(i) $|T(f+g)(x)| \leq |Tf(x)| + |Tg(x)|,\ x \in \mathbb{R}^n$,

(ii) $|\{x : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{c_1}{\lambda} ||f||_1,\ f \in L(\mathbb{R}^n)$,

(iii) $||Tf||_\infty \leq c_2 ||f||_\infty,\ f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$,

pak

$$||Tf||_p \leq C_p ||f||_p, \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n),$$

kde $1 < p \leq \infty$ a C_p závisí jen na c_1, c_2 a p.

Věta 18. *Hardyův-Littlewoodův maximální operátor M je silného typu (p,p) pro každé $1 < p \leq \infty$.*

Důkaz. Operátor M je subaditivní, silného typu (∞, ∞) a podle Věty 16 je i slabého typu (1,1), odtud použitím Věty 17 dostáváme tvrzení. □

Příklad (Hardyův-Littlewoodův maximální operátor není silného typu $(1,1)$). Stačí uvážit jednotkovou krychli $Q := [0,1]^n$ v $\mathbb{R}^n$ a její charakteristickou funkci $\chi_Q \in L(\mathbb{R}^n)$, pak pro x s $||x||_{\max} \geq 1$ máme

$$M\chi_Q(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} |\chi_Q(y)| \,\mathrm{d}y \geq \frac{1}{|Q(x, 2||x||_{\max})|} \int_{Q(x,2||x||_{\max})} |\chi_Q(y)| \,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{(2||x||_{\max})^n} \int_Q 1 \,\mathrm{d}y = \frac{1}{(2||x||_{\max})^n} \geq \frac{c}{|x|^n}.$$

Tedy $M\chi_Q \notin L(\mathbb{R}^n)$.

3.2 Derivování množinové funkce v $\mathbb{R}^n$

Věta 19 (Derivování množinové funkce v $\mathbb{R}^n$). *Nechť σ je množinová funkce definovaná na konečných sjednoceních uzavřených krychlí v $\mathbb{R}^n$, která je nezáporná, monotónní, konečně aditivní a konečná na krychlích. Pak ve skoro všech bodech $x \in \mathbb{R}^n$ platí:*
Pro každou posloupnost $\{Q_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ uzavřených krychlí se středem v x, které se smršťují k x, existuje limita

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sigma(Q_k(x))}{\lambda|Q_k(x)|} =: D(\sigma, x),$$

je konečná a nezávisí na volbě posloupnosti $\{Q_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že míra množiny

$$A_{(\infty)} := \{x \in \mathbb{R}^n : \exists \{Q_k(x)\}_k, \lim_{k\to\infty} \frac{\sigma(Q_k(x))}{|Q_k(x)|} = \infty\},$$

kde $\{Q_k(x)\}_k$ značí posloupnost uzavřených krychlí se středem v x, které se smršťují k x, je rovna nule. Buď Q libovolná uzavřená krychle v $\mathbb{R}^n$ a $M > 0$, pak pro každé $x \in A_{(\infty)} \cap \text{int}(Q)$ existuje posloupnost $\{Q_k(x)\}_k$ uzavřených krychlí se středem v x, které se smršťují k x a platí $\lim_{k\to\infty} \frac{\sigma(Q_k(x))}{|Q_k(x)|} = \infty$. Z definice limity existuje $k_0 \in \mathbb{N}$, že $\sigma(Q_k(x)) > M|Q_k(x)|$, $\forall k \geq k_0$. Dále existuje $k_1 \in \mathbb{N}$, bez újmy na obecnosti je $k_1 \geq k_0$, že $Q_k(x) \subset \text{int}(Q)$, $\forall k \geq k_1$, protože $x \in \text{int}(Q)$ a posloupnost $\{Q_k(x)\}_k$ se smršťuje k x. Z původní posloupnosti $\{Q_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ vynecháme prvních $k_1 - 1$ členů a vzniklou posloupnost přeznačíme opět na $\{Q_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, která pak splňuje

$$\sigma(Q_k(x)) > M|Q_k(x)|, \quad Q_k(x) \subset \text{int}(Q).$$

Na množinu $A_{(\infty)} \cap \text{int}(Q)$ a posloupnosti $\{Q_k(x)\}_k$, které získáme právě vysvětleným způsobem, aplikujeme Větu 3 a dostaneme tak posloupnost $\{S_k\}_k$ po dvou disjunktních uzavřených krychlí, které splňují

$$|(A_{(\infty)} \cap \text{int}(Q)) \setminus (\cup_k S_k)| = 0,$$

$$|S_k| < \frac{1}{M}\sigma(S_k),$$

$$S_k \subset \text{int}(Q).$$

Celkem dostáváme

$$|A_{(\infty)} \cap \text{int}(Q)|_e \leq \sum_k |S_k| < \frac{1}{M} \sum_k \sigma(S_k) \leq \frac{1}{M}\sigma(Q),$$

kde první nerovnost plyne z

$$\begin{aligned} |A_{(\infty)} \cap \text{int}(Q)|_e &= |((A_{(\infty)} \cap \text{int}(Q)) \cap (\cup_k S_k)) \cup ((A_{(\infty)} \cap \text{int}(Q)) \setminus (\cup_k S_k))|_e \\ &\leq |(A_{(\infty)} \cap \text{int}(Q)) \cap (\cup_k S_k)|_e + |(A_{(\infty)} \cap \text{int}(Q)) \setminus (\cup_k S_k)|_e \\ &= |(A_{(\infty)} \cap \text{int}(Q)) \cap (\cup_k S_k)|_e \leq |\cup_k S_k|, \end{aligned}$$

druhá nerovnost plyne z výběru $\{S_k\}_k$ a poslední nerovnost máme z $S_k \subset \mathrm{int}(Q)$ a z monotonie a konečné aditivity σ: pro každé $N \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=1}^{N} \sigma(S_k) = \sigma(\cup_{k=1}^{N} S_k) \leq \sigma(Q),$$

tedy platí i

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma(S_k) \leq \sigma(Q).$$

Pro každou uzavřenou krychli Q v $\mathbb{R}^n$ lze k libovolnému $\varepsilon > 0$ nalézt $M > 0$, že $\frac{\sigma(Q)}{M} < \varepsilon$, tedy $|A_{(\infty)} \cap \mathrm{int}(Q)|_e < \varepsilon$, tedy $|A_{(\infty)} \cap \mathrm{int}(Q)| = 0$ pro každou uzavřenou krychli v $\mathbb{R}^n$, pak ale z regularity míry je i $|A_{(\infty)}| = 0$. Tedy pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ je limita konečná, pokud existuje.
Dále buď opět $Q \subset \mathbb{R}^n$ uzavřená krychle a $r > s > 0$, definujme

$$A_{rs} := \{x \in \mathrm{int}(Q),\, \exists \{Q_k(x)\}_k, \{Q_k^*(x)\}_k, \frac{\sigma(Q_k(x))}{|Q_k(x)|} > r > s > \frac{\sigma(Q_k^*(x))}{|Q_k^*(x)|}, \forall k \in \mathbb{N}\},$$

kde $\{Q_k(x)\}_k$ a $\{Q_k^*(x)\}_k$ jsou posloupnosti uzavřených krychlí se středem v x, které se smršťují k x. Chceme ukázat, že míra A_{rs} je 0. Buď $\varepsilon > 0$, pak existuje $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, že $|G| \leq |A_{rs}|_e + \varepsilon$ a $A_{rs} \subset G$. Aplikujeme Větu 3 na A_{rs} a posloupnosti $\{Q_k^*(x)\}_k$ takové, které jsou obsažené v G (z posloupností $\{Q_k^*(x)\}_k$ vynecháme konečně mnoho prvních členů, které neleží v G, a posloupnosti přeznačíme opět na $\{Q_k^*(x)\}_k$), získáme tak posloupnost $\{S_k^*\}$ po dvou disjunktních uzavřených krychlí, která splňuje:

$$|A_{rs} \backslash (\cup_k S_k^*)| = 0,$$

$$|G| \geq | \cup_k S_k^*| = \sum_k |S_k^*| \geq \frac{1}{s} \sum_k \sigma(S_k^*),$$

kde první řádek plyne z použití Věty 3 a druhý řádek máme z vlastností posloupností $\{Q_k^*(x)\}_k$, konkrétněji $Q_k^*(x) \subset G$ a $s > \frac{\sigma(Q_k^*(x))}{|Q_k^*(x)|}$, $\forall k$. Označme nyní $C := A_{rs} \cap (\cup_k \mathrm{int}(S_k^*))$, pak $|C|_e = |A_{rs}|_e$, neboť z definice C ihned máme $|C|_e \leq |A_{rs}|_e$ a druhá nerovnost plyne takto $|A_{rs}|_e = |(A_{rs} \cap (\cup_k S_k^*)) \cup (A_{rs} \backslash (\cup_k S_k^*))|_e \leq |A_{rs} \cap (\cup_k S_k^*)|_e + |A_{rs} \backslash (\cup_k S_k^*)|_e = |A_{rs} \cap (\cup_k \mathrm{int}(S_k^*))|_e = |C|_e$. Pro každé $x \in C$ existuje uzavřená krychle $S_{j_0}^*$, že $x \in \mathrm{int}(S_{j_0}^*)$ a dále existuje posloupnost $\{Q_k(x)\}_k$ z definice A_{rs}, že $\frac{\sigma(Q_k(x))}{|Q_k(x)|} > r$ a navíc jde zařídit, že $Q_k(x) \subset S_{j_0}^*$, $\forall k$. Na množinu C a posloupnosti $\{Q_k(x)\}_k$ aplikujeme Větu 3 a dostaneme posloupnost $\{S_k\}$ po dvou disjunktních uzavřených krychlí, která splňuje

$$|C \backslash \cup_k S_k| = 0,$$

$$|S_k| < \frac{1}{r} \sigma(S_k),$$

každé S_k je v nějakém S_{j_0}.

Celkem

$$|A_{rs}|_e = |C|_e \leq |C \cap (\cup_k S_k)|_e \leq \sum_k |S_k| \leq \frac{1}{r} \sum_k \sigma(S_k)$$

$$\leq \frac{1}{r}\sum_k \sigma(S_k^*) \leq \frac{s}{r}|G| \leq \frac{s}{r}(|A_{rs}|_e + \varepsilon),$$

odkud snadno dostaneme $|A_{rs}|_e \leq \varepsilon\, \frac{s}{r-s}$. Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, tak $|A_{rs}| = 0$ pro každé $r > s > 0$. Tedy pro skoro všechna $x \in \operatorname{int}(Q)$ limita nezávisí na volbě posloupnosti. To platí pro libovolnou uzavřenou krychli $Q \subset \mathbb{R}^n$, tedy pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ limita nezávisí na volbě posloupnosti.
Nechť pro $x \in \mathbb{R}^n$ a posloupnost uzavřených krychlí $\{Q_k(x)\}_k$ se středem v x, které se smršťují k x, neexistuje limita

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sigma(Q_k(x))}{|Q_k(x)|}.$$

Pak existují dvě podposloupnosti $\{Q_k^1\}_k$, $\{Q_k^2\}_k$ posloupnosti $\{Q_k(x)\}_k$ a reálná čísla $r_0 > s_0$ tak, že

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sigma(Q_k^1)}{|Q_k^1|} = r_0, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\sigma(Q_k^2)}{|Q_k^2|} = s_0.$$

Potom pro $r > s$ reálná taková, že $r_0 > r > s > s_0$, existuje $k_0 \in \mathbb{N}$, že

$$\frac{\sigma(Q_k^1)}{|Q_k^1|} > r > s > \frac{\sigma(Q_k^2)}{|Q_k^2|},\ \forall k \geq k_0.$$

Uvažme dané posloupnosti až od indexu k_0, pak bod x patří do množiny A_{rs}, která má ale míru 0, takže pro skoro všechny body $x \in \mathbb{R}^n$ limita existuje. □

Poznámka 12. Z předchozí věty plyne:

- Nechť $P \subset \mathbb{R}^n$ je libovolná, definujme $\sigma_1(Q) := |Q \cap P|_e$ pro každou $Q \subset \mathbb{R}^n$ uzavřenou krychli. Potom ve skoro všech bodech $x \in \mathbb{R}^n$ existuje konečná limita
$$\lim_{k\to\infty} \frac{|Q_k(x) \cap P|_e}{|Q_k(x)|} =: d_e(x).$$
$\{Q_k(x)\}_k$ značí posloupnost uzavřených krychlí se středem x, které se smršťují k x.

- Nechť $P \subset \mathbb{R}^n$, definujme $\sigma_2(Q) := |Q \cap P|_i$ pro každou uzavřenou krychli $Q \subset \mathbb{R}^n$, kde $|.|_i$ značí vnitřní Lebesgueovu míru. Potom ve skoro všech bodech $x \in \mathbb{R}^n$ existuje konečná limita
$$\lim_{k\to\infty} \frac{|Q_k(x) \cap P|_i}{|Q_k(x)|} =: d_i(x).$$
$\{Q_k(x)\}_k$ značí posloupnost uzavřených krychlí se středem x, které se smršťují k x.

- Definujme $\sigma_3(Q) := \int_Q f$ pro každou uzavřenou krychli $Q \subset \mathbb{R}^n$, kde $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ je nezáporná. Potom ve skoro všech bodech $x \in \mathbb{R}^n$ existuje limita
$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{|Q_k(x)|} \int_{Q_k(x)} f(y)\,\mathrm{d}y =: d_f(x),$$
je konečná a nezávisí na volbě posloupnosti $\{Q_k(x)\}_k$, kde $\{Q_k(x)\}_k$ opět značí posloupnost uzavřených krychlí se středem x, které se smršťují k x.

3.3 Lebesgueova věta o derivování

Věta 20 (Lebesgueova)**.** *Nechť $f \in L(\mathbb{R}^n)$, pak pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ platí: Je-li $\{Q_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnost uzavřených krychlí se středem v x, které se smršťují k x, pak*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{|Q_k(x)|} \int_{Q_k(x)} f(y)\,\mathrm{d}y = f(x).$$

Důkaz. Stačí dokázat, že pro každé $\alpha > 0$ je míra množiny A rovna nule, kde

$$A := \{x \in \mathbb{R}^n, \exists \{Q_k(x)\}_k : \limsup_{k\to\infty} |\frac{1}{|Q_k(x)|} \int_{Q_k(x)} (f(y) - f(x))\,\mathrm{d}y| > \alpha\},$$

kde $\{Q_k(x)\}_k$ je posloupnost uzavřených krychlí se středem v x, které se smršťují k x. Volme $\varepsilon > 0$. Z hustoty spojitých funkcí v $L(\mathbb{R}^n)$ nalezneme $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ tak, aby $||f - g||_{L(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$ a definujeme $h := f - g$. Pro g spojitou platí

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{|Q_k(x)|} \int_{Q_k(x)} g(y)\,\mathrm{d}y = g(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1}$$

Pak

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n, \exists \{Q_k(x)\}_k : \limsup_{k\to\infty} |\frac{1}{|Q_k(x)|} \int_{Q_k(x)} (h(y) - h(x))\,\mathrm{d}y| > \alpha\}, \tag{3.2}$$

kde $\{Q_k(x)\}_k$ značí posloupnost uzavřených krychlí se středem v x, které se smršťují k x. Dále

$$\begin{aligned} |\frac{1}{|Q_k(x)|} \int_{Q_k(x)} (h(y) - h(x))\,\mathrm{d}y| &\le \frac{1}{|Q_k(x)|} \int_{Q_k(x)} |h(y) - h(x)|\,\mathrm{d}y \\ &\le \frac{1}{|Q_k(x)|} \int_{Q_k(x)} |h(y)| + |h(x)|\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{|Q_k(x)|} \int_{Q_k(x)} |h(y)|\,\mathrm{d}y + \frac{1}{|Q_k(x)|} |h(x)| \int_{Q_k(x)} 1\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{|Q_k(x)|} \int_{Q_k(x)} |h(y)|\,\mathrm{d}y + |h(x)|. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Pro $t > 0$ a funkce F, $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ platí

$$\{x \in \mathbb{R}^n, F(x) + G(x) > t\} \subset (\{x \in \mathbb{R}^n, F(x) > \frac{t}{2}\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n, G(x) > \frac{t}{2}\}), \tag{3.4}$$

skutečně je-li totiž x na levé straně inkluze a $F(x) \le \frac{t}{2}$ (resp. $G(x) \le \frac{t}{2}$), pak $t < F(x) + G(x) \le \frac{t}{2} + G(x)$ (resp. $t < F(x) + G(x) \le F(x) + \frac{t}{2}$), odkud plyne $\frac{t}{2} < G(x)$ (resp. $\frac{t}{2} < F(x)$), tedy x je i na pravé straně.
Z (3.2), (3.3) a (3.4) plyne

$$A \subset A_1 \cup A_2, \tag{3.5}$$

pro

$$A_1 := \{x \in \mathbb{R}^n, \exists \{Q_k(x)\}_k : \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{|Q_k(x)|} \int_{Q_k(x)} |h(y)|\,\mathrm{d}y > \frac{\alpha}{2}\}$$

$$A_2 := \{x \in \mathbb{R}^n, |h(x)| > \frac{\alpha}{2}\}.$$

Dále platí

$$\{x \in \mathbb{R}^n, \exists\{Q_k(x)\}_k : \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{|Q_k(x)|} \int_{Q_k(x)} |h(y)| \,\mathrm{d}y > \frac{\alpha}{2}\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n, Mh(x) > \frac{\alpha}{2}\},$$

odkud použitím Věty 16 dostaneme

$$|A_1|_e \leq |\{x \in \mathbb{R}^n : Mh(x) > \frac{\alpha}{2}\}| \leq \frac{c}{\alpha} \, ||h||_{L(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{c\,\varepsilon}{\alpha}.$$

Pro druhou množinu máme

$$|A_2| = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A_2} \,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|h(x)|}{\frac{\alpha}{2}} \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |h(x)| \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\alpha} \, ||h||_{L(\mathbb{R}^n)} < \frac{2\varepsilon}{\alpha}.$$

Celkem $|A|_e \leq \frac{c\varepsilon}{\alpha}$ a epsilon bylo volené libovolně, tedy dostáváme, že $|A| = 0$. □

Poznámka 13. Uvedená věta platí i pro necentrované krychle. Stačí, když v důkazu použijeme posloupnost krychlí obsahujících x, které se smršťují k x, a maximální operátor $\widetilde{M}$ příslušný krychlím obsahujícím bod x, a tedy použijeme slabý typ (1,1) tohoto operátoru - viz. Poznámku 16 z kapitoly 6.

Poznámka 14. Z Věty 20 plyne Lebesgueova věta o hustotě:
Nechť M je měřitelná podmnožina $\mathbb{R}^n$, pak pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ platí:
Pro každou posloupnost $\{Q_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ krychlí se středem v x, které se smršťují k x je

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|Q_k(x) \cap M|}{|Q_k(x)|} = \chi_M(x).$$

Důkaz. Když M je měřitelná podmnožina $\mathbb{R}^n$, pak $\chi_M \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$, což nám stačí, protože limita je lokální pojem. Máme krychle $Q_k(x)$, o kterých nepředpokládáme, že jsou uzavřené, ale to není pro aplikaci Věty 20 potřeba, protože míra dané krychle a integrál přes danou krychli vyjdou nezávisle na tom, jak velkou část hranice uvažujeme. Ve Větě 20 uvažme $f = \chi_M$, pak z ní plyne, že pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\chi_M(x) = f(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|Q_k(x)|} \int_{Q_k(x)} f(y) \,\mathrm{d}y = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|Q_k(x)|} \int_{Q_k(x)} \chi_M(y) \,\mathrm{d}y$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|Q_k(x)|} |Q_k(x) \cap M| = \lim_{k\to\infty} \frac{|Q_k(x) \cap \chi_M|}{|Q_k(x)|},$$

což jsme chtěli dokázat. □

Kapitola 4

Aplikace vět Besicovitchova typu

4.1 Zobecněná Sardova věta

Definice 16. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, X je libovolná množina a na podmnožinách X je definovaná vnější míra ν. Nechť $f : G \to X$ je libovolná funkce. Bod $x \in G$ nazýváme *kritickým bodem* funkce f, pokud existuje posloupnost $\{Q_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ otevřených krychlí se středem v x smršťující se k x taková, že

$$\frac{\nu(f(Q_k(x)))}{|Q_k(x)|} \to 0,\ k \to \infty.$$

Věta 21. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, X je libovolná množina a na podmnožinách X je definovaná vnější míra ν. Nechť $f : G \to X$ je libovolná funkce. Nechť C značí množinu všech kritických bodů f, pak $\nu(f(C)) = 0$.*

Důkaz. Ukážeme, že pro každou $S \subset C$ omezenou platí $\nu(f(S)) = 0$. Existují totiž S_k, $k = 1, 2, \ldots$ omezené podmnožiny $C \subset G \subset \mathbb{R}^n$ tak, že $C = \cup_k S_k$. Pak platí

$$0 \le \nu(f(C)) = \nu(f(\cup_k S_k)) = \nu(\cup_k(f(S_k))) \le \sum_k \nu(f(S_k)) = 0.$$

Zvolme nyní $\varepsilon > 0$ a $O \subset \mathbb{R}^n$ otevřenou omezenou tak, že $S \subset O$. Ke každému bodu $x \in S \subset C$ najdeme otevřenou krychli $Q(x)$ se středem v x tak, že

$$\nu(f(Q(x))) \le \varepsilon|Q(x)| \text{ a } Q(x) \subset O.$$

Existence takové krychle plyne z definice kritického bodu a otevřenosti O.
Na systém $\{Q(x), x \in S\}$ lze aplikovat Věta 7 spolu s Poznámkou 9 (Besicovitchova věta pro otevřené krychle), tedy získáme posloupnost $\{Q_k\}_k$ splňující

$$S \subset \cup_k Q_k \subset O \tag{4.1}$$

$$\sum_k \chi_{Q_k}(y) \le \theta_n,\ \forall y \in \mathbb{R}^n \tag{4.2}$$

$$\nu(f(Q_k)) \le \varepsilon|Q_k|. \tag{4.3}$$

Pak máme

$$\nu(f(S)) \le \nu(f(\cup Q_k)) = \nu(\cup f(Q_k)) \le \sum_k \nu(f(Q_k))$$

$$\le \varepsilon \sum_k |Q_k| = \varepsilon \sum_k \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{Q_k}(y)\,\mathrm{d}y = \varepsilon \int_{\cup_k Q_k} (\sum_k \chi_{Q_k}(y))\,\mathrm{d}y$$

$$\le \varepsilon \int_{\cup_k Q_k} \theta_n \,\mathrm{d}y \le \varepsilon\theta_n |\cup Q_k| \le \varepsilon\theta_n |O|,$$

kde první nerovnost plyne z (4.1), rovnost plyne z rovnosti měřených množin, dále využíváme subaditivitu vnější míry, nerovnost (4.3), záměnu řady a integrálu (Lebesgueova věta pro řady s integrovatelnou majorantou pro částečné součty: $\chi_{(\cup_k Q_k)}$), pak nerovnost (4.2) a nakonec (4.1) a monotonii míry. Dostáváme tak tvrzení věty, protože ε bylo zvoleno libovolně a $\theta_n|O| < \infty$. $\square$

Poznámka 15 (Sardova věta). Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je třídy C^1. Nechť C značí množinu kritických bodů funkce f, tedy množinu bodů $x_0 \in \mathbb{R}^n$, ve kterých je $\det(\frac{\partial f}{\partial x}\big|_{x=x_0}) = 0$. Pak $|f(C)| = 0$.
Sardovu větu lze podle [6] dokázat pomocí Věty 21. Klasický důkaz je uveden v [8].

4.2 Aplikace na větu Vitaliova typu

Věta 6. *Nechť μ je míra na $\mathbb{R}^n$ definovaná na lebesgueovsky měřitelných množinách v $\mathbb{R}^n$. Nechť μ^* je vnější míra příslušná míře μ, tedy*

$$\forall P \subset \mathbb{R}^n : \ \mu^*(P) := \inf\{\mu(H) : P \subset H, H \text{ je } \mu\text{-měřitelná}\}.$$

Nechť pro každé $x \in A \subset \mathbb{R}^n$ je dána posloupnost $\{Q_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ uzavřených krychlí se středem v x, které se smršťují k x. Pak lze ze systému $\mathcal{T} := \{Q_k(x), x \in A, k \in \mathbb{N}\}$ vybrat posloupnost $\{S_k\}_k$ tak, že platí

$$\mu^*(A \setminus \cup_k S_k) = 0.$$

Důkaz. Pro každé $x \in A$ vezmeme nějakou krychli z $\{Q_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ s diametrem menším nebo rovným 1 a označíme ji $Q(x)$. Na A omezenou a systém $\{Q(x), x \in A\}$ aplikujeme Větu 7, a dostaneme tak posloupnost $\{Q_k\}_k$ krychlí z $\mathcal{T}$ splňující:

(i) $A \subset \cup_k Q_k$,

(ii) $\sum_k \chi_{Q_k}(y) \le \theta$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$,

(iii) $\{Q_k\}_k$ lze rozdělit do ξ disjunktních posloupností,

kde konstanty θ, ξ závisí jen na dimenzi.
Z (iii) plyne, že alespoň pro jednu posloupnost z $\{Q_k^1\}, \dots, \{Q_k^\xi\}$, bez újmy na obecnosti nechť je to $\{Q_k^1\}$, platí

$$\mu^*(A \cap (\cup_k Q_k^1)) \ge \frac{1}{\xi}\,\mu^*(A) \quad ,$$

jinak by totiž pro každé $j \in \{1, \dots, \xi\}$ platilo $\mu^*(A \cap (\cup_k Q_k^j)) < \frac{1}{\xi}\,\mu^*(A)$, a když to sečteme, tak dostaneme $\sum_{j=1}^{\xi} \mu^*(A \cap (\cup_k Q_k^j)) < \mu^*(A)$. Potom máme

$$\begin{aligned}\mu^*(A) = \mu^*(A \cap A) &\leq \mu^*(A \cap (\cup_{k,j} Q_k^j))\\ &= \mu^*(\cup_{j=1}^{\xi}(A \cap (\cup_k Q_k^j)))\\ &\leq \sum_{j=1}^{\xi} \mu^*(A \cap (\cup_k Q_k^j))\\ &< \mu^*(A),\end{aligned}$$

kde první řádek plyne z (i) a z monotonie vnější míry, dále jen rovnost množin, subaditivita vnější míry a předpokládaná nerovnost. Odtud máme $\mu^*(A) < \mu^*(A)$, což dává spor.

Z $\{Q_k^1\}$ pak lze vybrat konečnou posloupnost, označme ji $\{S_k\}_{k=1}^{h_1}$, takovou, že

$$\mu^*(A \cap (\cup_{k=1}^{h_1} S_k)) > \frac{1}{2\xi}\,\mu^*(A). \tag{4.4}$$

Je-li $\{Q_k^1\}$ konečná, tak ji můžeme vzít celou, jinak máme

$$\begin{aligned}\mu^*(A \cap (\cup_{k=1}^{h_1} S_k)) &\geq \mu^*(A \cap (\cup_{k=1}^{\infty} S_k)) - \mu^*(A \cap (\cup_{k=h_1+1}^{\infty} S_k))\\ &\geq \frac{1}{\xi}\,\mu^*(A) - \mu^*(A \cap (\cup_{k=h_1+1}^{\infty} S_k)),\end{aligned}$$

a to chceme $> \frac{1}{2\xi}\,\mu^*(A)$. Tedy stačí ukázat, že existuje $h_1 \in \mathbb{N}$, že $\mu^*(A \cap (\cup_{k=h_1+1}^{\infty} S_k)) < \frac{1}{2\xi}\mu^*(A)$. Máme

$$\mu^*(A \cap (\cup_{k=1}^{\infty} S_k)) = \mu^*(\cup_{k=1}^{\infty}(A \cap S_k)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap S_k)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(M \cap S_k) = \mu(\cup_{k=1}^{\infty}(M \cap S_k)) \leq \mu(M) < \infty,$$

kde M je μ-měřitelná množina splňující $A \subset M$ a $\mu(M) < \infty$. Odtud máme $\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap S_k) < \infty$ a zbytek konvergentní řady lze udělat libovolně malý, tedy k danému $\varepsilon := \frac{\mu^*(A)}{2\xi} > 0$ existuje $h_1 \in \mathbb{N}$, že $\sum_{k=h_1+1}^{\infty} \mu^*(A \cap S_k) < \varepsilon$, což nám dává požadovanou nerovnost (4.4).

K libovolnému pevně zvolenému $\varepsilon > 0$ uvažme $\mu-$měřitelnou množinu M, že $A \subset M$ a $\mu^*(A) + \varepsilon > \mu(M)$. Pak máme:

$$\mu(M \cap (\cup_{k=1}^{h_1} S_k)) \geq \mu^*(A \cap (\cup_{k=1}^{h_1} S_k)) > \frac{1}{2\xi}\,\mu^*(A),$$

to plyne z volby M, z monotonie míry a z výběru $\{S_k\}_{k=1}^{h_1}$, dále

$$\begin{aligned}\mu^*(A) + \varepsilon - \mu(M \backslash (\cup_{k=1}^{h_1} S_k)) &> \mu(M) - \mu(M \backslash (\cup_{k=1}^{h_1} S_k))\\ &= \mu(M \cap (\cup_{k=1}^{h_1} S_k)) > \frac{1}{2\xi}\,\mu^*(A),\end{aligned}$$

což máme z volby M, z vlastností míry a z předchozí nerovnosti. Snadnou úpravou máme

$$\mu(M\setminus(\cup_{k=1}^{h_1} S_k)) < (\mu^*(A) + \varepsilon) - \frac{1}{2\xi}\mu^*(A).$$

Celkem dostáváme

$$\mu^*(A\setminus(\cup_{k=1}^{h_1} S_k)) \leq \mu(M\setminus(\cup_{k=1}^{h_1} S_k)) < (1 - \frac{1}{2\xi})\mu^*(A) + \varepsilon,$$

což platí pro každé $\varepsilon > 0$. Odtud máme

$$\mu^*(A\setminus(\cup_{k=1}^{h_1} S_k)) \leq (1 - \frac{1}{2\xi})\mu^*(A).$$

Tedy jsme získali konečný systém $\{S_k\}_{k=1}^{h_1}$ splňující pro $\alpha := 1 - \frac{1}{2\xi}$ nerovnost

$$\mu^*(A\setminus(\cup_{k=1}^{h_1} S_k)) \leq \alpha\mu^*(A). \tag{4.5}$$

Je-li $A_1 := A\setminus(\cup_{k=1}^{h_1} S_k) = \emptyset$, tak výběr posloupnosti $\{S_k\}$ končí. Jinak pro každé $x \in A_1$ vezmeme krychli $Q(x) \in \mathcal{T}$ s $\delta(Q(x)) \leq 1$ takovou, že $Q(x) \cap (\cup_{k=1}^{h_1} S_k) = \emptyset$. S množinou A_1 postupujeme podobně jako s A, dostaneme tak $\{S_k\}_{k=h_1+1}^{h_2}$, která spolu s $\{S_k\}_{k=1}^{h_1}$ splňuje

$$\mu^*(A\setminus(\cup_{k=1}^{h_2} S_k)) = \mu^*(A_1\setminus(\cup_{k=h_1+1}^{h_2} S_k)) \leq \alpha\mu^*(A_1) \leq \alpha^2\mu^*(A),$$

kde první rovnost plyne z rovnosti množin ($x \in A\setminus(\cup_{k=1}^{h_2} S_k) \Leftrightarrow (x \in A, x \notin \cup_{k=1}^{h_2} S_k) \Leftrightarrow (x \in A\setminus(\cup_{k=1}^{h_1} S_k) = A_1, x \notin \cup_{k=h_1+1}^{h_2} S_k) \Leftrightarrow x \in A_1\setminus(\cup_{k=h_1+1}^{h_2} S_k)$), následující nerovnost se získá stejným postupem jako pro množinu A a poslední nerovnost je z (4.5).
Takto postupně dostaneme posloupnost $\{S_k\}$ vybranou ze systému $\mathcal{T}$ splňující $\mu^*(A\setminus(\cup S_k)) = 0$.
Skutečně: pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $N \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\mu^*(A\setminus(\cup_{k=1}^{h_N} S_k)) \leq \alpha^N \mu^*(A) = \alpha^N C < \varepsilon,$$

kde k danému $\varepsilon > 0$ volíme $N \in \mathbb{N}$ tak, aby $\alpha^N C < \varepsilon$, kde $C := \mu^*(A) < \infty$. To jde, protože $C < \infty$ a z $\xi \geq 1$ plyne $0 < \alpha < 1$, což dává $\lim_{N\to\infty} \alpha^N = 0$.
Pro A neomezenou aplikujeme předchozí část důkazu na $A \cap Q_i$ pro každou uzavřenou krychli $Q_i \subset \mathbb{R}^n$ s hranou délky 1 a s vrcholy s celočíselnými souřadnicemi. Získáme tak posloupnosti $\{S_k^i\}_k$, $i = 1, 2, \ldots$. Systém $\{S_k^i\}_{k,i}$ jde uspořádat do posloupnosti a splňuje

$$\mu^*(A\setminus(\cup_{i,k} S_k^i)) = \mu^*(\cup_i((A\cap Q_i)\setminus(\cup_k S_k^i))) \leq \sum_i \mu^*((A\cap Q_i)\setminus(\cup_k S_k^i)) = \sum_i 0 = 0.$$

□

4.3 Aplikace na větu Whitneyova typu

Věta 10. *Nechť G je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$ s neprázdnou hranicí ∂G. Pak existuje posloupnost $\{Q_k\}_k$ otevřených krychlí taková, že platí $G = \cup_k Q_k$ a*

(i) $\mathrm{dist}(Q_k, \partial G) = 3\delta(Q_k)$,

(ii) $\sum_k \chi_{Q_k}(z) \leq \alpha_n$, *pro každé* $z \in \mathbb{R}^n$, *kde konstanta* α_n, *závisí pouze na dimenzi.*

Důkaz. **(i)** Pokud je G omezená, tak ze systému všech otevřených krychlí se středem v x, které splňují $\mathrm{dist}(Q(x), \partial G) = 3\delta(Q(x))$, vybereme požadované krychle Q_k pomocí Věty 7, Poznámky 9, a položíme $\alpha_n := \theta_n$.

(ii) Pokud je G neomezená, tak pro pevné $k \in \mathbb{Z}$ položme $H_k := \{x \in G, 2^k < \mathrm{dist}(x, \partial G) \leq 2^{k+1}\}$ a pro každé $x \in H_k$ vezmeme $Q(x)$ otevřenou krychli se středem v x, že $\mathrm{dist}(Q(x), \partial G) = 3\delta(Q(x))$. Tedy máme

$$\delta(Q(x)) = \frac{\mathrm{dist}(Q(x), \partial G)}{3} \leq \frac{\mathrm{dist}(x, \partial G)}{3} \leq \frac{2^{k+1}}{3}.$$

Pro každé $k \in \mathbb{Z}$ lze na systém $\{Q(x), x \in H_k\}$, kde krychle $Q(x)$ jsou vybrány výše popsaným způsobem, díky Poznámce 8 aplikovat Věta 7, čímž obdržíme $\{Q_j^k\}_{j\geq 1}$ splňující

$$H_k \subset \cup_{j\geq 1} Q_j^k \quad \text{a} \quad \sum_{j\geq 1} \chi_{Q_j^k}(z) \leq \theta_n, \ \forall z \in H_k,$$

kde θ_n závisí jen na $n \in \mathbb{N}$.
Nyní ukážeme, že množiny z $\{Q_j^k\}_{j\geq 1}$ pokrývající H_k a množiny z $\{Q_j^{k+4}\}_{j\geq 1}$ pokrývající H_{k+4} jsou disjunktní. Pro spor předpokládejme, že $z \in Q_j^k \cap Q_s^{k+4}$. Označme a střed krychle Q_j^k a b střed Q_s^{k+4}. Protože $z \in Q_j^k$, tak platí

$$\mathrm{dist}(z, \partial G) \leq \mathrm{dist}(z, a) + \mathrm{dist}(a, \partial G) \leq \delta(Q_j^k) + 2^{k+1} \leq \frac{2^{k+1}}{3} + 2^{k+1}.$$

Dále $z \in Q_j^{k+4}$, tedy máme

$$\mathrm{dist}(z, \partial G) \geq \mathrm{dist}(b, \partial G) - \mathrm{dist}(b, z) > 2^{k+4} - \frac{2^{k+4+1}}{3}.$$

Oba řetězce nerovností výše plynou z trojúhelníkové nerovnosti, z definice H_k a z nerovnosti $\delta(Q(x)) \leq \frac{2^{k+1}}{3}$, která platí pro $Q(x)$ příslušnou prvku $x \in H_k$. Tedy

$$2^{k+4} - \frac{2^{k+4+1}}{3} < \mathrm{dist}(z, \partial G) \leq \frac{2^{k+1}}{3} + 2^{k+1},$$

z čehož snadnou úpravou dostaneme nerovnost $16 < 8$, což je spor. Tedy $\{Q_j^k, k \in \mathbb{Z}, j = 1, 2, \dots\}$ splňuje:

- $G = \cup_{k\in\mathbb{Z}} H_k \subset \cup_{k\in\mathbb{Z}}(\cup_{j\geq 1} Q_j^k)$ a $Q_j^k \subset G$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall j = 1, 2, \dots$, tedy máme $G = \cup_{j,k} Q_j^k$,
- $\mathrm{dist}(Q_k, \partial G) = 3\delta(Q_k)$ přímo z konstrukce,
- $\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{Q_k}(z) \leq 7\theta_n$, protože každý bod $z \in H_{k_0}$ může být nejvýše v θ_n krychlích každého ze systémů $\{Q_{k_0-3}^j\}_{j\geq 1}$, $\{Q_{k_0-2}^j\}_{j\geq 1}$, …, $\{Q_{k_0+3}^j\}_{j\geq 1}$, tedy stačí položit $\alpha_n := 7\theta_n$ a důkaz je hotov.

□

Kapitola 5

Aplikace vět Whitneyova typu

5.1 Calderónovo-Zygmundovo lemma

Věta 22 (Calderónovo-Zygmundovo lemma)**.** *Nechť $f \in L(\mathbb{R}^n)$, $f \geq 0$, $c > 0$. Pak existuje spočetný systém uzavřených krychlí $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, jejichž vnitřky jsou po dvou disjunktní a platí*

(i) $c < \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} f \leq 2^n c$, *pro každé* $k \in \mathbb{N}$,

(ii) $f(x) \leq c$ *skoro všude v* $\mathbb{R}^n \backslash (\cup_k Q_k)$.

Důkaz. Uvažme systém dyadických krychlí z Definice 15, potom podle Poznámky 13 pro libovolnou posloupnost dyadických krychlí $\{Q_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ obsahujících x, které se smršťují k x, a pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{|Q_k(x)|} \int_{Q_k(x)} f(y)\,\mathrm{d}y = f(x).$$

Položme $A := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > c\}$, pak pro skoro všechna $x \in A \subset \mathbb{R}^n$ a pro libovolnou posloupnost $\{Q_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ dyadických krychlí obsahujících x, smršťující se k x, platí

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{|Q_k(x)|} \int_{Q_k(x)} f(y)\,\mathrm{d}y = f(x) > c,$$

tedy z definice limity je

$$\frac{1}{|Q_k(x)|} \int_{Q_k(x)} f(y)\,\mathrm{d}y > c, \tag{5.1}$$

pro dostatečně velká $k \in \mathbb{N}$.
Buď $A^* \subset A$ taková, že (5.1) nastává pro každé $x \in A^*$. Dále platí:

$$\frac{1}{|Q_k(x)|} \int_{Q_k(x)} f \leq \frac{||f||_1}{|Q_k(x)|} < c,$$

pro dost velké $|Q_k(x)|$. Tedy když uvážíme všechny dyadické krychle obsahující bod x, tak mezi nimi existuje $Q^*(x)$ taková, že platí

$$\frac{1}{|Q^*(x)|} \int_{Q^*(x)} f(y)\,\mathrm{d}y \leq c \tag{5.2}$$

a že dyadická krychle $Q(x)$ obsahující x, která má poloviční délku hrany než $Q^*(x)$ splňuje

$$\frac{1}{|Q(x)|}\int_{Q(x)} f(y)\,\mathrm{d}y > c, \tag{5.3}$$

odkud snadno dostaneme $|Q(x)| < \frac{1}{c}\int_{Q(x)} f(y)\,\mathrm{d}y \leq \frac{||f||_1}{c}$. Pro každé $x \in A^*$ najdeme takto krychli $Q(x)$. Všechny krychle $Q(x)$, $x \in A^*$, mají délku hany omezenou stejnou konstantou, neboť $|Q(x)| < \frac{1}{c}\,||f||_1$.
Ze systému $\{Q(x), x \in A^*\}$ vybereme nějakou z největších krychlí, označíme ji Q_1 a ze systému odebereme všechny krychle, které jsou v Q_1 obsaženy. Ze zbylého systému vybereme opět jednu z největších krychlí, označíme ji Q_2 a ze systému odebereme ty krychle, které jsou v ní obsaženy. Takto postupujeme dále. Získáme posloupnost $\{Q_k\}_k$, která splňuje následující: je-li Q_k^* množina $Q^*(x)$ příslušící podle předchozího ke Q_k, pak

$$c < \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} f(y)\,\mathrm{d}y = \frac{2^n}{|Q_k^*|}\int_{Q_k} f(y)\,\mathrm{d}y \leq \frac{2^n}{|Q_k^*|}\int_{Q_k^*} f(y)\,\mathrm{d}y \leq 2^n c.$$

První a poslední nerovnost plyne z (5.2) a (5.3), rovnost máme z poměru délek hran krychlí $Q^*(x)$ a $Q(x)$, protože když $Q(x)$ má poloviční délku hrany než $Q^*(x)$, tak $|Q(x)| = \frac{1}{2^n}|Q^*(x)|$. A zbývající nerovnost plyne z vlastností dyadických krychlí ($Q(x) \subset Q^*(x)$) a z nezápornosti f.
Protože $\{Q(x), x \in A^*\}$ pokrývá A^*, tak i $\{Q_k\}$ pokrývá A^*, tj. $A^* \subset \cup Q_k$. Už víme, že $A^* \subset A$. Dále A je množina právě těch bodů v $\mathbb{R}^n$, pro které je $f(x) > c$. Když $x \in \mathbb{R}^n \backslash (\cup_k Q_k)$, tak $x \in \mathbb{R}^n \backslash A^* = (\mathbb{R}^n \backslash A) \cup (A \backslash A^*)$, přičemž v první množině platí $f(x) \geq c$ a druhá množina má míru nula. Celkem dostáváme, že pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^n \backslash (\cup_k Q_k)$ platí $f(x) \geq c$. $\square$

Kapitola 6

Aplikace pokrývacích vět na obecný maximální operátor

6.1 Definice a základní vlastnosti maximálního operátoru

Definice 17. Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ označme $\mathcal{B}(x)$ systém všech omezených měřitelných množin kladné míry obsahujících x takových, že existuje posloupnost $\{R_k\}_{k=1}^{\infty}$ v $\mathcal{B}(x)$, že $\lim_{k\to\infty} \delta(R_k) = 0$. Systém $\mathcal{B} := \cup_{x\in\mathbb{R}^n}\mathcal{B}(x)$ budeme nazývat *diferenciální báze.*

Příklad. Pokud je $\mathcal{B}(x)$ systém všech otevřených krychlí obsahujících x, pak $\mathcal{B}$ je diferenciální báze.
Pokud je $\mathcal{B}(x)$ systém všech otevřených euklidovských koulí obsahujících x, pak $\mathcal{B}$ je diferenciální báze.
Pokud je $\mathcal{B}(x)$ systém všech otevřených omezených intervalů obsahujících x, pak $\mathcal{B}$ je diferenciální báze.

Definice 18. Pro $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$, diferenciální bázi $\mathcal{B}$ a $x \in \mathbb{R}^n$ definujeme

$$M^{\mathcal{B}} f(x) := \sup\{\frac{1}{|R|}\int_R |f(y)|\,\mathrm{d}y,\, R \in \mathcal{B}(x)\}.$$

Operátor $M^{\mathcal{B}}$ nazveme *maximální operátor příslušný bázi* $\mathcal{B}$.

Operátor $M^{\mathcal{B}}$ zřejmě splňuje:

- $\forall f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ a $\forall x \in \mathbb{R}^n$ platí $M^{\mathcal{B}} f(x) \geq 0$,
- $\forall f_1, f_2 \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ a $\forall x \in \mathbb{R}^n$ platí $M(^{\mathcal{B}} f_1 + f_2)(x) \leq M^{\mathcal{B}} f_1(x) + M^{\mathcal{B}} f_2(x)$,
- $\forall f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ a $\forall x \in \mathbb{R}^n$ platí $M^{\mathcal{B}}(\lambda f)(x) = |\lambda| M^{\mathcal{B}} f(x)$.
- $||M^{\mathcal{B}} f||_\infty \leq ||f||_\infty$, tedy je silného typu (∞, ∞).

6.2 Slabý typ (1,1) maximálního operátoru

Definice 19. Řekneme, že diferenciální báze $\mathcal{B}$ splňuje *Besicovitchovu podmínku*, jestliže platí:
Když je daná omezená množina A v $\mathbb{R}^n$ a pro každý bod $x \in A$ je daná množina $R(x) \in \mathcal{B}(x)$, pak lze z $\{R(x), x \in A\}$ vybrat posloupnost $\{R_k\}_k$ (spočetnou nebo konečnou) tak, že platí:

(i) $A \subset \cup_k R_k$,

(ii) Každý bod $\mathbb{R}^n$ je nejvýše v θ množinách posloupnosti $\{R_k\}_k$, tedy $\forall z \in \mathbb{R}^n : \sum_k \chi_{R_k}(z) \leq \theta$.

(iii) Posloupnost $\{R_k\}_k$ lze rozdělit do ξ skupin disjunktních množin.

Konstanty θ a ξ závisí pouze na $\mathcal{B}$.

Příklad. Besicovitchovu podmínku splňuje například diferenciální báze $\cup_{x\in\mathbb{R}^n}\mathcal{Q}(x)$, kde $\mathcal{Q}(x)$ značí systém všech uzavřených krychlí se středem v x (podle Věty 7). Podle Poznámky 9 lze uvažovat i krychle otevřené.

Příklad. Besicovitchovu podmínku však nesplňuje například diferenciální báze $\cup_{x\in\mathbb{R}^n}\mathcal{Q}(x)$, kde $\mathcal{Q}(x)$ značí systém všech uzavřených krychlí obsahujících x. Stačí uvážit $A := (0,1] \subset \mathbb{R}$, kde pro každé $x \in A$ je dáno $Q(x) := [x, x+1]$, pak nelze splnit zároveň (i) a (iii) z definice Besicovitchovy podmínky.

Věta 23. *Nechť $\mathcal{B}$ je diferenciální báze splňující Besicovitchovu podmínku, pak pro každou $f \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ a pro každé $\lambda > 0$ platí*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M^{\mathcal{B}}f(x) > \lambda\}|_e \leq \frac{\theta}{\lambda}||f||_1.$$

Důkaz. Buď $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ a $\lambda > 0$, označme $A := \{x \in \mathbb{R}^n : M^{\mathcal{B}}f(x) > \lambda\}$. Nechť $K \subset \mathbb{R}^n$ je omezená měřitelná množina. Pro každé $x \in A \cap K$ vezměme nějakou množinu $Q(x)$ z $\mathcal{B}(x)$ tak, že $\frac{1}{|Q(x)|}\int_{Q(x)}|f(y)|\,\mathrm{d}y > \lambda$. Na systém $\{Q(x)\}_{x\in A\cap K}$ použijeme výše uvedenou Besicovitchovu podmínku báze $\mathcal{B}$. Dostaneme tedy posloupnost $\{Q_k\}_k$, že $(A \cap K) \subset \cup Q_k$ a $\sum \chi_{Q_k} \leq \theta$. Tedy máme

$$|A \cap K|_e \leq |\cup_k Q_k| \leq \sum_k |Q_k| < \frac{1}{\lambda}\sum_k \int_{Q_k} |f(y)|\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int_{\cup_k Q_k} |f(y)| \sum_k \chi_{Q_k}(y)\,\mathrm{d}y \leq \frac{\theta}{\lambda}\int_{\cup Q_k}|f(y)|\,\mathrm{d}y = \frac{\theta}{\lambda}||f||_1,$$

přičemž tento odhad nezávisí na K. Tedy $|A|_e \leq \frac{\theta}{\lambda}||f||_1$. $\square$

Poznámka 16. Pokud je $\mathcal{B}(x)$ systém všech uzavřených krychlí obsahujících x, pak $\mathcal{B}$ je diferenciální báze, ale nesplňuje Besicovitchovu podmínku. Přesto je maximální operátor příslušný této bázi slabého typu (1,1).
Skutečně: platí totiž

$$Mf(x) \leq \tilde{M}f(x) \leq 2^n Mf(x),$$

kde M značí Hardyův-Littlewoodův maximální operátor (příslušný centrovaným krychlím) a $\tilde{M}$ je maximální operátor příslušný necentrovaným krychlím. První nerovnost je zřejmá, neboť vlevo je supremum přes menší množinu krychlí. Pro druhou nerovnost stačí k libovolné krychli Q obsahující bod x vzít krychli Q^* se středem x a dvojnásobnou délkou hrany než má Q, pak platí

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f| = \frac{2^n}{2^n|Q|}\int_Q |f| \leq \frac{2^n}{|Q^*|}\int_{Q^*} |f|.$$

Celkem dostáváme, s použitím slabého typu pro M (Věta 16), že

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \tilde{M}f(x) > \lambda\}| \leq |\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \frac{\lambda}{2^n}\}| \leq \frac{c}{\lambda}||f||_1.$$

Poznámka 17. Odhad z předchozí věty a poznámky lze opět vylepšit na

$$|\{M^{\mathcal{B}}f > \lambda\}|_e \leq \frac{C}{\lambda}\int_{|f|>\frac{\lambda}{2}} |f|,$$

pokud je $\mathcal{B}$ diferenciální báze splňující Besicovitchovu podmínku nebo pokud je to systém necentrovaných krychlí. Konstanta C závisí pouze na dimenzi. Skutečně, stačí zadefinovat

$$f_1(x) := \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{když } |f(x)| > \frac{\lambda}{2} \\ f(x) & \text{když } |f(x)| \leq \frac{\lambda}{2} \end{array} \right\}$$

a $f_2(x)$ definujeme tak, aby $f(x) = f_2(x) + f_1(x)$. Potom $M^{\mathcal{B}}f(x) \leq M^{\mathcal{B}}f_2(x) + M^{\mathcal{B}}f_1(x)$, tedy $\{M^{\mathcal{B}}f > \lambda\} \subset \{M^{\mathcal{B}}f_2 > \frac{\lambda}{2}\} \cup \{M^{\mathcal{B}}f_1 > \frac{\lambda}{2}\}$, přičemž $\{M^{\mathcal{B}}f_1 > \frac{\lambda}{2}\} = \emptyset$. Dostáváme

$$|\{M^{\mathcal{B}}f > \lambda\}|_e \leq |\{M^{\mathcal{B}}f_2 > \frac{\lambda}{2}\}|_e \leq \frac{C}{\lambda}\int |f_2| = \frac{C}{\lambda}\int_{|f|>\frac{\lambda}{2}} |f|.$$

6.3 Opačná nerovnost pro maximální operátor

Věta 24. *Nechť $\mathcal{B}$ je diferenciální báze taková, že $\mathcal{B}(x)$ je systém všech krychlí obsahujících x a $\tilde{M}$ je maximální operátor příslušný této bázi. Pak pro každou funkci $f \in L(\mathbb{R}^n)$ a pro každé $\lambda > 0$ platí*

$$\frac{c_n^*}{\lambda}\int_{\{\tilde{M}f>\lambda\}} |f(y)|\,\mathrm{d}y \leq |\{x \in \mathbb{R}^n : \tilde{M}f(x) > \lambda\}| \leq \frac{c_n}{\lambda}\int_{\{|f|>\frac{\lambda}{2}\}} |f(y)|\,\mathrm{d}y,$$

kde konstanty c_n a c_n^* závisí pouze na n.

Důkaz. Pro důkaz první nerovnosti označme $A := \{x \in \mathbb{R}^n : \tilde{M}f(x) > \lambda\}$, pak množina A je podle Poznámky 2 otevřená. Pro $A = \emptyset$ nerovnost zřejmě platí, dále $A \neq \mathbb{R}^n$, protože $f \in L(\mathbb{R}^n)$. Tedy můžeme na A aplikovat Větu 9, čímž dostaneme posloupnost uzavřených krychlí $\{Q_k\}_k$, které mají po dvou disjunktní vnitřky, $A = \cup_k Q_k$ a $1 \leq \frac{\mathrm{dist}(Q_k, \mathbb{R}^n \setminus A)}{\delta(Q_k)} \leq 4$. Označme Q_k^* krychli se středem jako Q_k a s délkou hrany a_n-krát větší. Pak vhodnou volbou a_n, které závisí jen na dimenzi, dostaneme

$$|Q_k^*| \geq \frac{1}{\lambda}\int_{Q_k^*} |f(y)|\,\mathrm{d}y.$$

Díky vlastnosti $\operatorname{dist}(Q_k, \partial A) \leq 4\delta(Q_k)$ posloupnosti $\{Q_k\}_k$ stačí volit $a_n = 10\sqrt{n}$, pak existuje $x \in Q_k^* \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)$, speciálně $x \notin A$, odkud máme $\tilde{M}f(x) \leq \lambda$, tedy pro každou krychli Q_k^* příslušnou ke Q_k platí $\frac{1}{|Q_k^*|} \int_{Q_k^*} |f(y)| \,\mathrm{d}y \leq \lambda$, protože Q_k^* patří do $\mathcal{B}$. Označme $c_n^* := (\frac{1}{a_n})^n$, pak

$$|\{\tilde{M}f > \lambda\}| = |A| = |\cup_k Q_k| = \sum_k |Q_k| = \left(\frac{1}{a_n}\right)^n \sum_k |Q_k^*| \geq c_n^* \frac{1}{\lambda} \sum_k \int_{Q_k^*} |f|$$

$$\geq \frac{c_n^*}{\lambda} \sum_k \int_{Q_k} |f| = \frac{c_n^*}{\lambda} \int_A |f| = \frac{c_n^*}{\lambda} \int_{\{\tilde{M}f > \lambda\}} |f|.$$

Druhou nerovnost jsme již dokázali v Poznámce 17. $\square$

Kapitola 7

Pokrývací věty a nerovnosti mezi operátory

7.1 Operátory $\tilde{M}$ a T

Zde se budeme zabývat nerovnostmi mezi maximálním operátorem $\tilde{M}$, v jehož definici uvažujeme necentrované krychle, a maximálním singulárním integrálním operátorem T, který je definovaný pomocí Calderónova-Zygmundova jádra, viz. Definice 6 a 12. Dokážeme, že pro $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ a $t > 0$ platí

$$(Tf)^*_w(t) \leq C(\tilde{M}f)^*_w(\frac{t}{2}) + C\int_t^\infty (\tilde{M}f)^*_w(s)\,\frac{\mathrm{d}s}{s},$$

$$(Tf)^{**}_w(t) \leq (Tf)^*_w(t) + C(\tilde{M}f)^{**}_w(t),$$

kde $C > 0$ nezávisí na f ani na t.

Lemma 1. *Nechť μ je regulární Borelovská míra na $\mathbb{R}^n$, $f, f_n, n = 1, 2, \dots$ jsou μ-měřitelné funkce a f_n konvergují stejnoměrně k f na kompaktních podmnožinách $\mathbb{R}^n$. Jestliže $(f_n)^*_\mu(t) \leq G(t)$ pro $t \in (0, \infty)$, pak $f^*_\mu \leq G(t)$ pro $t \in (0, \infty)$.*

Důkaz. Buď $t > 0$ pevné, $\lambda > G(t)$ (bez újmy na obecnosti je $G(t) < \infty$, jinak není co dokazovat) a $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktní, pak pro $\varepsilon := \lambda - G(t)$ nalezneme ze stejnoměrné konvergence n_0, že pro každé $n \geq n_0$ a každé $x \in K$ platí $|f(x) - f_n(x)| < \lambda - G(t)$. Odtud použitím $|f(x)| - |f_n(x)| \leq |f(x) - f_n(x)|$ dostáváme $|f(x)| < |f_n(x)| + \lambda - G(t)$. Tedy máme

$$\mu(\{x \in K : |f(x)| > \lambda\}) \leq \mu(\{x \in K : |f_n(x)| > G(t)\})$$
$$\leq \mu(\{x \in K : |f_n(x)| > (f_n)^*_\mu(t)\}) \leq t,$$

kde první nerovnost dostáváme z $|f(x)| < |f_n(x)| + \lambda - G(t) < |f_n(x)| + |f(x)| - G(t)$, druhou nerovnost dostáváme z předpokladu $(f_n)^*_\mu(t) \leq G(t)$ a poslední nerovnost plyne z definice přerovnání. Z regularity míry dostáváme $\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}) \leq t$ pro každé $\lambda > G(t)$, odkud z definice přerovnání plyne $f^*_\mu(t) \leq G(t)$, pro každé $t > 0$. □

Lemma 2. *Nechť μ je zdvojovací míra. Nechť existuje $a > 0$ tak, že pro $f \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ platí $\int_a^\infty (\tilde{M}f)^*_\mu(s)\frac{1}{s}\,\mathrm{d}s < \infty$, pak*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|(1 + |x|)^{-n}\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Důkaz. Lze sestrojit posloupnost po dvou disjunktních krychlí $\{Q_k\}_k$, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ je $Q_1 \subset 2Q_k$, odkud z definice zdvojovací míry plyne $\mu(Q_k) \geq C > 0$ $(0 < \mu(Q_1) \leq \mu(2Q_k) \leq c\mu(Q_k))$. Tedy lze vzít dostatečně velkou krychli $Q \subset \mathbb{R}^n$ se středem v počátku tak, aby $\mu(Q) \geq 2a$, stačí aby Q obsahovala dost krychlí z naší posloupnosti $\{Q_k\}_k$. Pak

$$\int_Q |f(x)|(1+|x|)^{-n}\,\mathrm{d}x \leq \int_Q |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq |Q| \inf\{\tilde{M}f(x), x \in Q\} \leq |Q|(\tilde{M}f)^*_\mu(2a),$$

kde první nerovnost je zřejmá, druhou máme z $\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \tilde{M}f(x)$, $\forall x \in Q$ a poslední nerovnost plyne z definice přerovnání a z $\mu(Q) \geq 2a$. Dále

$$\int_a^{2a} (\tilde{M}f)^*_\mu(t)\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \geq (\tilde{M}f)^*_\mu(2a)\int_a^{2a}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = (\tilde{M}f)^*_\mu(2a)\ln(2),$$

celkem tedy

$$\int_Q |f(x)|(1+|x|)^{-n}\,\mathrm{d}x \leq C|Q|\int_a^{2a}(\tilde{M}f)^*_\mu(t)\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t. \tag{7.1}$$

Nyní označme $t_k := \mu(2^kQ)$, $E(k) := 2^kQ\backslash 2^{k-1}Q$, pak $t_k \leq C_0\,\mu(E(k)) = C_0(t_k - t_{k-1})$, skutečně: krychle 2^kQ je pokryta trojnásobky maximálních disjunktních krychlí $\tilde{Q} \subset E(k)$, odkud máme

$$\begin{aligned} t_k = \mu(2^kQ) &\leq \mu(\cup 3\tilde{Q}) = \mu(\cup 3.2^{k-2}Q) \\ &\leq \sum \mu(4.2^{k-2}Q) \leq c^2 \sum \mu(2^{k-2}Q) = c^2\mu(E(k)), \end{aligned}$$

tedy stačí vzít $C_0 := c^2$. Potom

$$\begin{aligned} \int_{E(k)} |f(x)|(1+|x|)^{-n}\,\mathrm{d}x &\leq C_n|2^kQ|^{-1}\int_{2^kQ}|f(x)|\,\mathrm{d}x \leq C_n \inf\{\tilde{M}f(x) : x \in 2^kQ\} \\ &\leq C_n(\tilde{M}f)^*_\mu(t_k)\frac{t_k}{t_k} \leq C_nC_0(\tilde{M}f)^*_\mu(t_k)\frac{t_k - t_{k-1}}{t_k}, \end{aligned}$$

což spolu s odhadem

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k}(\tilde{M}f)^*_\mu(t)\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \geq (\tilde{M}f)^*_\mu(t_k)\frac{1}{t_k}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\mathrm{d}t = (\tilde{M}f)^*_\mu(t_k)\frac{t_k - t_{k-1}}{t_k}$$

dává

$$\int_{E(k)} |f(x)|(1+|x|)^{-n}\,\mathrm{d}x \leq C_nC_0\int_{t_{k-1}}^{t_k}(\tilde{M}f)^*_\mu(t)\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t. \tag{7.2}$$

Nyní použitím nerovností (7.1) a (7.2) a z volby $E(k)$ dostáváme

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|(1+|x|)^{-n}\,\mathrm{d}x &= \int_Q |f(x)|(1+|x|)^{-n}\,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{E(k)}|f(x)|(1+|x|)^{-n}\,\mathrm{d}x \\ &\leq C|Q|\int_a^{2a}(\tilde{M}f)^*_\mu(t)\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + C_nC_0\sum_{k=1}^{\infty}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(\tilde{M}f)^*_\mu(t)\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\le C|Q| \int_a^{2a} (\tilde{M}f)^*_\mu(t)\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + C_n C_0 \int_{t_0}^{\infty} (\tilde{M}f)^*_\mu(t)\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$\le c(|Q|+1)\int_a^{\infty} (\tilde{M}f)^*_\mu(t)\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t,$$

odkud díky předpokladu $\int_a^\infty (\tilde{M}f)^*_\mu(s)\frac{1}{s}\,\mathrm{d}s < \infty$ dostáváme konečnost integrálu $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|(1+|x|)^{-n}\,\mathrm{d}x$. □

Poznámka 18 (Slabý typ (1,1) operátoru T). Podle [5] str. 289−307 platí následující tvrzení:

(a) *Cotlarova nerovnost:* Nechť $A_1, A_2, A_3 \in (0,\infty)$ a K definované na $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ splňuje

- $|K(x)| \le \frac{A_1}{|x|^n}$, $x \neq 0$,
- $|K(x-y) - K(x)| \le A_2 \frac{|y|}{|x|^{n+1}}$, $0 < 2|y| \le |x|$,
- $\sup_{0<r<R<\infty} |\int_{\{r<|x|<R\}} K(x)\,\mathrm{d}x| \le A_3$,

pak existují konstanty $c_1 = c_1(n)$ a $c_2 = c_2(n, A_1, A_2, A_3)$ tak, že platí

$$Tf \le c_1 M(K*f) + c_2 Mf,$$

pro $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$.

(b) Nechť pro jádro K existují konstanty $A_1, A_2, A_3 \in (0,\infty)$ tak, že

- $\sup_{R>0} \int_{\{R\le|x|\le 2R\}} |K(x)|\,\mathrm{d}x = A_1$,
- $\sup_{0<r<R<\infty} |\int_{\{r<|x|<R\}} K(x)\,\mathrm{d}x| = A_2$,
- $\sup_{y\neq 0} \int_{\{|x|\ge 2|y|\}} |K(x-y) - K(x)|\,\mathrm{d}x = A_3$,

pak operátor $f \longmapsto K*f$ je silného typu (2,2) s konstantou $15(A_1+A_2+A_3)$.

(c) Pokud jádro K splňuje $|K(x)| \le \frac{A_1}{|x|^n}$, pak

$$Tf \le \tilde{T}f \le 2\,Tf, \;\; \forall f \in L^p, 1 \le p < \infty,$$

kde $\tilde{T}f := \sup_{0<\varepsilon<N<\infty} |f*(K\chi_{\{\varepsilon\le|x|\le N\}})|$ a jádro K pro tento operátor splňuje $\sup_{R>0}\int_{R\le|x|\le 2R} |K(x)|\,\mathrm{d}x \le A_1$.

(d) Nechť pro jádro K existují konstanty $A_1, A_2, B \in (0,\infty)$ tak, že

- $\sup_{R>0} \int_{R\le|x|\le 2R} |K(x)|\,\mathrm{d}x = A_1$,
- $\sup_{y\neq 0} \int_{\{|x|\ge 2|y|\}} |K(x-y) - K(x)|\,\mathrm{d}x = A_2$,
- $||\tilde{T}f||_2 \le B||f||_2$, $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

pak existuje $A = A(n, A_1, A_2, B)$ tak, že

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \tilde{T}f(x) > \lambda\}| \le \frac{A}{\lambda}||f||_1, \;\; \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Z Definice 12 Calderónova-Zygmundova jádra vidíme, že jsou splněny předpoklady Cotlarovy nerovnosti. Z téže definice plynou předpoklady (b), odkud spolu s Cotlarovou nerovností a s Větou 18 pro $p = 2$ dostáváme: $||Tf||_2 \leq C||f||_2$. Odtud a z (c) plyne $||\tilde{T}f||_2 \leq C||f||_2$. Pak jsou splněny předpoklady (d), odkud dostáváme slabý typ (1,1) operátoru $\tilde{T}$, což spolu s (c) dává slabý typ operátoru T.

Lemma 3. *Nechť T je maximální singulární integrální operátor s jádrem K z Definice 12 a nechť $w \in A_\infty$. Pak pro každé $\gamma \in (0,1)$ existuje konstanta $C = C(\gamma) > 0$ tak, že pro $f \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ platí*

$$(Tf)^*_w(t) \leq C(\tilde{M}f)^*_w(\gamma t) + (Tf)^*_w(2t), \quad \textit{pro každé } t > 0.$$

Důkaz. Buď $t > 0$ pevné a položme $E := \{x \in \mathbb{R}^n : Tf(x) > (Tf)^*_w(2t)\}$. Pak $w(E) \leq 2t$, a tedy existuje otevřená množina $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tak, že $E \subset \Omega$ a $w(\Omega) \leq 3t$. Podle Whitneyovy Věty 9 existuje posloupnost uzavřených krychlí $\{Q_k\}_k$ tak, že vnitřky krychlí z této posloupnosti jsou po dvou disjunktní, $\Omega = \cup Q_k$ a $\delta(Q_k) \leq \operatorname{dist}(Q_k, \mathbb{R}^n \backslash \Omega) \leq 4\delta(Q_k)$. Potom zřejmě $\sum w(Q_k) = w(\Omega) \leq 3t$.
Dále podle Poznámky 18 existuje konstanta $A > 0$ nezávislá na f a λ tak, že

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Tf(x) > \lambda\}| \leq \frac{A}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, \mathrm{d}x. \tag{7.3}$$

Nyní budeme dokazovat, že pro $k \in \mathbb{N}$ pevné a libovolné $\delta > 0$ existuje konstanta $C > 0$, $C = C(A, n, \delta)$ tak, že

$$|\{x \in Q_k : Tf(x) > C\tilde{M}f(x) + (Tf)^*_w(2t)\}| \leq \delta \, |Q|, \tag{7.4}$$

odtud pak totiž volbou $\delta > 0$ dost malého, aby z $E \subset Q$, $|E| < \delta |Q|$ plynulo $w(E) < \frac{1-\gamma}{3} w(Q)$ (viz. Poznámka 3) plyne

$$\begin{aligned} w(\{x \in \mathbb{R}^n &: Tf(x) > C\tilde{M}f(x) + (Tf)^*_w(2t)\}) \\ &\leq w(\{x \in \Omega : Tf(x) > C\tilde{M}f(x) + (Tf)^*_w(2t)\}) \\ &\leq \sum w(\{x \in Q_k : Tf(x) > C\tilde{M}f(x) + (Tf)^*_w(2t)\}) \\ &\leq \sum \frac{1-\gamma}{3} w(Q_k) = \frac{1-\gamma}{3} \sum w(Q_k) \leq \frac{1-\gamma}{3} 3t = (1-\gamma)\, t. \end{aligned}$$

Potom ale máme

$$\begin{aligned} w(\{x \in \mathbb{R}^n &: Tf(x) > C(\tilde{M}f)^*_w(\gamma t) + (Tf)^*_w(2t)\}) \\ &\leq w(\{x \in \mathbb{R}^n : Tf(x) > C\tilde{M}f(x) + (Tf)^*_w(2t)\}) \\ &\quad + w(\{x \in \mathbb{R}^n : \tilde{M}f(x) > (\tilde{M}f)^*_w(\gamma t)\}) \\ &\leq (1-\gamma)t + \gamma t = t, \end{aligned}$$

odkud použitím definice přerovnání dostáváme tvrzení.
Zbývá tedy dokázat (7.4). Volme $k \in \mathbb{N}$ pevné a $\delta > 0$. Nechť $x_k \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega$ je takové, že $\operatorname{dist}(x_k, Q_k) \leq 4\delta(Q_k)$. Nechť Q značí krychli se středem x_k s diametrem

rovným $20\sqrt{n}\,\delta(Q_k)$. Označme $F := \mathbb{R}^n \setminus Q$ a $f = g + h = f\chi_Q + f\chi_F$. Ukážeme, že platí

$$Th(x) \leq C_1 \tilde{M} f(x) + (Tf)^*_w(2t), \quad x \in Q_k, \tag{7.5}$$

$$|\{x \in Q_k : Tg(x) > C_2 \tilde{M} f(x)\}| \leq \delta |Q_k|. \tag{7.6}$$

Potom použitím sublinearity operátoru T, volbou $C := C_1 + C_2$ a použitím těchto nerovností dostáváme

$$\begin{aligned}
&|\{x \in Q_k : Tf(x) > C\tilde{M} f(x) + (Tf)^*_w(2t)\}| \\
&\leq |\{x \in Q_k : Tg(x) + Th(x) > C_1 \tilde{M} f(x) + C_2 \tilde{M} f(x) + (Tf)^*_w(2t)\}| \\
&\leq |\{x \in Q_k : Tg(x) > C_2 \tilde{M} f(x)\}| + |\{x \in Q_k : Th(x) > C_1 \tilde{M} f(x) + (Tf)^*_w(2t)\}| \\
&\leq \delta |Q_k| + 0,
\end{aligned}$$

což je právě (7.4).
Dokážeme nejprve (7.6), volme $\lambda := \frac{C_2}{|Q|} \int |g(x)| \, \mathrm{d}x$, pak $C_2 \tilde{M} f(x) \geq \lambda$, pro $x \in Q_k$, jinak totiž dostáváme $\tilde{M} f(x) < \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| \, \mathrm{d}y$, což dává spor s definicí $\tilde{M} f$. Z volby λ a nerovnosti (7.3) máme

$$\begin{aligned}
|\{x \in Q_k : Tg(x) > C_2 \tilde{M} f(x)\}| &\leq |\{x \in Q_k : Tg(x) > \lambda\}| \\
&\leq \frac{A}{\lambda} \int |g(x)| \, \mathrm{d}x \leq \frac{A|Q|}{C_2},
\end{aligned}$$

tedy stačí volit C_2 dost velké, aby $\frac{A|Q|}{C_2} \leq \delta |Q_k|$, a nerovnost (7.6) je dokázaná.
Abychom dokázali (7.5), tak stačí ukázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ a každé $x \in Q_k$ platí

$$|T_\varepsilon h(x)| \leq Tf(x_k) + C_1 \tilde{M} f(x). \tag{7.7}$$

Nerovnost (7.4) pak odtud plyne díky definici operátoru T a díky nerovnosti $Tf(x_k) \leq (Tf)^*_w(2t)$ ($x_k \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, tedy $x \notin E$). Buď nyní $x \in Q_k$ a $\varepsilon > 0$ pevné. Položme $r := \max\{\varepsilon, \operatorname{dist}(x_k, F)\}$. Nechť Δ značí symetrickou diferenci koulí $B(x, \varepsilon)$ a $B(x_k, \varepsilon)$. Potom

$$\begin{aligned}
|T_\varepsilon h(x)| &= \Big| \int_{\{y : |x-y| > \varepsilon\}} K(x-y) h(y) \, \mathrm{d}y \Big| \\
&\leq \Big| \int_{\{y : |x_k - y| > \varepsilon\}} K(x-y) h(y) \, \mathrm{d}y + \int_\Delta K(x-y) h(y) \, \mathrm{d}y \Big| \\
&\leq \Big| \int_{\{y : |x_k - y| > \varepsilon\}} K(x-y) h(y) \, \mathrm{d}y \Big| + \int_\Delta |K(x-y) h(y)| \, \mathrm{d}y =: I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Pro I_2 díky vlastnosti (i) jádra K z Definice 12 platí

$$I_2 = \int_\Delta |K(x-y) h(y)| \, \mathrm{d}y \leq \int_\Delta \frac{c}{|x-y|^n} |h(y)| \, \mathrm{d}y = \int_{\Delta \cap F} \frac{c}{|x-y|^n} |f(y)| \, \mathrm{d}y.$$

Dále uvažme, že $r = \operatorname{dist}(x_k, F)$, pak pro dané $x \in Q_k$ a pro libovolné $y \in \Delta \cap F$ platí

$$|y - x| \geq |y - x_k| - |x - x_k| \geq \operatorname{dist}(x_k, F) - (\operatorname{dist}(x_k, Q_k) + \delta(Q_k))$$

$$\geq 10\delta(Q_k) - 5\delta(Q_k) = 5\delta(Q_k).$$

Tedy máme

$$I_2 \leq \frac{c}{(5\delta(Q_k))^n} \int_{\Delta\cap F} |f(y)| \,\mathrm{d}y \leq \frac{c}{(5\delta(Q_k))^n} \frac{|L|}{|L|} \int_L |f(y)| \,\mathrm{d}y,$$

kde L značí krychli se středem x a délkou hrany $6r$. Nerovnost platí, protože $\Delta \subset B(x, 3r)$. Tedy dostáváme

$$I_2 \leq c\frac{6^n r^n}{(5\delta(Q_k))^n}\tilde{M}f(x) = C_3\tilde{M}f(x),$$

kde lze volit $C_3 = c12^n$. Zbývá situace pro $r = \varepsilon \geq 10\delta(Q_k)$, pak pro dané $x \in Q_k$ a pro libovolné $y \in \Delta \cap F$ platí

$$|y - x| \geq |y - x_k| - |x - x_k| \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tedy máme

$$I_2 \leq \frac{c2^n}{(\varepsilon)^n} \int_{\Delta\cap F} |f(y)| \,\mathrm{d}y \leq \frac{c2^n}{(\varepsilon)^n} \frac{|L|}{|L|} \int_L |f(y)| \,\mathrm{d}y,$$

kde L opět značí krychli se středem x a délkou hrany $6r$. Dále dostáváme

$$I_2 \leq c\frac{2^n 6^n \varepsilon^n}{(\varepsilon)^n}\tilde{M}f(x) = C_3\tilde{M}f(x),$$

kde lze opět volit $C_3 = c12^n$. Celkem tedy $I_2 \leq C_3\tilde{M}f(x)$.
Pro I_1 máme

$$I_1 = |\int_{\{y:|x_k-y|>\varepsilon\}} K(x-y)h(y)\,\mathrm{d}y| = |\int_{\{y:|x_k-y|>\varepsilon\}\cap F} K(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y|$$
$$= |\int_{\{y:|x_k-y|>r\}} K(x-y)h(y)\,\mathrm{d}y|,$$

neboť pro $r = \operatorname{dist}(x_k, F)$ je $\varepsilon < \operatorname{dist}(x_k, F)$, a tedy $\{y : |x_k - y| > \varepsilon\} \cap F = \{y : |x_k - y| > r\} \cap F$. Pro $r = \varepsilon$ je rovnost zřejmá. Dále k integrálu přičteme a odečteme $\int_{\{y:|x_k-y|>r\}} K(x_k - y)f(y)\,\mathrm{d}y$ a použijeme trojúhelníkovou nerovnost, potom

$$I_1 \leq |\int_{\{|x_k-y|>r\}} K(x_k-y)f(y)\,\mathrm{d}y| + |\int_{\{|x_k-y|>r\}} K(x-y)h(y) - K(x_k-y)f(y)\,\mathrm{d}y|$$
$$\leq \sup_{r>0} |T_r f(x_k)|$$
$$+|\int_{\{|x_k-y|>r\}} K(x-y)h(y) + K(x-y)g(y) - K(x_k-y)f(y) - K(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y|$$
$$\leq Tf(x_k) + \int_{\{|x_k-y|>r\}} |K(x-y) - K(x_k-y)||f(y)| + \int_{\{|x_k-y|>r\}} |K(x-y)g(y)|\,\mathrm{d}y$$
$$\leq Tf(x_k) + \int_{\{|x_k-y|>r\}} \frac{c|x_k - x|}{|x_k - y|^{n+1}}|f(y)|\,\mathrm{d}y + \int_{\{|x_k-y|>r\}\cap Q} |K(x-y)||f(y)|\,\mathrm{d}y,$$

což plyne z Definice 12 maximálního singulárního integrálního operátoru, z definice $f = g+h$ a z vlastnosti (iii) jádra $K(x)$ (viz. Definice 12). Tuto vlastnost můžeme použít, protože $2|x_k - x| \leq 10\delta(Q_k) \leq |x_k - y|$. Dále $|x_k - x| \leq 5\delta(Q_k) \leq \frac{r}{2}$, tedy poslední dva sčítance v odvozené nerovnosti můžeme odhadnout takto

$$
\begin{aligned}
&\leq c\,\frac{r}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\{r\,2^k<|x_k-y|\leq r\,2^{k+1}\}}\frac{|f(y)|}{|x_k-y|^{n+1}}\,\mathrm{d}y + c\left(\frac{2}{r}\right)^n\int_{\{|x_k-y|>r\}\cap Q}|f(y)|\,\mathrm{d}y \\
&< c\,\frac{r}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(r\,2^k)^{n+1}}\int_{\{r\,2^k<|x_k-y|\leq r\,2^{k+1}\}}|f(y)|\,\mathrm{d}y + c\,\frac{1}{r^n}\frac{|Q|}{|Q|}\int_Q|f(y)|\,\mathrm{d}y \\
&\leq Tf(x_k) + c\,\frac{r}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(r\,2^k)^{n+1}}\int_{\{|x-y|\leq r\,2^{k+2}\}}|f(y)|\,\mathrm{d}y + c\,\frac{|Q|}{r^n}\,\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)|\,\mathrm{d}y \\
&\leq Tf(x_k) + c\,\frac{r}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(r\,2^k)^{n+1}}\frac{|L_k|}{|L_k|}\int_{L_k}|f(y)|\,\mathrm{d}y + c\,\frac{(20\delta(Q_k))^n}{(10\delta(Q_k))^n}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)|\,\mathrm{d}y \\
&\leq Tf(x_k) + c\,\frac{r}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(r\,2^{k+3})^n}{r^{n+1}2^{k(n+1)}}\frac{1}{|L_k|}\int_{L_k}|f(y)|\,\mathrm{d}y + c_n\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)|\,\mathrm{d}y \\
&\leq Tf(x_k) + c_n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\tilde{M}f(x) + c_n\,\tilde{M}f(x) \leq Tf(x_k) + C_4\tilde{M}f(x),
\end{aligned}
$$

kde L_k značí krychli se středem x a délkou hrany $r\,2^{k+3}$, tedy $\{y : |x-y| \leq r\,2^{k+2}\} \subset L_k$ a využíváme vztahu $r \geq 10\delta(Q_k)$ a $x \in Q$. Celkem dostáváme $I_1 \leq Tf(x_k)+C_4\tilde{M}f(x)$. Položme $C_1 := C_3+C_4$, pak z odhadů na I_1, I_2 dostáváme dokazovanou nerovnost (7.7).

□

Lemma 4. *Nechť T je maximální singulární integrální operátor s jádrem K z Definice 12 a nechť $w \in A_\infty$. Pak existuje konstanta $C > 0$ tak, že pro každé $t > 0$ a pro každou $f \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ splňující $\lim_{t\to\infty}(Tf)^*_w(t) = 0$ platí*

$$(Tf)^*_w(t) \leq C(\tilde{M}f)^*_w(\frac{t}{2}) + C\int_t^\infty (\tilde{M}f)^*_w(s)\,\frac{\mathrm{d}s}{s}.$$

Důkaz. Pro každé $K \in \mathbb{N}$ platí

$$(Tf)^*_w(t) \leq C\sum_{k=0}^{K}(\tilde{M}f)^*_w(2^{k-1}t) + (Tf)^*_w(2^{K+1}t).$$

Skutečně: aplikací Lemmatu 3 na $(Tf)^*_w(t)$ s $\gamma = \frac{1}{2}$ máme

$$(Tf)^*_w(t) \leq C(\tilde{M}f)^*_w(\frac{1}{2}\,t) + (Tf)^*_w(2t),$$

dále předpokládáme-li platnost nerovnosti pro $K-1$, tak opět použitím Lemmatu 3 na $(Tf)^*_w(2^K t)$ dostáváme

$$(Tf)^*_w(t) \leq C\sum_{k=0}^{K-1}(\tilde{M}f)^*_w(2^{k-1}t) + (Tf)^*_w(2^K t)$$

$$\leq C\sum_{k=0}^{K-1}(\tilde{M}f)^*_w(2^{k-1}t)+C(\tilde{M}f)^*_w(\frac{1}{2}\,2^Kt)+(Tf)^*_w(2^{K+1}t)$$

$$=C\sum_{k=0}^{K}(\tilde{M}f)^*_w(2^{k-1}t)+(Tf)^*_w(2^{K+1}t).$$

Limitním přechodem, kde uvažujeme $K\to\infty$, dostáváme díky předpokladu $\lim_{t\to\infty}(Tf)^*_w(t)=0$ následující

$$(Tf)^*_w(t)\leq C\sum_{k=0}^{\infty}(\tilde{M}f)^*_w(2^{k-1}t)+0$$

$$=C(\tilde{M}f)^*_w(2^{-1}t)+C(\tilde{M}f)^*_w(t)+C\sum_{k=2}^{\infty}(\tilde{M}f)^*_w(2^{k-1}t).$$

Protože přerovnání je nerostoucí, tak můžeme použít následující nerovnosti

$$(\tilde{M}f)^*_w(t)\leq(\tilde{M}f)^*_w(2^{-1}t)$$

a

$$\int_{2^{k-2}t}^{2^{k-1}t}(\tilde{M}f)^*_w(s)\,\frac{\mathrm{d}s}{s}\geq(\tilde{M}f)^*_w(2^{k-1}t)\int_{2^{k-2}t}^{2^{k-1}t}\frac{\mathrm{d}s}{s}=\ln 2\,(\tilde{M}f)^*_w(2^{k-1}t).$$

Potom

$$(Tf)^*_w(t)\leq 2C(\tilde{M}f)^*_w(2^{-1}t)+C\sum_{k=2}^{\infty}\int_{2^{k-2}t}^{2^{k-1}t}(\tilde{M}f)^*_w(s)\,\frac{\mathrm{d}s}{s}$$

$$\leq C(\tilde{M}f)^*_w(\frac{t}{2})+C\int_t^{\infty}(\tilde{M}f)^*_w(s)\,\frac{\mathrm{d}s}{s},$$

což jsme chtěli dokázat. □

Věta 25. *Nechť T je maximální singulární integrální operátor s jádrem K z Definice 12, $w\in A_\infty$. Pak existuje konstanta $C>0$ tak, že pro $f\in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ a každé $t>0$ platí*

$$(Tf)^*_w(t)\leq C(\tilde{M}f)^*_w(\frac{t}{2})+C\int_t^{\infty}(\tilde{M}f)^*_w(s)\,\frac{\mathrm{d}s}{s}.$$

Důkaz. Buď $t>0$ pevné. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $\int_t^\infty(\tilde{M}f)^*_w(s)\,\frac{\mathrm{d}s}{s}<\infty$, jinak není co dokazovat. Pro $k=1,2,\dots$ pišme

$$f(x)=f_{k,1}(x)+f_{k,2}(x)=f(x)\chi_{\{x:|x|\leq k\}}+f(x)\chi_{\{x:|x|>k\}}.$$

Podle Lemmatu 2 s $\mathrm{d}\mu=w(x)\mathrm{d}x$ platí, že $Tf_{k,2}$ konverguje stejnoměrně k 0 na všech kompaktních množinách, tedy $Tf_{k,1}$ konverguje na všech kompaktních množinách stejnoměrně k Tf (buď R kompakt, $z\in R$, pak $|Tf(z)-Tf_{k,1}(z)|\leq|Tf_{k,1}(z)+Tf_{k,2}(z)-Tf_{k,1}(z)|=|Tf_{k,2}(z)|$). Každá funkce $f_{k,1}$ má kompaktní nosič, a proto pro každé $k\in\mathbb{N}$ platí, že $Tf_{k,1}(x)\to 0$, pro $|x|\to\infty$ ($Tf_{k,1}(x)=\sup_{\varepsilon>0}|\int_{\{y:|x-y|>\varepsilon\}\cap\{|y|\leq k\}}K(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y|$). Pak ale pro každé $k\in\mathbb{N}$ platí i $\lim_{t\to\infty}(Tf_{k,1})^*_w(t)=0$. Aplikací Lemmatu 4 dostaneme

$$(Tf_{k,1})^*_w(t)\leq C(\tilde{M}f_{k,1})^*_w(\frac{t}{2})+C\int_t^{\infty}(\tilde{M}f_{k,1})^*_w(s)\,\frac{\mathrm{d}s}{s}$$

$$\leq C(\tilde{M}f)^*_w(\frac{t}{2}) + C\int_t^\infty (\tilde{M}f)^*_w(s)\,\frac{\mathrm{d}s}{s}.$$

Použitím Lemmatu 1 s $G(t) := C(\tilde{M}f)^*_w(\frac{t}{2}) + C\int_t^\infty (\tilde{M}f)^*_w(s)\,\frac{\mathrm{d}s}{s}$ a $Tf_{k,1}$ dostáváme tvrzení věty. $\square$

Věta 26. *Nechť T je maximální singulární integrální operátor s jádrem K z Definice 12, $w \in A_\infty$. Pak existuje konstanta $C > 0$ tak, že pro $f \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ a každé $t > 0$ platí*

$$(Tf)^{**}_w(t) \leq (Tf)^*_w(t) + C(\tilde{M}f)^{**}_w(t).$$

Důkaz. Volme $t > 0$ pevné, pak pro každé $m = 1, 2, \ldots$ platí

$$(Tf)^*_w(2^{-m}t) \leq C\sum_{k=1}^{m}(\tilde{M}f)^*_w(2^{-k-1}t) + (Tf)^*_w(t).$$

Skutečně: Lemma 3 pro $\gamma = \frac{1}{2}$ a $\frac{t}{2}$ dává

$$(Tf)^*_w\left(\frac{t}{2}\right) \leq C(\tilde{M}f)^*_w\left(\frac{t}{4}\right) + (Tf)^*_w\left(2\,\frac{t}{2}\right).$$

Nechť nerovnost platí pro $m-1$, pak použitím Lemmatu 3 na $(Tf)^*_w(2^{-m+1}\frac{t}{2})$ dostáváme

$$(Tf)^*_w(2^{-m}t) = (Tf)^*_w(2^{-m+1}\frac{t}{2}) \leq C\sum_{k=1}^{m-1}(\tilde{M}f)^*_w(2^{-k-1}\frac{t}{2}) + (Tf)^*_w(\frac{t}{2})$$

$$\leq C\sum_{k=2}^{m}(\tilde{M}f)^*_w(2^{-k-1}t) + C(\tilde{M}f)^*_w(\frac{1}{4t}) + (Tf)^*_w(t)$$

$$= C\sum_{k=1}^{m}(\tilde{M}f)^*_w(2^{-k-1}t) + (Tf)^*_w(t).$$

Nyní máme

$$(Tf)^{**}_w(t) = \frac{1}{t}\int_0^t (Tf)^*_w(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{t}\sum_{m=1}^{\infty}\int_{2^{-m}t}^{2^{-m+1}t}(Tf)^*_w(s)\,\mathrm{d}s,$$

protože přerovnání je nerostoucí, tak

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(Tf)^*_w(2^{-m}t)}{t}\int_{2^{-m}t}^{2^{-m+1}t}\mathrm{d}s = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(Tf)^*_w(2^{-m}t)\,2^{-m}t}{t}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}(Tf)^*_w(2^{-m}t)\,2^{-m},$$

nyní použijeme výše dokázanou nerovnost, a pak zaměníme pořadí sčítání

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty}2^{-m}[C\sum_{k=1}^{m}(\tilde{M}f)^*_w(2^{-k-1}t) + (Tf)^*_w(t)]$$

$$= (Tf)^*_w(t)\sum_{m=1}^{\infty}2^{-m} + C\sum_{k=1}^{\infty}[(\tilde{M}f)^*_w(2^{-k-1}t)\sum_{m=k}^{\infty}2^{-m}]$$

$$= (Tf)^*_w(t) + 4C\sum_{k=1}^{\infty}[(\tilde{M}f)^*_w(2^{-k-1}t)\,2^{-k-1}].$$

Nyní použijeme

$$\frac{1}{t}\int_{2^{-k-2}t}^{2^{-k-1}t}(\tilde{M}f)^*_w(s)\,\mathrm{d}s \geq \frac{2}{t}(\tilde{M}f)^*_w(2^{-k-1}t)\int_{2^{-k-2}t}^{2^{-k-1}t}\mathrm{d}s$$

$$= (\tilde{M}f)^*_w(2^{-k-1}t)2^{-k-1},$$

což po sečtení dává

$$\sum_{k=1}^{\infty}[(\tilde{M}f)^*_w(2^{-k-1}t)2^{-k-1}] \leq \frac{2}{t}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{-k-2}t}^{2^{-k-1}t}(\tilde{M}f)^*_w(s)\,\mathrm{d}s$$

$$\leq \frac{2}{t}\int_0^t(\tilde{M}f)^*_w(s)\,\mathrm{d}s.$$

Použitím těchto nerovností dostáváme dokazovanou nerovnost

$$(Tf)^{**}_w(t) \leq (Tf)^*_w(t) + \frac{C}{t}\int_0^t(\tilde{M}f)^*_w(s)\,\mathrm{d}s = (Tf)^*_w(t) + C(\tilde{M}f)^{**}_w(t).$$

□

7.2 Vztah f, $f^{\#}$ a $\tilde{M}f$

Věta 27. *Nechť $w \in A_\infty$, pak existuje konstanta $C > 0$ tak, že pro $f \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ a $t \in (0,\infty)$ platí*

$$f^*_w(t) \leq C(f^{\#})^*_w(2t) + f^*_w(2t).$$

Důkaz. Buď $t \in (0,\infty)$ pevné a $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Označme

$$G := \{x \in \mathbb{R}^n : f^{\#}(x) > (f^{\#})^*_w(2t)\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > f^*_w(2t)\},$$

pak $w(G) \leq 4t$, neboť pro $g \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ je $w(\{x : |g(x)| > g^*_w(2t)\}) \leq 2t$. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená splňuje $G \subset \Omega$ a $w(\Omega) < 5t$. Pak tvrdíme, že pro dost velké $C > 0$ platí

$$w(\{x \in \Omega : |f(x)| > C(f^{\#})^*_w(2t) + f^*_w(2t)\}) \leq t,$$

což spolu z definicí přerovnání $f^*_w(t) = \inf\{\lambda > 0 : w\{|f(x)| > \lambda\} \leq t\}$ dává tvrzení věty.

Nejprve na Ω aplikujeme Větu 14. Pro vybranou posloupnost platí $\Omega \subset \cup_k Q_k$, $\mathrm{int}(Q_k) \cap \mathrm{int}(Q_j) = \emptyset$, $w(Q_k) \leq Bw(Q_k \cap \Omega)$, $|Q_k| \leq 2|Q_k \cap (\mathbb{R}^n \backslash \Omega)|$. Uvažme libovolnou krychli Q z tohoto pokrytí. Pokud $|f_Q| > f^*_w(2t)$, pak

$$\int_Q |f(x) - f_Q|\,\mathrm{d}x \geq \frac{|Q|}{2}(|f_Q| - f^*_w(2t)). \tag{7.8}$$

Skutečně

$$\int_Q |f(x) - f_Q| \,\mathrm{d}x \geq \int_{Q\cap(\mathbb{R}^n\setminus\Omega)} |f(x) - f_Q| \,\mathrm{d}x \geq \int_{Q\cap(\mathbb{R}^n\setminus\Omega)} ||f_Q| - |f(x)|| \,\mathrm{d}x$$

$$\geq \int_{Q\cap(\mathbb{R}^n\setminus\Omega)} ||f_Q| - f^*_w(2t)| \,\mathrm{d}x = |Q\cap(\mathbb{R}^n\setminus\Omega)| \, ||f_Q| - f^*_w(2t)|$$

$$\geq \frac{|Q|}{2} \, ||f_Q| - f^*_w(2t)| = \frac{|Q|}{2} \, (|f_Q| - f^*_w(2t)),$$

kde první řádek je zřejmý a dále jsme použili nerovnost $|f(x)| \leq f^*_w(2t)$ na $\mathbb{R}^n\setminus\Omega$, podmínku $|Q| \leq 2|Q\cap(\mathbb{R}^n\setminus\Omega)|$ z Věty 14 a předpokládanou nerovnost $|f_Q| > f^*_w(2t)$. Na druhou stranu z nerovnosti $f^\#(x) \leq (f^\#)^*_w(2t)$ na $\mathbb{R}^n\setminus\Omega$ máme

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q| \,\mathrm{d}x \leq f^\#(x) \leq (f^\#)^*_w(2t),$$

odkud $\int_Q |f(x) - f_Q| \,\mathrm{d}x \leq |Q|(f^\#)^*_w(2t)$ pro $x \in \mathbb{R}^n\setminus\Omega$. Což spolu s (7.8) dává

$$|f_Q| \leq 2(f^\#)^*_w(2t) + f^*_w(2t), \tag{7.9}$$

tato nerovnost však zřejmě platí i pro $|f_Q| \leq f^*_w(2t)$. Položme $\lambda := \frac{1}{\delta}(f^\#)^*_w(2t) + |f_Q|$, kde $\delta > 0$ bude upřesněno později, a $E := \{x \in Q : |f(x)| > \lambda\}$. Potom zřejmě

$$(\lambda - |f_Q|)|E| = \int_{\{x\in Q:|f(x)|>\lambda\}} (\lambda - |f_Q|) \,\mathrm{d}x \leq \int_{\{x\in Q:|f(x)|>\lambda\}} ||f(x)| - |f_Q|| \,\mathrm{d}x$$

$$\leq \int_Q ||f(x)| - |f_Q|| \,\mathrm{d}x \leq \int_Q |f(x) - f_Q| \,\mathrm{d}x \leq |Q| f^\#(x),$$

kde poslední nerovnost plyne z definice $f^\#$. Pak díky nerovnosti $f^\#(x) \leq (f^\#)^*_w(2t)$ na $\mathbb{R}^n\setminus\Omega$ máme

$$(\lambda - |f_Q|)|E| \leq |Q|(f^\#)^*_w(2t),$$

odkud spolu s definicí $\lambda = \frac{1}{\delta}(f^\#)^*_w(2t) + |f_Q|$ plyne

$$|E| \leq \delta|Q|.$$

Zvolme $C := 2 + \frac{1}{\delta}$, pak z (7.9) plyne

$$|\{x \in Q : |f(x)| > C(f^\#)^*_w(2t) + f^*_w(2t)\}|$$

$$= |\{x \in Q : |f(x)| > 2(f^\#)^*_w(2t) + f^*_w(2t) + \frac{1}{\delta}(f^\#)^*_w(2t)\}|$$

$$\leq |\{x \in Q : |f(x)| > |f_Q| + \frac{1}{\delta}(f^\#)^*_w(2t)\}| = |E| \leq \delta|Q|$$

Uvažme konstantu B z Věty 14, pak dle Poznámky 3 existuje k danému $\varepsilon := \frac{1}{5B}$ číslo $\delta > 0$ tak, aby pro každou měřitelnou podmnožinu E^* krychle Q z nerovnosti $|E^*| \leq \delta|Q|$ plynulo $w(E^*) \leq \frac{1}{5B}w(Q)$. Protože stejné δ lze uvažovat pro každou krychli z vybraného pokrytí, tak dostáváme požadovanou nerovnost:

$$w(\{x : |f(x)| > C(f^\#)^*_w(2t) + f^*_w(2t)\})$$

$$\le \sum w(\{x \in Q : |f(x)| > C(f^{\#})^*_w(2t) + f^*_w(2t)\})$$
$$\le \sum \frac{1}{5B}\, w(Q) \le \frac{1}{5B} \sum Bw(Q \cap \Omega) = \frac{1}{5}\, w(\Omega) \le t,$$

kde sčítáme přes všechny krychle posloupnosti, kterou jsme vybrali podle Věty 14. Kromě vlastností této posloupnosti využíváme dále $w(E^*) \le \frac{1}{5B} w(Q)$ a $w(\Omega) < 5t$.

□

Věta 28. *Nechť $w \in A_\infty$, pak existuje konstanta $C > 0$ tak, že pro $f \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ a $t \in (0, \infty)$ platí*

$$(\tilde{M}f)^*_w(t) \le C(f^{\#})^*_w(2t) + (\tilde{M}f)^*_w(2t).$$

Důkaz. Podobně jako v důkazu předchozí věty označme pro $t \in (0, \infty)$ a $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ množinu G takto

$$G := \{x \in \mathbb{R}^n : f^{\#}(x) > (f^{\#})^*_w(2t)\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : \tilde{M}f(x) > (\tilde{M}f)^*_w(2t)\},$$

pak opět $w(G) \le 4t$. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená splňuje $G \subset \Omega$ a $w(\Omega) < 5t$. Pak tvrdíme, že pro dost velké $C > 0$ platí

$$w(\{x \in \Omega : \tilde{M}f(x) > C(f^{\#})^*_w(2t) + f^*_w(2t)\}) \le t,$$

což spolu z definicí přerovnání opět dává tvrzení věty.
Nejprve na Ω aplikujeme Větu 15, pak získaná posloupnost splňuje $\Omega \subset \cup_k Q_k$, $\mathrm{int}(Q_k) \cap \mathrm{int}(Q_j) = \emptyset$, $\sum_k w(Q_k) \le C^* w(\Omega)$ a pokud $\tilde{Q} \cap Q_k \ne \emptyset$ a $|Q_k| \le |\tilde{Q}|$, pak $|\tilde{Q}| \le 2|\tilde{Q} \cap (\mathbb{R}^n \setminus \Omega)|$. Vezměme nějakou krychli Q z vybraného pokrytí a označme $Q^* := 3Q$, nechť dále $\lambda > (\tilde{M}f)^*_w(2t)$ je pevné a $E := \{x \in Q : \tilde{M}f(x) > \lambda\}$. Pak pro každé $x \in E$ existuje podle definice maximálního operátoru krychle $Q(x)$ obsahující x tak, že

$$\frac{1}{|Q(x)|} \int_{Q(x)} |f(y)|\, \mathrm{d}y > \lambda.$$

Pak je ale $\tilde{M}f > \lambda > (\tilde{M}f)^*_w(2t)$ na $Q(x)$, což z definice $G \subset \Omega$ znamená, že $Q(x) \subset \Omega$. Kdyby platilo $|Q| \le |Q(x)|$, pak by z vlastností pokrytí plynulo $|Q(x)| \le 2|Q(x) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \Omega)| = 0$, neboť $Q(x) \subset \Omega$. Tedy nutně $|Q| > |Q(x)|$, odkud máme

$$Q(x) \subset Q^*. \tag{7.10}$$

Dále

$$|f_{Q^*}| \le \frac{1}{|Q^*|} \int_{Q^*} |f| \le \tilde{M}f(x_0) \le (\tilde{M}f)^*_w(2t),$$

neboť podle pokrývací věty existuje $x_0 \in Q^* \cap (\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$. Z právě dokázaného a z toho, že $x \in E$, máme

$$\int_{Q(x)} |f(y)|\, \mathrm{d}y > \lambda\, |Q(x)|$$

a

$$-\int_{Q(x)} |f_{Q^*}|\, \mathrm{d}y \ge -(\tilde{M}f)^*_w(2t)|Q(x)|,$$

odkud sečtením dostaneme

$$[\lambda-(\tilde{M}f)^*_w(2t)]\,|Q(x)| \le \int_{Q(x)} (|f(y)|-|f_{Q^*}|)\,\mathrm{d}y \le \int_{Q(x)} |f(y)-f_{Q^*}|\,\mathrm{d}y. \quad (7.11)$$

Pro každý bod x z omezené množiny $E \subset Q$ máme krychli $Q(x)$ splňující (7.11). Podle Věty 2 existují po dvou disjunktní krychle $\{Q(x_k)\}_k$, $x_k \in E$, že $|E| \le c_n \sum |Q(x_k)|$. Pak platí

$$[\lambda-(\tilde{M}f)^*_w(2t)]\,|E| \le c_n \sum [\lambda-(\tilde{M}f)^*_w(2t)]\,|Q(x_k)|$$

$$\le c_n \sum \int_{Q(x_k)} |f(y)-f_{Q^*}|\,\mathrm{d}y \le c_n \int_{Q^*} |f(y)-f_{Q^*}|\,\mathrm{d}y$$

$$\le c_n |Q^*|\, f^{\#}(x_0) = c_n 3^n |Q| f^{\#}(x_0) \le c_n 3^n |Q| (f^{\#})^*_w(2t),$$

kde druhý řádek plyne z (7.11), dále $\cup_k Q(x_k) \subset Q^*$ z (7.10) a Q_k jsou po dvou disjunktní. Třetí řádek máme z definice $f^{\#}$, z definice $Q^* = 3Q$ a z existence $x_0 \in Q^* \cap (\mathbb{R}^n \backslash \Omega)$. Tedy

$$|E| \le \frac{c_n 3^n |Q| (f^{\#})^*_w(2t)}{\lambda-(\tilde{M}f)^*_w(2t)}. \quad (7.12)$$

Zvolme nyní $\lambda := C(f^{\#})^*_w(2t) + (\tilde{M}f)^*_w(2t)$ (to lze, neboť takové λ splňuje požadavek z úvodu důkazu, a to nerovnost $\lambda > (\tilde{M}f)^*_w(2t)$), kde volíme $C := \frac{c_n 3^n}{\delta}$, kde $\delta > 0$ určíme později. Nyní máme

$$|\{x \in Q : \tilde{M}f(x) > C(f^{\#})^*_w(2t) + (\tilde{M}f)^*_w(2t)\}| = |\{x \in Q : \tilde{M}f(x) > \lambda\}|$$

$$= |E| \le \frac{c_n 3^n |Q| (f^{\#})^*_w(2t)}{\lambda-(\tilde{M}f)^*_w(2t)} = \delta |Q|,$$

kde druhý řádek máme z (7.12), z definice λ a z definice C. Nyní lze opět k danému $\varepsilon := \frac{1}{5C^*}$, kde C^* značí konstantu z Věty 15, nalézt $\delta > 0$ z Poznámky 3. Tím dostáváme

$$w(\{x : \tilde{M}f(x) > C(f^{\#})^*_w(2t) + (\tilde{M}f)^*_w(2t)\})$$

$$\le \sum w(\{x \in Q : \tilde{M}f(x) > C(f^{\#})^*_w(2t) + (\tilde{M}f)^*_w(2t)\})$$

$$\le \sum \frac{w(Q)}{5C^*} \le \frac{w(\Omega)}{5} < t,$$

kde sčítáme přes krychle získané pomocí Věty 15, využíváme jejich vlastnosti a $w(\Omega) < 5t$. $\square$

Závěr

V této práci jsme ukázali tři typy pokrývacích vět, uvedli jsme klasickou Vitaliovu větu pro koule v metrickém prostoru i pro krychle v $\mathbb{R}^n$. Její typickou aplikací je slabý odhad pro Hardyův-Littlewoodův maximální operátor a Lebesgueova věta o derivování. Vitaliovu větu jsme též použili v poslední kapitole při důkazu nerovnosti mezi maximálním operátorem $\tilde{M}$ a ostrým maximálním operátorem. Besicovitchova věta vybírající posloupnost krychlí se speciálními vlastnostmi se využije v důkazu zobecněné Sardovy věty, ale i v důkazu obecnějších vět Vitaliova nebo Whitneyova typu, také jsme ji použili při zkoumání obecného maximálního operátoru příslušného diferenciální bázi. Whitneyova věta zabývající se dyadickými krychlemi v $\mathbb{R}^n$ a výběrem takových dyadických krychlí, které mají diametr porovnatelný s jejich vzdáleností od hranice zadané množiny, se použila důkazu opačné nerovnosti pro maximální operátor a v poslední kapitole při odhadech pro operátory $\tilde{M}$ a T, technika z důkazu Whitneyovy věty, dyadické krychle, se použila v důkazu Calderónova-Zygmundova lemmatu.

Literatura

[1] Bagby R.J., Kurtz D.S: A rearranged good λ inequality, *Trans. Amer. Math. Soc.* **293** (1986), 71–81.

[2] Bagby R.J., Kurtz D.S: Covering lemmas and the sharp function, *Amer. Math. Soc.* **93** (1985), 291–296.

[3] Bennett C., Sharpley R. : *Interpolation of Operators*, Academic Press, 1988.

[4] Coifman R.R., Fefferman C.: Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals, *Studia Math.* **51** (1974), 241–250.

[5] Grafakos L.: *Classical Fourier Analysis*, Springer, 2008.

[6] De Guzmán M.: *Differentiation of Integrals in* R^n, Springer, 1975.

[7] Lukeš J., Malý J.: *Measure and Integral*, Matfyzpress, 1995.

[8] Sard A.: The measure of the critical values of differentiable maps, *Bull. Amer. math. Soc.* **48** (1942), 883–890.

[9] Stein E.M.: *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, 1970.

[10] Tao T.: *An Introduction to Measure Theory*, AMS, 2011.