

Abstrakt disertační práce

Studium aritmetických struktur a teorií s ohledem na reprezentační a deskriptivní analýzu

Petr Glivický

Jsme motivováni otázkou vztahu lokálních a globálních vlastností operace o ve struktuře tvaru $\langle \mathcal{B}, o \rangle$ s ohledem na aplikaci pro studium modelů $\langle \mathcal{B}, \cdot \rangle$ Peanovy aritmetiky, kde \mathcal{B} je model aritmetiky Presburgerovy. Zajímá nás zejména problém závislosti, který formulujeme jako otázku určení uzávěru závislosti

$$\text{icl}^O(E) = \{\bar{d} \in B^n; (\forall o, o' \in O)(o \upharpoonright E = o' \upharpoonright E \Rightarrow o(\bar{d}) = o'(\bar{d}))\},$$

kde \mathcal{B} je struktura, O množina n -árních operací na B a $E \subseteq B^n$. Ukážeme, že tento problém lze převést na otázku definovatelnosti v jisté expanzi \mathcal{B} . Speciálně, je-li \mathcal{B} saturovaný model Presburgerovy aritmetiky a O množina všech (saturovaných) peanovských součinů na \mathcal{B} , dokážeme, že pro $a \in B$ je $\text{icl}^O(\{a\} \times B)$ nejmenší možný, tj. obsahující právě ty dvojice $(d_0, d_1) \in B^2$, kde jedno z d_i je tvaru $p(a)$ pro nějaký polynom $p \in \mathbb{Q}[x]$.

Uvedená problematika úzce souvisí s deskriptivní analýzou lineárních teorií, což jsou (až na změnu jazyka) teorie jistých diskrétně uspořádaných modulů nad určitými diskrétně uspořádanými obory integrity. Dokážeme tvrzení o eliminaci kvantifikátorů v lineárních teoriích a nalezneme prvomodely jejich jednoduchých kompletních extenzí. Provedeme detailní analýzu definovatelných množin v modelu \mathcal{A} lineární teorie a odvodíme, že každá definovatelná množina je sjednocením lineárních obrazů mnohostěnů v A^n pro nějaké $n \in \mathbb{N}$.

Zvláště důležitým příkladem lineární teorie je lineární aritmetika LA (přesněji její „ \mathbb{Z} -verze“ ZLA) – aritmetická teorie s plnou indukcí rozšiřující Presburgerovu aritmetiku o násobení jediným nestandardním prvkem. Jako důsledek výše uvedeného dokážeme, že LA je modelově kompletní (eliminací množina je tvořena primitivně pozitivními formulemi) a rozhodnutelná, nalezneme její jednoduché kompletní extenze a sestrojíme jejich prvomodely. Dokážeme též, že modely LA jsou až na elementární ekvivalenci právě nehlavní ultraprodukty struktur $\langle \mathbb{N}, 0, 1, +, \leq, n \cdot _ \rangle$ s $n \in \mathbb{N}$.

Jako algebraickou aplikaci uvedených výsledků ukážeme, že prvomodely jednoduchých kompletních extenzí LA určují 2^ω různých oborů integrity R s $\mathbb{Z}[x] \subseteq R \subseteq \mathbb{Q}[x]$, které jsou ω -stage euklidovské, ale nejsou k -stage euklidovské pro žádné $0 < k \in \mathbb{N}$. To řeší problém položený G. E. Cookem v [Coo76].

Reference

- [Coo76] G. E. Cooke, *A weakening of the Euclidean property for integral domains and applications to algebraic number theory. I*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **282** (1976), 133–156.