:

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Filip Hladký

Vztah absolutně spojitých funkcí a funkcí s konečnou variací

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Stanislav Hencl, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2013

Děkuji docentu Henclovi za cenné rady a připonímky k této práci. Rovněž děkuji svým rodičům za obrovskou podporu v průběhu celého studia.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....   Podpis autora

Název práce: Vztah absolutně spojitých funkcí a funkcí s konečnou variací

Autor: Filip Hladký

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Stanislav Hencl, Ph.D., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: V práci se zabýváme vztahem mezi absolutně spojitými funkcemi a funkcemi s konečnou variací. V první třech kapitolách budeme studovat jejich základní vlastnosti na přímce a ukážeme nutnou a postačující podmínku, aby funkce s konečnou variací byla absolutně spojitá. Navíc dokážeme jednu část základní věty kalkulu pro Lebesgueův integrál. V poslední kapitole se budeme zabývat vztahem mezi absolutně spojitými zobrazeními a zobrazeními s konečnou variací z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$.

Klíčová slova: Absolutně spojité funkce, funkce s konečnou variací

Title: Absolutely continuous function and functions of bounded variation

Author: Filip Hladký

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: doc. RNDr. Stanislav Hencl, Ph.D., Department of Mathematical Analysis

Abstract: In this thesis we will study relationship between space of absolutely continuous functions and space of functions with bounded variation. In first three chapters we will study properties of absolutely continuous functions and functions with bounded variation and we will show nessesary and sufficient condition for functions with bounded variation to be absolutely continuous. Moreover we will show one part of fundamental theorem of calculus for Lebesgue's integral. In the last chapter we will study relationship between absolutely continuous mappings and mappings with bounded variation from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^m$.

Keywords: Absolutely continuous funcktions, functions of bounded variation

Obsah

Seznam použitých zkratek

$\mathbb{R}$ - těleso reálných čísel
$|x|$ - Eukleidovská norma na $\mathbb{R}^n$
λ - Lebesgueova míra na $\mathbb{R}$
λ^n - Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^n$
$C(\Omega)$ - prostor spojitých funkcí na Ω
Ω^0 - vnitřek množiny Ω
$AC(\Omega)$ - prostor absolutně spojitých funkcí na $\Omega \subset \mathbb{R}$
$AC^n_\alpha(\Omega)$ - prostor n, α-absolutně spojitých funkcí na $\Omega \subset \mathbb{R}^n$
$BV(\Omega)$ - prostor funkcí s omezenou variací na $\Omega \subset \mathbb{R}$
$BV^n_\alpha(\Omega)$ - prostor funkcí s n, α-omezenou variací na $\Omega \subset \mathbb{R}^n$
$\operatorname{diam}(A)$ - $\sup\{|x-y| : x, y \in A\}$
$\operatorname{argmin}_\Omega f$ - bod, ve kterém funkce f nabýva svého maxima na Ω, pokud je maxima nabyto.
$\operatorname{argmax}_\Omega f$ - bod, ve kterém funkce f nabýva svého minima na Ω, pokud je minima nabyto.
$P(x, \delta)$ - $\{y \in \mathbb{R} : |y-x| < \delta\} \setminus \{x\}$
$U(x, \delta)$ - $\{y \in \mathbb{R} : |y-x| < \delta\}$
$B(x, r)$ - $\{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| < r\}$
$P_+(x, \delta)$ - $P(x, \delta) \cap [x, \infty)$
$P_-(x, \delta)$ - $P(x, \delta) \cap (-\infty, x]$

Úvod

V této práci se budeme zabývat vztahem mezi absolutně spojitými funkcemi a funkcemi s konečnou variací.

Definice. *Řekneme, že* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *je absolutně spojitá, právě když pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$ *takové, že pro libovolný konečný, systém po dvou disjunktních podintervalů* $\{(a_i, b_i)\}, (a_i, b_i) \subset [a, b]$ *splňující*

$$\sum_i b_i - a_i < \delta,$$

platí

$$\sum_i |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

Definice. *Nechť* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *je interval. Nechť* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *je reálná funkce. Definujeme* $\mathrm{var}(f, [a, b])$ *jako*

$$\mathrm{var}(f, [a, b]) = \sup_D \Big\{ \sum_{i=0}^{n} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \Big\},$$

kde D=$\{a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b\}$ *je dělení intervalu* $[a, b]$. *Řekneme, že f má omezenou variaci na* $[a, b]$, *pokud* $\mathrm{var}(f, [a, b]) < \infty$.

Budeme studovat základní vlastnosti AC a BV funkci v $\mathbb{R}$ a dokážeme následující větu:

Věta. *Nechť* $I \subset \mathbb{R}$ *je interval a* $f : I \to \mathbb{R}$. *Pak* $f \in AC_{loc}(I)$ *právě tehdy, když jsou splněny následující podmínky:*
(i) f *je spojitá,*
(ii) $f \in BV_{loc}(I)$,
(iii) f *zobrazuje množiny míry nula na množiny míry nula.*

V prvních třech kapitolách postupujeme podle [3, kap 2. a 3.], kde se nachází mnoho cvičení, z kterých několik bylo detailně vyřešeno.

Dále se budeme zabývat analogickým tvrzením pro absolutně spojité funkce a funkce s omezenou variací v $\mathbb{R}^n$, které byly zadefinovány podle [5] a [2].

1. Funkce s omezenou variací v $\mathbb{R}$

V této kapitole uvedeme a dokážeme základní vlastnosti funkcí s konečnou variací na $\mathbb{R}$.

Definice 1.1. *Nechť $[a,b] \subset \mathbb{R}$ je interval. Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je reálná funkce. Definujeme* $\mathrm{var}(f,[a,b])$ *jako*

$$\mathrm{var}(f,[a,b]) = \sup_D \Big\{ \sum_{i=0}^{n} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \Big\},$$

kde D=$\{a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b\}$ je dělení intervalu $[a,b]$. Řekneme, že f má omezenou variaci na $[a,b]$, pokud $\mathrm{var}(f,[a,b]) < \infty$ *a píšeme $f \in BV([a,b])$.*

Definice 1.2. *Nechť $[a,b] \subset \mathbb{R}$ je interval a nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je reálná funkce. Definujeme $V(f;a,x)$ jako*

$$V(f;a,x) = \mathrm{var}(f,[a,x]), x \in [a,b].$$

Poznámka 1.3. *a) Nechť $[a,b] \subset \mathbb{R}$ a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je monotónní. Potom $f \in BV([a,b])$.*
b) Pro libovolnou funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ platí: $|f(a) - f(b)| \le \mathrm{var}(f,[a,b])$.
c) Funkce $V(f;a,x)$ je neklesající v x a platí

$$a \le x \le y \le b \Rightarrow \mathrm{var}(f;[a,y]) - \mathrm{var}(f;[a,x]) = \mathrm{var}(f;[x,y]).$$

d) $f \in BV([a,b]) \Rightarrow f$ je omezená.

Důkaz. a) Zřejmě platí $\mathrm{var}(f;[a,b]) = |f(b) - f(a)|$.
b) Vezměme dělení P intervalu $[a,b]$ jako $P = \{a,b\}$. Potom máme

$$|f(b) - f(a)| \le \sup_D \{ \sum_{k=1}^{n} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \} = \mathrm{var}(f,[a,b]).$$

c) Nechť $x,y \in [a,b]$ a nechť $x \le y$ potom máme $\mathrm{var}(f;[a,x]) \le \mathrm{var}(f;[a,y])$ neboť suprémum přes větší množinu je větší, a tedy $V(f;a,x) \le V(f;a,y)$.
Dále stačí dokázat, že $\mathrm{var}(f,[a,y]) = \mathrm{var}(f,[a,x]) + \mathrm{var}(f,[x,y])$. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Nechť D_1 je dělení intervalu $[a,x]$ takové, že platí

$$\mathrm{var}(f,[a,x]) \le \sum_{i=1}^{n_1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + \varepsilon.$$

Nechť $D_2 = \{x = x_{n_1+1} < x_{n_1+1} < \cdots < x_{n_1+n_2} = y\}$ je dělení intervalu $[x,y]$ takové, že platí

$$\mathrm{var}(f,[x,y]) \le \sum_{i=1}^{n_2} |f(x_{n_1+i+1}) - f(x_{n_1+i})| + \varepsilon.$$

Položme $D = D_1 \cup D_2$ dělení intervalu $[a, y]$. Potom máme

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}(f,[a,x]) + \operatorname{var}(f,[x,y]) &\le \sum_{i=1}^{n_1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n_2} |f(x_{n_1+i+1}) - f(x_{n_1+i})| + 2\varepsilon \\
&= \sum_{i=1}^{n_1+n_2} |f(x_{i+1}) - f(x_1)| + 2\varepsilon \le \operatorname{var}(f,[a,y]) + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Limitní přechodem $\varepsilon \to 0_+$ dostaneme

$$\operatorname{var}(f,[a,y]) \ge \operatorname{var}(f,[a,x]) + \operatorname{var}(f,[x,y]).$$

Nyní stačí dokázat

$$\operatorname{var}(f,[a,y]) \le \operatorname{var}(f,[a,x]) + \operatorname{var}(f,[x,y]).$$

Mějme pevné D dělení intervalu $[a, b]$ a nalezněme j takové, že platí $x_j < x \le x_{j+1}$. Potom

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| &\le \sum_{i:x_{i+1}<x} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + \sum_{i:x_{i+1}>x} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \\
&\quad + |f(x_n) - f(x)| + |f(x) - f(x_{n+1})| \\
&= \sum_{i:x_{i+1}<x} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + |f(x_n) - f(x)| \\
&\quad + \sum_{i:x_{i+1}>x} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + |f(x) - f(x_{n+1})| \\
&\le \operatorname{var}(f,[a,x]) + \operatorname{var}(f,[x,b]).
\end{aligned}$$

Přechodem k suprému dostaneme požadovanou nerovnost.

d) Toto tvrzení je zřejmé. □

Lemma 1.4. *Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$, pak pro $f_1, f_2 \in BV([a, b])$ a $c_1, c_2 \in R$ platí $c_1f_1+c_2f_2 \in BV([a, b])$ a $f_1f_2 \in BV([a, b])$. Navíc, je-li $f \in BV([a, b])$ a existuje-li $c > 0$, že pro všechna $x \in [a, b]$ platí $f(x) > c$, pak $\frac{1}{f} \in BV([a, b])$.*

Důkaz. Potřebujeme dokázat, že pro všechna $f_1, f_2 \in BV([a, b])$ a $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ platí $c_1f_1 + c_2f_2 \in BV([a, b])$ a $f_1f_2 \in BV([a, b])$. Nechť

$$D = \{a = x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_{n-1} \le x_n = b\}.$$

Potom

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} &|(c_1 f_1 + c_2 f_2)(x_{k+1}) - (c_1 f_1 + c_2 f_2)(x_k)| \\
&= \sum_{k=1}^{n} |c_1 f_1(x_{k+1}) - c_1 f_1(x_k) + c_2 f_2(x_{k+1}) - c_2 f_2(x_k)| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |c_1 f_1(x_{k+1}) - c_1 f_1(x_k)| + \sum_{k=1}^{n} |c_2 f_2(x_{k+1}) - c_2 f_2(x_k)| \\
&= |c_1| \sum_{k=1}^{n} |f_1(x_{k+1}) - f_1(x_k)| + |c_2| \sum_{k=1}^{n} |f_2(x_{k+1}) - f_2(x_k)| \\
&\leq |c_1| \operatorname{var}(f_1, [a,b]) + |c_2| \operatorname{var}(f_2, [a,b]) < \infty.
\end{aligned}$$

Tedy i suprémum přes všechna D dělení intervalu je konečné, a tedy $c_1 f_1 + c_2 f_2 \in BV([a,b])$. Dále

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} &|f_1(x_{k+1}) f_2(x_{k+1}) - f_1(x_k) f_2(x_k)| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |f_1(x_{k+1})(f_2(x_{k+1}) - f_2(x_k)| \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} |f_2(x_k)(f_1(x_{k+1}) - f_1(x_k)| \\
&\leq \sup\{|f_1(x)| : x \in [a,b]\} \sum_{k=1}^{n} |f_2(x_{k+1}) - f_2(x_k)| \\
&\quad + \sup\{|f_2(x)| : x \in [a,b]\} \sum_{k=1}^{n} |f_1(x_{k+1}) - f_1(x_k)| \\
&\leq \sup\{|f_2(x)| x \in [a,b]\} \operatorname{var}(f_1, [a,b]) \\
&\quad + \sup\{|f_1(x)| x \in [a,b]\} \operatorname{var}(f_2, [a,b]) < \infty,
\end{aligned}$$

neboť f_1 a f_2 jsou dle Poznámky 1.3 d) omezené funkce, tedy i suprémum přes všechna D dělení intervalu je konečné, a tedy $f_1 f_2 \in BV([a,b])$.

Předpokládejme, že $f \in BV([a,b])$ a existuje $c > 0$ takové, že pro všechna $x \in [a,b]$ platí $f(x) > c$. Máme

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{1}{f(x_{n+1})} - \frac{1}{f(x_n)} \right| &= \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{f(x_n) - f(x_{n+1})}{f(x_n) f(x_{n+1})} \right| \\
&\leq \frac{1}{c^2} \sum_{k=1}^{n} |f(x_n) - f(x_{n+1})| \leq \frac{1}{c^2} \operatorname{var}(f, [a,b]) < \infty.
\end{aligned}$$

Tedy i suprémum přes všechna D dělení intervalu je konečné, a tedy $\frac{1}{f} \in BV([a,b])$ $\square$

Věta 1.5 (Jordanova věta)**.** *Nechť* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *je interval a* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*. Pak* $f \in BV[a,b] \iff \exists f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ *neklesající tak, že* $f = f_1 - f_2$*.*

Důkaz. " $\Leftarrow$ "
Protože f je rozdílem dvou monotóních funkcí, potom dle Poznámky 1.3 a) a Lemmatu 1.4, $f \in BV([a, b])$.
" $\Rightarrow$ "
Položme $f_1 = V(f; a, x)$ a $f_2 = V(f; a, x) - f(x)$. Funkce f_1 je podle Poznámky 1.3 neklesající funkce. Stačí dokázat, že f_2 je neklesající.
Nechť $a \le x \le y \le b$, potom podle Poznámky 1.3 b) a c)

$$\begin{aligned} f_2(y) - f_2(x) &= V(f; a, y) - f(y) - V(f; a, x) + f(x) \\ &= V(f; x, y) - (f(y) - f(x)) \ge 0. \end{aligned}$$

□

Věta 1.6 (Lebesgue)**.** *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ a $f : I \to \mathbb{R}$ je monotónní. Potom existuje $N \subset I$ tak, že $\lambda(N) = 0$ a $f'(x)$ existuje pro všechna $x \in I \setminus N$.*

Důkaz. Viz [4, str. 70] □

Důsledek 1.7. *Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ a nechť $f \in BV([a, b])$. Pak f má derivaci s.v.*

Důkaz. Podle Věty 1.5 platí $f = f_1 - f_2$, kde f_1, f_2 jsou neklesající a tedy monotónní. Podle Věty 1.6 existují $N_1, N_2 \subset [a, b]$ tak, že $\lambda(N_1) = \lambda(N_2) = 0$ a existuje f_1' na $[a, b] \setminus N_1$ a f_2' na $[a, b] \setminus N_2$. Pro $x \in [a, b] \setminus (N_1 \cup N_2)$ platí

$$f'(x) = (f_1(x) - f_2(x))' = f_1'(x) - f_2'(x).$$

□

Lemma 1.8. *Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ je interval, $f \in BV([a, b])$ a f má Darbouxovou vlastnost. Pak f je spojitá na (a, b).*

Důkaz. 1. f lze zprava spojitě dodefinovat.
Sporem. Předpokladejme, že existuje $x \in [a, b)$ tak, že f není zprava spojitě dodefinovatelná v x tedy

$$\liminf_{y \to x_+} f(y) \neq \limsup_{y \to x_+} f(y).$$

Připomeňme, že lim inf i lim sup jsou konečné, protože f je podle Poznámky 1.3 d) omezená. Tedy existují $\{x_n\}$, $x < x_n$, $n \in \mathbb{N}$, $x_n \to x$ a $\{z_n\}$, $x < z_n$, $n \in \mathbb{N}$, $z_n \to x$ tak, že $f(x_n) \to \limsup_{y \to x_+} f(y)$ a $f(z_n) \to \liminf_{y \to x_+}(y)$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že

$$x_n < z_n \le x_{n+1} < z_{n+1}.$$

Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n > n_0$ platí

$$f(x_n) - f(z_n) > \frac{1}{2}\Big(\limsup_{y \to x_+} f(y) - \liminf_{y \to x_+} f(y)\Big) > 0.$$

Uvažujme D dělení intervalu

$$\begin{aligned} D_k =& \{a = t_0 < x_{n_0+k} = t_1 < z_{n_0+k} = t_2 \le x_{n_0+k-1} = t_3 \\ &< z_{n_0+k-1} = t_4 \le \cdots < x_{n_0} = t_{2k} < z_{n_0} = t_{2k+1} \le b = t_{2k+2}\}. \end{aligned}$$

Pak platí

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{2k+2} \big|f(t_{m+1}) - f(t_m)\big| \geq & \sum_{m=1}^{2k+1} |f(t_{m+1}) - f(t_m)| \\ > & \frac{k}{2}\Big(\limsup_{y \to x_+} f(x) - \liminf_{y \to x_+} f(x)\Big) \overset{k\to\infty}{\to} \infty.\end{aligned}$$

To je spor s $f \in BV([a,b])$

2. f je zleva spojitě dodefinovatelná.

Analogicky jako pro spojitost zprava.

3. f je spojitá.

Pro spor předpokládejme, že existuje $x \in (a,b)$ tak, že f je zprava i zleva spojitě dodefinovat v x, ale f není spojítá v x. Zvolme $\varepsilon > 0$ tak, že

$$U(f(x_-), \varepsilon) \cap U(f(x_+), \varepsilon) = \emptyset.$$

Potom existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechny $y \in P(x, \delta)$ platí, že

$$f(y) \in U(f(x_-), \varepsilon), \text{ pro všechna } y < x$$

a

$$f(y) \in U(f(x_+), \varepsilon), \text{ pro všechna } y > x.$$

Pak pro $z \in (f(x_-) + \varepsilon, f(x_+) - \varepsilon)$ neexistuje $y \in P(x, \delta)$ tak, že $f(y) = z$ a to je spor s tím, že f je Darbouxovská. Tedy f je spojitá. Analogicky bychom dokázali spojitost v krajních bodech. □

Věta 1.9. *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ a $f : I \to \mathbb{R}$ je všude diferencovatelná. Pak f' má Darbouxovu vlastnost.*

Důkaz. Viz [6]. □

Lemma 1.10. *Nechť $[a,b] \subset \mathbb{R}$ a $f \in BV([a,b])$ a f je všude diferencovatelná. Nechť $f' \in BV([a,b]) \Rightarrow f'$ je spojitá na (a,b).*

Důkaz. Funkce f má všude derivaci, tedy podle předchozí věty je f' Darbouxovská a z předpokladu Lemmatu máme, že $f' \in BV([a,b])$. Pak ale podle Lemmatu 1.8 je f' spojitá. □

2. Absolutně spojité funkce v $\mathbb{R}$

Definice 2.1. *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Řekneme, že $f : I \to \mathbb{R}$ je absolutně spojitá, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechny konečné systémy intervalů*

$$\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n, (a_i, b_i) \subset [a, b], i = 1, \dots, n; (a_i, b_i) \cap (a_j, b_j) = \emptyset \ \textit{pro}\ i \neq j$$

a

$$\sum_{i=1}^n b_i - a_i < \delta, \ \textit{platí}\ \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

Prostor všech absolutně spojitých funkcí na I značíme $AC(I)$. Řekneme, že f je lokálně absolutně spojitá (píšeme $f \in AC_{loc}(I)$), pokud $f \in AC(K)$, pro každy kompaktní interval $K \subset I$.

Poznámka 2.2. *1. Nechť $f \in AC(I)$, pak f je stejnoměrně spojitá a tedy spojitá. 2. Pokud f je stejnoměrně spojitá na I, pak f nemusí být absolutně spojitá. Protipříklad je například Cantorova funkce.*

Příklad 2.3 (Cantorova funkce)**.** *Necht $\mathcal{C}$ je Cantorovo diskontinuum (viz [3, str.30 - 31]). Pro $x \in \mathcal{C}$ platí*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n},$$

kde $c_n \in \{0, 2\}$. Potom definujme

$$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{c}_n}{2^n}, \ x \in \mathcal{C},$$

kde

$$\hat{c}_n = \begin{cases} 1 & c_n = 2 \\ 0 & c_n = 0. \end{cases}$$

Pro $x \in [0, 1] \setminus \mathcal{C}$ definujeme $C(x)$ jako

$$C(x) = \sup\{C(y) : y \in \mathcal{C}, y \leq x\}.$$

Z konstrukce Cantorova diskontinua je zřejmé, že $C(x)$ je lokálně konstantní na $[0, 1] \setminus \mathcal{C}$.

Funkce $C(x)$ je monotónní, spojitá a $C'(x) = 0$ s.v., ale později dokážeme, že $C(x)$ není absolutně spojitá.

Důkaz. Funkce $C(x)$ je monotónní:
Nechť $x \leq y$, $x, y \in \mathcal{C}$, potom víme z definice Cantorova diskontinua, že

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{3^n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{3^n} = y,$$

kde $c_n, d_n \in \{0,2\}$. Potom ovšem nutně

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{c}_n}{2^n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{d}_n}{2^n} = C(y).$$

Pro $x \leq y$, $x, y \in [0,1] \setminus \mathcal{C}$ platí

$$C(x) = \sup\{C(z) : z \in \mathcal{C}, z < x\} \leq \sup\{C(z) : z \in \mathcal{C}, z < y\} = C(y),$$

neboť suprémum přes větší množinu je větší.
Pro $x \in \mathcal{C}$ a $y \in [0,1] \setminus \mathcal{C}$, $x \leq y$ a pro $x \in [0,1] \setminus \mathcal{C}$ a $y \in \mathcal{C}$, $x \leq y$ tvrzení plyne z definice. Tedy $C(x)$ je monotónní.

Funkce $C(x)$ je spojitá:
Nejdříve dokážeme spojitost na $\mathcal{C}$. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Mějme $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, že platí $\frac{1}{2^{k_0-1}} < \varepsilon$ a mějme $x, y \in \mathcal{C}, |x-y| < \frac{1}{3^{k_0}}$. Pak pro

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n} \text{ a } y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{3^n}$$

platí

$$\sum_{n=1}^{k_0} \frac{c_n}{3^n} = \sum_{n=1}^{k_0} \frac{d_n}{3^n}.$$

Zřejmě $\sum_{n=k_0}^{\infty} \frac{\hat{c}_n}{2^n} < \varepsilon$ a $\sum_{n=k_0}^{\infty} \frac{\hat{d}_n}{2^n} < \varepsilon$. Pak dostaneme

$$\begin{aligned} |C(x) - C(y)| &= \Big|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{c}_n}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{d}_n}{2^n}\Big| = \\ &= \Big|\sum_{n=k}^{k_0} \frac{\hat{c}_n}{2^n} - \sum_{n=k}^{k_0} \frac{\hat{d}_n}{2^n} + \sum_{n=k_0}^{\infty} \frac{\hat{c}_n}{2^n} - \sum_{n=k_0}^{\infty} \frac{\hat{d}_n}{2^n}\Big| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Na množině $[0,1] \setminus \mathcal{C}$ je $C(x)$ lokálně konstantní a tedy spojitá.
Nechť $z \in \mathcal{C}$ libovolné. Dokážeme spojitost zprava. Spojitost zleva se dokáže analogicky. Rozdělíme na dva případy:
1. Existuje $\delta > 0$ takové, že $P_+(z,\delta) \cap \mathcal{C} = \emptyset$.
Z kontrukce Cantorova diskontinua existuje $x_1 \in \mathcal{C}$ takové, že na intervalu $[z, x_1]$ je $C(x)$ konstatní a navíc z definice $C(x)$ víme, že $C(x_1) = C(z)$. Tedy $C(x)$ je v z zprava spojitá.
2. Volme $\{z_n\} \in [0,1]$, $z_n > z$ a $z_n \to z$ libovolně. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ a $\{x_n\} \in \mathcal{C}$ takové, že pro všechny $n > n_0$ platí $x_n > z_n$ a $x_n \to z$. Potom ze spojitosti $C(x)$ na Cantorově diskontinuu plyne $C(x_n) \to C(z)$. Pak ovšem z monotonie máme $C(z) \leq C(z_n) \leq C(x_n)$ a z Věty o dvou policajtech dostáváme tvrzení. Tedy $C(x)$ je spojitá na $[0,1]$.

Platí $C'(x) = 0$ s.v:
Stačí dokázat, že $\lambda(\mathcal{C}) = 0$, protože na $[0,1) \setminus \mathcal{C}$ je $C(x)$ lokálně konstatní, a tedy má nulovou derivaci. Uvědomme si, že $(0,1) \setminus C$ je neprázdná otevřená množina v $\mathbb{R}$ ($\mathcal{C}$ je kompaktní, a tedy uzavřená) a platí (viz. [3, str. 31])

$$[0,1] \setminus \mathcal{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{k,n},$$

kde

$$\lambda(I_{k,n}) = \frac{1}{3^n}.$$

Pak ovšem

$$\lambda(\mathcal{C}) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \lambda(I_{k,n}) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{3^n} = 0.$$

□

Lemma 2.4. *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Pak $f \in AC(I)$ právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechny konečné systémy intervalů*

$$\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n, (a_i, b_i) \subset [a, b], i = 1, \ldots, n; (a_i, b_i) \cap (a_j, b_j) = \emptyset \text{ pro } i \neq j$$

pro které

$$\sum_{i=1}^n b_i - a_i < \delta, \text{ platí } \Big|\sum_{i=1}^n f(b_i) - f(a_i)\Big| < \varepsilon.$$

Důkaz. "$\Rightarrow$"
Nechť $f \in AC(I)$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ najdeme $\delta > 0$ tak, že pro každý konečný po dvou disjunktní systém $\{(a_i, b_i)\} \subset I$ takový, že $\sum_{i=1}^n b_i - a_i < \delta$ platí $\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$. Pak máme:

$$\Big|\sum_{i=1}^n f(b_i) - f(a_i)\Big| \leq \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f_(a_i)| < \varepsilon.$$

"$\Leftarrow$" Nechť $\varepsilon > 0$, pak najdeme $\delta > 0$ tak, že pro každý konečný po dvou disjunktní systém $\{(a_i, b_i)\} \subset I$ takový, že $\sum_{i=1}^n b_i - a_i < \delta$ platí

$$\Big|\sum_{i=1}^n f(b_i) - f(a_i)\Big| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.1}$$

Nechť I je množina indexů $i \in \{1, \ldots, n\}$, pro ktere platí $f(b_i) - f(a_i) \geq 0$. Nechť J je množina indexů $i \in \{1, \ldots, n\}$, pro které platí $f(b_i) - f(a_i) < 0$. Zjevně platí $I \cup J = \{1, \ldots, n\}$. Potom z (2.1) máme

$$\sum_{i \in I} |f(b_i) - f(a_i)| = \sum_{i \in I} f(b_i) - f(a_i) < \frac{\varepsilon}{2}$$

a

$$\sum_{i \in J} |f(b_i) - f(a_i)| = -\sum_{i \in J}^n f(b_i) - f(a_i) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pak dostáváme

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \big|f(b_i) - f(a_i)\big| &\leq \sum_{i \in I} |f(b_i) - f(a_i)| + \sum_{i \in J} |f(b_i) - f(a_i)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

a tedy $f \in AC(I)$. □

Lemma 2.5. *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f: I \to \mathbb{R}$. Pak platí:*
1. f je lipschitzovská na $I \Rightarrow f \in AC(I)$.
2. f je diferencovatelná na I a existuje $K > 0$ tak, že platí $|f'| < K$ na $I \Rightarrow f \in AC(I)$.

Důkaz. 1. Nechť $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$, kde K je lipschitzovská konstanta funkce f. Nechť $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n \in I$ je systém disjunktních intervalů takový, že $\sum_{i=1}^n b_i - a_i < \delta$. Potom máme

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| \leq K \sum_{i=1}^n |b_i - a_i| \leq K\delta = \frac{K\varepsilon}{K} = \varepsilon.$$

2. Uvědomme si, že f je lipschitzovská, neboť podle Lagrangeovy věty platí

$$|f(x) - f(y)| \leq \sup_{\xi \in I}\{|f'(\xi)|\}|x - y|, x, y \in I.$$

Z 1. potom dostáváme tvrzení lemmatu. □

Lemma 2.6. *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je uzavřený, omezený interval a $f \in AC(I)$. Pak platí $f \in BV(I)$.*

Důkaz. Položme $\varepsilon = 1$. Pak existuje $\delta > 0$ tak, že pro každý konečný systém podintervalů, pro který platí

$$\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n, (a_i, b_i) \subset I, i = 1, \ldots, n; (a_i, b_i) \cap (a_j, b_j) = \emptyset \text{ pro } i \neq j$$

a

$$\sum_{i=1}^n b_i - a_i < \delta,$$

platí

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < 1.$$

Položme $n = \left[\frac{2(b-a)}{\delta}\right]$. Zvolme D dělení intervalu I jako

$$D = \{a + i\frac{b-a}{n}, i = 1, \ldots, n\}.$$

Protože $\frac{b-a}{n} < \delta$, platí $\mathrm{var}(f, [x_i, x_{i+1}]) < 1$, kde x_i jsou dělící body příslušné dělení D. Potom podle Poznámky 1.3 c) platí

$$\mathrm{var}(f, [a, b]) = \sum_{i=1}^n \mathrm{var}(f, [x_{i-1}, x_i]) < n < \frac{2(b-a)}{\delta} < \infty.$$

□

Důsledek 2.7. *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ a $f \in AC_{loc}(I)$. Pak existuje f' s.v..*

Poznámka 2.8. *Z lemmatu plyne AC(I) $\subset$ C(I) $\cap$ BV(I), pro I omezený interval, ale neplatí rovnost. Protipříkladem je opět Cantorova funkce.*

Pokud $I \subset \mathbb{R}$ je neomezený interval, pak tvrzení lemmatu neplatí. Protipříkladem je například fce $f(x) = x$ na $I = (0, \infty)$. Funkce f je na I 1-lipschitzovská funkce (a tedy $f \in AC(I)$), ale f nemá omezenou variaci, neboť var(f,I) $= \infty$.

Lemma 2.9. *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je omezený, uzavřený interval. Pak pro $f_1, f_2 \in AC(I)$ a $c_1, c_2 \in R$ platí $c_1 f_1 + c_2 f_2 \in AC(I)$ a $f_1 f_2 \in AC(I)$. Navíc, je-li $f \in AC(I)$ a platí-li pro všechna $x \in [a,b]$, $f(x) > 0$, pak $\frac{1}{f} \in AC(I)$.*

Důkaz. Nechť $\varepsilon > 0$. Najdeme $\delta > 0$ tak, že pro libovolný konečný disjunktní systém

$$\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n, (a_i, b_i) \subset [a,b], i = 1, \ldots, n$$

takový, že $\sum_{i=1}^n b_i - a_i < \delta$ platí $\sum_{i=1}^n |f_j(b_i) - f_j(a_i)| < \varepsilon, j = 1, 2$. Potom máme:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |(c_1 f_1 + c_2 f_2)(b_i) - (c_1 f_1 + c_2 f_2)(a_i)| = \\
&= \sum_{i=1}^n |c_1 f_1(b_i) - c_1 f_1(a_i) + c_2 f_2(b_i) - c_2 f_2(a_i)| \\
&\leq |c_1| \sum_{i=1}^n |f_1(b_i) - f_1(a_i)| + |c_2| \sum_{i=1}^n |f_2(b_i) - f_2(a_i)| \\
&\leq |c_1|\varepsilon + |c_2|\varepsilon.
\end{aligned}$$

A tedy i $c_1 f_1 + c_2 f_2 \in AC(I)$.
Dále

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |f_1(b_i) f_2(b_i) - f_1(a_i) f_2(a_i)| &\leq \sum_{i=1}^n |f_1(b_i)(f_2(b_i) - f_2(a_i))| \\
&\quad + \sum_{i=1}^n |f_2(a_i)(f_1(b_i) + f_1(a_i))| \\
&\leq \sup_{x \in I}\{|f_1(x)|\}\varepsilon + \sup_{x \in I}\{|f_2(x)|\}\varepsilon < 4c\varepsilon,
\end{aligned}$$

kde $c = \max_{i=1,2} \sup_{x \in I}\{|f_i(x)|\}$. Suprém v maximu je nabyto, protože $f_i, i = 1, 2$ jsou spojité funkce na kompaktu. A tedy $f_1 f_2 \in AC(I)$.

Dále nechť $m = \inf_{x \in I}\{|f(x)|\}$. Infíma je nabyto, neboť f je spojitá na kompaktním $I \subset \mathbb{R}$. Máme tedy

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{1}{f(b_i)} - \frac{1}{f(a_i)} \right| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{f(a_i) - f(b_i)}{f(a_i) f(b_i)} \right| \leq \frac{1}{m^2} \quad \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| \leq \frac{1}{m^2}\varepsilon,$$

a tedy $\frac{1}{f} \in AC(I)$. □

Poznámka 2.10. *Pokud $I \subset \mathbb{R}$ je pouze omezený interval a nikoliv uzavřený, pak pro $f > 0$ nemusí platit, že $\frac{1}{f} \in AC(I)$. Položme $I = (0,1)$ a $f(x) = x$. Pak $f \in AC(I)$, neboť f je 1-lipschitzovská funkce, ale $\frac{1}{f} \notin AC(I)$, neboť $\frac{1}{f}$ není stejnoměrně spojitá.*

Lemma 2.11. *Nechť $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ a $f \in AC(I)$. Pak $V(f; a, x) \in AC(I)$.*

Důkaz. Důkaz je převzat z [4, str. 68] a doplněn detaily.
Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné, k němu najdeme $\delta > 0$ z definice absolutní spojitosti f.

Nechť $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n, (a_i, b_i) \subset [a, b], (a_i b_i) \cap (a_j, b_j) = \emptyset, i \neq j$ a $\sum_{i=1}^n b_i - a_i < \delta$. Pro všechna $i = 1, \dots, n$ najdeme D_i dělení intervalu (a_i, b_i)

$$D_i = \{a_i = x_i^1 \leq x_i^1 \leq \dots \leq x_i^{k_i} = b_i\}$$

takové, že

$$V(f; a_i, b_i) < \sum_{j=1}^{k_i} |f(b_i^j) - f(a_i^j)| + \frac{\varepsilon}{n}.$$

Potom

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} x_i^{j+1} - x_i^j = \sum_{i=1}^n b_i - a_i < \delta,$$

a tedy

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} |f(b_i^j) - f(a_i^j)| < \varepsilon.$$

Pak podle Poznámky 1.3 c) máme

$$\sum_{i=1}^n |V(f; a, a_i) - V(f; a, b_i)| =$$

$$= \sum_{i=1}^n |V(f; a_i, b_i)| \leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{k_i} |f(a_i^j) - f(b_i^j)| \right) + \frac{\varepsilon}{n} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} |f(a_i^j) - f(b_i^j)| \right) + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

□

Důsledek 2.12. *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ a $f \in AC(I)$. Pak existují $f_1, f_2 \in AC(I)$ neklesající tak, že $f(x) = f_1(x) - f_2(x), x \in I$.*

Důkaz. Z Jordanovy věty víme, že f je rozdílem dvou neklesajících funkcí a z jejího důkazu víme, že můžeme volit $f_1(x) = V(f; a, x)$ a $f_2 = (V(f; a, x) - f(x))$. Podle Lemmatu 1.22 platí $V(f; a, x) \in AC(I)$ a podle Lemmatu 1.20 je rozdíl dvou absolutně spojitých funkcí absolutně spojitá funkce □

3. Vztah AC a BV funkcí na $\mathbb{R}$

Důkazy tvrzení 3.3, 3.4, 3.6 a 3.10 jsou převzaty z [3, str. 77 - 81] a doplněny detaily. Důkaz tvrzení 3.8 je z [4, str. 70 - 71].

Definice 3.1. *Nechť $E \subset \mathbb{R}$ je měřitelná a $u : E \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce. Pak řekneme, že u je ekviintegrovatelná, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechny $F \subset E$, $\lambda(F) < \delta$, platí*

$$\int_F |u| d\lambda < \varepsilon.$$

Poznámka 3.2. *Nechť $E \subset \mathbb{R}$ je měřitelná a $u \in L^p(E)$, kde $p \in [1, \infty)$. Pak u je ekviintegrovatelná, neboť Lebesgueův integrál je absolutně spojitý. Viz [4, str. 72].*

Pokud $u \in L^1_{loc}(E)$, pak u nemusí být ekviintegrovatelná. Položme $E = (0,1)$ a $u(x) = \frac{1}{x}$. Funkce u je zjevně měřitelná (protože je spojitá) a lokálně integrovatelná, ale pokud za množinu F budeme volit $F = (0, \delta), 0 < \delta < 1$, pak platí $\lambda(F) \leq \delta$ a

$$\int_F |u| d\lambda = \int_0^\delta |u(x)| dx = \infty,$$

a tedy u není ekviintegrovatelná.

Lemma 3.3. *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f : I \to \mathbb{R}$. Nechť existuje $E \subset I$ a $M \geq 0$ tak, že f je diferencovatelná pro všechna $x \in E$ a $|f'(x)| \leq M$. Potom*

$$\lambda(f(E)) \leq M \lambda(E)$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $E \subset I^0$. Nechť $\varepsilon > 0$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme

$$E_n = \{x \in E : \text{ pro všechny} J \subset I, \ J \text{ interval}, \ 0 < \lambda(J) < \frac{1}{n}, \text{ a } x \in J,$$
$$\text{platí, že } \lambda(f(J)) < (M + \varepsilon)\lambda(J)\}.$$

Je zřejmé, že $E_n \subset E$ a $E_n \subset E_{n+1}$. Chceme dokázat, že $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Protože $E_n \subset E$, stačí ukázat, že pro $x \in E$ existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $x \in E_n$. Zvolme $x \in E$ libovolné pevné. Protože $|f'(x)| < M$ a

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(y) - f(x)| < (M + \varepsilon)|y - x|$, pro všechna $y \in I$ takové, že $|y - x| < \delta$. Nechť $y, y' \in I$ a $|y - y'| < \delta$ a $y < x < y'$. Potom

$$\begin{aligned} |f(y) - f(y')| &\leq |f(y) - f(x)| + |f(x) - f(y')| \leq \\ &\leq (M + \varepsilon)(y - x) + (M + \varepsilon)(x - y') = (M + \varepsilon)(y - y'). \end{aligned}$$

Tedy $x \in E_n$ pro $n > \frac{1}{\delta}$.

Nyní zvolme $n \in \mathbb{N}$ pevné a chceme dokázat, že

$$\lambda(f(E_n)) < (M+\varepsilon)(\lambda(E_n)+\varepsilon).$$

Protože λ je Radonova míra, najdeme otevřenou množinu U_n, $E_n \subset U_n$, tak, že platí

$$\lambda(U_n) \leq \lambda(E_n) + \varepsilon.$$

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $U_n \subset I$. Z věty o charakterizaci otevřené množiny v $\mathbb{R}$ a pokrytím jednotlivých otevřených intervalů disjunktními otevřenými intervaly délky nejvýše $\frac{1}{n}$ dostáváme, že

$$U_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_n^k \cup N,$$

kde J_n^k jsou otevřené disjuktní intervaly pro které platí

$$0 < \lambda(J_n^k) < \frac{1}{n},$$

a N je nejvýše spočetná množina, a tedy $\lambda(f(N)) = 0$. Položme

$$\mathcal{I} = \{k : J_n^k \cap E_n \neq \emptyset\}.$$

Všimeme si, že z definice E_n platí pro $k \in \mathcal{I}$

$$\lambda(f(J_n^k)) \leq (M+\varepsilon)\lambda(J_n^k),$$

a tedy

$$\begin{aligned}
\lambda(f(E_n)) &\leq \lambda(\bigcup_{k\in\mathcal{I}} f(J_n^k)) \leq \sum_{k\in\mathcal{I}} \lambda(f(J_n^k)) \leq \\
&\leq (M+\varepsilon)\sum_{k\in\mathcal{I}} \lambda(J_n^k) \leq (M+\varepsilon)\lambda(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} J_n^k) = (M+\varepsilon)\lambda(U_n) \leq \\
&\leq (M+\varepsilon)(\lambda(E_n)+\varepsilon).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Protože λ je Radonova míra a $E_n \subset E_{n+1}$ platí, že

$$\lambda(E) = \lim_{n\to\infty} \lambda(E_n),$$

a protože $f(E_n)$ jdou zdola monotonně k $f(E)$ platí

$$\lambda(f(E)) = \lim_{n\to\infty} \lambda(f(E_n)).$$

Limitním přechodem v (3.1) dostaneme

$$\lambda(f(E)) \leq (M+\varepsilon)(\lambda(E)+\varepsilon).$$

Nyní nechť $\varepsilon \to 0_+$ a dostáváme tvrzení Lemmatu. $\square$

Důsledek 3.4. *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f : I \to \mathbb{R}$. Nechť existuje $E \subset \mathbb{R}$ tak, že f je diferencovatelná pro všechna $x \in E$. Nechť platí alespoň jedna z následujících podmínek*
(i) $\lambda(E) = 0$,
(ii)$f'(x) = 0$ pro $x \in E$.
Pak $\lambda(f(E)) = 0$.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $\lambda(E) = 0$. Pak po každé $n \in \mathbb{N}$ položme $E_n = \{x \in E : |f'(x)| < n\}$. Z diferencovatelnosti f je zřejmé, že platí

$$E = \bigcup_{n \in N} E_n.$$

Pak ovšem máme z předchozího Lemmatu

$$\lambda(f(E)) = \lambda(f(\bigcup_{n \in N} E_n)) \leq \sum_{n \in N} \lambda(f(E_n)) \leq \sum_{n \in N} n\lambda(E_n) = 0.$$

Nechť $f'(x) = 0$, pro všechna $x \in E$. Pak můžeme volit $M = 0$ a položme pro $k \in \mathbb{N}$, $E_k = E \cap [-k, k]$. Triviálně $E = \bigcup E_k$ a použitím předchozího Lemmatu dostáváme

$$\lambda(f(E)) = \lambda(f(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k)) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(f(E_k)) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} 0\lambda(E_k) = 0.$$

□

Poznámka 3.5. *Povšimeme si, že Cantorova funkce $C(x)$ zobrazuje množinu míry 1 na množinu míry nula, neboť $\lambda([0,1] \setminus \mathcal{C}) = 1$ a C(x) je lokálně konstatní na $[0,1] \setminus \mathcal{C}$ a $C([0,1] \setminus \mathcal{C})$ je spočetná a má nulovou míru. Tedy $\lambda(C(\mathcal{C})) = 1$, protože $C(x)$ je Darbouxovská funkce a zobrazuje interval $[0,1]$ na interval $[0,1]$.*

Lemma 3.6. *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f : I \to \mathbb{R}$ je měřitelná. Nechť f je diferencovatelná na měřitelné množině $E \subset I$. Potom*

$$\lambda(f(E)) \leq \int_E |f'(x)| dx.$$

Důkaz. Lemma dokážeme v několika krocích.
1. Měřitelnost $f(E)$.
Z vlastností měřitelných množin lze psát E jako

$$E = \bigcup_n K_n \cup E_0,$$

kde K_n jsou kompaktní a $\lambda(E_0) = 0$ (viz [4, str. 48]). Podle Důsledku 3.4 platí, že $\lambda(f(E_0)) = 0$. Dále $f(K_n)$ jsou kompaktní, neboť f je spojitá (z diferencovatelnosti) a spojitý obraz kompaktu je kompaktní, a tedy $f(K_n)$ jsou měřitelné. Tedy $f(E) = \bigcup_n f(K_n) \cup f(E_0)$ je měřitelná.
2. Předpokládejme, že $\lambda(E) < \infty$.
Zvolme libovolné pevné $n \in \mathbb{N}$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ položme

$$E_n^k = \left\{x \in E : \frac{k-1}{2^n} \leq |f'(x)| < \frac{k}{2^n}\right\}.$$

Pozorujeme, že E_n^k jsou po dvou disjunktní množiny. Pak platí

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_n^k$$

a použitím Lemmatu 1.25 máme

$$\begin{aligned}
\lambda(f(E)) &= \lambda\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} f\big(E_n^k\big)\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda\big(f(E_n^k)\big) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n}\lambda(E_n^k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{2^n}\lambda(E_n^k) + \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(E_n^k) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_n^k} |f'(x)| dx + \frac{1}{2^n}\lambda(E) \leq \int_E |f'(x)| dx + \frac{1}{2^n}\lambda(E).
\end{aligned}$$

Limitním přechodem pro $n \to \infty$ dostáváme tvrzení.

3. Nyní předpokládejme, že $\lambda(E) = \infty$.

Položme

$$E_k = E \cap (k, k+1].$$

Pak použitím předchozího bodu máme

$$\begin{aligned}
\lambda(f(E)) &= \lambda\left(f\Big(\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} E_k\Big)\right) \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda(f(E_k)) \\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{E_k} |f'(x)| dx = \int_E |f'(x)| dx.
\end{aligned}$$

□

Důsledek 3.7. *Nechť* $[a, b] \subset \mathbb{R}$*. Nechť* $f : [a, b] \to R$ *je spojitá a má všude derivaci na* $[a, b]$*. Pak platí*

$$|f(b) - f(a)| \leq \lambda(f([a, b])) \leq \int_a^b |f'(x)| dx.$$

Lemma 3.8. *Nechť* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *a* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *je neklesající. Potom platí*

$$\int_a^b f'(x) dx \leq f(b) - f(a).$$

Důkaz. Dodefinujeme f pro $x > b$ jako $f(b) = f(x)$ a pro $x < a$ jako $f(x) = f(a)$. Potom pro $k \in \mathbb{N}$ definujeme funkce f_k jako

$$f_k(x) = k\Big(f(x + \frac{1}{k}) - f(x)\Big) = \frac{f(x + \frac{1}{k}) - f(x)}{\frac{1}{k}}, x \in [a, b].$$

Funkce f_k jsou měřitelné, neboť f je měřitelná, a nezáporné na $[a,b]$ a podle Věty 1.6 platí pro skoro všechna $x \in [a,b]$

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f'(x).$$

Potom dle Fatouova lemmatu a lineární substituce máme

$$\begin{aligned}
\int_a^b f'(x)dx &= \int_a^b \lim_{k\to\infty} f_k(x)dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)dx \\
&= \liminf_{k\to\infty} k \int_a^b \Big(f(x+\frac{1}{k}) - f(x)\Big)dx \\
&= \liminf_{k\to\infty} k\Big(\int_{a+\frac{1}{k}}^{b+\frac{1}{k}} f(x) - \int_a^b f(x)\Big)dx.
\end{aligned}$$

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a + \frac{1}{k} < b$, a máme

$$\liminf_{k\to\infty} k\Big(\int_{a+\frac{1}{k}}^{b+\frac{1}{k}} f(x) - \int_a^b f(x)\Big)dx = \liminf_{k\to\infty} k\Big(\int_b^{b+\frac{1}{k}} f(x) - \int_a^{a+\frac{1}{k}} f(x)\Big)dx.$$

Protože f je konstantní na $[b, b+\frac{1}{k}]$ máme

$$\liminf_{k\to\infty} k\Big(\int_b^{b+\frac{1}{k}} f(x) - \int_a^{a+\frac{1}{k}} f(x)\Big)dx = \liminf_{k\to\infty} k\frac{f(b)}{k} - k\int_a^{a+\frac{1}{k}} f(x)dx$$

Nakonec, protože f je neklesající platí

$$\liminf_{k\to\infty} k\frac{f(b)}{k} - \int_a^{a+\frac{1}{k}} f(x)dx \leq \liminf_{k\to\infty} \Big(f(b) - k\frac{f(a)}{k}\Big) = f(b) - f(a).$$

□

Důsledek 3.9. *Nechť* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *a* $f \in BV([a,b])$. *Potom* $f' \in L^1([a,b])$.

Důkaz. Podle Jordanovy věty platí $f = f_1 - f_2$, kde f_1, f_2 jsou neklesající. Tedy

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f'(x)|dx = \int_a^b |f_1'(x) - f_2'(x)|dx &\leq \int_a^b |f_1'(x)|dx + \int_a^b |f_2'(x)|dx \\
&\leq |f_1(b) - f_1(a)| + |f_2(b) - f_2(a)| < \infty.
\end{aligned}$$

Tedy $f' \in L^1([a,b])$. □

Věta 3.10 (Luzinova N-podmínka)**.** *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Funkce $f : I \to \mathbb{R}$ je lokálně absolutně spojitá právě tehdy, když jsou splněny všechny následující podmínky*
(i) f je spojitá na I,
(ii) f má derivaci s.v na I a $f' \in L^1_{loc}(I)$,
(iii) f zobrazuje množinu míry nula na množinu míry nula neboli, pro každou $N \subset I$ takovou, že $\lambda(N) = 0$ platí $\lambda(f(N)) = 0$.
Podmínka (iii) se nazýva Luzinova N-podmínka.

Důkaz. "$\Leftarrow$"
Nechť $[a, b] \subset I$. Nechť $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n$ je systém intevalů, pro který platí $(a_k, b_k) \subset I, k = 1, \dots n$, $(a_k, b_k) \cap (a_i, b_i) = \emptyset, k \neq i$. Položme

$$E_k = \{x \in (a_k, b_k) : f'(x) \text{ existuje}\}.$$

Protože f je s.v. diferencovatelná, platí

$$\lambda((a_k, b_k) \setminus E_k) = 0,$$

a protože f zobrazuje množiny míry 0 na množiny míry 0 platí

$$\lambda(f((a_k, b_k) \setminus E_k)) = 0.$$

Protože f je spojitá a tedy Darbouxovská, f nabývá všechny hodnoty mezi $f(a_k)$ a $f(b_k)$. Tedy otevřený interval s krajními hodnotami $f(a_k)$ a $f(b_k)$ je podmnožina $f((a_k, b_k))$. Tedy podle Lemmatu 3.6 platí

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| &\leq \sum_{k=1}^n \lambda(f((a_k, b_k))) \leq \sum_{k=1}^n \lambda(f(E_k)) \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{E_k} |f'(x)| dx = \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} |f'(x)| dx.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Protože $f'(x)$ je integrovatelná na $[a_k, b_k]$, je i ekviintegrovatelná. Tedy zvolíme-li $\varepsilon > 0$, existuje $\delta > 0$ takové, že pro $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$ platí

$$\sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} |f'(x)| dx < \varepsilon.$$

Dohromady s (3.2) dostaneme $f \in AC([a, b])$.
"$\Rightarrow$"
Nechť $f \in AC_{loc}(I)$. Zvolme $[a, b] \subset I$ libovolně. Funkce f je zřejmě spojitá. Funkce f má podle Důsledku 2.7 derivaci skoro všude a podle Důsledku 3.9 a Lemmatu 2.6 platí $f' \in L^1([a, b])$. Stačí dokázat, že f zobrazuje množiny míry nula na množinu míry nula.

Zvolme $F \subset [a, b]$, $\lambda(F) = 0$ a $\varepsilon > 0$ libovolně. K ε najdeme z definice absolutní spojitosti $\delta > 0$. Protože λ je regulární míra, existuje $A \subset [a, b]$ otevřená taková, že $F \subset A$ a $\lambda(A) < \delta$. Množinu A můžeme podle věty o charakterizaci otevřené množiny psát jako

$$A = \bigcup_{k=1}^\infty I_k,$$

kde I_k jsou otevřené, po dvou disjunktní intervaly. Položme $J_k = I_k \cap [a,b]$. Protože f je spojitá, můžeme najít $a_k, b_k \in J_k$ takové, že platí

$$f(a_k) = \inf_{x \in \overline{J_k}} \{f(x)\} \text{ a } f(b_k) = \sup_{x \in \overline{J_k}} \{f(x)\}.$$

Tedy $\overline{f(J_k)} = [f(a_k), f(b_k)]$. Protože $\lambda(A) < \delta$ platí, že $\sum_k (b_k - a_k) < \delta$, a tedy z absolutní spojistosti f máme

$$\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Tedy máme

$$\begin{aligned}\lambda(f(F)) &\leq \lambda(f(A \cap [a,b])) \leq \sum_k \lambda(f(J_k)) \leq \sum_k \lambda(f(\overline{J_k})) \\ &\leq \sum_k \lambda([f(a_k), f(b_k)]) = \sum_k |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo voleno libovolně, platí $\lambda(f(F)) = 0$. □

Poznámka 3.11. *Množiny E_k v první části důkazu Luzinovy N-podmínky jsou Borelovské a věta platí, i pokud f zobrazuje Borelovské množiny míry nula na množiny míry nula.*

Věta 3.12 (Vztah AC a BV funkcí na $\mathbb{R}$)**.** *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Funkce $f : I \to \mathbb{R}$ je lokálně absolutně spojitá právě tehdy, když jsou splněny všechny následující podmínky:*
(i) f je spojitá na I,
(ii) $f \in BV_{loc}(I)$,
(iii) f zobrazuje množinu míry nula na množinu míry nula neboli, pro každou $N \subset I$ takovou, že $\lambda(N) = 0$, platí $\lambda(f(N)) = 0$.

Důkaz. "$\Rightarrow$"
Nechť $f \in AC_{loc}(I)$. Potom f je zřejmě spojitá a podle Lemmatu 2.6 $f \in BV_{loc}(I)$. Nakonec podle Věty 3.10 f zobrazuje množinu míry nula na množinu míry nula.
"$\Leftarrow$"
Nechť f splňuje podmínky $(i) - (iii)$. Potom podle Věty 3.10 stačí dokázat, že f má derivaci skoro všude a $f' \in L^1_{loc}(I)$. Podle Lemmatu 1.7 má f derivaci s.v a podle Důsledku 3.9 $f' \in L^1_{loc}(I)$. □

Důsledek 3.13. *Cantorova funkce není absolutně spojitá.*

Důkaz. Podle Poznámky 3.5 víme, že $C(x)$ zobrazuje Cantorovo diskontinuum, což je množina míry 0, na množinu míry 1. Tedy podle předchozí věty $C(x)$ není absolutně spojitá. □

Věta 3.14 (Základní věta kalkulu pro Lebesgueův integrál)**.** *Nechť $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a $f \in AC([a,b])$. Potom platí*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt.$$

Důkaz. Z Důsledku 2.12 víme, že $f = f_1 - f_2$, kde $f_1, f_2 \in AC([a,b])$ a f_1, f_2 jsou neklesající. Speciálně platí $f' = f_1' - f_2'$ s.v. a platí $f_1', f_2' \geq 0$. Označme $E = \{x \in [a,b] : f'(x)$ existuje. Potom $\lambda([a,b] \setminus E) = 0$, a tedy podle Věty 3.10 platí

$$\lambda(f([a,b] \setminus E)) = 0.$$

Podobně platí $\lambda(f_1([a,b] \setminus E)) = 0$. Je tedy možno použit Lemma 3.6, neboť

$$\lambda(f_1([a,x])) = f_1(x) - f_1(a) \geq 0$$

a $f_1' \geq 0$, a tedy platí

$$f_1(x) - f_1(a) \leq \int_a^x f_1'(t)dt.$$

Potom pro f_1 platí s použitím Lemmatu 3.8

$$f_1(x) - f_1(a) = \int_a^b f_1'(t)dt. \tag{3.3}$$

Analogicky platí (3.3) pro f_2. Tedy pro f platí

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= f_1(x) - f_1(a) - (f_2(x) - f_2(a)) \\ &= \int_a^x f_1'(t)dt - \int_a^x f_2'(t)dt = \int_a^x f'(t)dt. \end{aligned}$$

□

4. Vztah AC a BV funkcí v $\mathbb{R}^n$

Definice 4.1. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ a $A \subset \Omega$. Definujeme $\mathrm{osc}_A f$ jako*

$$\mathrm{osc}_A f = \mathrm{diam}(f(A)).$$

Definice 4.2. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $0 < \alpha \leq 1$. Nechť $A \subset \Omega$ je otevřená a $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$. Definujeme V_n^α jako*

$$V_\alpha^n(f, A) = \sup\{ \sum_i (\mathrm{osc}_{B(x_i, \alpha r_i)} f)^n : \{B(x_i, r_i)\} \text{ je systém po dvou disjuktních koulí v } A\}.$$

Řekneme, že f má omezenou n, α-variaci na Ω (značíme $f \in BV_\alpha^n(\Omega)$) právě tehdy, když $V_\alpha^n(f, \Omega) < \infty$.

Definice 4.3. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $0 < \alpha \leq 1$. Nechť $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Řekneme, že f je n, α-absolutně spojitá právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro libovolný konečný disjunktní systém koulí v Ω, pro který*

$$\sum_i \lambda^n(B(x_i, r_i)) < \delta$$

platí

$$\sum_i (\mathrm{osc}_{B(x_i, \alpha r_i)} f)^n < \varepsilon.$$

Prostor všech n, α-absolutně spojitých funkcí v $BV_\alpha^n(\Omega)$ značíme $AC_\alpha^n(\Omega)$.

Definice 4.4. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$. Řekneme, že funkce f splňuje RR_α-podmínku (Rado-Reichelderfer), pokud existuje funkce $g \in L^1(\Omega)$ (g nazýváme váha) taková, že platí*

$$(\mathrm{osc}_{B(x, \alpha r)} f)^n \leq \int_{B(x,r)} g d\lambda^n,$$

pro každou kouli $B(x, r) \subset \Omega$.

Definice 4.5. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$. Řekneme, že funkce f splňuje $RR_\alpha^\star$-podmínku (Rado-Reichelderfer), pokud existuje konečná Borelovská míra μ taková, že platí*

$$(\mathrm{osc}_{B(x, \alpha r)} f)^n \leq \mu(B(x, r)),$$

pro každou kouli $B(x, r) \subset \Omega$.

Věta 4.6. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$ a $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$.*
(i) f je n, α_1-absolutně spojitá, právě když f je n, α_2-absolutně spojitá.
(ii) $BV_{\alpha_1}^n(\Omega) = BV_{\alpha_2}^n(\Omega)$.
(iii) $AC_{\alpha_1}^n(\Omega) = AC_{\alpha_2}^n(\Omega)$.

Věta 4.7. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $0 < \alpha \leq 1$. Potom platí $RR_\alpha(\Omega) = AC_\alpha^n(\Omega)$.*

Věta 4.8. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $0 < \alpha \leq 1$. Potom platí $RR_\alpha^\star(\Omega) = BV_\alpha^n(\Omega)$.*

Důkazy Vět 4.6 až 4.8 lze najít v [2] a pro $\alpha = 1$ v [1]

Následující věta ukazuje, že přímá analogie Věty 3.12 neplatí ve vyšší dimenzi.

Věta 4.9. *Existuje funkce $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2$, pro kterou platí:*
(i) f je spojitá.
(ii) $f \in BV_1^2([0,1]^2, \mathbb{R}^2)$.
(iii) f zobrazuje množiny míry nula na množiny míry nula.
(iv) $f \notin AC_1^2([0,1]^2, \mathbb{R}^2)$.

Důkaz. Podle [1, str.10, Theorem 5] existuje spojitá funkce $g : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ taková, že $g \in BV_1^2([0,1]^2)$, ale $g \notin AC_1^2([0,1]^2)$. Položme $f(x,y) = (g(x,y), 0)$. Potom f zobrazuje $[0,1]^2$ na úsečku, a tedy platí (iii). Zbylé vlastnosti se snadno ověří. □

Mohla by však platit následující hypotéza.

Hypotéza 4.10. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$. Nechť $0 < \alpha \leq 1$. Pak $f \in AC_\alpha^n(\Omega)$ právě tehdy, když platí následující podmínky:*
(i) $f \in BV_\alpha^n(\Omega)$.
(ii) Existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že pro každou $E \subset \Omega$, $\lambda^n(E) = 0$, platí: Pro každé $\varepsilon > 0$ existují systémy po dvou disjunktních koulí $\{B^j(x_i, r_i)\}_i$, pro $j = 1, \dots, k$ a $B_i^j = B^j(x_i, r_i) \subset \Omega$ takové, že $E \subset \bigcup_{i,j} B_i^j$, a platí $\sum_{i,j} (\operatorname{osc}_{B^j(x_i, \alpha r_i)} f)^n < \varepsilon$.

Ukážeme, že hypotéza plati v jedné dimenzi.

Věta 4.11 (Besicovitch)**.** *Existuje $M \in \mathbb{N}$ závisející pouze na dimenzi n s následující vlastností: Je-li r omezená, kladná funkce na $E \subset \mathbb{R}^n$, potom existují množiny $A_1, \dots, A_M \subset E$ takové, že*

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{M} \bigcup_{x \in A_i} B(x, r(x))$$

a pro každé $i = 1, \dots, M$ je systém koulí $\{B(x, r(x)) : x \in A_i\}$ po dvou disjunktní.

Věta 4.12. *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f : I \to \mathbb{R}$. Pak $f \in AC_{loc}^n(I)$ právě tehdy, když platí následující podmínky:*
(i) $f \in BV_{loc}^n(I)$.
(ii) Existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že pro každou $E \subset I$, $\lambda(E) = 0$, platí: Pro každé $\varepsilon > 0$ existují systémy po dvou disjunktních koulí $\{B^j(x_i, r_i)\}_i$, pro $j = 1, \dots, k$ a $B_i^j = B^j(x_i, r_i) \subset I$ takové, že $E \subset \bigcup_{i,j} B_i^j$, a platí $\sum_{i,j} (\operatorname{osc}_{B^j(x_i, r_i)})^n f < \varepsilon$.

Důkaz. " $\Rightarrow$ " Z Lemmatu 2.6 víme, že $f \in BV_{loc}(I)$. Stačí dokázat, že pro každou $N \subset I$, $\lambda(N) = 0$ platí (ii). Nechť $\{B^j(x_i, r_i)\}_{i=1}^\infty$ je systém koulí z Besicovitchovy věty tak, že $N \subset \bigcup_{i,j} B^j(x_i, r_i)$. Označme $a_i = \operatorname{argmin}_{\overline{B(x_i, r_i)}} f$ a $b_i = \operatorname{argmax}_{\overline{B(x_i, r_i)}} f$. Potom podle Věty 3.14 platí

$$\operatorname{osc}_{B(x_i, r_i)} f = |f(b_i) - f(a_i)| \leq \int_{B(x_i, r_i)} |f'| d\lambda.$$

Tedy máme

$$\sum_{i,j} \operatorname{osc}_{B^j(x_i,r_i)} f \leq \sum_{i,j} \int_{B^j(x_i,r_i)} |f'| d\lambda. \tag{4.1}$$

Nechť $\varepsilon > 0$. Z ekviintegrovatelnosti $|f'|$ najdeme $\delta > 0$. Pro všechna $j = 1, \ldots, M$ $\sum_i \lambda(B^j(x_i, r_i)) < \delta$ a tedy platí

$$\sum_i \int_{B^j(x_i,r_i)} |f'| d\lambda = \int_{\bigcup_i B_i^j} |f'| < \varepsilon.$$

Z (4.1) dostáváme

$$\sum_{i,j} \operatorname{osc}_{B^j(x_i,r_i)} f < M\varepsilon.$$

" $\Leftarrow$ " Podle Věty 3.12 stačí dokázat, že f je spojitá a splňuje N-podmínku.

1. f je spojitá.

Nechť $\varepsilon > 0$. Nechť $x \in I$ je libovolné. Položme $E = \{x\}$. Zjevně $\lambda(E) = 0$. Pak z (ii) existuje pokrytí E koulemi $\{B^j(x_i, r_i)\}_i$ tak, že $\sum_{i,j} \operatorname{osc}_{B^j(x_i,r_i)} f < \varepsilon$. Pak existuje i takové, že $x \in B^j(x_i, r_i)$. Tedy platí

$$\operatorname{osc}_{B^j(x_i,r_i)} f < \varepsilon.$$

Toto implikuje spojitost f.

2. f zobrazuje množiny míry nula na množiny míry nula.

Nechť $N \subset I$ a $\lambda(N) = 0$. Nechť $\varepsilon > 0$. Potom existuje pokrytí množiny N koulemi $\{B^j(x_i, r_i)\}_{i,j}$ tak, že

$$\sum_{i,j} \operatorname{osc}_{B(x_i,r_i)} f < \varepsilon.$$

Množina $f(N)$ je měřitelná (plyne ze spojitosti) a platí

$$\lambda(f(N)) \leq \sum_{i,j} \operatorname{osc}_{B^j(x_i,r_i)} f.$$

Tedy $\lambda(f(N)) < \varepsilon$. Limitním přechodem $\varepsilon \to 0_+$ dostaneme $\lambda(f(N)) = 0$. $\square$

Nyní ukážeme, proč by hypotéza mohla platit ve vyšší dimenzi.
Implikace "$\Rightarrow$" platí a její důkaz naznačíme.
Z definice $AC_\alpha^n(\Omega)$ víme, že $AC_\alpha^n(\Omega) \subset BV_\alpha^n(\Omega)$. Tedy stačí dokázat druhou část tvrzení. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Nechť $E \subset \Omega$ a $\lambda^n(E) = 0$. Z věty 4.7 víme, že existuje funkce $g \in L^1(\Omega)$ taková, že pro libovolnou kouli $B_i = B(x_i, r_i) \subset \Omega$ platí

$$(\operatorname{osc}_{B(x_i,\alpha r_i)} f)^n \leq \int_{B(x_i,r_i)} g d\lambda^n.$$

Potom pro libovolný systém koulí platí

$$\sum_i (\operatorname{osc}_{B(x_i,\alpha r_i)} f)^n \leq \sum_i \int_{B(x_i,r_i)} g d\lambda^n. \tag{4.2}$$

Z ekviintegrovatelnosti $|g|$ najdeme $\delta > 0$ takové, že pro $F \subset \Omega$, $\lambda^n(F) < \delta$ platí

$$\int_F |g| d\lambda^n < \varepsilon.$$

Z Besicovitchovy věty najdeme pokrytí E koulemi $\{B^j(x_i, r_i)\}$ takové, že platí $E \subset \bigcup_{i,j} B_i^j$ a pro všechna $j = 1, \dots, M$ platí $\lambda^n(\bigcup_i B_i^j) < \delta$. Potom z předpokladu disjuktnosti pro všechna $j = 1, \dots, M$ platí

$$\sum_i \int_{B^j(x_i,r_i)} |g| d\lambda^n = \int_{\bigcup_i B^j(x_i,r_i)} |g| d\lambda^n < \varepsilon.$$

Tedy z (4.2) *máme*

$$\sum_{i,j} (\mathrm{osc}_{B^j(x_i,\alpha r_i)} f)^n < M\varepsilon.$$

Implikace "$\Leftarrow$" je obtížnejší a její platnost nevíme. Naznačíme však některé myšlenky, které naznačují její platnost.
Protože $f \in BV_\alpha^n(\Omega)$, víme podle Věty 4.8, že existuje borelovská míra μ taková, že pro libovolnou kouli $B(x, r) \subset \Omega$ platí

$$(\mathrm{osc}_{B(x,\alpha r)} f)^n \leq \mu(B(x, r)).$$

Pro dokončení důkazu by stačilo dokázat, že μ je absolutně spojitá vůči Lebesgueově míře na $\mathbb{R}^n$. Pak totiž podle Radon-Nikodýmovy věty existuje funkce $g \in L^1(\Omega)$ taková, že pro $A \subset \Omega$ platí

$$\mu(A) = \int_A g d\lambda^n,$$

a tedy platí

$$(\mathrm{osc}_{B(x,\alpha r)} f)\ n \leq \int_{B(x,r)} g d\lambda^n.$$

Toto by ukázalo $f \in RR_\alpha(\Omega)$ a podle Věty 4.7 $f \in AC_\alpha^n(\Omega)$. Pro důkaz absolutní spojitosti μ by se mohl hodit právě předpoklad (ii).

Seznam použité literatury

[1] Csörnyei M., Absolutely continuous functions of Rado, Reichelderfer, and Malý. J.*, Math. Anal. Appl.* 252 (2000), no. 1, 147–166.

[2] Hencl S., On the notions of absolute continuity for functions of several variables*, Fund. Math.* 173 (2002), no. 2, 175–189.

[3] Leoni, G., A first course in Sobolev spaces, Providence, R.I.: American Mathematical Society, c2009, xvi, 607 s. ISBN 978-0-8218-4768-8.

[4] Lukeš, J. a Malý, J., Measure and integral. 1st ed. Praha: Matfyzpress, 1995, 179 s. ISBN 80-86732-06-5.

[5] Malý J., Absolutely continuous functions of several variables*, J. Math. Anal. Appl.* 231 (1999), no. 2, 492–508.

[6] Olsen, L., A New Proof of Darboux's Theorem, *The American Mathematical Monthly ,* Vol. 111, No. 8 (Oct., 2004), pp. 713-715