Oponentský posudek na bakalářskou práci:

Filip Hladký

Vztah absolutně spojitých funkcí a funkcí s konečnou variací

V předložené práci se autor zabývá pojmy funkce s konečnou variací a absolutně spojité funkce. Kromě pojmů samotných se práce soustřeďuje především na jejich souvislost. Je dokázáno, že funkce je lokálně absolutně spojitá právě tehdy, když je spojitá, má Luzinovu N-vlastnost a lokálně omezenou variaci. Dále je např. dokázána základní věta kalkulu pro Lebesgueův integrál. V závěru práce se autor zabývá možností přenesení zmíněného hlavního výsledku do vyšší dimenze.

Téma práce je zajímavé a text je přehledně a logicky uspořádán. Autor prokázal, že umí samostatně pracovat a že se od něj možná v dohledné době dočkáme zajímavých vlastních výsledků. Na druhou stranu, text by zasloužil ještě jedno nebo dvě precizní pročtení a odladění nedostatků. I když práci celkově shledávám jako dostačující pro obhájení, jsem v tomto ohledu nespokojen. Množství nalezených nedostatků, které uvádím níže, je nemalé.

Domnívám se, že práce splňuje podmínky kladené na bakalářskou práci.

Nyní bych přešel ke kritickým komentářům.

(A) Nejprve uvádím poznámky a otázky, ke kterým by se měl autor stručně vyjádřit během obhajoby.

1. Během důkazu Lemmatu 1.8 se dokazuje spojitost funkce f v bodě x, přitom se zde ale ani jednou nepracovalo s hodnotou $f(x)$.
2. Protože se v Lemmatu 3.3 vyskytuje míra množiny E, je nutné požadovat, aby E byla měřitelná. Bude pak v takovém případě měřitelná množina $f(E)$? Navíc, během důkazu lemmatu se pak objevují další množiny, o kterých není jasné, zda jsou měřitelné, ale s jejichž mírou se pracuje. Nebylo by nakonec jednodušší pracovat s vnější mírou?
3. Má symbol $AC^n_\alpha(\Omega)$ označovat všechny n, α-absolutně spojité funkce, jak je uvedeno na str. 2, nebo jen ty, které jsou v $BV^n_\alpha(\Omega)$, jak je uvedeno na str. 23? Neměly by symboly $AC^n_\alpha(\Omega), BV^n_\alpha(\Omega), RR_\alpha(\Omega), RR^*_\alpha(\Omega)$ mít v sobě zahrnuté i m, na němž prostory závisí?
4. Při aplikaci Besicovitchovy věty v důkazu Věty 4.12, jak má být volena funkce $r(x)$? Důkaz příslušné implikace se nezdá být v pořádku. Očekával bych, že budou nejprve zvoleny $[a, b] \subset I$ a $\varepsilon > 0$, poté $\delta > 0$, a nakonec funkce $r(x)$. Podobným způsobem je dokazována odpovídající implikace v Hypotéze 4.10, ani zde však otázka ohledně funkce $r(x)$ není zodpovězena.
5. Lze v Hypotéze 4.10 uvažovat i systém koulí, na který nejsou kladeny žádné požadavky disjunktnosti?

(B) Následují připomínky větší relevance.

1. V definici variace funkce (str. 3 a rovněž str. 4, Definice 1.1) by mělo být $\sum_{i=0}^{n-1}$ místo $\sum_{i=0}^{n}$. Jedná se o detail jen zdánlivě, neboť jde v případě této práce o klíčovou definici a navíc se podobný problém opakuje na mnoha místech.
2. V Lemmatu 1.10 se mluví o tom, že funkce f definovaná na $[a, b]$ je všude diferencovatelná. Co se tím přesně rozumí? Totéž pak Důsledek 3.7.
3. V Definici 2.1, je $[a, b] = I$? A je tedy I kompaktní interval? Pokud ne, mělo by totiž být ošetřeno, aby body a_i, b_i byly prvky I. V definici by dále mělo být $f|_K \in AC(K)$ místo $f \in AC(K)$. V tomto případě se opět jedná o klíčovou definici, od které bych očekával naprostou spolehlivost.
4. Důkaz spojitosti Cantorovy funkce (str. 10) je neúplný. Spojitost zleva se totiž dokáže analogicky jen v případě 2. Proč se vlastně dokazuje pouze spojitost a ne zmíněná stejnoměrná spojitost? Nezdá se, že by to mělo činit výrazný rozdíl.
5. Nemělo by se předpokládat v Definicích 4.4, 4.5, Větě 4.6 a Hypotéze 4.10, že Ω je otevřená? Dále, ve Větě 4.9 se vyskytuje variace na $[0, 1]^2$, přestože byla variace funkce více proměnných zavedena jen na otevřených množinách.

(C) Následují připomínky menší relevance.

1. Druhá věta abstraktu v angličtině neodpovídá českému protějšku.
2. Na str. 2 jsou přehozeny argmin a argmax. Nejde spíše o množiny bodů?
3. Variace funkce, tj. kvantita $\mathrm{var}(f, [a, b])$, je definována jen pro funkce, které mají $[a, b]$ za svůj definiční obor. Správně by měla být definována i pro funkce s větším definičním oborem.
4. V důkazu části c) Poznámky 1.3, co se myslí větší množinou? Dále, na str. 5 v 9. řádku by mělo být $[a, y]$ místo $[a, b]$ a v 15. řádku $[x, y]$ místo $[x, b]$. V průběhu výpočtu se j změnilo na n. V obou sumách by při sčítání nemělo nastat $i = j$, přestože k tomu může dojít.
5. Na str. 6 dole se namísto x_k, x_{k+1} vyskytují x_n, x_{n+1}.
6. V důkazu Důsledku 1.7 bych psal raději $(f_1 - f_2)'(x)$ místo $(f_1(x) - f_2(x))'$.
7. Proč se v Lemmatu 1.8 netvrdí, že f je spojitá na $[a, b]$? Neplyne tvrzení dokazované v 1. kroku důkazu snadno z Jordanovy věty? Dále, výraz „dodefinovat“ mi nepřijde adekvátní, protože f již v příslušném bodě definovaná je.
8. Lemma 1.10 není hezky napsáno, zkratka „$\Rightarrow$“ se sem vůbec nehodí.
9. V Definici 2.1 by 6. řádek měl být rozdělen stejným způsobem jako na str. 3. Totéž pak Lemma 2.4.
10. Na str. 9 dole a na str. 10 nahoře se má sčítat od 1 místo od 0. V 16. řádku na str. 10 se má sčítat od 1 a $k_0 + 1$ místo od k a k_0. Proč se na 21. řádku mluví o konstrukci Cantorova diskontinua?
11. V důkazu Lemmatu 2.4 se symbol I používá pro dvě různé věci.
12. V důkazu Lemmatu 2.5 by měl být ošetřen případ $K = 0$.
13. V důkazu Lemmatu 2.6, jak budeme postupovat v případě $n = 0$? Je v tomto důkazu $I = [a, b]$? A je tomu tak i v Lemmatech 2.4 a 2.9?
14. V Poznámce 2.8 se mluví o variaci na intervalu $(0, \infty)$, přestože byla zavedena jen pro uzavřený interval.

15. V 15. řádku na str. 13 má být $-$ místo $+$.
16. Na str. 14 má být na více místech $f(x_i^j)$ a $f(x_i^{j-1})$ místo $f(b_i^j)$ a $f(a_i^j)$.
17. V důkazu Důsledku 2.12 nejsou správně uvedena čísla lemmat, na která se autor odvolává. Totéž pak str. 18, ř. 3.
18. V důkazu Lemmatu 3.3 jsou nesrovnalosti. Např. pravá strana nerovnosti na str. 15 dole je záporná, což není možné. Proč musí být x, y, y' zrovna v konstalaci $y < x < y'$?
19. Proč se Lemma 3.3 v druhé části důkazu Důsledku 3.4 neaplikuje přímo na E?
20. V Poznámce 3.5 by mělo být uvedeno, že Cantorova funkce zobrazuje množinu míry 0 na množinu míry 1.
21. V 5. řádku na str. 18 má být $\sum_{k=1}^{\infty}$ místo $\sum_{k=1}^{n}$.
22. Na str. 20 v 11. řádku má být $[a, b]$ místo I, ve 22. řádku pak $[a, b]$ místo $[a_k, b_k]$. Na str. 21 v 2. řádku má být $\overline{J_k}$ místo J_k, v 6. řádku pak podle všeho $\leq \varepsilon$ místo $< \varepsilon$. Tvrdí se, že $a_k < b_k$? Je množina $f(F)$ měřitelná?
23. Ve Větě 3.14 by mělo být uvedeno $x \in [a, b]$. V důkazu věty není jasné, proč je f_1 diferencovatelná na E. Na str. 22 v 11. řádku by mělo být $\int_a^x$ místo $\int_a^b$.
24. V Definici 4.2 na druhém řádku má být V_α^n místo V_n^α.
25. V Definici 4.3 na druhém řádku má být patrně $\mathbb{R}^m$ místo $\mathbb{R}^n$.
26. V Definicích 4.2 a 4.3 není třeba používat „právě tehdy, když“, u definic stačí např. „pokud“.
27. Je známo, zda lze volit $\alpha_2 = 1$ ve Větě 4.6?
28. V Hypotéze 4.10 a na několika dalších místech se pracuje se systémem systémů koulí označovaným $B^j(x_i, r_i)$. Správnější by však bylo např. $B(x_i^j, r_i^j)$. Na str. 25 ve 12. řádku by pak mělo být „existují i, j“ místo „existuje i“.
29. Proč je množina $f(N)$ na konci důkazu Věty 4.12 měřitelná?
30. Míra μ ze závěrečných poznámek k Hypotéze 4.10 by měla být konečná. Asi nemůžeme doufat, že tato míra obecně bude absolutně spojitá, ale spíše, že její absolutně spojitá část bude mít tutéž vlastnost.

(D) Na závěr bych ještě uvedl komentáře obecného charakteru.

1. Mělo by být uvedeno přímo ve 4. kapitole, kým byly ve vyšší dimenzi zavedeny pojmy funkce s konečnou variací a absolutně spojité funkce.
2. V práci se vyskytují nesprávná označení jako např. $\{z_n\} \in [0, 1]$ pro posloupnost prvků intervalu $[0, 1]$ nebo $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n \in I$ pro systém podintervalů intervalu I.
3. Slova jako „borelovská“ či „darbouxovská“ se píší s malým písmenem na začátku.
4. Na řadě míst chybí nebo naopak přebývají čárky ve větách.
5. Práce obsahuje řadu překlepů.

V Praze, 17. 6. 2013, Ondřej Kurka