Univerzita Karlova v Praze

Matematicko - fyzikální fakulta

# DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Marek Pavko

# Cena kmene neživotního pojištění

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

| | |
|---|---|
| Vedoucí diplomové práce práce: | Mgr. Pavel Koudelka |
| Studijný program: | Matematika |
| Studijní obor: | Finanční a pojistná matematika |

Praha 2013

Na tomto mieste by som rád poďakoval Mgr. Pavlovi Koudelkovi za čas venovaný konzultáciám, cenné rady a pripomienky, ktoré mi pri písaní tejto práce poskytol.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 6.12.2013 Marek Pavko

Název práce: Cena kmene neživotního pojištění
Autor: Bc. Marek Pavko
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistky
Vedoucí diplomové práce: Mgr. Pavel Koudelka, Generali Pojišťovna a.s.

Abstrakt: V práci se věnujeme různým přístupům k ocenění portfólia neživotního pojištění. Podrobněji rozebíráme návrh modelu, který zkoumá hodnotu aktuálního obchodu pojišťovny. Odděleně se zaměřujeme na hodnotu obchodu pocházejícího z nadbytku rezerv na jedné straně a zvlášť analyzujeme hodnotu obchodu pocházejícího z obnovených smluv na straně druhé. V teoretické části návrhu se zaobíráme simulační metodou bootstrap, kterou využijeme k analýze rizika škodních rezerv. Navržený model aplikujeme na reálná data, která odpovídají odvětví neživotního pojištění. V závěru práce zkoumáme citlivost hodnoty aktuálního obchodu vzhledem ke změně jednotlivých parametrů navrženého modelu a diskutujeme možnost jejich ovlivnění z pohledu pojišťovny.

Klíčová slova: ocenění portfólia, hodnota aktuálního obchodu, bootstrap, neživotní pojištění, Solvency II

Title: Value of nonlife insurance portfolio
Author: Bc. Marek Pavko
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: Mgr. Pavel Koudelka, Generali Pojišťovna a.s.

Abstract: This thesis focuses on different approaches to valuation of portfolio in the non-life insurance business. We focus on details of the design of a model which analyses the value of in-force business. We address the value of in-force business coming from a surplus of claims provision separately on one side, and on the other side we look at the value of in-force business arising from renewed policies. The theoretical part of the model proposal deal with the bootstrap method, which is used as a basis for the analysis of the reserving risk. This proposed model was applied on the real dataset which represents the line of business in non-life insurance. In the final part of the thesis we focus on the sensitivity of the value of in-force business at change of the parameters in the proposed model and we discuss the possibility of the parameters being influenced by a insurance company.

Keywords: valuation of portfolio, vaule of in-force bussines, bootstrap, non-life insurance, Solvency II

Názov práce: Cena kmene neživotního pojištění

Autor: Bc. Marek Pavko

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistky

Vedúci diplomovej práce: Mgr. Pavel Koudelka, Generali Pojišťovna a.s.

Abstrakt: V práci sa venujeme rôznym prístupom k oceneniu portfólia neživotnej poisťovne. Podrobnejšie sa zaoberáme návrhom modelu, ktorý skúma hodnotu aktuálneho obchodu poisťovne. Oddelene sa zameriavame na hodnotu obchodu pochádzajúcej z nadbytku rezerv na jednej strane a zvlášť analyzujeme hodnotu obchodu pochádzajúcu z obnovených zmlúv na strane druhej. V teoretickej časti návrhu sa zaoberáme simulačnou metódou bootstrap, ktorú využijeme k analýze rizika škodných rezerv. Navrhnutý modelu aplikujeme na reálne dáta, ktoré odpovedajú odvetviu neživotného poistenia. V závere práce skúmame citlivosť hodnoty aktuálneho obchodu na zmenu jednotlivých parametrov navrhnutého modelu a diskutujeme možnosť ich ovplyvnenia z hľadiska poisťovne.

Kľúčové slová: ocenenie portfólia, hodnota aktuálneho obchodu. bootstrap, neživotné poistenie, Solvency II

# Obsah

**Úvod** 1

**1 Oceňovanie portfólií poistných zmlúv v poisťovníctve** 2

1.1 Solvency II a prístup k oceňovaniu . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2

1.2 Ocenenie portfólia v životnom poistení . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4

1.3 Ocenenie portfólia v neživotnom poistení . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

1.4 Parametre ovplyvňujúce hodnotu portfólia v životnom a neživotnom poistení . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8

**2 Návrh výpočtu hodnoty aktuálneho obchodu v neživotnom poistení** 10

2.1 Zisk z nadbytku rezerv . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11

2.1.1 Odhad výšky rezervy na poistné plnenie . . . . . . . . . . . . 14

2.1.2 Odhad chyby predikcie škodnej rezervy a výšky rizikového kapitálu metódou bootstrap . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 17

2.2 Zisk z obnovených zmlúv . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 24

2.2.1 Technický výsledok . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 24

2.2.2 Obnovené zmluvy a zisk z rezervy . . . . . . . . . . . . . . . . 32

2.2.3 Náklady na kapitál v obnovených zmluvách . . . . . . . . . . . 34

2.3 Hodnota aktuálneho obchodu . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 37

**3 Praktická ukážka aplikácie modelu** 39

3.1 Hodnota nadbytku rezerv . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 39

3.2 Hodnota obnovených zmlúv . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 44

3.3 Hodnota celého poistného kmeňa . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50

**4 Analýza citlivosti hodnoty aktuálneho obchodu** 52

**Záver** 58

**Literatúra** 59

**Prílohy** 61

A1 Dodatočné tabuľky k modelu . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 61

A2 Obsah CD . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63

# Úvod

Zisk a strata sú dva protiklady, ktoré podávajú pohľad na výkonnosť vlastneného portfólia. Ocenenie portfólia v tomto smere nie je neživotnom poistení výnimkou. Aj v prípade poisťovne sa vlastník snaží maximalizovať svoj zisk plynúci z portfólia poistných zmlúv. Neuspokojivá hodnota zisku poisťovne môže viesť k skúmaniu oblastí, ktoré znižujú výkonnosť celého portfólia. Následná identifikácia týchto oblastí prináša možnosť vykonať potrebné zmeny smerujúce k zlepšeniu výkonnosti poistného kmeňa.

Cieľom tejto práce je navrhnúť model, ktorý bude poskytovať pohľad na hodnotu neživotného portfólia poisťovne, ako aj jeho následná praktická aplikácia na reálnych dátach.

Text práce je rozdelený do štyroch kapitol. V prvej z nich sa zameriame na porovnanie rôznych prístupov k oceneniu portfólií v neživotnom poistení. Takisto v nej porovnáme hlavné rozdiely medzi životným a neživotným poistením, ktoré majú dopad na výpočet hodnoty portfólia poisťovne.V druhej kapitole sa budeme venovať samotnému návrhu modelu, ktorý bližšie analyzuje *hodnotu aktuálneho obchodu* neživotnej poisťovne. Zvlášť budeme analyzovať zisky pochádzajúce z nadbytku rezerv a zvlášť zisky pochádzajúce z obnovených zmlúv. Popíšeme v nej základné matematické metódy využité pri konštrukcii modelu. Tretia kapitola predstavuje praktickú aplikáciu navrhnutého modelu na reálne dáta. Aj v prípade aplikácii skúmame najskôr zisky z nadbytku rezerv a následne zisky z obnovených zmlúv. V poslednej kapitole sa zaoberáme analýzou citlivosti hodnoty aktuálneho obchodu na zmenu jednotlivých parametrov modelu. Identifikujeme parametre modelu, ktoré majú výrazný vplyv na hodnotu portfólia poisťovne.

V závere diskutujeme o rôznych možnostiach poisťovne, ktorých následná aplikácia môže viesť k pozitívnemu dopadu na celkovú hodnotu aktuálneho obchodu poisťovne.

Príloha obsahuje niektoré doplňujúce tabuľky k realizácii navrhnutému modelu a obsah priloženého CD.

# 1 Oceňovanie portfólií poistných zmlúv v poisťovníctve

Správne ocenenie portfólia, ktoré je tvorené poistnými zmluvami, poskytuje jeho majiteľovi dôležitú informáciu o stave jeho majetku a pomáha vykonať správne kroky v prípade jeho budúcich obchodných rozhodnutí. V prípade investora, ktorý sa zaujíma o kúpu portfólia, je informácia o hodnote portfólia nápomocným faktorom pri jeho konečnom rozhodnutí. V oblasti poisťovníctva to nie je iné. Správne ocenenie portfólia poisťovne[1] poskytuje napr. akcionárom informácie o ziskovosti či stratách súvisiacich s poistením. Včasné odhalenie problémových oblastí môže poskytnúť priestor na zmeny, ktoré v budúcich obdobiach zlepšia chod a profitabilitu poisťovne. V prípade poisťovne však existuje okrem akcionára a investora aj regulátor[2], ktorý sa zaujíma o finančnú situáciu a hodnotu portfólia poisťovne. Rozdielne pohľady akcionára a regulátora na ocenenie portfólia spôsobujú vznik rôznych spôsobov používaných k jeho oceneniu. Rôzne prístupy k oceneniu si priblížime v nasledujúcej časti tejto kapitoly. V ďalšej časti kapitoly takisto uvedieme základné formy ocenenia portfólia používané v životnom a neživotnom poistení a na záver prvej kapitoly porovnáme hlavné rozdiely, ktoré spôsobujú iný prístup k výpočtu hodnoty portfólia v životnom a neživotnom poistení.

## 1.1 Solvency II a prístup k oceňovaniu

Zavádzanie Solvency II, ktorá predstavuje nový spôsob regulácie poisťovníctva v Európe, mení aj spôsob oceňovania rizikovosti portfólií z pohľadu regulátora. Jedným z dôvodov prečo dochádza k zavádzaniu Solvency II je snaha o vytvorenie jednotného regulatórneho prostredia pre poisťovne v celej Európe. Dohľad taktiež súvisí s finančnou stabilitou poisťovne a ochranou poistených. Cieľom ocenenia z pohľadu regulátora je získať hodnotu kapitálu (Solvency Capital Requirement=SCR), ktorý predstavuje čiastku, ktorá je potrebná ku krytiu záväzkov poisťovne. Základná myšlienka Solvency II je založená na rizikovo orientovanom prístupe tzn., že poisťovne by mali sledovať všetky riziká, ktoré súvisia s ich činnosťou. Medzi uvedené riziká v Solvency II môžeme zaradiť napríklad upisovacie, tržné, úverové alebo operačné riziko.

[1] V celej práci budeme pod pojmom portfólia označovať poistný kmeň, ktorý je tvorený poistnými zmluvami.

[2] V prípade ČR je to Česká národná banka.

Solvency II vychádza z koncepcie používanej v Basel II[3] a je založená na troch tzv. pilieroch. Hlavným účelom prvého piliera je vymedziť kapitálové požiadavky. Cieľom druhého piliera je stanoviť jasné pravidlá a právomoci regulátora. Tretí pilier kladie dôraz na zverejňovanie informácií ostatným subjektom.

Požiadavky prvého piliera môžeme rozdeliť podľa *The European parliament* (2009) na 6 základných oblastí:

1. Oceňovanie aktív a pasív.
2. Technické rezervy.
3. Vlastné zdroje.
4. Solventný kapitálový požiadavok (Solvency capital requirement=SCR).
5. Minimálny kapitálový požiadavok (Minimum capital requirement=MCR).
6. Investície.

V prípade zmien v regulácií poisťovní dochádza k zmenám v prístupe oceňovania aktív a záväzkov poisťovne. Zmena znamená posun od účtovného k tržnému ohodnoteniu aktív a záväzkov. Podľa *The European parliament* (2009) sa aktíva ocenia na sumu, za ktorú ich je možné vymeniť medzi dvoma dobre informovanými stranami obchodu. V prípade záväzkov je to suma, za ktorú môžeme tieto záväzky previesť alebo vysporiadať medzi dvoma dobre informovanými stranami obchodu.

Hodnota portfólia je výškou SCR taktiež ovplyvnená. Vzhľadom na jeho výšku je poisťovňa povinná držať určitú výšku kapitálu, s ktorým sú spojené náklady znižujúce celkovú hodnotu portfólia. V tomto prípade má poisťovňa dve možnosti ako k výpočtu hodnoty kapitálu pristúpiť, musí však zabezpečiť, že zohľadnila všetky riziká, ktoré súvisia s jej činnosťou. Prvou možnosťou je využiť k stanoveniu hodnoty SCR štandardný vzorec. Druhou možnosťou je využiť interný model, ktorý musí prejsť schvaľovacím procesom regulátora.

Ocenením portfólia z pohľadu solventnosti, ktoré požaduje regulátor, sa nebudeme v tejto práci ďalej zaoberať a bližšie sa pozrieme na ocenenie portfólia z pohľadu akcionára.

[3] Právna úprava regulácie v bankovníctve.

## 1.2 Ocenenie portfólia v životnom poistení

Ocenenie portfólia poistných zmlúv v životnom poistení je ďaleko viac diskutované a prepracované ako v prípade ocenenia neživotného poistenia. Metódy ocenenia sú založené na tržnom konsenze a preto sú výsledky medzi jednotlivými poisťovňami lepšie porovnateľné. Využitie skúseností z metód životného poistenia by mohlo slúžiť ako vzor pre neživotné poistenie. Samotné ocenenie portfólia zaznamenalo v prípade životného poistenia do dnešnej doby výrazný pokrok. Ocenenie založené na historických hodnotách prechádza k tržnému spôsobu ocenenia.

Jednou z možných a často používaných metód, ktorá sa využíva k oceneniu v životnom poistení, je *implicitná hodnota* (Embedded Value). Snaha o zjednotenie spôsobu oceňovania, ktorá by viedla k vzájomnému porovnaniu medzi poisťovňami, spôsobila vznik diskusnej skupiny *CFO Forum*[4]. Táto skupina publikovala v roku 2004 *European Embedded Value Principles*, ktoré udávali základný rámec výpočtu *implicitnej hodnoty*. S pokračujúcim vývojom na poistnom trhu sa prístup ocenenia pomocou *implicitnej hodnoty* zdal byť nedostačujúci. Nedostatočnosť tohoto prístupu bola spôsobená najmä možným podhodnotením reálne podstupovaného rizika, ktoré súvisí s neistotou dosiahnutých výsledkov v budúcich rokoch. Tento dôvod spôsobuje ďalší vývoj v metodike oceňovania a uberá sa smerom tržne konzistentného prístupu ocenenia. Tržne konzistentný prístup znamená, že aktíva aj pasíva sú ohodnotené v súlade s tržnými cenami.

*CFO Forum* preto v roku 2009 publikovalo materiál s názvom *Market Consistent Embedded Value Principles* (2009), ktorý udáva ďalší rámec pre výpočet *tržne konzistentnej implicitnej hodnoty*. Na základe tohoto materiálu uvádzame jej definíciu.

**Tržne konzistentná implicitná hodnota** (*Market-Consistent Embedded Value = MCEV*) je definovaná ako súčasná hodnota podielov akcionárov na rozdeliteľných ziskoch, ktoré pochádzajú z kapitálu investovaného do daného obchodu po zahrnutí všetkých rizík, ktoré s týmto obchodom súvisia. Veľkosť zahrnutého rizika by mala odpovedať tržnej cene tohoto rizika, ktorá je spoľahlivo zistiteľná. *MCEV* sa skladá z týchto častí :

- voľný kapitál alokovaný k danému obchodu,
- požadovaný kapitál,
- hodnota aktuálneho obchodu.

[4]CFO=Chief financial officer, CFO Forum je skupina, ktorá združuje finančných riaditeľov popredných európskych životných poisťovní.

Hodnota budúceho obchodu nie je v $MCEV$ zahrnutá.

$MCEV$ reprezentuje súčet jednotlivých zložiek uvedených vyššie. V skratke si tieto zložky priblížime.

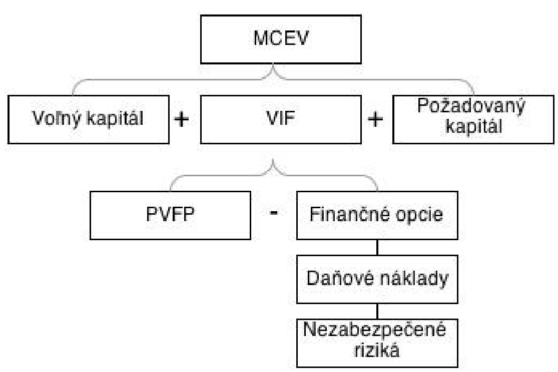
**Voľný kapitál (Free surplus)** - je tržná hodnota všetkých aktív, ktoré sú investované do daného obchodu, ale neslúžia ku krytiu záväzkov z daného obchodu a nie sú držané naviac kvôli solventnosti.

**Požadovaný kapitál (Required capital)** - je tržná hodnota aktív, ktoré sú spojené s daným obchodom, ale sú držané naviac oproti tým, ktoré kryjú daný obchod. Akcionári s ním môžu nakladať len v obmedzenej forme.

**Hodnota aktuálneho obchodu (Value of in-force business = VIF) -** sa skladá z nasledujúcich častí :

- súčasná hodnota budúcich ziskov (*Present value of future profits - PVFP*, Principle 6),
- časová hodnota finančných opcií a garancií (*Time value of financial options and guarantees*, Principle 7),
- daňové a investičné náklady (*Frictional costs of required capital,* Principle 8 ),
- náklady na zvyškové nezabezpečené riziká (*Cost of residual non hedgeable risks*, Principle 9).

Na záver tejto podkapitoly uvádzame obrázok č.1, ktorý znázorňuje jednotlivé časti tvoriace $MCEV$ a časti vstupujúce do *hodnoty aktuálneho obchodu.*




Obr. 1: Schéma MCEV

## 1.3 Ocenenie portfólia v neživotnom poistení

Ako sme v predchádzajúcej časti spomenuli, rozšírenosť metód, ktoré by poskytovali pohľad na hodnotu portfólia v neživotnom poistení, nie je taká bežná ako v prípade životného poistenia. Medzi dva používané spôsoby, ktoré merajú výkonnosť, resp. profitabilitu poisťovne v neživotnom poistení, môžeme zaradiť *metódu ekonomickej pridanej hodnoty* (Economic value added = EVA) a *metóda rizikovo upravenej výnosnosti kapitálu* (Risk-adjusted return on capital = RAROC).

Metóda ekonomickej pridanej hodnoty - EVA:

Metóda EVA bola navrhnutá predstaviteľmi konzultantskej spoločnosti Stern Stewart & Co. v 90 rokoch 20. storočia a odpovedá odhadu ekonomického zisku, ktorý slúži k stanoveniu hodnoty spoločnosti. Koncept je podľa *Kraus* (2011) založený na tzv. reziduálnom príjme. Tento koncept odpovedá hodnote ročného účtovného zisku, ktorý je očistený o požadovanú návratnosť vloženého kapitálu. Hodnotu EVA potom môžeme na základe *Kraus* (2011) definovať ako čistý prevádzkový zisk po zdanení (net operating profit after tax = NOPAT) mínus náklady investovaného kapitálu, ktoré boli potrebné k vytvoreniu tohoto prevádzkového zisku:

$$EVA = NOPAT - CC_{rate} \cdot Capital,$$

kde $CC_{rate}$ je miera nákladov na kapitál a $Capital$ predstavuje investovaný kapitál.

Metóda rizikovo upravenej výnosnosti kapitálu - RAROC:

Tradičný pohľad na zisk v účtovníctve nezohľadňuje riziko, ktoré s hodnotu zisku súvisí. Chýbajúci faktor rizika môže niekedy skresľovať pohľad na zisk. Z tohoto dôvodu sa v poisťovníctve využíva metóda RAROC, ktorú môžeme definovať podľa *Kraus* (2011) ako

$$RAROC = \frac{NOPAT}{Risk\,adj\,Capital},$$

kde $Risk\,adj\,Capital$ je rizikovo upravený kapitál. Rizikovo upravený kapitál v tomto prípade odpovedá hodnote ekonomického kapitálu, ktorý je potrebný ku krytiu neočakávaných udalostí. Výpočet veľkosti tohoto kapitálu je založený na kvantilových metódach akou je napr. metóda hodnoty v riziku.

Vzhľadom k tomu, že sa obe vyššie zmienené metódy viažu k určitému časovému obdobiu a neberú do úvahy budúce zisky, ktoré pochádzajú z aktuálne platného portfólia poistných zmlúv, odvodili *Diers a kol.* (2009) model, ktorým túto skutočnosť zohľadňuje. Základná myšlienka ich modelu je založená na transformácii princípov *MCEV* platných v životnom poistení do poistenia neživotného. Na základe detekcie rozdielov medzi životným a neživotným poistením navrhli model, ktorý je založený na súčasnej hodnote budúcich peňažných tokoch. Návrh ich modelu pozostáva z piatich krokov, ktoré sú potrebné k stanoveniu *MCEV* pre neživotné poistenie:

1. Súčasná hodnota budúcich ziskov.
2. Hodnota požadovaného kapitálu.
3. Hodnota daňových a investičných nákladov.
4. Hodnota nákladov na zvyškové nezabezpečené riziká.
5. Hodnota voľného kapitálu.

Najdôležitejšou časťou v prípade ich modelu je prvý bod, ktorý sa skladá z modelovania budúceho technického a investičného výsledku. Autori počítali zvlášť hodnotu technického výsledku pre existujúci obchod a zvlášť pre nový obchod. Výšku rezervy stanovili využitím deterministickej *metódy Chain Ladder*. V prípade obnov zmlúv použili zjednodušený aditívny a lineárny model obnovy zmlúv s preddefinovanou hodnotou storna zmlúv. Navrhovaný model aplikovali na dáta istej nemeckej neživotnej poisťovne. Podrobnejší popis samotného modelu a jednotlivých vstupov, ktoré sa využívajú pri konštrukcii všetkých piatich bodov je možné nájsť v *Diers a kol.* (2009).

Zmienený návrh modelu poskytuje komplexný pohľad na tržné ocenenie poisťovne, čo predstavuje jeho veľkú výhodu. Autori zohľadňujú budúce zisky z aktuálne platného portfólia a venujú sa obom stranám rozvahy tj. ziskom z technického a investičného výsledku. V prípade výšky rezervy však autori bližšie neskúmajú jej rizikovosť a nevenujú pozornosť ziskom, ktoré môžu pochádzať z nadbytku rezerv. V navrhovanom modeli sa preto budeme bližšie zaoberať rizikom škodných rezerv a pokúsime sa zohľadniť aj zisky pochádzajúce z nadbytku škodných rezerv. Na druhú stranu sa nebudeme venovať hodnote požadovaného a voľného kapitálu to znamená, že sa v našej situácii budeme zaoberať len pasívnou časťou rozvahy.

Na záver tejto podkapitoly poznamenajme, že stanovenie hodnoty aktuálneho obchodu je možné modelovať na portfóliu poisťovne ako celku alebo toto portfólio rozdeliť na skupiny, ktoré vykazujú spoločné vlastnosti. Hodnota aktuálneho obchodu sa potom modeluje pre každú skupinu zvlášť a celková hodnota aktuálneho obchodu sa potom stanoví ako súčet týchto hodnôt v skupinách.

## 1.4 Parametre ovplyvňujúce hodnotu portfólia v životnom a neživotnom poistení

Rozdiely medzi životným a neživotným poistením si vyžadujú rozdielny prístup aj v prípade ocenenia. Na záver prvej kapitoly si teda zhrnieme najdôležitejšie rozdiely medzi životným a neživotným poistením, ktoré majú vplyv na hodnotu portfólia.

**Životné poistenie** je charakteristické dĺžkou platnosti jednotlivých zmlúv a pravidelnými splátkami poistného počas trvania poistenia. Väčšina obchodu životného poistenia je dlhodobého charakteru. Životné poistenie patrí k najviac ziskovým odvetviam poisťovne. Zisk poisťovne často spôsobujú samotní poistenci, ktorí nepoznajú poistné podmienky, výnimky alebo dokonca rušia zmluvy predčasne. Na druhej strane výnosy resp. poistné plnenie pre poistených ovplyvňuje investičný výnos prípadne biometrické riziká ako je úmrtnosť alebo invalidita. Životné poistenie je založené na princípe obnosového poistenia. Princípom tohoto typu poistenia je, že výška plnenia v prípade poistnej udalosti je vopred fixne daná.
Pretože sa jedná o dlhodobé poistenie, a v prípade výpočtu $MCEV$ sa využíva diskontovanie budúcich finančných tokov, je úroková miera (resp. tržné riziko) jedným z najdôležitejších faktorov ovplyvňujúcim jej výslednú hodnotu.

**Neživotné poistenie** je z hľadiska dĺžky zmluvy považované za krátkodobé poistenie. Zmluvy sa často uzatvárajú na ročnej báze. Po uplynutí tejto doby je zmluva spravidla automaticky obnovená.[5] Napriek statusu krátkodobého poistenia existujú aj v neživotnom poistení odvetvia, ktoré by sme na základe doby strávenej v poistnom kmeni mohli zaradiť medzi dlhodobé. Sem môžeme zaradiť napríklad poistenie zodpovednosti. V prípade tohoto poistenia sa jedná o poistenie s tzv. „dlhým koncom" (long tail lines of business). V prípade neživotného poistenia nie je výška poistného plnenia väčšinou vopred stanovená. Výplaty sú v neživotnom poistení viazané na danú škodovú udalosť. Výška poistného plnenia sa potom často modeluje na základe rozdelenia počtu a veľkosti škôd. Ďalším dôležitým faktorom ovplyvňujúcim hodnotu portfólia je zaistenie, ktoré je často používané v neživotnom poistení. Medzi špecifické odvetvia neživotného poistenia patria odvetvia, ktoré sú vystavené katastrofickému riziku. V takýchto prípadoch je riziko podstúpené poisťovňou výrazne vyššie ako

[5] Automatické obnovy zmlúv sú typické pre Európu. Napr. v USA zmluva zaniká pokiaľ poistený neprejaví vôľu zmluvu opätovne obnoviť.

v prípade životného poistenia. Z týchto dôvodov je *katastrofické* a *upisovacie* (underwriting) *riziko* medzi dôležitými faktormi, ktoré ovplyvňujú hodnotu portfólia. Medzi najväčšie časti upisovacieho rizika patrí *riziko rezerv* a *riziko poistného*.

V tabuľke 1 stručne uvádzame porovnanie základných rozdielov medzi životným a neživotným poistením.

Tabuľka 1: Základné rozdiely medzi životným a neživotným poistením

| **Faktory** | **ŽP** | **NŽP** |
|---|---:|---:|
| Dĺžka zmlúv: | Dlhodobé | Krátkodobé |
| Štruktúra aktív: | Dlhodobo orientované portfólio | Krátkodobo orientované portfólio |
| Štruktúra záväzkov: | Záväzky limitované | Záväzky nelimitované |
| Zaistenie: | Použitie nie je tak časté | Časté použitie |

Na záver tejto podkapitoly si zhrnieme hlavné rozdiely medzi životným a neživotný poistením, ktoré vstupujú do výpočtu *MCEV* a majú vplyv na jej hodnotu:

- v prípade neživotného poistenia neexistuje pravidelne prijímané poistné ako v prípade životného poistenia a to umocňuje dôležitosť predpokladu o množstve obnovených zmlúv,
- modelovanie stornovosti v prípade životného poistenia môžeme v neživotnom poistení ekvivalentne porovnať s modelovaním obnov poistiek,
- modelovanie biometrických rizík v životnom poistením sa v neživotnom poistení nahrádza modelovaním vývoja škôd. To znamená, že nás zaujíma odhad poistných plnení a doposiaľ nenahlásených škôd.

# 2 Návrh výpočtu hodnoty aktuálneho obchodu v neživotnom poistení

Vzhľadom k nie príliš preskúmanej oblasti oceňovania portfólií v neživotnom poistení sa v tejto práci nebudeme venovať komplexnému tržnému oceneniu resp. *implicitnej hodnote* v neživotnom poistení. Cieľom tejto práce bude ohodnotiť aspoň jednu z dôležitých častí, ktorá tvorí komplexné ocenenie neživotného portfólia poisťovne. V práci sa budeme zaoberať časťou, ktorá sa nazýva *hodnota aktuálneho obchodu* (Value of in-force = VIF). Inými slovami nás bude zaujímať hodnota poistných zmlúv, ktoré sa v čase ohodnotenia nachádzajú v poistnom kmeni.

Hodnotu VIF môžeme rozdeliť do dvoch častí. Prvú časť tvorí tzv. *existujúci obchod* (existing business) a druhú tvorí tzv. *nový obchod* (new business). Podľa *CFO Fora* (2009) princípu č. 10 sa *nový obchod* definuje ako obchod, ktorý bol predpísaný za obdobie posledných 12 mesiacov. *Existujúcim obchodom* rozumieme obchod predpísaný pred viac ako 12-tim mesiacmi. Rozdelenie na nový a existujúci obchod je spôsobené tým, že sa nové zmluvy môžu v portfóliu chovať odlišne ako zmluvy, ktoré sa v portfóliu poisťovne nachádzajú dlhšiu dobu. Hodnota VIF môže predpovedať obnovy z oboch častí obchodu, ale vylučuje akúkoľvek hodnotu vzťahujúcu sa k budúcemu obchodu.

V tejto kapitole sa budeme venovať návrhu modelu, ktorý slúži k výpočtu hodnoty aktuálneho obchodu - VIF. Vysvetlíme jednotlivé vstupy, ktoré navrhnutý model obsahuje. Zameriame sa na popis niektorých matematických metód, ktoré sme pri stanovení hodnoty VIF využili. Návrh výpočtu hodnoty VIF rozdelíme do dvoch častí.

V prvej časti návrhu modelu sa budeme venovať hodnote aktuálneho obchodu, ktorá pochádza z nadbytku škodných rezerv. Popíšeme jednu zo základných metód slúžiacu k stanoveniu výšky rezervy na poistné plnenie. V časti, ktorá je venovaná riziku rezerv, sa zameriame na priblíženie základných princípov fungovania simulačnej metódy *bootstrap* a ukážeme jej využitie v oblasti neživotného poistenia.

V druhej časti navrhnutého modelu sa budeme zaoberať hodnotou aktuálneho obchodu, ktorá je tvorená ziskom pochádzajúcim z aktuálne platných zmlúv, ktoré sa v nasledujúcich rokoch obnovia. Využijeme výsledky metódy bootstrap a na záver kapitoly odvodíme hodnotu nákladov na kapitál, ktoré sú spojené s obnoveným obchodom.

Celkovú hodnotu VIF potom určíme ako súčet vyššie zmienených dvoch častí.

V prípade modelovania hodnoty aktuálneho obchodu budeme uvažovať portfólio poisťovne ako jeden celok. Niekedy môže dochádzať k deleniu portfólia na menšie skupiny vykazujúce spoločné vlastnosti. Hodnota aktuálneho obchodu sa potom modeluje pre každú skupinu zvlášť. Naše portfólio bude pre zjednodušenie tvorené len jedným odvetvím neživotného poistenia (LoB = Line of Business). Rozšírenie na viac odvetví je možné využitím korelácie medzi jednotlivými odvetviami.

## 2.1 Zisk z nadbytku rezerv

Tvorba technických rezerv by mala byť zárukou toho, že poisťovňa dodrží svoje budúce záväzky, ktoré pochádzajú z uzatvorených poistných zmlúv. V prípade neživotnej poisťovne môžeme medzi technické rezervy (napr. podľa *zákona o poisťovníctve*) zahrnúť nasledujúce rezervy:

- rezerva na poistné plnenie,
- rezerva na nezaslúžené poistné,
- rezerva na prémie a zľavy,
- vyrovnávacia rezerva,
- rezerva poistného neživotných poistení.

Vďaka veľkému významu rezervy na poistné plnenie sa v našom navrhovanom modeli obmedzíme len na zisky, ktoré pochádzajú z tejto rezervy. Niekedy sa v literatúre pojem rezervy na poistné plnenie nazýva *škodnou rezervou. Škodnú rezervu* budeme v ďalšej časti značiť symbolom $R$ a je súčtom dvoch zložiek. Prvá zložka je tvorená rezervou, ktorá je spojená s už nahlásenými poistnými udalosťami, ale tieto ešte nie sú doposiaľ vysporiadané (RBNS=Reported But Not Settled). Druhou zložkou škodnej rezervy je rezerva, ktorá je potrebná na na krytie poistných udalostí, ktoré už nastali ale nie sú doposiaľ nahlásené poisťovni (IBNR=Incurred But Not Reported).

Hodnota aktuálneho obchodu je v tejto časti navrhnutého modelu tvorená ziskom, ktorý môže pochádzať z dvoch možných zdrojov. Časť modelu, ktorá sa zaoberá týmito ziskami, budeme v nasledujúcej časti práce nazývať *ziskom z nadbytku rezerv* a označovať symbolom $ZNR$.

Prvý zdroj týchto ziskov pochádza z nadbytku škodných rezerv. Nadbytok škodnej rezervy je často spôsobený opatrnosťou v rezervovaní. Z opatrnosti rezervovania mnohokrát vyplýva, že hodnota rezervy uvedenej v účtovníctve je vo väčšine prípadov vyššia ako hodnota rezervy odpovedajúca skutočnému škodnému vývoju. Situáciou kedy môže nastať opačná možnosť sa nebudeme zaoberať a budeme predpokladať, že účtovná hodnota škodnej rezervy je vždy vyššia ako hodnota skutočnej výšky škodného vývoja. Na základe vyššie uvedeného potom definujeme nadbytok rezervy nasledujúcim spôsobom

$$NR = UR - R,$$

kde $UR$ označuje hodnotu škodnej rezervy v účtovníctve. Z definície nadbytku rezervy plynie, že účtovná škodná rezerva je v našom modeli daná ako súčet $UR = NR + R$.

Druhým zdrojom zisku v navrhnutom modeli je zisk pochádzajúci z diskontu *škodnej rezervy*. Škodná rezerva nie je použitá na vyrovnanie záväzkov okamžite. V prípade, že pri výpočte škodnej rezervy nezohľadňujeme časovú hodnotu peňazí, môžeme pri postupnom rozpúšťaním tejto rezervy vytárať peňažné toky, ktoré generujú zisk plynúci z časovej hodnoty peňazí. Vyššie uvedená skutočnosť nemusí platiť obecne. V prípade malých poisťovní môže byť časová hodnota zohľadnená vo výpočte škodnej rezervy, čo spôsobuje znižovanie potrebného kapitálu poisťovne.

V tejto chvíli je dobré definovať tzv. *najlepší odhad škodnej rezervy* (Best estimate of claim reserve) použitý v našom modeli. V prípade nami navrhovaného modelu budeme za *najlepší odhad škodnej rezervy* považovať súčasnú hodnotu *škodnej rezervy*, ktorú budeme značiť symbolom $PV(R)$ resp. $BE$ (PV=Present Vaule). Zisk pochádzajúci z diskontu potom označíme symbolom $DV(R)$ (DV=Discount value) a budeme ho definovať ako rozdiel medzi hodnotou $R$ a jej súčasnou hodnotou tj.

$$DV(R) = R - PV(R) = R - BE.$$

V navrhovanej časti modelu neuvažujeme len výnosy, ale je potrebne zohľadniť taktiež náklady ovplyvňujúce celkovú hodnotu portfólia. Na prípadné straty pochádzajúce z neočakávaných poistných udalostí drží poisťovňa kapitál, ktorým chce kryť svoje záväzky voči svojím klientom s nejakou pravdepodobnosťou. S týmto kapitálom môže nakladať len v obmedzenej forme. Držba kapitálu produkuje náklady, o ktoré by sme mali hodnotu $ZNR$ ponížiť.

*Náklady na kapitál* (cost of capital) budeme v našom modeli označovať symbolom $CoC$.

Na základe vyššie zmienených argumentov môžeme definovať model, ktorý slúži k výpočtu hodnoty $ZNR$, nasledovne

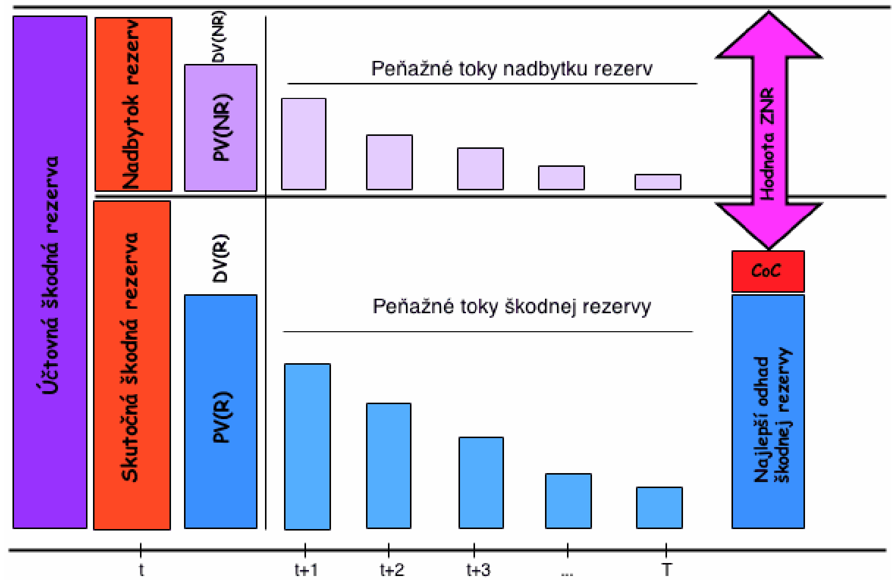
$$ZNR = \sum_{i=t+1}^{T} \left\{ (UR_i - R_i) + \left( R_i - R_i \left(1 + r_i^{fr}\right)^{-(i-0.5)} \right) - CoC_i (1 + r_i^{fr})^{-(i-0.5)} \right\}$$

$$= \sum_{i=t+1}^{T} \left\{ UR_i - R_i (1 + r_i^{fr})^{-(i-0.5)} - CoC_i (1 + r_i^{fr})^{-(i-0.5)} \right\}, \qquad (1)$$

kde $t$ predstavuje čas, v ktorom nás zaujíma hodnota $ZNR$, $r_i^{fr}$ predstavuje bezrizikovú úrokovú mieru so splatnosťou $i$ v čase $t$ a $T$ označuje počet budúcich periód, pre ktoré chceme určiť hodnotu $ZNR$. Hodnota 0.5 vo vyššie uvedenom vzorci znamená, že hodnotu diskontu uvažujeme k polovici daného roka. Tento dôsledok je spôsobený tým, že za priemerný čas vysporiadania záväzkov uvažujeme polovicu roka.

V nasledujúcej časti práce priblížime metódy použité k stanoveniu škodnej rezervy a nákladov na kapitál. Tieto dve zložky $ZNR$ považujeme za dôležité a preto im budeme venovať viac pozornosti. Zmienená bezriziková úroková miera tiež ovplyvňuje $ZNR$, napriek tomu tento parameter nebudeme v práci bližšie odvodzovať. Téme bezrizikovej úrokovej miery je v literatúre venovaný dostatočný priestor, jej stanovenie je náročné a preto využijeme v našom navrhnutom modeli hodnoty používané v praxi.

Na záver tohoto odseku ešte uvádzame obrázok č.2, na ktorom je graficky znázornená základná schému modelu pre výpočet $ZNR$. $PV(NR)$ predstavuje súčasnú hodnotu nadbytku rezerv a $DV(NR)$ hodnotu diskontu nadbytku rezerv.




Obr. 2: Schéma Zisk z nadbytku rezerv

### 2.1.1 Odhad výšky rezervy na poistné plnenie

V literatúre môžeme nájsť mnoho matematických metód, ktoré slúžia k odhadu rezervy na budúce poistné plnenia. Odhad výšky *škodnej rezervy* je väčšinou založený na historickom vývoji škôd. Tieto škody sa vo väčšine prípadov uvádzajú v trojuholníkovej schéme.

Tabuľka 2: Kumulatívny trojuholník škôd

| RŠ \ RV | 1 | 2 | . | . | j | . | . | n-1 | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $C_{1,1}$ | $C_{1,2}$ | . | . | . | . | . | $C_{1,n-1}$ | $C_{1,n}$ |
| 2 | $C_{2,1}$ | . | . | . | . | . | . | $C_{2,n-1}$ | |
| . | . | . | . | . | . | . | | | |
| . | . | . | . | . | . | | | | |
| i | $C_{i,1}$ | . | . | . | $C_{i,j}$ | | | | |
| . | . | . | . | | | | | | |
| . | . | . | | | | | | | |
| . | . | | | | | | | | |
| n | $C_{n,1}$ | | | | | | | | |

Hodnota tejto rezervy je aj v prípade nami navrhnutého modelu pre $ZNR$ veľmi dôležitá. V prípade nášho modelu sme sa rozhodli využiť *metódu Chain Ladder*, ktorá patrí medzi veľmi obľúbené a často používané metódy. Jej obľúbenosť spôsobuje fakt, že nepredpokladá žiadne rozdelenie škôd a je jednoducho aplikovateľná. Na druhej strane treba spomenúť aj nevýhody tejto metódy, medzi ktoré patrí citlivosť na použité dáta, ktoré sa nachádzajú v rohoch trojuholníka. V tejto časti budeme vychádzať z *Mack* (1993).

Táto metóda je založená na kumulatívnom trojuholníku škôd (viď Tabuľka 2), ktorého prvky značíme $C_{ij}$, kde $i$, $1 \leq i \leq n$ reprezentuje rok vzniku škody (RŠ) a $j$, $1 \leq j \leq n$ označuje vývojový rok škody (RV).

Pozorovania náhodnej veličiny $C_{ij}$ sú známe pre $i+j \leq n+1$. Cieľom tejto metódy je odhadnúť výšku $C_{in}$ pre $i = 2, ..., n$, z ktorej plynie hodnota rezervy definovaná vzťahom $R_i = C_{in} - C_{i,n+1-i}$ pre škodné roky $i = 2, ..., n$. Predpokladáme, že vývoj škôd je ukončený po $n$ rokoch. Metóda Chain Ladder podľa *Mack* (1993) predpokladá existenciu vývojových faktorov $f_1$ , ..., $f_{n-1} > 0$ pre ktoré platí nasledujúci vzťah

$$(1)\;\; E(C_{i,j+1} \mid C_{i1}, ..., C_{ij}) = C_{ij} f_j,\; 1 \leq i \leq n,\; 1 \leq j \leq n-1.$$

Odhad jednotlivých faktorov $f_j$ je základným princípom tejto metódy a je daný vzťahom

$$\hat{f}_j = \sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1} / \sum_{i=1}^{n-j} C_{ij}\;,\;\; 1 \leq j \leq n-1.$$

Samotný odhad výšky škôd $C_{in}$ dostávame ako $\hat{C_{in}} = C_{i,n+1-i} \cdot \hat{f}_{n+1-i} \cdot ... \cdot \hat{f}_{n-1}$ a odhad rezervy pre škodný rok $i$ ako $\hat{R}_i = C_{i,n+1-i} \cdot (\hat{f}_{n+1-i} \cdot ... \cdot \hat{f}_{n-1} - 1)$. Celkový odhad výšky rezervy je potom daný ako súčet hodnôt rezerv v jednotlivých škodných rokoch $\hat{R} = \sum_{i=2}^{n} \hat{R}_i$.

Klasická metóda Chain Ladder neberie do úvahy akúkoľvek závislosť medzi rokmi kedy nastala škoda. Ak by sme však zaviedli nasledujúci predpoklad o nezávislosti škodových rokov

$$(2)\;\;\; \{C_{i1}, ...C_{in}\}\; a\; \{C_{j1}, ...C_{jn}\}\;,\; i \neq j,\; sú\, nezávislé$$

môžeme formulovať podľa *Mack* (1993) nasledujúce dve vety.

**Veta 1**

*Predpokladajme, že* $D_n = \{C_{ij} \mid i+j \leq n+1\}$ *je množina pozorovaných dát resp. výplat škôd v minulosti, potom za predpokladov* (1) , (2) *platí*

$$E\left(C_{in} \mid D_n\right) = C_{i,n+1-i} \cdot f_{n+1-i} \cdot, ..., \cdot f_{n-1}.$$

**Veta 2**

*Za platnosti predpokladov* $(1)$, $(2)$ *sú odhady* $\hat{f}_j$, $1 \leq j \leq n-1$ *nestranné a nekorelované.*

Prvá veta hovorí, že odhad $\hat{C_{in}}$ má taký istý tvar ako $E\left(C_{in} \mid D_n\right)$, čo je najlepšia predpoveď $C_{in}$ za podmienky $D_n$. Predpoklad nezávislosti medzi rokmi škody však môže byť v praxi porušený zmenou v rýchlosti odbavovania škôd resp. zmenou politiky v rezervovaní poisťovne. Druhá veta hovorí o vlastnostiach odhadov platných pre vývojové faktory. Dôkazy a podrobnejší výklad je možné nájsť v *Mack* (1993).

V predchádzajúcej časti sme popísali ako stanoviť výšku škodnej rezervy potrebnú na plnenie záväzkov poisťovne. Hodnota škodnej rezervy nám však nepodáva obraz o riziku, ktoré poisťovňa pri danej výške rezervy podstupuje. Jednou z možností ako získať informáciu o presnosti odhadu škodnej rezervy poskytuje *stredná kvadratická odchýlka* ($MSE$ - Mean Square Error). $MSE$ odhadu výšky škôd $C_{ij}$ definujeme nasledovne

$$MSE(\hat{C}_{ij}) = E[(C_{in} - \hat{C}_{in})^2 \mid D_n]. \tag{2}$$

Rozšírením vyššie uvedených predpokladov (1) a (2) o nasledujúci predpoklad

$$(3) \quad Var\left(C_{i,j+1} \mid C_{i1}, ..., C_{ij}\right) = \sigma_j^2 C_{ij},\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n-1,$$

kde $\sigma_j^2$ je neznámy parameter pre $1 \leq j \leq n-1$, dokážeme určiť $MSE$ analytickým spôsobom. Odhad $\sigma_j^2$ a podrobnejšiu teóriu je možné nájsť v *Mack* (1993). *Metóda Chain Ladder*, ktorá spĺňa všetky 3 uvedené predpoklady sa niekedy nazýva aj *Mackova metóda*. Mackova metóda je jednou zo stochastických metód (patrí sme napr, aj Merz-Wüthrich-ova metóda, Bornhuetter-Ferguson-ova metóda), ktoré poskytujú možnosť získať $MSE$, prípadne interval spoľahlivosti analytickým spôsobom.

Náklady na kapitál $CoC$ sú v prípade tejto časti modelu spojené práve s rizikom, ktoré súvisí s výškou škodnej rezervy. Podľa Solvency II môžeme medzi ďalšie riziká súvisiace s neživotným poistením zahrnúť *riziko poistného* a *katastrofické riziko.* V literatúre sa niekedy môžeme stretnúť s pojmom *upisovacieho rizika*, ktoré je však len spojením rizika rezervy a poistného.

V tejto situácii modelu sa budeme venovať *riziku rezerv,* ktoré môžeme definovať ako riziko, ktoré vyplýva z nedostatočnej výšky aktuálnej škodnej rezervy, ktorá bude v budúcnosti potrebná ku krytiu všetkých škôd voči svojím poisteným. Veľkosť podstupovaného rizika je spojená s výškou rizikového kapitálu, ktorý súvisí s hodnotou $CoC$. Stanovenie rizikového kapitálu však vyžaduje informáciu o rozdelení rezervy resp. informáciu o jej kvantile, ktorú stochastické metódy neposkytujú. Informáciu o rozdelení ako aj informáciu o $MSE$ získame pomocou simulačnej metódy bootstrap, ktorú využijeme k stanoveniu výšky rizikového kapitálu na určitej hladine spoľahlivosti. Na základe hodnoty rizikového kapitálu potom určíme hodnotu nákladov na kapitál, o ktoré potom znížime hodnotu portfólia.

V nasledujúcej časti popíšeme základné princípy fungovania metódy bootstrap a jej využitie v prípade rizikového kapitálu.

### 2.1.2 Odhad chyby predikcie škodnej rezervy a výšky rizikového kapitálu metódou bootstrap

Základy tejto simulačnej metódy boli položené v 80-tych rokoch minulého storočia kedy Brad Efron publikoval článok s názvom *„Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife"*. Jedná sa o simulačnú metódu, ktorá je založená prevzorkovaní dát a spadá do skupiny *prevzorkovacích metód* (resample). Princíp tejto metódy spočíva v náhodnom výbere s vracaním zo vzorku originálnych dát, pričom sú vytvárané tzv. pseudodata, z ktorých následne spočítame požadované štatistiky. Medzi výhody tejto metódy môžeme zaradiť jej jednoduché použitie a možnosť aplikácie aj na výbery o menšom rozsahu. Nevýhodou tejto metódy je niekedy nie úplne pravdivý obraz skutočnosti, ktorý môžu spôsobiť odľahlé pozorovania.

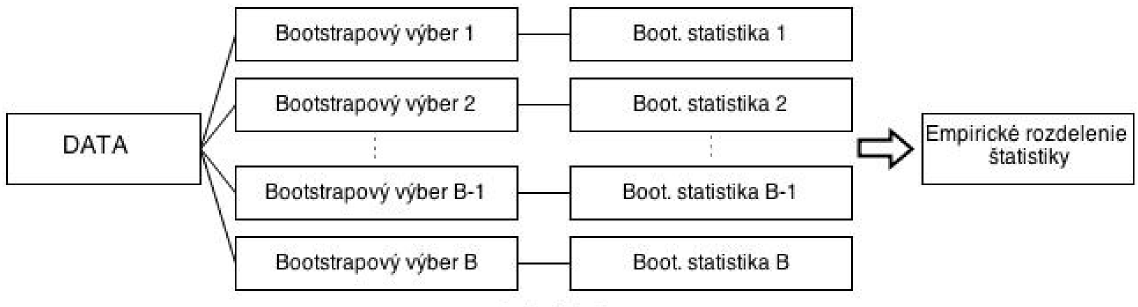
Metóda bootstrap je všeobecne kombináciou tzv. *„plug in" princípu* a *metódy Monte Carlo*. *„Plug in" princíp* spočíva v nahradení pôvodnej distribučnej funkcie $F$ jej odhadom pomocou empirickej distribučnej funkcie.

Uvažujeme teda náhodný výber $Z_1, ..., Z_n$. Empirickú distribučnú funkciu tohoto výberu potom definujeme ako

$$F_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I_{(-\infty,u)}(Z_i).$$

Nech $Z_1^*, ..., Z_n^*$ je postupnosť, ktorá tvorí náhodný výber z $F_n$ pri daných pozorovaniach $Z_1, ..., Z_n$. $Z_1^*, ..., Z_n^*$ sú potom nezávislé, identicky rozdelené náhodné veličiny.

Takýto náhodný výber $Z_1^*, ..., Z_n^*$ sa nazýva *bootstrapový výber*. Pomocou *metódy Monte Carlo* potom generujeme $B$ bootstrapových výberov z $F_n$. Pre každý takýto výber môžeme spočítať požadovanú štatistiku.




Obr. 3: Princíp metódy bootstrap

Obrázok č.3 znázorňuje základný princíp fungovania bootstrapu. Bootstrap sa od *metódy Monte Carlo* líši tým, že vychádza z dát a nepotrebuje predpokladať žiadne rozdelenie.

V nasledujúcej časti ukážeme použite bootstrapu v prípade odhadu $MSE$, ktorý využijeme v druhej časti modelu. Na záver kapitoly odvodíme hodnotu nákladov na kapitál, ktoré sú zahrnuté v našom modeli.

*Bootstrap a chyba predikcie:*

Najprv si prepíšeme vzťah (2) , kde pre $j = n$ máme

$$MSE(\hat{C}_{in}) = E[(C_{in} - \hat{C}_{in})^2 \mid D_n] = E[(R_i - \hat{R}_i)^2 \mid D_n] = MSE(\hat{R}_i), \qquad (3)$$

pokiaľ predpokladáme $\hat{R}_i = \hat{C}_{in} - C_{i,n+1-i}$.

Využitím známeho vzorca $E(X-b)^2 = Var(X) + (EX-b)^2$ môžeme vzťah (3) ďalej prepísať do tvaru

$$MSE(\hat{C}_{in}) = Var(C_{in} \mid D_n) + (E[C_{in} \mid D_n] - \hat{C}_{in})^2.$$

Z vyššie uvedeného vyplýva, že $MSE$ v prípade odhadu rezervy zložená z dvoch častí:

- *rozptyl procesu* (process variance) - $Var(C_{in} \mid D_n)$,
- *rozptyl odhadu* (estimation variance) -$(E\left[C_{in} \mid D_n\right] - \hat{C}_{in})^2$.

Poznamenajme, že odmocnia z $MSE$ sa nazýva *chyba predikcie* (prediction error).

Jednou z možností ako sa dostať k odhadu $MSE$ je vyššie spomenutá Mackova metóda. Ďalšou možnosťou je využiť prístup publikovaný v roku 1998, kedy páni Renshaw a Verrall skonštruovali model založený na všeobecných lineárnych modeloch (GLM=generalised linear models).

V prípade oboch možností poskytujú modely identický odhad rezervy ako v prípade klasickej metódy Chain Ladder. GLM predstavuje zovšeobecnenie klasických lineárnych modelov, ktoré znamená, že vzťah medzi závislou premennou a vysvetľovanou premennou nemusí byť priamo lineárny, ale môže byť definovaný nejakou funkciou. Podrobnejšiu teóriu je možné nájsť v *McCullagh a Nelder* (1989).

GLM modely pozostávajú z troch komponent:

1. Závislá premenná $Y_i$ patrí rozdeleniu, ktoré pochádza z rodiny exponenciálnych rozdelení. Inými slovami môžeme jej hustotu zapísať v nasledujúcom tvare
$$f\left(y_i, \theta_i, \vartheta\right) = exp\left\{\frac{y_i\theta_i - b\left(\theta_i\right)}{a\left(\vartheta\right)} + c\left(y_i, \vartheta\right)\right\},$$
kde $a$, $b$, $c$ sú známe funkcie a $\theta_i$ a $\vartheta$ sú neznáme parametre.

2. Lineárny prediktor
$$\eta_i = \sum_j X_{ij}\beta_j,$$
kde $X_{ij}$sú známe hodnoty prediktorov a $\beta_j$ sú neznáme parametre.

3. Linková funkcia
$$E\left[Y_i\right] = g^{-1}\left(\eta_i\right),$$
o ktorej platí, že je monotónna a diferencovateľná.

*Renshaw a Verrall* (1998) formulovali nasledujúci model

$$E[X_{ij}] = m_{ij} \text{ a } Var[X_{ij}] = \phi E[X_{ij}] = \phi m_{ij}$$

$$log(m_{ij}) = \eta_{ij}, \tag{4}$$

kde $\eta_{ij}$=$c + \alpha_i + \beta_j$, $X_{ij}$ predstavuje inkrementálne škody a platí $\alpha_1 = 0$ a $\beta_1 = 0$.

Model definuje zovšeobecnený lineárny model (GLM - Generalised linear model), kde je $X_{ij}$ modelované priamo ako odozva. Spojenie $m_{ij}$ s lineárnym prediktorom je v tomto prípade zaručené pomocou logaritmickej linkovej funkcie. Chyby majú „over-dispersed" Poissonovo rozdelenie (ODP). $\phi$ predstavuje neznámy škálovací parameter.

V prípade takto definovaného modelu je však potrebné zmieniť malé obmedzenie, ktoré sa týka súčtu inkrementov škôd v riadkoch a stĺpcoch. Definícia modelu vyžaduje, aby súčty inkrementov v každom riadku a v každom stĺpcci trojuholníka boli kladné. Táto skutočnosť môže byť podľa *Renshaw a Verrall* (1998) vyriešená tým, že inkremetálne výšky škôd sú modelované ako nezávislé premenné s gamma rozdelením. Použitím gamma rozdelenia sa v modeli (4) zmení definícia rozptylu, ktorý je v tejto situácii definovaný nasledovne

$$Var[X_{ij}] = \phi E[X_{ij}]^2 = \phi m_{ij}^2.$$

Odhad výšky rezervy však v takto definovanom modeli nie je identický ako odhad metódou Chain Ladder, čo platilo u Mackovej metódy a GLM modelu s „over-dispersed" Poissonovým rozdelením. Odhad je však veľmi blízko týmto hodnotám.

Keďže oba modely predstavujú GLM modely, môžeme využiť k odhadom jednotlivých parametrov týchto modelov *metódu maximálnej vierohodnosti*. Táto metóda je založená na maximalizácii tzv. vierohodnej funkcii, ktorú môžeme definovať ako

$$L\left(\boldsymbol{Y}, \theta_i, \vartheta\right) = \prod_{i=1}^{n} f\left(Y_i, \theta_i, \vartheta\right),$$

kde platí, že $Y_i \sim f\left(y_i, \theta_i, \vartheta\right)$ vzájomne nezávislé a hustota závisí na prediktoroch pomocou vzťahu $\theta_i = \left(b^{'}\right)^{-1}\left(g^{-1}\left(\eta_i\right)\right)$. Podrobnejší výklad k *metóde maximálnej vierohodnosti* je možné nájsť napr. v *Anděl* (2007). Odhady parametrov vyššie popísaných modelov a ich ďalšie vlastnosti sme schopní zistiť dostupným štatistickým softvérom.

V nami navrhovanom modeli však využijeme spojitosť medzi Mackovou metódou a GLM modelom s ODP rozdelením. K odhadu chyby predikcie budeme používať tzv. *dvojfázový bootstrap* (*England*, 2001), ktorého veľkou výhodou je jeho jednoduchosť a ľahká aplikácia aj mimo sofistikovaný štatistický softvér. Základná myšlienka tohoto prístupu je založená na kombinácii metódy Chain Ladder a GLM modelu s ODP rozdelením.

Metóda bootstrapu vychádza z predpokladu nezávislých a identicky rozdelených dát. V prípade regresie a GLM je však často porušený predpoklad o identicky rozdelených dátach. *Efron a Tibshirani* (1993) doporučujú preto v prípade regresných problémov bootstrapovať namiesto dát rezíduá. Správna definícia rezíduí je v prípade GLM preto veľmi dôležitá. Medzi vlastnosti, ktoré by mali bootstrapované rezíduá spĺňať patria:

- nulová stredná hodnota,
- spoločný rozptyl,
- symetrické rozdelenie.

V prípade GLM môžeme medzi často používané rezíduá zaradiť *neškálované Pearsonové rezíduá*[6] a *neškálované deviančné rezíduá.*

*England* (2001) používa v rámci dvojfázového bootstrapu *neškálované Pearsonové rezíduá,* ktoré sú definované nasledovne

$$r_{ij}^{(p)} = \frac{X_{ij} - \hat{X}_{ij}}{\sqrt{\hat{X}_{ij}}}, \tag{5}$$

kde $X_{ij}$ predstavuje inkrementálne hodnoty škôd a $(p)$ značí, že sa jedná o Pearsonové rezíduá. Hodnoty $\hat{X}_{ij}$ dopočítame spätne pomocou odhadnutých vývojových faktorov z metódy Chain Ladder.

**Fáza 1**

Prvá fáza bootstrapu je tvorená jednoduchou aplikáciou metódy Chain Ladder na kumulatívny trojuholník škôd. Na základe týchto hodnôt spočítame hodnoty neškálovaných Pearsonových rezíduí. Zo získaných hodnôt rezíduí $r_{ij}^{(p)}$ vytvoríme bootstrapový výber ${}^*r_{ij}^{(p)}$. Riešením rovnice (5) pre ${}^*r_{ij}^{(p)}$ získame inkrementálne hodnoty „pseudo-trojuholníka" ako

$${}^*X_{ij} = {}^* r_{ij}^{(p)} \cdot \sqrt{\hat{X}_{ij}} + \hat{X}_{ij}.$$

Z takto zostaveného trojuholníka vytvoríme kumulatívny trojuholník a aplikujeme metódu Chain Ladder. Jednoduchým diferencovaním získame hodnoty inkremetov pre budúce škody. Postup vytvorenia ${}^*r_{ij}^{(p)}$ opakujeme $B$ krát a vytvoríme $B$ bootstrapových výberov. Následne využitím *metódy Chain Ladder* aj $B$ budúcich

[6] Neobsahujú vplyv škálovacieho parametra $\phi$.

„pseudo-trojuholníkov", následným diferencovaním aj inkrementálne hodnoty budúcich škôd.

Situácia kedy nás zaujíma len hodnota rozptylu odhadu si nevyžaduje druhú fázu. Smerodatná odchýlka $B$ bootstrapových odhadov nám poskytuje štandardnú chybu, čo predstavuje odhad druhej odmocniny rozptylu odhadu. Nás však zaujíma chyba predikcie a preto potrebujeme k tomuto odhadu pridať odhad rozptylu procesu.

**Fáza 2**

Druhá fáza bootstrapu teda predstavuje simuláciu, ktorá poskytne odhad rozptylu procesu. Pre každú inkrementálnu hodnotu $\hat{X_{ij}}$ budúcich škôd spočítaných v prvej fáze, simulujeme výplatu z predpokladanej distribúcie (v našom prípade ODP rozdelenie), kde parametrom strednej hodnoty je práve $\hat{X_{ij}}$ a rozptylom $\phi\hat{X}_{ij}$, ktoré sme získali v prvej fáze. Tento postup opakujeme pre každý z $B$ trojuholníkov. Neznámy Pearsonov škálovací parameter $\phi$ môžeme odhadnúť ako

$$\phi_p = \frac{\sum(r_{ij}^{(p)})^2}{n-p},$$

kde $n$ je počet dát v danej vzorke, $p$ je počet odhadovaných parametrov a suma je nad počtom rezíduí ($n$).

Následným súčtom takto upravených výplat získame odhad hodnoty rezervy pre jednotlivé škodné roky ako aj celkový odhad rezervy. Smerodatná odchýlka získaných hodnôt nám poskytuje odhad chyby predikcie. Z takto získaných hodnôt výšky rezerv vytvoríme rozdelenie predikcie odhadu rezervy, z ktorého môžeme zistiť ďalšie nami požadované štatistiky.

*England* (2001) poukazuje na jeden problém, ktorý súvisí so simuláciami z ODP rozdelenia. K získaniu realizácie z ODP so strednou hodnotou $X$ a rozptylom $\phi X$ je potrebné využiť malý trik, kedy nás zaujíma pozorovanie z Poissonoveho rozdelenia so strednou hodnotou $X_{ij}/\phi$ a vynásobením $\phi$. Trik však spôsobuje menšie nevýhody tohoto postupu. Jednou z nevýhod je, že každé pozorovanie musíme násobiť $\phi$, čo pre veľké $\phi$ nie je žiaduce. Druhou nevýhodou podľa *England* (2001) je dôsledok, že v prípade neceločíselných hodnôt $\phi$ , budú aj pozorovania neceločíselné. Z tohoto dôvodu je preto často namiesto ODP rozdelenia používané Gamma rozdelenie, ktoré touto nevýhodou netrpí.

Na záver tohoto odseku ešte dodajme, že *England, Verrall* (1999) odvodili vo svojej práci rozptyl odhadu na základe využitia kombinácie bootstrapu pre *rozptyl* *odhadu* a analytického spôsobu pre odhad *rozptylu procesu*. Kombinácia týchto dvoch spôsobov si však v prípade bootstrapu pre *rozptyl odhadu* vyžadovala malú úpravu, ktorá upravuje vychýlenie tohoto odhadu.

Podobnú úpravu vyžaduje aj vyššie popísaná metóda dvojfázového bootstrapu. Úprava spočíva v nahradení *neškálovaných Pearsonových rezíduí* pomocou *upravených rezíduí*, ktoré upravíme vynásobením hodnotou berúc v úvahu počet stupňov voľnosti daného modelu a definujeme ich nasledovne

$$r_{ij}^{(adj)} = \sqrt{\frac{n}{n-p}} \cdot r_{ij}^{(p)},$$

kde $n$ je počet dát v danej vzorke, $p$ je počet odhadovaných parametrov.

*Náklady na kapitál:*

Vyššie získané rozdelenie výplat, resp. rezervy, využijeme v prípade stanovenia hodnoty $CoC$. Výška požadovaných nákladov je spojená s veľkosťou rizikového kapitálu poisťovne. Hodnotu rizikového kapitálu určíme na základe nami získaného rozdelenia rezervy, kde využijeme *hodnotu v riziku* (VaR - Value at Risk) na hladine spoľahlivosti $1-\alpha$. Výšku rizikového kapitálu potom môžeme definovať ako

$$RC_{ZNR} = R_{1-\alpha} - R,$$

kde $R_{1-\alpha}$ predstavuje hodnotu $1-\alpha$ kvantilu odhadnutého rozdelenia rezervy (napr. 99,5% kvantil rozdelenia rezervy) a $R$ predstavuje hodnotu škodnej rezervy na očakávané poistné plnenie.

Inými slovami môžeme rizikový kapitál interpretovať ako výšku kapitálu, ktorá je potrebná k eliminácii neočakávaných strát na určitej hladine spoľahlivosti. Napríklad v prípade Solvency II je táto hladina stanovená vo výške 99,5%. Ďalšou možnou interpretáciu je, že rizikový kapitál znižuje pravdepodobnosť ruinovania poisťovne.

Hodnotu nákladov na kapitál potom môžeme v čase $t$ definovať využitím sadzby nákladov na kapitál $r_{CoC}$ takto

$$CoC_t = RC_{ZNR} \cdot r_{CoC}.$$

V prípade hodnôt $CoC_i$, kde $t+1 \leq i \leq T$ využijeme pre zjednodušenie predpoklad, ktorý hovorí, že pomer rizikového kapitálu ku škodnej rezerve ostane v budúcnosti rovnaký. Označme tento pomer *cratio* (capital ratio), potom pre $CoC_{t+1}$ platí

$$CoC_{t+1} = R_{t+1} \cdot cratio \cdot r_{CoC}.$$

Analogickým spôsobom by sme pokračovali pre roky $t+2, ..., T$.

## 2.2 Zisk z obnovených zmlúv

Predchádzajúca časť nášho navrhnutého modelu popisovala zisk tvorený nadbytkom škodných rezerv aktuálneho obchodu. V nasledujúcej časti popíšeme druhú časť navrhovaného modelu, ktorá by mala reflektovať zisky, ktoré plynú z obnovených zmlúv aktuálne platného poistného kmeňa. Hodnotu týchto ziskov budeme značiť symbolom $ZOZ$ (Zisk z obnovených zmlúv). Aktuálna hodnota ziskov pochádzajúca z obnovených zmlúv v sebe nezahŕňa žiadne ďalšie novovzniknuté zmluvy. V tejto časti modelu ide o odhad správania aktuálneho poistného kmeňa v budúcnosti.

Modelovanie aktuálneho poistného kmeňa do budúcnosti je ovplyvnené viacerými faktormi. Faktory ovplyvňujúce správanie súvisia s tým ako bude náš poistný kmeň vyzerať v budúcnosti. Otázkou je koľko poistných zmlúv bude náš kmeň obsahovať, aké veľké škody bude tento kmeň produkovať alebo aké náklady súvisia s jeho spravovaním.

V prvej časti tejto podkapitoly sa budeme zaoberať technickým výsledkom poisťovne, ktorý predstavuje jednu z možností ako môžeme merať ziskovosť poisťovne. V ďalšej časti sa potom pozrieme na zisk plynúci z postupného rozpúšťania rezervy a nakoniec sa budeme venovať nákladom na kapitál, ktoré súvisia s obnovenými zmluvami.

### 2.2.1 Technický výsledok

Hodnota technického výsledku poisťovne predstavuje bilanciu jej príjmov a výdajov. Medzi najväčšie príjmy poisťovne patrí určite poistné, na druhú stranu však môžeme medzi jej náklady zahrnúť výplaty na škody a náklady spojené so správou poistného kmeňa. Technický výsledok, resp. zisk poisťovne, je potom závislý na zaslúženom poistnom, zmene (tvorbe) rezervy, výške vyplatených škôd a v neposlednom rade aj na nákladoch súvisiacimi s poistnými zmluvami. Keďže sa v tejto časti modelu zaoberáme ziskom, ktorý pochádza z obnovených zmlúv a je spojený s budúcim správaním poistného kmeňa, bude technický výsledok predstavovať jeden z dôležitých parametrov modelu $ZOZ$.

V nasledujúcej časti sa zameriame na jednotlivé zložky technického výsledku, popíšeme návrh ako tieto zložky stanoviť.

**Zaslúžené poistné**

Zaslúžené poistné pochádzajúce z poistných zmlúv platných v poistnom kmeni v budúcnosti je ako bolo vyššie spomenuté najdôležitejším zdrojom príjmov poisťovne. Inými slovami je hodnota budúceho zaslúženého poistného závislá na objeme platných poistných zmlúv, ktoré naše portfólio bude obsahovať v nasledujúcich rokoch. V nasledujúcej časti si ukážeme ako je možné stanoviť parameter modelu, ktorý je pre určenie hodnoty zaslúženého poistného veľmi dôležitý.

*Miera obnovy zmlúv (Renewal rate):*

Tak ako v prvej časti modelu budeme predpokladať, že sa nachádzame v čase $t$ a hodnotu portfólia chceme určiť do času $T$. Vzhľadom k tomu, že v neživotnom poistení nie je zaručený prítok pravidelného poistného v nasledujúcich rokoch, je veľmi dôležité správne odhadnúť mieru obnovovania aktuálne platných zmlúv v budúcnosti, ktorá poslúži k odhadu budúceho poistného. Napr. *Diers a kol* (2009) predpokladali nemennosť priemernej miery storna a priemerného poistného v portfóliu. Portfólio rozdelili na tri príjmové segmenty, ktoré reprezentovali rôznu ziskovosť a výsledné správania poistených. Preddefinovanú mieru storna potom upravili pomocou váh tak aby odpovedala danému segmentu. Obdobný použitím váh určili aj priemernú výšku poistného v danom segmente. Na počty zmlúv daného segmentu potom aplikovali príslušnú hodnotu storna tohoto segmentu. Získali tak počet obnovených zmlúv v danom segmente. K získaniu hodnoty poistného z obnovených zmlúv vynásobili tento počet priemerným poistným v danom segmentu. Skupiny vykazujúc spoločné vlastnosti sa niekedy nazývajú „model-pointy". Modelovanie hodnoty zisku z obnovených zmlúv pomocou „model-pointov" je jedným z možných prístupov, ktoré sa v praxi používajú.

V prípade nášho modelu budeme vychádzať z portfólia ako celku. Dôležité v prípade obnovených zmlúv je znak na základe ktorého poznáme či sa jedná o obnovenú zmluvu alebo o novú zmluvu. Niekedy môže byť sledovanie zmlúv v čase problémom, ktorý môže spôsobovať nemožnosť získania relevantných údajov z informačných systémov poisťovne. Ďalšou odlišnosťou medzi poisťovňami môže byť rôzna definícia obnovenej zmluvy. Niekto môže definovať obnovu na základe rovnakého poistníka, niekto na základe rovnakého čísla poistnej zmluvy apod.

V našom návrhu budeme vychádzať z historického vývoja počtu zmlúv v portfóliu, kedy si celkový počet zmlúv rozdelíme podľa roku ich vzniku. Predpokladom tohoto spôsobu je existencia histórie a informácia o obnove zo systému, ktorá je potrebná k stanoveniu tohoto odhadu.

Definujme $PPZ_{lk}$ ako počet platných zmlúv ($PPZ$) začínajúcich v roku $l$ a stále platných v roku $k$, kde $1 \leq l \leq t$ a $0 \leq k \leq t-1$. Takýmto spôsobom vytvoríme trojuholníkovú schému počtu zmlúv, kde jednotlivé stĺpce trojuholníka predstavujú počet platných zmlúv po $k$ rokoch s počiatkom platnosti v roku $l$.

Na základe úbytkov v kmeni potom môžeme definovať kumulatívnu mieru obnovy zmlúv aktuálne planých v našom portfóliu $rr^{cum1}$ nasledujúcim spôsobom

$$rr_k^{cum1} = 1 + \frac{1}{t-k}\sum_{l=1}^{t-k}\{(PPZ_{lk} - PPZ_{l0})/PPZ_{l0}\},\ pre\, 1 \leq k \leq t-1.$$

Poznamenajme, že pre $k = t-1$ sa hodnota $rr_{t-1}^{cum1}$ počíta len na základe jedného známeho pozorovania, čo patrí medzi jednu z nevýhod použitého prístupu. Problém je možné odstrániť preložením dát vhodnou krivkou.

Vzhľadom k zachyteniu lepšieho správania obnovených zmlúv a pri detekcii trendu je možné tieto informácie zohľadniť a použiť k výpočtu len najnovšie pozorovania.Vyššie definovaný vzorec pre $rr^{cum1}$ potom môžeme pre posledné tri najnovšie pozorovania prepísať nasledovne

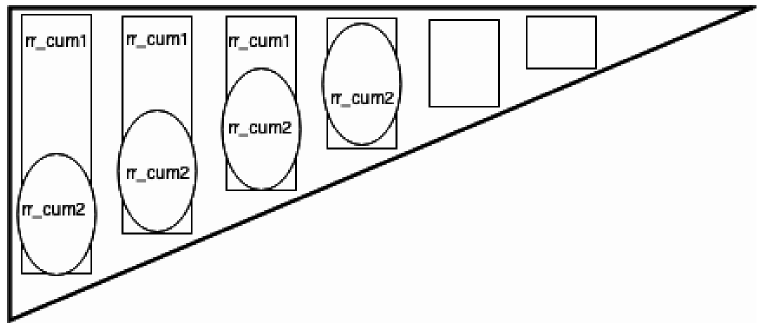
$$rr_k^{cum2} = 1 + \frac{1}{3}\sum_{l=t-k-2}^{t-k}\{(PPZ_{lk} - PPZ_{l0})/PPZ_{l0}\},\ pre\, 1 \leq k \leq t-3.$$

Pre $rr_{t-2}^{cum2}$ potom platí

$$rr_{t-2}^{cum2} = 1 + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2}\{(PPZ_{lt-2} - PPZ_{l0})/PPZ_{l0}\}$$

a konečne pre $rr_{t-1}^{cum2} = 1 + ((PPZ_{1,t-1} - PPZ_{1,0})/PPZ_{1,0})$ . V prípade aplikácie budeme používať práve tieto upravené hodnoty pre posledné tri najnovšie pozorovania.

Pre lepšiu predstavivosť uvádzame obrázok č.4, na ktorom je schematicky znázornený rozdiel medzi použitými dátami v jednotlivých prípadoch zmienených vyššie.




Obr. 4: Schéma výpočtu hodnôt obnovených zmlúv

Kumulatívne hodnoty predstavujú percento platných zmlúv z portfólia po $k$ rokoch. Nekumulatívne hodnoty predstavujú percento obnovených zmlúv v danom roku, matematicky to môžeme môžeme definovať ako

$$rr_k = \frac{rr_k^{cum2}}{rr_{k-1}^{cum2}},\, pre\, 1 \leq k \leq t-1, \tag{6}$$

kde kladieme $rr_0 = 1$.

Na základe získaných hodnôt môžeme zostaviť riadkový vektor $(rr_1, ..., rr_{t-1})$, ktorého zložky predstavujú percento obnovených zmlúv v danom čase. V tomto prípade je dobré si uvedomiť, že hodnoty percent obnovených zmlúv sa môžu v realite líšiť od nášho odhadu. Hodnoty obnovených zmlúv pre nás predstavujú len bodový odhad. Informácie o rozdelení tohoto parametru modelu navrhovaným spôsobom nezískame.

*Zaslúžené poistné:*

V prípade hodnoty budúceho zaslúženého poistného budeme vychádzať zo zaslúženého poistného v roku $t$, ktoré označíme symbolom $EP_t$ z anglického earned premium. Zaslúžené poistné v čase $t$ je tvorené zmluvami s rôznymi počiatkami zmlúv. Môžeme preto definovať $EP_t^b$ ako zaslúžené poistné v čase $t$, ktoré pochádza z poistných zmlúv s počiatkom platnosti v roku $b$, kde $1 \leq b \leq t$ a platí, že $EP_t = \sum_{b=1}^{t} EP_t^b$.

Odhad budúceho zaslúženého poistného pochádzajúceho z aktuálne platných zmlúv potom môžeme definovať ako

$$\left(EP_t^1, ..., EP_t^t\right) \times \begin{pmatrix} rr_t & 0 & 0 & . & 0 \\ rr_{t-1} & rr_{t-1} \cdot rr_t & . & . & 0 \\ . & . & . & . & 0 \\ rr_2 & rr_2 \cdot rr_3 & . & rr_2 \cdot ... \cdot rr_t & 0 \\ rr_1 & rr_1 \cdot rr_2 & . & . & rr_1 \cdot rr_2 \cdot ... \cdot rr_t \end{pmatrix}$$

$$= (EP_{t+1}, ..., EP_T)$$

Zložky vektora $(EP_{t+1}, ...EP_T)$ potom definujú hodnoty zaslúženého poistného v jednotlivých rokoch budúcnosti. K stanoveniu hodnôt tohoto vektora sme využili informácie o správaní portfólia v minulosti, ktoré sme získali vyššie. Dodajme, že hodnotu $rr_t$ odhadneme na základe informácií o predchádzajúcich hodnotách $rr_i$, kde $1 \leq i \leq t-1$.

**Výška budúcich škôd**

Faktorom, ktorý tvorí náklady z obnovených zmlúv, je objem poistných plnení z nich pochádzajúci. Tak ako v prípade hodnoty zaslúženého poistného budeme vychádzať z historicky známych hodnôt, ktoré pochádzajú zo správania poistného kmeňa v minulosti. Výšku poistných plnení stanovíme na základe informácie o odhade škodného pomeru, ktorý pochádza zo známych škôd v minulosti.

*Odhad konečného škodného pomeru -ULR (Ultimate loss ratio):*

Odhad konečného škodného pomeru môžeme všeobecne definovať nasledujúcim vzťahom

$$ULR = (P + R)/EP,$$

kde $P$ predstavuje výplaty poistných plnení, $R$ je hodnota škodnej rezervy a $EP$ je zaslúžené poistné.

V prípade odhadu konečného škodného pomeru budeme vychádzať z odhadu zaslúženého poistného, ktoré sme získali vyššie uvedeným výpočtom. Výška škôd budme odhadovať na základe informácie o konečnom škodnom pomere. Za predpokladu, že budeme očakávať rovnaký škodný priebeh aj v budúcnosti, môžeme výšku budúcich škôd z obnovených zmlúv definovať ako

$$(CL_{t+1}, ..., CL_T) = ULR_t \cdot (EP_{t+1}, ..., EP_T),$$

kde $CL_i$ označuje výšku škody v roku $i$ (z anglického claims).

Odhad škodného pomeru takýmto spôsobom je možný len za predpokladu nemennosti škodného pomeru v čase. To znamená, že odhadovaný škodný pomer je rovnaký bez ohľadu na počiatok poistnej zmluvy a v priebehu jej životnosti v kmeni nie je detekovaná žiadna zmena v správaní sa škodného pomer. Inými slovami predpokladáme, že platí $ULR_t^1 = ... = ULR_t^b = ... = ULR_t^t$, kde horný index predstavuje počiatok poistných zmlúv, ku ktorým sa odhad škodného pomeru vzťahuje.

*Zmena ULR v čase:*

Pokiaľ je však predpoklad o nemennosti škodného pomeru v čase porušený je potrebné túto skutočnosť zahrnúť do odhadu škôd v budúcnosti. Porušenie tohoto predpokladu si môžeme popísať na príklade jednej zmluvy. Predstavme si poistnú zmluvu, ktorá ma v prvom roku existencie škodu. Na základe údajov o škode a poistnom vieme určiť hodnotu škodného pomeru. V prípade obnovenia zmluvy v ďalšom roku sa objem nami prijatého poistného zväčší a situácia kedy v priebehu roka nenastane žiadna ďalšia škoda nám zlepší škodný pomer na danej poistnej zmluve. Inými slovami môžeme hovoriť o poklese rizikovosti klienta v prípade obnovenia zmluvy. V prípade úplnej segmentácie klientov pri vstupe do kmeňa by zmeny v škodnom pomere nemali nastávať, ale dosiahnutie úplnej segmentácie je v realite skoro nemožné.

Označme $ulr_{ch_b}$ percentuálnu zmenu odhadu škodného pomeru pomeru v prípade poistných zmlúv s počiatkom platnosti $b\, 1 \leq b \leq t-1$. To znamená o koľko percent je škodný pomer zmlúv s iným počiatkom lepší prípadne horší. Základnou myšlienkou zapracovania zmeny škodného pomeru je získať hodnotu $ULR_t^t$. To znamená, že nás zaujíma hodnota škodného pomeru pre zmluvy platné v roku $t$. Hodnoty $ULR_t^b$ potom získame definovaním rekurzívneho vzťahu

$$ULR_t^b = ULR_t^{b+1}(1 + ulr_{ch_{t-b}}),\ 1 \leq b \leq t-1.$$

Budeme vychádzať z všeobecnej definície škodného pomeru $ULR_t$. Rozdelením objemu plnení podľa počiatku platnosti zmluvy dostávame pre škodný pomer

$$ULR_t = \frac{(P_t^1 + R_t^1 + ... + P_t^t + R_t^t)}{EP_t} = \frac{1}{EP_t}\left(\frac{(P_t^1 + R_t^1)\,EP_t^1}{EP_t^1} + ... + \frac{(P_t^t + R_t^t)\,EP_t^t}{EP_t^t}\right)$$

$$= \left(\frac{ULR_t^1 EP_t^1}{EP_t} + ... + \frac{ULR_t^t EP_t^t}{EP_t}\right),$$

kde indexy v exponente predstavujú roky počiatku platnosti poistných zmlúv, ku ktorým sa hodnoty škodných pomerov vzťahujú.

Opakovaným využitím rekurzívneho vzťahu môžeme rovnicu vyššie prepísať do tvaru

$$ULR_t = \left(\frac{ULR_t^t \prod_{i=1}^{t-1}(1 + ul_{ch_i})EP_t^1}{EP_t} + \frac{ULR_t^t \prod_{i=1}^{t-2}(1 + ul_{ch_i})EP_t^2}{EP_t} + ... + \frac{ULR_t^t EP_t^t}{EP_t}\right)$$

a z tohoto vzťahu dostávame hodnotu $ULR_t^t$ ako

$$ULR_t^t = \left(\frac{ULR_t}{\left(\frac{EP_t^t}{EP_t} + \frac{EP_t^{t-1}}{EP_t}(1 + ul_{ch_1}) + ... + \frac{EP_t^1}{EP_t}\prod_{i=1}^{t}(1 + ul_{ch_i})\right)}\right).$$

Následnou využitím rekurzívneho vzorca dostanem hodnoty $ULR_t^b$ pre všetky $1 \leq b \leq t$. Budúce hodnoty veľkosti očakávaných plnení získame podobným spôsobom ako v prípade zaslúženého poistného. Pre prvý rok majú hodnoty plnení tvar

$$\begin{pmatrix} EP_{t+1}^1 ULR_t^1\,(1 + ul_{ch_1}) \\ EP_{t+1}^2 ULR_t^2\,(1 + ul_{ch_2}) \\ . \\ . \\ EP_{t+1}^{t-1} ULR_t^{t-1}\left(1 + ul_{ch_{t-1}}\right) \\ EP_{t+1}^t ULR_t^t\,(1 + ul_{ch_t}) \end{pmatrix},$$

pre druhý rok to vypadá nasledovne

$$
\begin{pmatrix}
0 \\
EP_{t+2}^{2} ULR_{t}^{2} \left(1 + ul_{ch_2}\right)\left(1 + ul_{ch_1}\right) \\
. \\
. \\
EP_{t+2}^{t-1} ULR_{t}^{t-1} \left(1 + ul_{ch_{t-1}}\right)\left(1 + ul_{ch_{t-2}}\right) \\
EP_{t+2}^{t} ULR_{t}^{t} \left(1 + ul_{ch_t}\right)\left(1 + ul_{ch_{t-1}}\right)
\end{pmatrix}
$$

a podobným spôsobom by sme postupovali ďalej až by sme skonštruovali maticu, ktorá by nad hlavnou diagonálou obsahovala samé nuly. Súčet jednotlivých stĺpcov predstavuje hodnotu plnení $CL_i$ v obdobiach $t + 1 \leq i \leq T$.

**Náklady**

Poslednou zložkou technického výsledku, ktorej sme ešte nevenovali pozornosť, sú náklady. Pre stanovenie ich hodnoty je možné využiť napríklad plánované hodnoty poisťovne, prípadne využiť informácie z historických hodnôt. Zložka nákladov v sebe v našej situácii zahŕňa akvizičné a administratívne náklady.V prípade nášho modelu bude hodnota nákladov, spojená s obnovenými zmluvami, predstavovať jeden z najjednoduchších parameterov modelu.

V niektorých prípadoch môže byť zložité stanoviť výšku očakávaných nákladov. Zjednodušenie v našom modeli preto znamená, že parameter nákladov v našom modeli stanovíme ako percento zo zaslúženého poistného.

Označme $exp_i$ ako výšku nákladov v percentách stanovených pre budúci rok $i$, potom môžeme budúce hodnoty nákladov súvisiace s aktuálnym kmeňom poistiek definovať nasledujúcim spôsobom

$$EXP = (EP_{t+1} \cdot exp_{t+1}, ..., EP_T \cdot exp_T),$$

kde jednotlivé zložky predstavujú výšku nákladov v budúcnosti .

Technický výsledok pre rok $i$ resp. zisk pochádzajúci z technického výsledku potom môžeme definovať ako

$$TR_i = EP_i - CL_i - EXP_i,$$

kde $t + 1 \leq i \leq T$.

Hodnotu technického výsledku však môžu ovplyvňovať aj ďalšie iné parametre. My na tomto mieste spomenieme dva z nich, ktoré jeho hodnotu ovplyvňujú. Jedným z nich je možnosť poisťovne využiť zaistenie, druhým je vplyv inflácie u škôd resp. nákladov.

V našom modeli však tieto parametre nebudeme kvôli jednoduchosti bližšie skúmať. V prípade potreby je možné návrh modelu o tieto parametre rozšíriť a venovať sa im hlbšie.

*Inflácia:*
Vzhľadom na dlhodobý odhad výšky $ZOZ$ je možné v modeli zohľadniť aj výšku inflácie, ktorá je spojená so škodami, prípadne nákladmi. V prípade inflácie existuje viac jej mier, ktoré by bolo možné použiť. Medzi najznámejšie miery inflácie patria *Deflátor HDP, Index spotrebiteľských cien (CPI), Index cien výrobcov (PPI).*

*Zaistenie:*
Parameter zaistenia ovplyvní hodnotu výšky poistného ako aj hodnotu poistných plnení. V prípade zaistenia je dôležité aká forma zaistenia je zvolená. Hlavnou funkciu zaistenia by mala byť snaha o zníženie poistne-technického rizika.

Delením zaistenia na základe rizika môžeme zaistenie rozdeliť napr. podľa *Mandl, Mazurová* (1999) na dve skupiny a to *proporcionálne* a *neproporciálne* zaistenie.

- *Proporcionálne zaistenie* je založené na výške pomeru, ktorým si delí poisťovňa so zaisťovňou výšku škody. Medzi dve najznámejšie varianty zaistenia v tomto prípade patrí *kvótové* a *excedentné zaistenie.*

- *Neproporciálne zaistenie* je viazané na výšku škody. V prípade, že výška škody nepresiahne stanovenú dolnú hranicu plní poisťovňa celé plnenie sama. V tomto prípade patria medzi dve často používané *XL-zaistenie* a *SL-zaistenie.*

V prípade použitia zaistného je potrebné zahrnúť túto skutočnosť do modelu a upraviť hodnoty budúceho poistného o výšku zaistného. Takisto je potrebné upraviť hodnoty budúcich poistných plnení o príjmy, ktoré očakávame od zaisťovne.

### 2.2.2 Obnovené zmluvy a zisk z rezervy

V prípade technického výsledku sme stanovili očakávanú výšku plnenia, ktorá plynie z obnovených zmlúv. Tak ako v prvej časti modelu, môžeme aj v tomto prípade uvažovať zisk, ktorý plynie z postupného rozpúšťania rezervy. Odhadnuté hodnoty tvoriace $CL_i$ pre nasledujúce roky poisťovňa neuhradí v danom roku $i$, kde $t+1 \leq i \leq T$, všetky okamžite. Odhad rýchlosti vyplácania plnení môžeme určiť na základe informácie z minulosti. Na základe historických informácii môžeme určiť hodnoty

$pp_1,...,pp_m$, ktoré spĺňajú, že $0 \leq pp_i \leq 1$ a platí $\sum_{i=1}^{m} pp_i = 1$ a $m \leq T$. Tieto hodnoty stanovíme na základe informácie obsiahnutej v doplnenom inkrementálnom trojuholníku škôd. Pre $pp_j$ platí

$$pp_j = \sum_{i=1}^{m} X_{ij} / \sum_{l=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} X_{il}$$

pre každé $1 \leq j \leq m$, kde $X_{ij}$ predstavuje inkremetálnu výšku škody.

Pre ľubovoľné $i$, $t+1 \leq i \leq T$ získame vynásobením $CL_i$ hodnotami $pp_1,...,pp_m$ postupne vyplatené výšky plnení za rok $i$ ako $CL_i^* = (CL_i \cdot pp_1,...,CL_i \cdot pp_m) = (CL_i^{*1},...,CL_i^{*m})$. Súčasnú hodnotu $PV(CL_i^*)$ tokov rezervy určíme za predpokladu, že výplata nastane v polovici roka (priemerný čas vysporiadanie záväzkov je práve polrok). V prípade súčasnej hodnoty $CL_{t+1}^*$ dostávame vzťah

$$PV(CL_{t+1}^*) = CL_{t+1}^{*1}(1+r_1^{fr})^{-0,5} + CL_{t+1}^{*2}(1+r_1^{fr})(1+fr_{1,1})^{-0,5} + ...$$

$$+ CL_{t+1}^{*m}(\ 1+r_1^{fr})(1+fr_{1,1})...(1+fr_{m-1,1})^{-0,5}.$$

Vo vyššie uvedenom vzťahu predstavuje $fr_{nk}$ forwardovú sadzbu platnú od roku $n$ do roku $n+k$. Inými slovami sme získali súčasnú hodnotu tokov k počiatku roku $t+1$. K stanoveniu tejto forwardovej sadzby sme využili spojitosť medzi spotovou a frowardovou sadzbou, ktorú môžeme podľa *Cipra* (2005) popísať nasledovne

$$\left(1+r_n^{fr}\right)^n (1+fr_{nk})^k = \left(1+r_{n+k}^{fr}\right)^{n+k},$$

kde $r_n^{fr}$ predstavuje spotovú úrokovú mieru na $n$ rokov.

Rozdielom odhadnutých výplat a ich súčasných hodnôt v roku $t+1$ získame hodnotu diskontu pre rok $t+1$ ako

$$DV_{t+1} = CL_{t+1} - PV(CL_{t+1}^*).$$

V prípade roku $t+2$ je potrebné získať súčasnú hodnotu tokov $CL_{t+2}^*$ vztiahnutú k jeho počiatku nasledovne

$$PV(CL_{t+2}^*) = CL_{t+2}^{*1}(1+fr_{1,1})^{-0,5} + CL_{t+2}^{*2}(1+fr_{1,1})(1+fr_{2,1})^{-0,5} + ...$$

$$+CL^{*m}_{t+2}(1+fr_{1,1})(1+fr_{2,1})...(1+fr_{m,1})^{-0,5}.$$

Obdobne by sme postupovali pre každý ďalší ro v budúcnosti a získali hodnoty diskontu $DV_i$ pre $t+1 \leq i \leq T$. Hodnota diskontu $R_i$ tvorí časť zisku, ktorý navyšuje $ZOZ$ v roku $i$.

Poznamenajme, že aj v tomto prípade očakávame vzor vyplácania pre všetky nasledujúce roky rovnaký. Táto skutočnosť však nemusí odpovedať nášmu odhadu a rezervu môžeme vyplatiť skôr alebo neskôr ako očakávame.

### 2.2.3 Náklady na kapitál v obnovených zmluvách

V prípade $ZNR$ časti modelu boli náklady na kapitál spojené len s rizikom, ktoré pochádzalo z nedostatočnej výšky rezervy. V prípade $ZOZ$ sú tieto náklady spojené naviac aj s rizikom poistného. Spoločne môžeme riziko, ktoré súvisí s poistným a výškou rezervy nazvať *upisovacím rizikom* (underwritting, insurance risk).

Hodnotu nákladov na kapitál v obnovených zmluvách nášho modelu určíme zjednodušením, ktoré využíva postup doporučený v Solvency II. Poznamenajme, že snaha o zjednotenie metodiky môže viesť niekedy aj k nie úplne správnym výsledkom. Správanie portfólií poisťovní nie je jednotné a preto nemusia unifikované spôsoby vždy viesť k najlepším výsledkom.

Podľa Solvency II môžeme riziko poistného definovať ako riziko, ktoré vyplýva z náhodnej frekvencie a veľkosti poistnej udalosti v čase. Riziko poistného sa vzťahuje k aktuálne upísaným poistkám ako aj k poistkám pochádzajúcich z obnov. Riziko poistného v sebe zahŕňa riziko, že výška prijatého poistného je nedostatočná na pokrytie poistných plnení poisťovne.

V tejto časti modelu využijeme k získaniu veľkosti požadovaného kapitálu postup doporučený v Solvency II. Na základe výšky požadovaného kapitálu dokážeme odvodiť náklady na kapitál časti $ZOZ$ v obdobnej forme ako v prípade $ZNR$.

Budeme vychádzať z technickej špecifikácie použitej pri kvantitatívnej dopadovej štúdie v roku 2010 (*CEIOPS* (2010)) podľa čoho môžeme definovať rizikový kapitál (požadovaný kapitál) ako

$$RC_{ZOZ} = \rho\left(\sigma_{p,r}\right) \cdot V_{p,r},$$

kde $V_{p,r}$ je objem, ku ktorému sa riziko vzťahuje, $\sigma_{p,r}$ je smerodatná odchýlka, ktorá je kombináciu smerodatnej odchýlky súvisiacej s rizikom poistného $\sigma_p$ a smerodatnej odchýlky súvisiacej s rizikom rezerv $\sigma_r$ a $\rho$ je funkcia tejto smerodatnej odchýlky. Za predpokladu log-normálneho rozdelenia rizika môžeme definovať funkciu $\rho$ ako

$$\rho\left(\sigma\right) = \frac{exp\left\{N_{0,995} \cdot \sqrt{log(\sigma^2+1)}\right\}}{\sqrt{\sigma^2+1}} - 1,$$

kde $N_{0,995}$ je hodnota 99,5% kvantilu štandardného normálneho rozdelenia a $\sigma$ predstavuje smerodatnú odchýlku, ktorá je výsledkom kombinácie smerodatnej odchýlky rizika poistného a smerodatnej odchýlky rizika rezerv. Na základe tejto definície je hodnota veľkosti požadovaného kapitálu v súlade s požadovanou hladinou spoľahlivosti. Inými slovami získame hodnotu VaR na hladine 99,5%. Túto hodnotu môžeme podľa *CEIOPS* (2010) aproximovať takto $\rho\left(\sigma_{p,r}\right) \approx 3\sigma_{p,r}$.

Otázkou zostáva určiť jednotlivé vstupy pre výpočet $RC_{ZOZ}$. Jednotlivé vstupy sa určia pre každé odvetvie obchodu (LoB - Line of Business) samostatne. Objem daného LoB-u je súčtom objemu poistného a rezervy $V_{p,r}^{lob} = V_p^{lob} + V_r^{lob}$.

Objem poistného určíme ako

$$V_p^{lob} = max(P_{t,lob}^{earned}, P_{t,lob}^{written}) + P_{lob}^{pp},$$

kde $P_t^{written}$ je odhad predpísaného resp. $P_t^{earned}$ zaslúženého poistného pre nasledujúci rok a $PP^{pp}$ je súčasná hodnota poistného pochádzajúca z aktuálneho kmeňa, ktorá sa stane zaslúženým poistným v nasledujúcom období. Tento parameter je pre ročné kontrakty poistiek s možnosťou obnovy rovný nule. Objem rezervy sa určí jednoducho ako výška rezervy pre daný rok $i$ ako $V_r^{lob} = R_i$

Agregovanú smerodatnú odchýlku pre obe riziká a pre jeden LoB určíme pomocou jednotlivých odchýlok $\sigma_p^{lob}$ a $\sigma_r^{lob}$takto

$$\sigma_{p,r}^{lob} = \frac{\sqrt{(\sigma_p^{lob} \cdot V_p^{lob})^2 + 2\alpha\sigma_p^{lob}\sigma_r^{lob}V_p^{lob}V_r^{lob} + (\sigma_r^{lob} \cdot V_r^{lob})^2}}{V_p^{lob} + V_r^{lob}},$$

za predpokladu, že $\alpha = 0,5$ je korelačný koeficient medzi rizikom poistného a rizikom rezervy. V prípad smerodatnej odchýlky rizika poistného využijeme hodnoty definované v technickej špecifikácii kvantitatívnej dopadovej štúdie č. 5. V prípade hodnoty smerodatnej odchýlky rezervy využijeme hodnotu, ktorú sme získali využitím bootstrapu v prvej časti modelu. Prístup Solvency II povoľuje definovať vlastný parameter smerodatnej odchýlky. Samotnú hodnotu pre stanovenie výšky nákladov na kapitál môžeme definovať podobne ako v prvej časti modelu týmto spôsobom

$$CoC = RC_{ZOZ} \cdot r_{CoC}.$$

Hodnoty $CoC_i$ pre $t+1 \leq i \leq T$ stanovíme na základe odhadov poistného a výšky škôd, ktoré sme stanovili vyššie za predpokladu, že smerodatná odchýlka bude pre všetky nasledujúce roky nemenná.

Vzorce pre výpočet smerodatnej odchýlky pre všetky LoB-y môžeme nájsť v *CEIOPS* (2010), kde sa využije korelačná matica a diverzifikačný efekt medzi jednotlivými LoB-mi. Vstupujúcimi parametrami sú hodnoty objemov a smerodatných odchýlok pre jednotlivé LoB-y.

Jednou z možností ako model rozšíriť je stanovenie korelácie a výpočet smerodatnej odchýlky pre vlastné dáta poisťovne.

## 2.3 Hodnota aktuálneho obchodu

Na základe vyššie popísaných parametrov ovplyvňujúcich hodnotu aktuálneho portfólia v budúcnosti môžme definovať model pre hodnotu $ZOZ$. Celková hodnota zisku z obnovených zmlúv môže byť definovaná ako

$$ZOZ = \sum_{i=t+1}^{T} \Big\{ \left( (EP_i - CL_i - EXP_i) - (CoC_i) \right) (1 + r_i^*)^{-(i-t)} +$$

$$+ (DV_i) (1 + r_i^*)^{-(i-t-1)} \Big\}.$$

V prípade zisku z rezervy $DV$ diskontujeme až o obdobie neskôr, pretože zisk z diskontu je vztiahnutý k počiatku daného roka (viď kapitola 2.2.2).

Stanovenie súčasnej hodnoty $ZOZ$ je však ovplyvnené určitým rizikom, ktoré plynie z neistoty odhadnutých parametrov. Jedná sa najmä o bodové odhady parametru obnov zmlúv alebo škodného pomeru, ktoré môžu mať v realite iný obraz ako náš odhad. Ďalším vplyv neistoty plynie z nezabezpečených rizík, ktoré nie sú zahrnuté vo výpočte ocenenia portfólia. Zohľadnenie variability parametrov a nezabezpečeného rizika zahrnieme v našom modeli do rizikovej prirážky, o ktorú navýšime bezrizikovú úrokovú mieru v prípade diskontovania $ZOZ$. Túto diskontnú mieru označíme ako $r^*$.

Hodnotu $ZNR$ sme odvodili v predchádzajúcej časti a nasledovne

$$ZNR = \sum_{i=t+1}^{T} \Big\{ (UR_i - R_i) + \Big( R_i - R_i \left( 1 + r_i^{fr} \right)^{-(i-0{,}5)} \Big) - CoC_i (1 + r_i^{fr})^{-(i-0.5)} \Big\}$$

$$= \sum_{i=t+1}^{T} \Big\{ UR_i - R_i (1 + r_i^{fr})^{-(i-0.5)} - CoC_i (1 + r_i^{fr})^{-(i-0.5)} \Big\}.$$

Model, ktorý určuje hodnotu VIF môžeme potom definovať ako súčet týchto dvoch častí

$$VIF = ZNR + ZOZ.$$

Na záver tejto kapitoly ešte poznamenajme, že hodnota zisku pochádzajúca z nadbytku rezerv nemusí byť u každej poisťovne súčasťou hodnoty aktuálneho obchodu. Hodnota aktuálneho obchodu sa v každej poisťovni ani nemusí počítať. V súčasnej dobe je tento výpočet nahradzovaný napríklad čiastočným alebo úplným interným modelom.

# 3 Praktická ukážka aplikácie modelu

V nasledujúcej kapitole ukážeme praktickú aplikáciu modelu na reálnych dátach. Kapitolu rozdelíme do troch menších častí. V prvej časti ukážeme výsledky modelu, ktoré súvisia s nadbytkom rezerv. V druhej časti sa budeme venovať zisku z obnovených zmlúv a nakoniec ukážeme celkovú hodnotu aktuálneho poistného kmeňa. Budeme vychádzať z reálnych dát, ktoré boli kvôli anonymite upravené. Úprava dát však nemá vplyv na správanie portfólia v skutočnosti.

Poistný kmeň bude pre nás predstavovať jedno odvetvie (LoB). Dáta pochádzajú z konca roku 2011 a hodnotu kmeňa budeme počítať na nasledujúcich 12 ročných období. Na tomto mieste by som rád poďakoval spoločnosti *Generali Poisťovňa a.s.* za poskytnutie použitých dát pre túto prácu.

## 3.1 Hodnota nadbytku rezerv

Hodnota zisku z nadbytku rezerv ($ZNR$) je spojená s výpočtom výšky rezervy a odhadom veľkosti rizika, ktoré je spôsobené potencionálne nedostatočnou výškou rezervy. Budeme vychádzať z dát o škodách, ktoré sú uvedené v tabuľke 3. Jedná sa o kumulatívny trojuholník škôd, kde predpokladáme, že vývoj trojuholníka je už ukončený. V hodnotách trojuholníka sú zahrnuté aj náklady na spracovanie škôd.

| RŠ/RV | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *2002* | 5 894 919 | 16 249 779 | 23 716 108 | 27 342 153 | 27 887 608 | 27 919 052 | 27 937 006 | 27 948 356 | 27 953 601 | 27 955 401 |
| *2003* | 5 604 987 | 15 650 301 | 19 467 078 | 20 213 446 | 20 463 486 | 20 464 363 | 20 479 718 | 20 498 144 | 20 498 144 | 0 |
| *2004* | 8 178 568 | 15 360 725 | 18 214 765 | 21 643 337 | 21 796 621 | 21 832 727 | 21 923 443 | 21 923 443 | 0 | 0 |
| *2005* | 10 193 826 | 22 260 409 | 26 700 008 | 28 296 242 | 29 678 921 | 29 885 615 | 29 885 615 | 0 | 0 | 0 |
| *2006* | 9 507 932 | 18 374 614 | 21 901 253 | 24 064 761 | 24 545 265 | 24 607 178 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| *2007* | 9 897 993 | 23 562 372 | 28 851 532 | 29 874 139 | 30 195 459 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| *2008* | 15 647 773 | 30 535 905 | 35 180 308 | 37 206 259 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| *2009* | 19 725 212 | 37 570 024 | 45 215 018 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| *2010* | 18 220 734 | 31 877 049 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| *2011* | 11 062 453 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Tabuľka 3: Kumulatívny trojuholník škôd

**Výška škodnej rezervy:**

Aplikáciou metódy Chain-Ladder pre všetkých 10 období získame odhady vývojových faktorov, ktorými doplníme chýbajúce hodnoty na štvorec a určíme hodnotu rezervy pre jednotlivé škodné roky. Celková výška škodnej rezervy ($R$) má potom hodnotu 37 232 440 Kč. V tejto hodnote sú zahrnuté aj vyššie spomenuté náklady na spracovanie škôd.

Informácie o hodnote účtovníckej rezervy ($UR$) nemáme a preto využijeme „age to age” faktory metódy Chain Ladder. Vývojové faktory metódy Chain Ladder navýšime o 20% hodnoty smerodatnej odchýlky „age to age” faktorov. Týmto spôsobom získame celkovú výšku účtovnej rezervy v hodnote 43 479 550 Kč.

Získaním hodnôt $R$ a $UR$ dokážeme určiť výšku nadbytku rezervy ($NR$). Toky $R$ a $UR$ v nasledujúcich obdobiach získame z doplnených inkrementálnych trojuholníkov súčtom prvkov pod vedľajšou diagonálou. Pre nasledujúci rok platí, že hodnota výplat v budúcom roku je daná súčtom

$$R_{t+1} = \sum_{j=2}^{n} X_{n-j+2,j}$$

a pre hodnotu účtovnej rezervy $UR_{t+1}$ v nasledujúcom roku platí analogický vzťah. Výšku nadbytku rezervy v nasledujúcom roku určíme ako rozdiel týchto hodnôt

$$NR_{t+1} = UR_{t+1} - R_{t+1}.$$

Pre nasledujúce obdobia $t+2, ..., T$ získame hodnoty tokov pre účtovnú škodnú rezervu, škodnú rezervu a nadbytok rezervy analogicky. V tabuľke 4 môžeme prehľadne vidieť toky oboch rezerv v budúcnosti ako aj výšku nadbytku.

| Rok | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 | Celkom |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Účt. škodná rezerva | 26 655 386 | 11 199 858 | 4 235 666 | 1 047 502 | 216 607 | 87 795 | 26 993 | 7 525 | 2 217 | 43 479 550 |
| Škodná rezerva | 23 413 761 | 9 461 679 | 3 403 637 | 822 495 | 164 076 | 64 356 | 20 972 | 6 125 | 1 987 | 37 359 088 |
| Nadbytok rezervy | 3 241 626 | 1 738 179 | 832 028 | 225 007 | 52 531 | 23 439 | 6 022 | 1 400 | 231 | 6 120 462 |

Tabuľka 4: Toky rezerv a nadbytku rezerv v Kč

V prílohe môžeme nájsť „age to age” faktory, ich smerodatné odchýlky, vývojové faktory použité k odhadu škodnej rezervy a doplnené trojuholníky pre škodnú rezervu ako aj účtovnú rezervu.

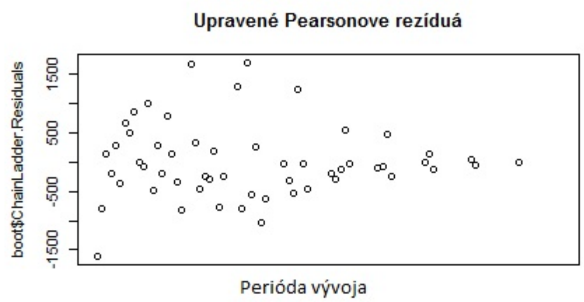
Súčasná hodnota tokov rezervy:

Vzhľadom k skutočnosti, že sú nás zaujíma súčasná hodnota vyššie uvedených tokov využijeme hodnoty bezrizikovej úrokovej miery. Využili sme bezrizikovú úrokovú mieru, ktorú odvodzuje a doporučuje Česká spoločnosť aktuárov z bezkupónových vládnych dlhopisov k 31.12.2011. Hodnoty bezrizikovej úrokovej miery môžeme nájsť takisto v prílohe.

**Náklady na kapitál:**

Náklady na kapitál sú v tejto časti modelu spojené s rizikom, že nami odhadnutá rezerva nebude dostatočná. K stanoveniu výšky nákladov na kapitál sme využili metódu bootstrap. Na spracovanie dát sme použili software R a knižnicu *ChainLadder*. Na základe dát určíme metódou bootstrap hodnotu 99,5% kvantilu. Rizikový kapitál si potom definujeme rozdielom získaného kvantilu a odhadu rezervy.

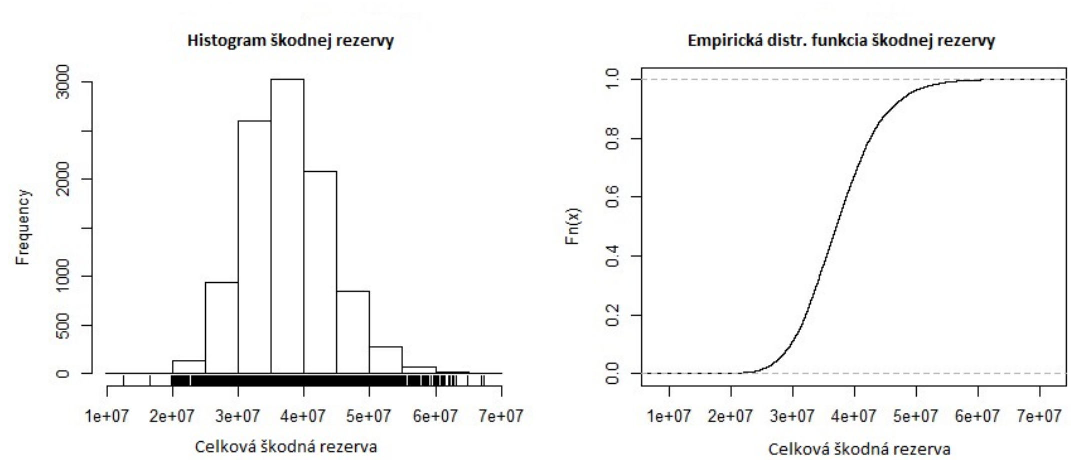
Metóda bootstrap využíva *upravené Pearsonove rezíduá,* ktoré sú pre naše dáta znázornené na obrázku č.5.




Obr. 5: Upravené Pearsonové rezíduá

Na základe obrázku č.6 môžeme predpokladať, že naše rezíduá majú požadované vlastnosti a použitie metódy bootstrap je adekvátne: rezíduá nevykazujú žiaden významný trend, nevyskytujú sa v nich veľmi odľahlé pozorovania a sú približne symetrické okolo nuly. V prípade posledných periód vývoja je možné pozorovať zužovanie, čo môže byť spôsobené malým počtom dát pre posledné roky vývoja. V prípade nahradenia ODP rozdelenia gamma rozdelením by sa tento problém mohol čiastočne odstrániť, pretože sa v definícii rozptylu nachádza druhá mocnina. My však budeme pracovať s ODP rozdelením.

Využijeme 10 000 simulácií a vytvoríme tým taký istý počet bootstrapových trojuholníkov. Na základe získaných dát určíme empirické rozdelenie škodnej rezervy. Na obrázku č. 6 uvádzame histogram pre škodnú rezervu a empirickú kumulatívnu distribučnú funkciu tejto rezervy.




Obr. 6: Histogram a empirická distribučná funkcia škodnej rezervy

Výšku požadovaného kapitálu na rôznych hladinách spoľahlivosti uvádzame v tabuľke 5. Napríklad podľa Solvency II je požadovaná výška kapitálu na hladine 99,5%.

| | |
|---|---|
| IBNR 99%: | 54 517 431 |
| IBNR 99.5%: | 56 137 928 |
| IBNR 99.9%: | 61 328 316 |

Tabuľka 5: Kvantily škodnej rezervy

Získaním hodnoty kvantilu spolu s hodnotou odhadu škodnej rezervy stanovíme rizikový kapitál. Použitím miery nákladov na kapitál $r_{CoC}$ získame požadovanú hodnotu nákladov na kapitál ($CoC$), ktoré musí poisťovňa držať. Pre $r_{CoC}$ využijeme hodnotu 6%, ktorá je doporučená v Solvency II. Celková výška rizikového kapitálu je 18 778 840 Kč . Hodnota nákladov na kapitál je potom rovná 1 126 730 Kč.

V prípade nášho modelu však potrebujeme poznať hodnotu požadovaného kapitálu resp. nákladov na kapitál v budúcnosti. K získaniu hodnôt požadovaného kapitálu využijeme zjednodušený predpoklad o tom, že pomer rizikového kapitálu voči škodnej rezerve ostáva aj v budúcnosti rovnaký. Na základe informácie o budúcich výplatách potom určíme hodnoty rizikového kapitálu ako aj nákladov spojených s týmto kapitálom.

V našej situácii je tento pomer rovný 50,3%. Tento spôsob popíšeme na nasledujúcom roku 2012. Hodnota škodnej rezervy predstavuje 37 232 440 Kč a v roku 2012 očakávame výplaty škôd vo výške 23 413 761 Kč. Škodná rezerva má na konci roku 2012 potom hodnotu 13 945 327 Kč a hodnota rizikového kapitálu je vo výške

7 009 729 Kč. Náklady na kapitál určime ako 6% z tejto hodnoty. V tabuľke 6 môžeme vidieť hodnoty nákladov na kapitál v budúcich rokoch a ich pokles s pribúdajúcim časom. To je spôsobené postupným rozpúšťaním rezervy a tým pádom znižovaním potrebného rizikového kapitálu.

| | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Škodná rezerva | 13 945 327 | 4 483 648 | 1 080 011 | 257 516 | 93 440 | 29 084 | 8 112 | 1 987 | 0 |
| Rizikový kapitál | 7 009 729 | 2 253 741 | 542 876 | 129 442 | 46 968 | 14 619 | 4 078 | 999 | 0 |
| Náklady na kapitál | 420 584 | 135 224 | 32 573 | 7 767 | 2 818 | 877 | 245 | 60 | 0 |

Tabuľka 6: Toky nákladov na kapitál v Kč

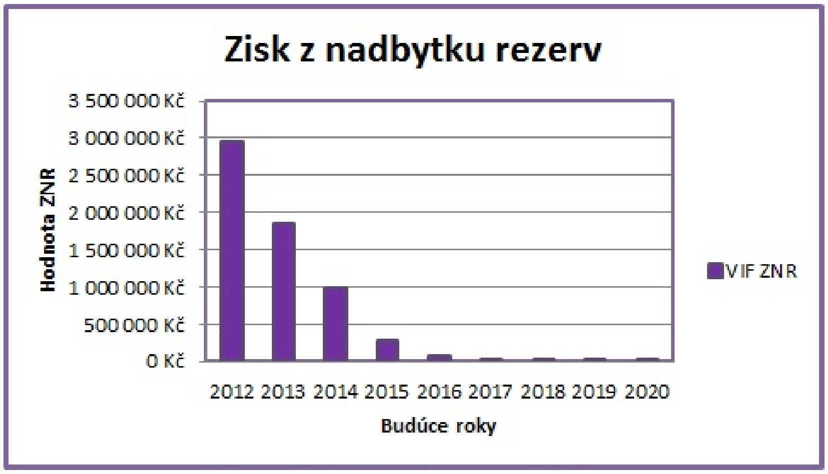
K získaniu súčasnej hodnoty nákladov na kapitál v jednotlivých využijeme rovnaký spôsob diskontovania ako v prípade škodnej rezervy, prípadne účtovnej rezervy.

Na záver tejto podkapitoly uvádzame tabuľku 7, ktorá obsahuje hodnoty $ZNR$ spolu so všetkými jej čiastočnými zložkami pre nasledujúce obdobia. Symbol PV v tabuľke 7 predstavuje súčasnú hodnotu vzhľadom k dátumu ohodnotenia. Poznamenajme, že celkovú hodnotu aktuálneho obchodu počítame na 12 období ale v prípade tejto časti modelu sú roky 2021 až 2023 nulové a preto ich neuvádzame v jednotlivých tabuľkách. Celkový zisk pochádzajúci z nadbytku rezerv tvorí približne 6,2 mil. Kč.

Z hodnôt v tabuľke 7 ako aj z grafu 1 je zrejmé, že hodnota $ZNR$ je s pribúdajúcim časom čoraz menšia. Významný zisk môžeme pozorovať len v prvých 5tich rokoch. Tento efekt je spôsobený rozpustením veľkej časti škodnej rezervy do roku 2016. Tento jav môže byť spôsobený rýchlym dohlasovaním škôd a ich následnou rýchlou likvidáciou.

| Rok | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 | Celkom |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Toky UR | 26 655 386 | 11 199 858 | 4 235 666 | 1 047 502 | 216 607 | 87 795 | 26 993 | 7 525 | 2 217 | 43 479 550 |
| PV R | 23 276 064 | 9 210 342 | 3 228 101 | 754 622 | 144 678 | 54 469 | 17 009 | 4 758 | 1 477 | 36 691 521 |
| PV CoC | 418 110 | 131 632 | 30 893 | 7 126 | 2 485 | 742 | 198 | 47 | 0 | 591 233 |
| VIF ZNR | 2 961 212 | 1 857 884 | 976 672 | 285 754 | 69 444 | 32 583 | 9 786 | 2 720 | 740 | 6 196 796 |

Tabuľka 7: Zisk z nadbytku rezerv v Kč




Graf 1 : Vývoj zisku z nadbytku rezerv

## 3.2 Hodnota obnovených zmlúv

Ako bolo uvedené vo všeobecnej časti popisu modelu, základnou veličinou určujúcou výšku zisku z obnovených zmlúv ($ZOZ$) je technický výsledok. Hodnota diskontu rezervy má na výšku zisku z obnovených zmlúv pozitívny dopad. Náklady na kapitál nám na druhú stranu hodnotu $ZOZ$ znižujú a v tejto časti modelu súvisia s rizikom rezerv aj poistného.

**Technický výsledok:**

Výpočet technického výsledku sa skladá z budúcich hodnôt zaslúženého poistného, budúcich škôd a budúcich nákladov. V prípade technického výsledku v navrhovanom modeli vychádzame s poslednej známej hodnoty zaslúženého poistného.

*Zaslúžené poistné:*

Hodnota zaslúženého poistného pre rok 2011 je rovná 52 530 691 Kč. Zaslúžené poistné rozdelíme vzhľadom k počiatku zmluvy, ku ktorému sa vzťahuje. Táto informácia je potrebná kvôli aplikácii rôznych hodnôt parametrov modelu na základe veku poistných zmlúv. Hodnoty môžeme vidieť v tabuľke 8. Môžeme konštatovať, že až 60% zaslúženého poistného sa viaže k posledným 4 rokom.

| Rok počiatku | Podiel poistného | Poistné |
|---|---|---|
| 2000 | 3% | 1 575 921 Kč |
| 2001 | 4% | 2 101 228 Kč |
| 2002 | 3% | 1 575 921 Kč |
| 2003 | 4% | 2 101 228 Kč |
| 2004 | 3% | 1 575 921 Kč |
| 2005 | 10% | 5 253 069 Kč |
| 2006 | 5% | 2 626 535 Kč |
| 2007 | 8% | 4 202 455 Kč |
| 2008 | 14% | 7 354 297 Kč |
| 2009 | 13% | 6 828 990 Kč |
| 2010 | 15% | 7 879 604 Kč |
| 2011 | 18% | 9 455 524 Kč |

Tabuľka 8: Poistné vzhľadom k roku počiatku planosti

Výška zaslúženého poistného v budúcnosti závisí na miere obnovovania aktuálnych zmlúv. Nekumulatívne hodnoty použité v našom modeli sú v tabuľke 9. Ich výpočet bol založený na historickom vývoji poistných zmlúv podľa vzorca (6) . Môžeme si všimnúť, že výška percenta obnovených zmlúv je približne na úrovni 85%. Ponúka sa tu možnosť použiť podobný spôsob ako v *Diers a kol.* (2009) - mohli by sme definovať hodnotu storna zmlúv na úrovni 15% a využiť túto informáciu k stanoveniu hodnôt poistného. Vzhľadom na zohľadnenie priebehu vývoja z histórie a dostupnosť dát ponecháme percentá obnovy v ich spočítanej výške a aplikujeme ich na hodnoty poistného. Môžeme si ešte všimnúť, že v prípade prvých rokov je percento obnovných zmlúv nižšie. V neskoršej fáze sa táto hodnota ustáli. Situácia môže byť spôsobená čistením portfólia poisťovne od nežiaducich klientov tj. vypovedaním poistných zmlúv kvôli zlému škodnému priebehu.

| Rok | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 | 2023 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| rr | 78,6% | 81,2% | 83,8% | 85,7% | 86,0% | 86,4% | 87,6% | 85,4% | 86,9% | 86,0% | 86,0% | 86,0% |

Tabuľka 9: Miery obnovy zmlúv

*Výška škôd:*

V prípade veľkosti budúcich škôd sme vychádzali z odhadu škodného pomeru. Využili sme informácie ohľadom poistného a výšky škôd v posledných troch rokoch. Na základe týchto údajov sme stanovili hodnotu škodného pomeru na úroveň 62%. V tomto percente sú takisto obsiahnuté aj náklady na spracovanie škôd. V tejto časti modelu nepredpokladáme žiadne zmeny v škodnom pomere a aplikujeme hodnotu 62% pre všetky budúce roky. Škodný pomer sa však môže v budúcnosti zmeniť.

Vplyvom menšej početnosti škôd u zmlúv, ktoré vydržia v portfóliu dlhšie sa pomer pri rovnakom poistnom znižuje.

*Náklady:*
Hodnotu budúcich nákladov stanovíme na základe historických informácii o nákladoch. Hodnota nákladov bude predstavovať 25% zaslúženého poistného. Táto hodnota v sebe zahŕňa administratívne ako aj akvizičné náklady. Súčasťou akvizičných nákladov sú náklady na provízie. Pri obnove zmluvy nemusia byť vždy tieto náklady rovnaké ako výška nákladov pri novom uzatvorení zmluvy. V takejto situácii je možné stanoviť nižšiu hodnotu akvizičných nákladov. V našej aplikácii však budeme predpokladať rovnakú výšku provízií aj v prípade obnovených zmlúv.

*Inflácia a zaistenie:*
Vzhľadom k jednoduchosti aplikácie sme faktor inflácie poistného ani inflácie škôd v prípade aplikácie modelu na dáta neuvažovali. Takisto sme nebrali do úvahy ani možnosť zaistenia poisťovne. Tieto parametre je však do modelu možné zahrnúť.

Zložky technického výsledku ako aj jeho hodnotu uvádzame v tabuľke 10. Tabuľka obsahuje informácie o výške poistného, škôd a nákladov, ktoré očakávame v budúcnosti z aktuálneho portfólia. V tabuľke uvádzame aj hodnoty pre nový obchod (NB), ktoré nám poskytujú pohľad na hodnotu novej produkcie.

| Rok | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 | 2023 | Celkom |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Poistné celkom | 44 027 | 36 221 | 29 758 | 24 804 | 20 403 | 16 988 | 12 799 | 10 206 | 7 688 | 4 947 | 2 959 | 1 331 | 212 132 |
| Škody celkom | 27 297 | 22 457 | 18 450 | 15 378 | 12 650 | 10 532 | 7 935 | 6 328 | 4 767 | 3 067 | 1 835 | 825 | 131 522 |
| Náklady celkom | 11 007 | 9 055 | 7 439 | 6 201 | 5 101 | 4 247 | 3 200 | 2 552 | 1 922 | 1 237 | 740 | 333 | 53 033 |
| Tech. výsledok | 5 724 | 4 709 | 3 869 | 3 225 | 2 652 | 2 208 | 1 664 | 1 327 | 999 | 643 | 385 | 173 | 27 577 |
| Pojistné NB | 7 428 | 6 035 | 5 057 | 4 334 | 3 726 | 3 220 | 2 820 | 2 409 | 2 092 | 1 800 | 1 548 | 1 331 | 41 800 |
| Škody NB | 4 605 | 3 742 | 3 135 | 2 687 | 2 310 | 1 997 | 1 748 | 1 494 | 1 297 | 1 116 | 960 | 825 | 25 916 |
| Náklady NB | 1 857 | 1 509 | 1 264 | 1 083 | 932 | 805 | 705 | 602 | 523 | 450 | 387 | 333 | 10 450 |
| Tech. výsledok NB | 966 | 785 | 657 | 563 | 484 | 419 | 367 | 313 | 272 | 234 | 201 | 173 | 5 434 |

Tabuľka 10: Zložky technického výsledku v tis.Kč

**Zisk zo škodnej rezervy:**

Zisk z rezervy je ovplyvnený vzorom vyplácania v minulosti. Samotný vzor sme stanovili na základe diagonálnych a budúcich hodnôt inkrementálneho trojuholníka výplat, kde sme budúce hodnoty získali metódou Chain Ladder. Vzor, ktorý sme využili pri odhade rýchlosti vyplácania očakávanej hodnoty plnení môžeme nájsť v tabuľke 11. Tento vzor bol aplikovaný na všetky očakávané hodnoty škôd v budúcnosti rovnako. Môžeme si všimnúť, že v prvom roku vyplatíme viac ako polovicu z celkovej výšky očakávaných škôd. Po piatich rokoch od vzniku škody už neočakávame skoro žiadne výplaty. Ten istý vzor výplat použijeme aj v prípade nového obchodu.

| Obdobie výplaty (rok) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Vzor výplat | 35,85% | 37,84% | 16,28% | 7,55% | 2,02% | 0,27% | 0,12% | 0,04% | 0,01% | 0,01% | 0,0% | 0,0% |

Tabuľka 11: Vzory pre vyplácanie škodnej rezervy

Aj vďaka dôsledku rýchleho vyplácania očakávaných škôd nie je hodnota zisku pochádzajúca z diskontu škodnej rezervy veľmi vysoká. V porovnaní s hodnotou technického výsledku tvorí táto hodnota ani nie 1/5. Toky ziskov z rezervy uvádzame v tabuľke 12.

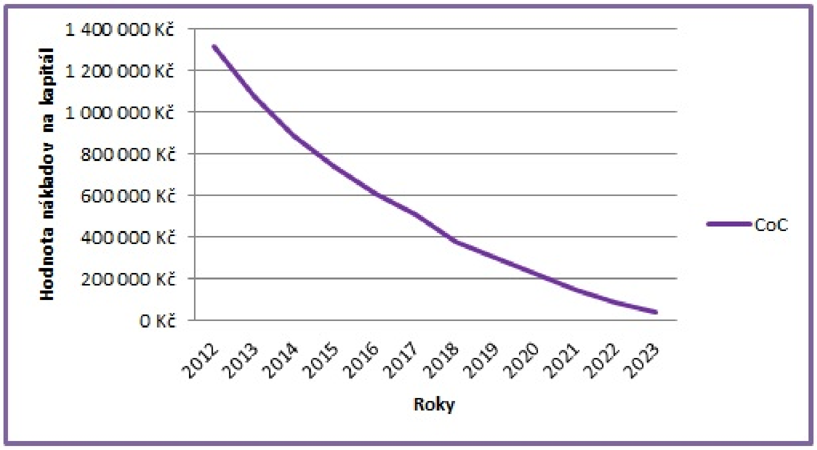
| Rok | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 | 2023 | Celkom |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Zisk z rezervy | 760 | 912 | 526 | 508 | 462 | 392 | 303 | 246 | 191 | 128 | 78 | 35 | 4 542 |
| Zisk z rezervy NB | 128 | 152 | 89 | 89 | 84 | 74 | 67 | 58 | 52 | 47 | 41 | 35 | 917 |

Tabuľka 12: Výška zisku z diskontu škodnej rezervy v tis. Kč

**Náklady na kapitál:**

Náklady na kapitál v tejto časti súvisia spoločne s rizikom rezerv a rizikom poistného. V prípade tejto časti sme z časti využili postup definovaný v Solvency II. Na základe doporučenia v *CEIOPS* (2010) sme využili hodnotu smerodatnej odchýlky pre riziko poistného. Hodnota odchýlky je v tomto prípade vo výške 8,5%. Doporučená hodnota pre smerodatnú odchýlku rezervy je vo výške 14%. V tomto prípade však využijeme možnosť definovať tento parameter vlastným spôsobom, pretože sme potrebnú informáciu o riziku rezerv získali z nášho portfólia. Jedným z výstupov poskytnutých bootstrapom je aj výška smerodatnej odchýlky súvisiacej s rizikom rezerv. Hodnotu tejto odchýlky použijeme aj v prípade rizika rezerv v obnovených zmluvách. Hodnota nami spočítanej odchýlky je vo výške 17,11%.

Budúci vývoj požadovaných nákladov na kapitál je zobrazený na grafe č.2. Hodnota výšky rizikového kapitálu je závislá na objeme budúceho poistného a očakávanej výšky škôd. S umierajúcim poistným kmeňom klesá veľkosť rizikového kapitálu a tým pádom klesá aj hodnota nákladov, ktoré s ním súvisia.




Graf 2 : Vývoj nákladov na kapitál

**Súčasná hodnota veličín vstupujúcich do** $ZOZ$ **:**

Tak ako sme na záver druhej kapitoly uviedli, v prípade diskontovania zisku z obnovených zmlúv využijeme ako diskontnú mieru bezrizikovú úrokovú mieru zvýšenú o rizikovú prirážku. Stanoviť veľkosť tejto prirážky je však niekedy veľmi zložité a preto budeme pre jednoduchosť aplikácie uvažovať konštantné navýšenie bezrizikovej úrokovej miery o 2 percentuálne body. Bezriziková úroková mieru použitá v modeli je doporučená Českou spoločnosťou aktuárov k 31.12.2011.

Na záver tejto podkapitoly uvádzame súhrnnú tabuľku 13, ktorá obsahuje všetky veličiny tvoriace hodnotu $ZOZ$. V tabuľke sa opäť nachádza celková výška $ZOZ$ ako aj výška $ZOZ\,NB$, ktorá je spojená s najnovšie upísaným obchodom.
Môžeme si všimnúť, že hodnota nového obchodu nepredstavuje takú veľkú časť. Nový obchod tvorí z celkovej hodnoty približne 1/5. S postupným vymieraním kmeňa sa však podiel nového obchodu na celkovej hodnote $ZOZ$ zvyšuje. Celková hodnota $ZOZ$ činí približne 21 705 tis. Kč.

| Rok | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 | 2023 | Celkom |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| PV TR | 5 547 | 4 369 | 3 425 | 2 705 | 2 095 | 1 641 | 1 161 | 870 | 615 | 370 | 207 | 87 | 23 091 |
| PV TR NB | 936 | 728 | 582 | 473 | 383 | 311 | 256 | 205 | 167 | 135 | 108 | 87 | 4 370 |
| PV DV(R) | 760 | 879 | 485 | 446 | 383 | 306 | 223 | 170 | 124 | 78 | 45 | 19 | 3 916 |
| PV DV(R) NB | 128 | 146 | 82 | 78 | 70 | 58 | 49 | 40 | 34 | 28 | 23 | 19 | 843 |
| PV CoC | 1 274 | 1 003 | 786 | 621 | 481 | 377 | 267 | 200 | 141 | 85 | 47 | 20 | 5 665 |
| PV CoC NB | 215 | 167 | 134 | 109 | 88 | 71 | 59 | 47 | 38 | 31 | 25 | 20 | 1 129 |
| VIF ZOZ | 5 033 | 4 245 | 3 124 | 2 529 | 1 996 | 1 570 | 1 117 | 840 | 598 | 363 | 204 | 85 | 21 705 |
| VIF ZOZ NB | 849 | 707 | 531 | 442 | 365 | 298 | 246 | 198 | 163 | 132 | 107 | 85 | 4 123 |

Tabuľka 13: Zisk z obnovených zmlúv v tis. Kč

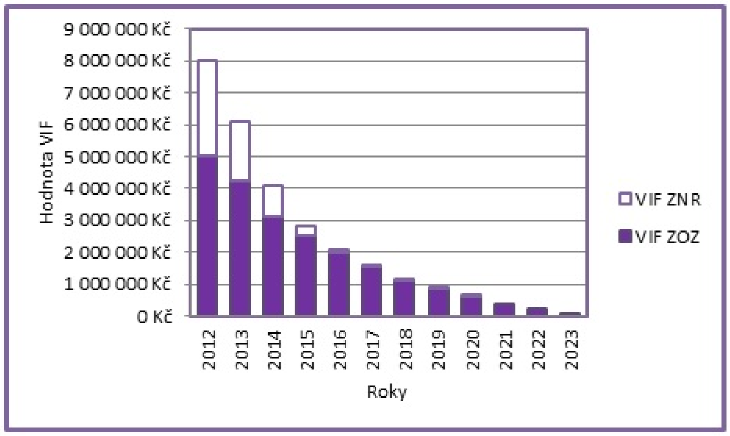
## 3.3 Hodnota celého poistného kmeňa

Súčtom ziskov pochádzajúcich z nadbytku rezerv ($ZNR$) a ziskov pochádzajúcich z obnovených zmlúv ($ZOZ$) získame hodnotu celého poistného kmeňa. Vyššie uvedené čiastočné výstupy spojíme do spoločnej hodnoty a získame pohľad na celú hodnotu aktuálneho poistného kmeňa. Jednotlivé toky hodnoty kmeňa sú znázornené v tabuľke 14. Zisky z nadbytkov rezerv tvoria hodnotu portfólia len do roku 2020. Hodnoty sú v tabuľke uvedené v tisícoch. Celková hodnota skúmaného portfólia poistiek je na úrovni 28 mil. Kč, po zdanení 21,5 mil. Kč. Hodnota obchodu, ktorý sme získali za posledných 12 mesiacov je približne 4,1 mil. Kč, po zdanení 3,3 mil. Kč, čo predstavuje približne 1/7 z celkovej hodnoty portfólia. Daň, ktorou sme zdanili zisk bola vo výške 19% .

| Rok | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 | 2023 | Celkom |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| VIF ZOZ | 5 033 | 4 245 | 3 124 | 2 529 | 1 996 | 1 570 | 1 117 | 840 | 598 | 363 | 204 | 85 | 21 705 |
| VIF ZOZ NB | 849 | 707 | 531 | 442 | 365 | 298 | 246 | 198 | 163 | 132 | 107 | 85 | 4 123 |
| VIF ZNR | 2 961 | 1 858 | 977 | 286 | 69 | 33 | 10 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 197 |
| VIF | 7 994 | 6 103 | 4 101 | 2 815 | 2 066 | 1 602 | 1 127 | 843 | 598 | 363 | 204 | 85 | 27 902 |
| VIF NB | 849 | 707 | 531 | 442 | 365 | 298 | 246 | 198 | 163 | 132 | 107 | 85 | 4 123 |
| VIF po zdanení | 6 154 | 4 728 | 3 166 | 2 161 | 1 581 | 1 226 | 862 | 645 | 458 | 278 | 156 | 65 | 21 481 |
| VIF po zdanení NB | 647 | 541 | 405 | 337 | 279 | 227 | 188 | 152 | 124 | 101 | 82 | 65 | 3 339 |

Tabuľka 14: Celková hodnota aktuálneho obchodu tis. Kč

Na záver tejto kapitoly ešte uvádzame toky, ktoré tvoria hodnotu celého portfólia na grafe č.3. Výška týchto tokov je zložená z oboch častí modelu. Môžeme pozorovať, že hodnota $ZNR$ je približne na úrovni 1/3 z hodnoty $ZOZ$ len v prvých troch rokoch. S pribúdajúcim časom je hodnota celého portfólia tvorená len ziskom, ktorý pochádza z obnov zmlúv. Tento fakt je spôsobený tým, že rezerva je postupne rozpustená a po desiatich rokoch nepredpokladáme jej ďalší vývoj.




Graf 3 : Podiel zisku z rezervy ku zisku z obnov zmlúv

# 4 Analýza citlivosti hodnoty aktuálneho obchodu

V nasledujúcej kapitole si ukážeme správanie hodnoty aktuálneho obchodu pri zmene niektorých vstupných parametrov. Porovnáme ako jednotlivé vstupy modelu ovplyvňujú celkovú hodnotu aktuálneho obchodu. Zmenu hodnoty budeme porovnávať k celkovej hodnote aktuálneho obchodu.

V tabuľke 15 uvádzame prehľadný popis parametrov modelu a ich výskyt v jednotlivých častiach nášho modelu. Pre analýzu citlivosti zvolíme 6 z 8 parametrov uvedených v tabuľke 14. Z analýzy citlivosti vylúčime parameter týkajúci sa smerodatnej odchýlky „age to age" faktorov a rizikovú prirážku. Vzhľadom na to, že budeme analyzovať hodnotu aktuálneho obchodu pri zmene bezrizikovej úrokovej miery sa citlivosti rizikovej prirážky, resp. citlivosti bezrizikovej úrokovej miery zvýšenej o túto prirážku, nebudeme venovať. V prípade „age to age" faktorov budeme predpokladať nemennosť pomeru medzi účtovnou škodnou rezervou a skutočnou škodnou rezervou.

| Parametre modelu | ZNR | ZOZ |
|---|---|---|
| Smerodatná odchýlka „age to age" faktorov | x | |
| Hladina spoľahlivosti rizikového kapitálu | x | x |
| Miera nákladov na kapitál | x | x |
| Percento obnovených zmlúv | | x |
| Škodný pomer | | x |
| Výška nákladov | | x |
| Bezriziková úroková miera | x | x |
| Riziková prirážka | | x |

Tabuľka 15: Parametre modelu

<u>Zmena podielu obnovených zmlúv:</u>

Medzi jednu z priorít poisťovne by mala spadať snaha o udržanie čo najväčšieho objemu dobrých poistných zmlúv v jej poistnom kmeni. V prípade lepšieho zotrvávania poistných zmlúv v poistnom kmeni môže poisťovňa očakávať vyšší prijem poistného a následné zvýšenie jej zisku.

V prípade citlivosti zmeny tohoto parametru budeme uvažovať obe možnosti, ktoré môžu v prípade podielu obnovených zmlúv nastať. V prvej možnosti sa zameriame sa na situáciu, ktorá súvisí s lepším udržaním zmlúv v portfóliu a poisťovňa dokáže zvýšiť svoj podiel obnovených zmlúv o 10%. Druhá analýza citlivosti tohoto parametru bude skúmať zmenu hodnoty portfólia v prípade poklesu obnovených zmlúv v portfóliu o 10%. V tabuľke 16 uvádzame prehľadne pôvodné hodnoty pre podiel obnovených zmlúv ako aj obe zmienené varianty.

| Rok | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 | 2023 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Hodnota rr | 78,6% | 81,2% | 83,8% | 85,7% | 86,0% | 86,4% | 87,6% | 85,4% | 86,9% | 86,0% | 86,0% | 86,0% |
| Navýšená hodnota rr | 86,4% | 89,4% | 92,2% | 94,3% | 94,6% | 95,1% | 96,3% | 94,0% | 95,5% | 94,6% | 94,6% | 94,6% |
| Znížená hodnota rr | 70,7% | 73,1% | 75,4% | 77,1% | 77,4% | 77,8% | 78,8% | 76,9% | 78,2% | 77,4% | 77,4% | 77,4% |

Tabuľka 16: Podiel obnovených zmlúv portfólia

V situácii lepšieho udržania zmlúv v poistnom kmeni (+10%) sa hodnota aktuálneho obchodu navýši z pôvodných 27,9 mil. Kč až na 37,9 mil. Kč. V tomto prípade sa jedná až o 35,9% nárast[7] hodnoty kmeňa, čo predstavuje významné navýšenie hodnoty portfólia. Pokiaľ sa však pozeráme na výsledok opačného efektu vidíme pokles o približne 23% a to predstavuje pokles hodnoty na úroveň 21,4 mil. Kč. Ani v tomto prípade sa nejedná o zanedbateľný pohyb a zmena objemu obnovených zmlúv má aj v opačnej situácii významný efekt na hodnotu portfólia. Výsledky analýzy citlivosti sú zobrazené v tabuľke 17. Asymetria výsledkov analýzy citlivosti je spôsobená aplikáciou miery obnovy zmlúv na aktuálne poistné. Môžeme konštatovať, že objem obnovených poistiek má na hodnotu kmeňa poisťovne veľmi výrazný vplyv.

| Zmena rr | ZOZ (v tis. Kč) | Zmena ZOZ | VIF (v tis. Kč) | VIF po zdanení (v tis. Kč) | Zmena VIF % |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,0% | 21 705 | 0,0% | 27 902 | 21 481 | 0,0% |
| -10% | 15 260 | -29,7% | 21 457 | 16 557 | -23,1% |
| 10% | 31 709 | 46,1% | 37 906 | 29 126 | 35,9% |

Tabuľka 17: Dopad zmeny podielu obnovených zmlúv na hodnotu portfólia

Zmena vo vývoji škodného pomeru:

V navrhovanom modeli sme predpokladali konštantnú veľkosť škodného pomeru bez rozdielu na dĺžku trvania zmluvy. Analýzu citlivosti hodnoty portfólia na tento parameter budeme skúmať 3 rôzne prípady, ktoré môžu nastať.

V prvom budeme predpokladať zlepšenie škodného pomeru o 5% pre všetky zmluvy bez ohľadu na ich vek, to znamená použiť škodný pomer vo výške približne 59%. V druhom budeme predpokladať zhoršenie škodného pomeru o 5% to predstavuje škodný pomer vo výške približne 65%. Konečne v treťom prípade budeme predpokladať zmenu vo vývoji škodného pomeru. Budeme predpokladať jeho zlepšenie pre zmluvy s počiatkom platnosti v roku 2009, 2010 a 2011. Hodnota zmeny pre roky 2010 a 2009 predstavuje -5% a v prípade roku 2011 je to -3%. Zlepšenie môže byť spôsobené znižovaním rizikovosti klienta po obnovení zmluvy. Hodnoty odhadu

[7] V prípade celkovej zmeny VIF uvažujeme vo všetkých tabuľkách tejto kapitoly zmenu vzhľadom k nezdanenej hodnote VIF

škodného pomeru uvádzame v tabuľke 18, kde môžeme vidieť použitú hodnotu škodného pomeru vzhľadom k počiatku zmluvy a ich nasledujúci vývoj. Uvedená zmena vo vývoji má za následok zmenu v prípade rokov 2009-2011.

| Rok | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 | 2023 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2000 | 59,12% | | | | | | | | | | | |
| 2001 | 59,12% | 59,12% | | | | | | | | | | |
| 2002 | 59,12% | 59,12% | 59,12% | | | | | | | | | |
| 2003 | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | | | | | | | | |
| 2004 | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | | | | | | | |
| 2005 | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | | | | | | |
| 2006 | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | | | | | |
| 2007 | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | | | | |
| 2008 | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | | | |
| 2009 | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | | |
| 2010 | 62,23% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | |
| 2011 | 65,51% | 62,23% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% | 59,12% |

Tabuľka 18: Hodnoty škodného pomeru v prípade vývoja

Tabuľka 19 prezentuje výsledky všetkých 3 alternatív škodného pomeru zmienených vyššie. Môžeme si všimnúť, že aj v tomto prípade je parameter veľmi dôležitý a ovplyvňuje hodnotu portfólia významne. V prípade plošného navýšenia škodného pomeru o 5% predstavuje dopad do hodnoty portfólia jeho zníženie o približne 20%. Tento prepad je spôsobený tým, že hodnota škodného pomeru na úrovni 65% a výška nákladov 25% predstavuje až 90% prijatého poistného a tým pádom je zisk z technického výsledku len na úrovni 10%, čo predstavuje zníženie hodnoty celého portfólia. V opačnom prípade to má pozitívny efekt. Situácia znižujúceho škodného pomeru nám navýši hodnotu portfólia o približne 15%. Ani v tomto prípade nejde o malú zmenu a môžeme konštatovať, že relatívne malá zmena škodného pomeru môže spôsobiť významný nárast alebo pokles hodnoty portfólia.

| ULR | ZOZ (v tis. Kč) | Zmena ZOZ | VIF (v tis. Kč) | VIF po zdanení (v tis. Kč) | Zmena VIF % |
|---|---|---|---|---|---|
| 62% | 21 705 | 0,0% | 27 902 | 21 481 | 0,0% |
| 65% | 16 242 | -25,2% | 22 439 | 17 027 | -19,6% |
| 59% | 27 167 | 25,2% | 33 364 | 25 934 | 19,6% |
| -3%, -5%, -5% | 25 950 | 19,6% | 32 147 | 24 942 | 15,2% |

Tabuľka 19: Dopad zmeny škodného pomeru na hodnotu portfólia

Zmena veľkosti nákladov:

Výška nákladov použitá v modeli predstavovala 25%. V prípade tohoto parametru sa pozriem na dve situácie, ktoré môžeme očakávať. V prvej výšku našich nákladov znížime o 10%, v druhej túto sadzbu navýšime o10%. Náklady sú aplikované na budúce zaslúžené poistné a plošne bez rozdielu na dĺžku trvania poistnej zmluvy.

Pokles výšky nákladov o 10% zvýši hodnotu VIF z pôvodných 27,9 mil. Kč na 32,3 mil. Kč. Pomerne malý pokles nákladov spôsobí nárast hodnoty skoro o 16%. Opačný efekt v podobe nárastu nákladov o10% by znamenal pokles celkovej hodnoty portfólia o 16%, čo by predstavovalo 23,4 mil Kč. V prehľadnej tabuľke 20 môžeme vidieť tieto dopady do celkovej hodnoty ako aj dopad do hodnoty zisku, ktorý pochádza z obnovených zmlúv.

Tak ako v predchádzajúcich dvoch prípadoch aj malá zmena nákladov pohne s celkovým výsledkom hodnoty v značnej miere. Tak ako v prípade škodného pomeru aj v prípade nákladov nám ich rastúca hodnota znižuje technický výsledok a tým aj hodnotu portfólia.

| Zmena nákladov | Výška nákladov | ZOZ (v tis. Kč) | Zmena ZOZ | VIF (v tis. Kč) | VIF po zdanení (v tis. Kč) | Zmena VIF |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0% | 25,0% | 21 705 | 0,0% | 27 902 | 21 481 | 0,0% |
| -10% | 22,5% | 26 146 | 20,5% | 32 342 | 25 078 | 15,9% |
| 10% | 27,5% | 17 264 | -20,5% | 23 461 | 17 884 | -15,9% |

Tabuľka 20: Dopad zmeny nákladov na hodnotu portfólia

Zmena bezrizikovej úrokovej miery:

Prípadnú zmenu bezrizikovej úrokovej miery nemôže poisťovňa vôbec ovplyvniť. Napriek tomu je to parameter, ktorý môže ovplyvňovať hodnotu VIF. V prípade analýzy citlivosti VIF na tento parameter sme uvažovali, že by zmena úrokovej miery predstavovala ±10%. Uvažujeme teda len posun celej krivky nemeníme jej tvar. Hodnoty zmeny uvádzame v tabuľke 21. Hodnoty sú uvedené len pre nasledujúcich 12 rokov. Hodnoty pre viac období môžeme nájsť v prílohe.

Hodnota VIF pri klesajúcej hodnote bezrizikovej úrokovej miery by predstavovala 27,6 mil. Kč, čo je veľmi blízke pôvodnej hodnote, ktorá neuvažuje zmenu úrokovej miery. V prípade, že by sa hodnota úrokovej miery zmenila o 10% opačným smerom bola by hodnota VIF rovná 28,2 mil. Kč.

| Rok | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 | 2023 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Úroková miera | 1,19% | 1,81% | 2,14% | 2,49% | 2,84% | 3,08% | 3,27% | 3,42% | 3,55% | 3,67% | 3,80% | 3,92% |
| Navýšená úroková miera | 1,31% | 1,99% | 2,35% | 2,74% | 3,12% | 3,39% | 3,60% | 3,77% | 3,90% | 4,04% | 4,18% | 4,31% |
| Znížená úroková miera | 1,07% | 1,63% | 1,93% | 2,24% | 2,55% | 2,77% | 2,95% | 3,08% | 3,19% | 3,31% | 3,42% | 3,53% |

Tabuľka 21: Hodnoty bezrizikovej úrokovej miery

| Zmena RFR | VIF (v tis. Kč) | VIF po zdanení (v tis. Kč) | Zmena VIF % |
|---|---|---|---|
| 0% | 27 902 | 21 481 | 0% |
| 10% | 28 139 | 21 683 | 0,9% |
| -10% | 27 659 | 21 274 | -0,9% |

Tabuľka 22: Dopad zmeny úrokovej miery na hodnotu portfólia

Zaujímavým faktom však je pohyb hodnoty portfólia v prípade zvýšenia resp. poklesu bezrizikovej úrokovej miery. V prípade navýšenia by sme očakávali pokles v celkovej hodnote. Tento dôsledok je spojený s viacerými časťami navrhnutého modelu. V prípade zvýšenia úrokovej miery sa zvýši zisk pochádzajúci z nadbytku rezerv. V prípade technického výsledku sa jeho hodnota naopak zníži, no v prípade zisku z diskontu rezervy pochádzajúceho z obnovených zmlúv sa náš zisk opäť navýši. Faktory navyšujúce zisk majú teda väčší dopad na zmenu hodnoty ako v prípade faktorov znižujúcich zisk z portfólia a preto je následkom vyššej úrokovej miery vyššia hodnota aktuálneho obchodu.

Z analýzy citlivosti je zrejmé, že aplikovaná zmena nie je až taká významná ako v prípade parametrov uvedených vyššie. Tento jav je spôsobený aj tým, že dopad na jednotlivé časti modelu idú proti sebe. Vplyv úrokovej miery je menej významný aj kvôli tomu, že sme hodnotu portfólia počítali len na ďalších 12 období. V prípade dlhšieho časového horizontu by však zmena bezrizikovej úrokovej miery mala pravdepodobne väčší dopad na hodnotu VIF ako tomu bolo v skúmanom prípade (viď Tabuľka 22).

Zmena miery hladiny spoľahlivosti:

Základná hodnota rizikového kapitálu bola počítaná na hladine 99,5%. V prípade analýzy citlivosti v tomto prípade sme vyskúšali odhadnúť dopad na hodnotu VIF, ktorý by bol spôsobený zmenou hladiny spoľahlivosti rizikového kapitálu. Zaujímali sme sa o hodnotu VIF za predpokladu hladín spoľahlivosti na úrovni 99,9%, 95% a 75%. Jednotlivé dopady na celkovú hodnotu VIF je možné nájsť v tabuľke 23.

| Kvantil | ZOZ (v tis. Kč) | Zmena ZOZ % | ZNR (v tis. Kč) | Zmena ZNR % | VIF(v tis. Kč) | VIF po zdanení (v tis. Kč) | Zmena % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 99,90% | 20 645 | -4,9% | 6 033 Kč | -2,6% | 26 678 | 20 257 | -4,4% |
| 99,50% | 21 705 | 0 | 6 197 Kč | 0 | 27 902 | 21 481 | 0,0% |
| 99,00% | 22 500 | 3,7% | 6 248 Kč | 0,8% | 28 748 | 22 327 | 3,0% |
| 95,00% | 23 914 | 10,2% | 6 427 Kč | 3,7% | 30 341 | 23 920 | 8,7% |
| 75,00% | 25 858 | 19,1% | 6 659 Kč | 7,5% | 32 517 | 26 096 | 16,5% |

Tabuľka 23: Dopad zmeny hladiny spoľahlivosti rizikového kapitálu v tis. Kč

Môžeme si všimnúť, že percentuálne zmeny v prípade kvantilov na úrovni 99% nie sú také vysoké ako v prípade zmeny objemu obnovených zmlúv, nákladov alebo škodného percenta. Malá zmena podstúpeného rizika na tejto úrovni nemá veľký vplyv na celkovú hodnotu kmeňa. Situácia zníženia kvantilu až na 75% môže priniesť podstatne vyššiu hodnotu portfólia, ale za cenu potencionálne vysokého rizika, že naše záväzky nedodržíme. Ochota podstúpiť o málo vyššie riziko ako v prípade kvantilov na úrovni 99% a pomerne dostatočne navýšiť hodnotu portfólia prináša možnosť využiť kvantil 95%.

Zmena miery nákladov na kapitál:

Posledná analýza citlivosti súvisí s hodnotou veľkosti miery nákladov na kapitál - $r_{CoC}$. Pôvodné výsledky hodnoty portfólia vychádzali z doporučenia Solvency II a použili sme hodnotu vo výške 6%. V prvom prípade budeme uvažovať zmenu tejto miery o 0,5 percentuálneho bodu smerom nahor tj. 6,5%, v druhom prípade rovnaký pokles tj. 5,5%. Je zrejmé že navýšenie miery nákladov na kapitál bude mať dôsledok zníženia celkovej hodnoty a zníženie tejto miery efekt opačný. Dopad na celkovú hodnotu uvádza tabuľka 24. Vzhľadom k malej zmene je aj dopad na celkovú hodnotu minimálny. Poisťovňa ako taká nemá na hodnotu tohoto parametru skoro žiaden vplyv.

| miera CoC | ZOZ (v tis. Kč) | Zmena ZOZ % | ZNR (v tis. Kč) | Zmena ZNR % | VIF(v tis. Kč) | VIF po zdanení (v tis. Kč) | Zmena % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6,00% | 21 705 | 0,0% | 6 197 | 0,0% | 27 902 | 21 481 | 0,0% |
| 6,50% | 21 263 | -2,0% | 6 148 | -0,8% | 27 411 | 20 990 | -1,8% |
| 5,50% | 22 147 | 2,0% | 6 246 | 0,8% | 28 393 | 21 972 | 1,8% |

Tabuľka 24: Dopad zmeny miery nákladov na kapitál

# Záver

V tejto práci sme sa zaoberali ocenením portfólia v neživotnom poistení z pohľadu akcionára. Vzhľadom na pomerne širokú oblasť sme sa zamerali len na jednu z častí, ktorá tvorí významnú zložku komplexného ocenenia portfólia neživotnej poisťovne. Bližšie sme skúmali hodnotu aktuálneho obchodu - VIF.

Cieľom práce bolo teda navrhnúť model, ktorý dokáže oceniť aktuálny obchod poisťovne. Navrhnutý model je tvorený dvoma časťami. Prvá časť z nich analyzuje hodnotu aktuálneho obchodu pochádzajúcu z nadbytku škodných rezerv. Druhá časť modelu sa venuje hodnote obchodu, ktorý pochádza z obnovených poistných zmlúv.

V návrhu modelu sa podrobnejšie venujeme časti, ktorá sa zaoberá rizikom škodných rezerv. K analýze rizika rezerv využívame simulačnú metódu bootstrap. Naopak menej priestoru venujeme riziku poistného a nákladom na kapitál, ktoré pochádzajú z obnovených zmlúv.

Navrhnutý model sme aplikovali na reálne dáta, ktoré predstavovali jedno odvetvie neživotného poistenia.

Nakoniec sme sa venovali analýze citlivosti jednotlivých parametrov modelu na celkovú hodnotu aktuálneho obchodu poisťovne. Účelom tejto analýzy bola detekcia parametrov, ktoré majú na hodnotu aktuálneho kmeňa výrazný vplyv a ich zmena je v kompetencii poisťovne. Záverom je informácia, že medzi významné parametre ovplyvňujúce hodnotu aktuálneho obchodu môžeme zaradiť objem obnovených zmlúv, výšku škodného pomeru ako aj hodnotu nákladov spojenú s poistnými zmluvami. Naopak medzi menej významné parametre patrili zmena úrokovej miery alebo zmena miery nákladov na kapitál.

Pre zvýšenie objemu obnovených zmlúv v poistnom kmeni by mohla poisťovňa poskytovať určitý bonus v podobe zľavy na poistnom pri obnove. Táto zľava by sa však mala týkať len klientov s dobrým škodným pomerom. Ďalšou z možností by mohlo byť uzatvorenie poistenia na viac rokov, ktoré v sebe zahŕňa určitú zľavu oproti cene poistenia za jeden rok.

Ako jednou z možností zlepšenia škodného pomeru môžeme označiť napr. kvalitnejšiu segmentáciu klientov na vstupe do portfólia. V prípade rizikovejších klientov by výška poistného mala byť na vyššej úrovni ako v prípade menej rizikového klienta.

Efektivita správy zmlúv a menšie administratívne zaťaženie by mohli taktiež viesť k znižovaniu nákladov.

# Literatúra


[1] Anděl J.: Základy matematické statistiky, Matfyzpress, 2007

[2] CEIOPS: *QIS5 Technical Specification,* 2010

[3] Cipra, T.: *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou.* Ekopress, 2005

[4] CFO Forum: *CFO Forum Market Consistent Embedded Value Principles*, 2009

[5] Diers, D., Eling, M., Kraus, Ch., Reuss, A.: *Market-Consistent Embedded Value in Non-Life Insurance: How to Measure it and why.* Universität ULM, 2009

[6] Efron, B., Tibshirani, R.: *An Introduction to the Bootstrap*, Chapman & Hall CRC, ISBN10: 0412042312, 31-199, 1993

[7] England, P. D.*: Addendum to "Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving", 2001*

[8] England, P. D., Verrall, R. J.: *Stochastic Claims reserving in general insurance (with discussion).* British Actuarial Journal, 8, III, 2002

[9] England, P. D., Verrall, R. J.: *Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving, 1999*

[10] International Actuarial Association: *Measurement of Liabilities for Insurance Contracts: Current Estimates and Risk Margins*, 2009

[11] Kraus Ch.: *EVA/RAROC versus MCEV Earnings: A Unification Approach*, 2011

[12] Mack, T.: *Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates.* Astin Bulletin. Vol. 23. No 2. 1993. pp.213:225.

[13] Mandl, P., Mazurová, L.: *Matematické základy neživotního pojištění,* Matfyzpress, 1999

[14] McCullagh, P., Nelder, J.: *Generalised Linear Models, 2nd ed. Chapman and Hall, London.* 1989

[15] Pinheiro, P. J. R., Andrade e Silva, J. M. a Centeno, M. de Lourdes: *Bootstrap methodology in claims reserving*, 2000

[16] The European parliament: *Directive of the European Parliament and of the council on the taking-up and pursuit of the business of insurance and reinsurance*, 2009

[17] Zákon č. 277/2009 Sb., o pojišťovnictví

# Prílohy

## A1 Dodatočné tabuľky k výsledkom

| RŠ/RV | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2002 | 2,757 | 1,459 | 1,153 | 1,020 | 1,001 | 1,001 | 1,000 | 1,000 | 1,000 |
| 2003 | 2,792 | 1,244 | 1,038 | 1,012 | 1,000 | 1,001 | 1,001 | 1,000 | |
| 2004 | 1,878 | 1,186 | 1,188 | 1,007 | 1,002 | 1,004 | 1,000 | | |
| 2005 | 2,184 | 1,199 | 1,060 | 1,049 | 1,007 | 1,000 | | | |
| 2006 | 1,933 | 1,192 | 1,099 | 1,020 | 1,003 | | | | |
| 2007 | 2,381 | 1,224 | 1,035 | 1,011 | | | | | |
| 2008 | 1,951 | 1,152 | 1,058 | | | | | | |
| 2009 | 1,905 | 1,203 | | | | | | | |
| 2010 | 1,749 | | | | | | | | |

Tabuľka 25: Age to age faktory pre kumulatívny trojuholník dát

| RV | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sm. odchýlka | 0,3893 | 0,0956 | 0,0596 | 0,0151 | 0,0027 | 0,0019 | 0,0005 | 0,0001 |

Tabuľka 26: Smerodatná odchýlka age to age faktorov

| Opozdenie (rok) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Odhad vývoj. faktorov R | 2,06 | 1,22 | 1,08 | 1,02 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 |
| Navýšené vývoj. faktory UR | 2,22 | 1,24 | 1,10 | 1,02 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 |

Tabuľka 27: Použité koeficienty pre výpočet škodných rezerv

| RŠ/RV | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *2002* | 5 894 919 | 16 249 779 | 23 716 108 | 27 342 153 | 27 887 608 | 27 919 052 | 27 937 006 | 27 948 356 | 27 953 601 | 27 955 401 |
| *2003* | 5 604 987 | 15 650 301 | 19 467 078 | 20 213 446 | 20 463 486 | 20 464 363 | 20 479 718 | 20 498 144 | 20 498 144 | 20 499 464 |
| *2004* | 8 178 568 | 15 360 725 | 18 214 765 | 21 643 337 | 21 796 621 | 21 832 727 | 21 923 443 | 21 923 443 | 21 925 817 | 21 927 228 |
| *2005* | 10 193 826 | 22 260 409 | 26 700 008 | 28 296 242 | 29 678 921 | 29 885 615 | 29 885 615 | 29 898 266 | 29 901 503 | 29 903 428 |
| *2006* | 9 507 932 | 18 374 614 | 21 901 253 | 24 064 761 | 24 545 265 | 24 607 178 | 24 637 666 | 24 648 096 | 24 650 764 | 24 652 351 |
| *2007* | 9 897 993 | 23 562 372 | 28 851 532 | 29 874 139 | 30 195 459 | 30 277 285 | 30 314 799 | 30 327 631 | 30 330 915 | 30 332 868 |
| *2008* | 15 647 773 | 30 535 905 | 35 180 308 | 37 206 259 | 37 976 084 | 38 078 995 | 38 126 174 | 38 142 314 | 38 146 443 | 38 148 899 |
| *2009* | 19 725 212 | 37 570 024 | 45 215 018 | 49 010 657 | 50 024 724 | 50 160 285 | 50 222 433 | 50 243 693 | 50 249 133 | 50 252 368 |
| *2010* | 18 220 734 | 31 877 049 | 38 921 569 | 42 188 896 | 43 061 815 | 43 178 508 | 43 232 006 | 43 250 306 | 43 254 989 | 43 257 774 |
| *2011* | 11 062 453 | 22 737 571 | 27 762 355 | 30 092 905 | 30 715 549 | 30 798 785 | 30 836 944 | 30 849 998 | 30 853 338 | 30 855 325 |

Tabuľka 28: Doplnený trojuholník pre škodnú rezervu

| RŠ/RV | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *2002* | 5 894 919 | 16 249 779 | 23 716 108 | 27 342 153 | 27 887 608 | 27 919 052 | 27 937 006 | 27 948 356 | 27 953 601 | 27 955 401 |
| *2003* | 5 604 987 | 15 650 301 | 19 467 078 | 20 213 446 | 20 463 486 | 20 464 363 | 20 479 718 | 20 498 144 | 20 498 144 | 20 499 464 |
| *2004* | 8 178 568 | 15 360 725 | 18 214 765 | 21 643 337 | 21 796 621 | 21 832 727 | 21 923 443 | 21 923 443 | 21 926 398 | 21 927 810 |
| *2005* | 10 193 826 | 22 260 409 | 26 700 008 | 28 296 242 | 29 678 921 | 29 885 615 | 29 885 615 | 29 900 960 | 29 904 991 | 29 906 917 |
| *2006* | 9 507 932 | 18 374 614 | 21 901 253 | 24 064 761 | 24 545 265 | 24 607 178 | 24 646 904 | 24 659 559 | 24 662 884 | 24 664 472 |
| *2007* | 9 897 993 | 23 562 372 | 28 851 532 | 29 874 139 | 30 195 459 | 30 293 465 | 30 342 371 | 30 357 951 | 30 362 043 | 30 363 999 |
| *2008* | 15 647 773 | 30 535 905 | 35 180 308 | 37 206 259 | 38 090 946 | 38 214 579 | 38 276 273 | 38 295 927 | 38 301 089 | 38 303 555 |
| *2009* | 19 725 212 | 37 570 024 | 45 215 018 | 49 594 557 | 50 773 812 | 50 938 610 | 51 020 846 | 51 047 043 | 51 053 925 | 51 057 212 |
| *2010* | 18 220 734 | 31 877 049 | 39 665 524 | 43 507 537 | 44 542 056 | 44 686 627 | 44 758 770 | 44 781 752 | 44 787 788 | 44 790 672 |
| *2011* | 11 062 453 | 24 507 786 | 30 495 739 | 33 449 564 | 34 244 925 | 34 356 074 | 34 411 539 | 34 429 208 | 34 433 850 | 34 436 067 |

Tabuľka 29: Doplnený trojuholník pre účtovnú škodnú rezervu

| Platnosť | 1R | 2R | 3R | 4R | 5R | 6R | 7R | 8R | 9R | 10R | 11R | 12R | 13R |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Spotová úroková miera | 1,19% | 1,81% | 2,14% | 2,49% | 2,84% | 3,08% | 3,27% | 3,42% | 3,55% | 3,67% | 3,80% | 3,92% | 4,00% |
| Platnosť | 14R | 15R | 16R | 17R | 18R | 19R | 20R | 21R | 22R | 23R | 24R | 25R | 26R |
| Spotová úroková miera | 4,05% | 4,10% | 4,14% | 4,17% | 4,20% | 4,23% | 4,26% | 4,28% | 4,30% | 4,32% | 4,34% | 4,35% | 4,37% |

Tabuľka 30: Bezriziková úroková miera

## A2 Obsah CD

- Diplomová práca vo formáte pdf
- Návrh modelu v programe MS Excel
- Vstupné dáta pre program R