Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Mark Dostalík

Slabá formulace rovnic proudění tekutin

Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Milan Pokorný, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Obecná fyzika

Praha 2013

Děkuji panu doc. Mgr. Milanu Pokornému, Ph.D. za vstřícnost, cenné rady a velmi trpělivé vedení mé bakalářské práce. Také bych chtěl poděkovat své rodině za podporu během studia i při práci na tomto textu.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Slabá formulace rovnic proudění tekutin

Autor: Mark Dostalík

Katedra: Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Milan Pokorný, Ph.D., Matematický ústav UK

Abstrakt: Obvyklý způsob odvození slabé formulace bilančních rovnic mechaniky kontinua vychází z jejich lokalizovaného tvaru, a vyžaduje tedy diferencovatelnost funkcí vystupujících v příslušném zákonu zachování. Existence klasických řešení těchto rovnic však mnohdy není známa, a proto by bylo vhodné nalézt přechod ke slabé formulaci bilančních zákonů bez nutnosti přechodu do jejich diferenciálního tvaru. Cílem práce je ukázat, že výchozí integrální forma bilančních rovnic mechaniky kontinua za poměrně slabých předpokladů přímo implikuje jejich slabou formulaci, a tedy že slabé řešení je pro tyto rovnice přirozenějším pojmem než řešení klasické.

Klíčová slova: bilanční rovnice v integrálním tvaru; slabá formulace; klasická formulace

Title: Weak formulation of equations describing fluid flows

Author: Mark Dostalík

Department: Mathematical Institute of Charles University

Supervisor: doc. Mgr. Milan Pokorný, Ph.D., Mathematical Institute of Charles University

Abstract: The standard way of deriving the weak formulation of balance equations of continuum mechanics is derived from their localized form, and thus requires differentiability of functions involved in the corresponding balance law. However, the existence of classical solutions of these equations is often not known. It would be suitable to find a transition to the weak formulation of balance laws without the need of their differential form. The aim of this work is to show that the initial integral form of balance equations of continuum mechanics, provided relatively weak assumptions, directly implies their weak formulation, and thus that the weak solution is for these equations a more natural notion than the classical solution is.

Keywords: balance equation in integral form; weak formulation; classical formulation

Obsah

Úvod

Bilanční zákony hmoty, hybnosti a energie představují fundamentální rovnice mechaniky tekutin. Jedná se o rovnice v integrálním tvaru, které můžeme za dodatečných předpokladů na vystupující veličiny lokalizací převést na klasické parciální diferenciální rovnice a řešit tak bodový problém.

Předpokladem pro lokalizaci bilančních rovnic je dostatečná hladkost vystupujících veličin, což je požadavek, který není ve výchozím integrálním tvaru těchto zákonů obsažen. Bilanční zákony lze ale formulovat i způsobem, který nevyžaduje diferencovatelnost vystupujících funkcí. Tuto zobecněnou formu úlohy nazýváme *slabou formulací* parciální diferenciální rovnice a její význam bude zpřesněn později.

Otázkou, kterou se zabývá tento text, je přechod od výchozího integrálního tvaru bilančních rovnic k jejich slabé formulaci. Tradiční postup odvození slabé formulace, který se objevuje v řadě učebnic, využívá zmíněné lokalizace zákonů, a z principu tedy nemůže být správný, neboť existence klasických, tj. spojitě diferencovatelných, řešení často není známa. V roce 1927 publikoval C.W. Oseen práci *Neuere Methoden in der Hydrodynamik* [4], která nastiňuje způsob přechodu ke slabé formulaci bilančních zákonů za slabších předpokladů, než vyžaduje diferenciální tvar rovnic. Tento přechod je však proveden pouze pro Riemannův integrál a rovnice nestlačitelného proudění. V tomto textu se držíme Oseenova postupu, přechod ale provádíme pro Lebesgueův integrál a zobecňujeme jej pro rovnice stlačitelného proudění.

Oseenova myšlenka přechodu od výchozího integrálního tvaru bilančních rovnic k jejich slabé formulaci spočívá v rozdělení oblasti, kterou vyplňuje tekutina, na konečný počet podoblastí, na kterých uvažujeme bilanční zákony v krátkém časovém intervalu. Limitními přechody, kdy pošleme časový interval a míru podoblastí k nule, dostaneme za jistých předpokladů na fyzikální veličiny slabou formulaci bilančních rovnic. Jak uvidíme, požadavky na vystupující funkce, které můžeme odvodit s pomocí Lebesgueovy teorie integrálu, nevyžadují jejich diferencovatelnost. Slabá formulace bilančních rovnic je proto přirozenějším způsobem formulace těchto zákonů než formulace ve smyslu klasických parciálních diferenciálních rovnic.

V první kapitole formulujeme obecný integrální tvar bilančních zákonů mechaniky kontinua a v konkrétní podobě představujeme tři z nich (zákon zachování hmoty, hybnosti a celkové energie), kterým se tento text věnuje. Dále představujeme pojem slabé formulace parciálních diferenciálních rovnic a ukazujeme obvyklý postup odvození bilančních rovnic ve slabé formulaci.

Ve druhé kapitole odvozujeme přechod od výchozího integrálního tvaru bilančních zákonů k jejich slabé formulaci za mnohem slabších předpokladů, než vyžaduje tradiční odvození. Činíme tak s pomocí několika základních vět Lebesgueovy teorie integrálu, které jsou shrnuty v Appendixu.

Třetí kapitola potom shrnuje požadavky na veličiny bilancí hmoty a hybnosti, aby byl uvažovaný přechod ke slabé formulaci možný. Ukazujeme zde také speciální případ zákona zachování hybnosti – slabou formulaci Navierových-Stokesových rovnic pro stlačitelnou tekutinu.

1. Základní pojmy

1.1 Bilanční zákony mechaniky kontinua

Bilanční zákony mechaniky tekutin můžeme v obecném integrálním tvaru zapsat následovně (viz [1])

$$\int_{\mathcal{B}} D(t_2,x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathcal{B}} D(t_1,x)\,\mathrm{d}x + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{F}(t,x)\cdot\mathbf{n}(x)\,\mathrm{dS}_x\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathcal{B}} P(t,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{1.1}$$

Zde $\mathcal{B}$ je libovolný kontrolní objem neměnný s časem, který leží v oblasti Ω vyplněné tělesem v nějakém časovém intervalu $[0,T]$, přičemž $(t_1,t_2)\subset[0,T]$, D označuje objemovou hustotu fyzikální veličiny, $\mathbf{F}$ je tok této veličiny skrz hranici ($\mathbf{n}$ značí vnější normálu k $\mathcal{B}$) a P je objemová produkce příslušné veličiny.

Konkrétně se nám jedná o následující zákony zachování.

Bilance hmoty

$$\int_{\mathcal{B}} \varrho(t_2,x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathcal{B}} \varrho(t_1,x)\,\mathrm{d}x + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial\mathcal{B}} \varrho(t,x)\mathbf{v}(t,x)\cdot\mathbf{n}(x)\,\mathrm{dS}_x\,\mathrm{d}t = 0, \tag{1.2}$$

kde ϱ je hustota a $\mathbf{v}$ je prostorové rychlostní pole tekutiny.

Bilance hybnosti

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{B}} \varrho(t_2,x)\mathbf{v}(t_2,x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathcal{B}} \varrho(t_1,x)\mathbf{v}(t_1,x)\,\mathrm{d}x&\\ + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial\mathcal{B}} \left(\varrho(t,x)\mathbf{v}(t,x)\otimes\mathbf{v}(t,x) - \mathbb{T}(t,x)\right)\mathbf{n}(x)\,\mathrm{dS}_x\,\mathrm{d}t&\\ = \int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathcal{B}} \varrho(t,x)\mathbf{b}(t,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,&\end{aligned} \tag{1.3}$$

kde navíc $\mathbb{T}$ značí tenzor napětí a $\mathbf{b}$ objemovou sílu (vztaženou na jednotku hmotnosti) působící na tekutinu. Protože se jedná o vektorovou rovnici, máme zde ve skutečnosti tři skalární bilanční rovnice. Vektorová veličina $\mathbf{F}_i$, $i\in\{1,2,3\}$, příslušná i-té rovnici představuje i-tý řádek matice $\varrho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}-\mathbb{T}$.

Bilance celkové energie

$$\int_{\mathcal{B}} \varrho(t_2,x)\left(\frac{|\mathbf{v}(t_2,x)|^2}{2}+e(t_2,x)\right)\mathrm{d}x-\int_{\mathcal{B}} \varrho(t_1,x)\left(\frac{|\mathbf{v}(t_1,x)|^2}{2}+e(t_1,x)\right)\mathrm{d}x$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial\mathcal{B}}\left(\varrho(t,x)\left(\frac{|\mathbf{v}(t,x)|^2}{2}+e(t,x)\right)\mathbf{v}(t,x)-\mathbf{q}(t,x)-\mathbb{T}(t,x)\mathbf{v}(t,x)\right)\cdot\mathbf{n}(x)\,\mathrm{dS}_x\,\mathrm{d}t$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathcal{B}}\left(\varrho(t,x)\mathbf{b}(t,x)\cdot\mathbf{v}(t,x)+\varrho(t,x)r(t,x)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \quad (1.4)$$

kde navíc vystupuje specifická vnitřní energie e (vztažená na jednotku hmotnosti), tepelný tok $\mathbf{q}$ a hustota tepelných zdrojů r (vztažená na jednotku hmotnosti).

Přehled veličin vystupujících v jednotlivých bilančních rovnicích zachycuje Tabulka 1.1.

D	$\mathbf{F}$	P	***bilance***
ϱ	$\varrho\mathbf{v}$	-	hmoty
$\varrho\mathbf{v}$	$\varrho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}-\mathbb{T}$	$\varrho\mathbf{b}$	hybnosti
$\varrho(\frac{1}{2}\|\mathbf{v}\|^2+e)$	$\varrho(\frac{1}{2}\|\mathbf{v}\|^2+e)\mathbf{v}-\mathbf{q}-\mathbb{T}\mathbf{v}$	$\varrho r+\varrho\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}$	energie

Tabulka 1.1: Veličiny jednotlivých bilančních zákonů

1.2 Slabá formulace a slabé řešení

Klasickým řešením obyčejné či parciální diferenciální rovnice k-tého řádu rozumíme funkci, která je alespoň k-krát spojitě diferencovatelná a vyhovuje zadané rovnici. Máme tak zaručeno, že všechny derivace, které se vyskytují v rovnici, existují a jsou spojité. Toto je přirozená představa řešení parciální diferenciální rovnice.

Slabým, popř. *zobecněným řešením* parciální diferenciální rovnice naproti tomu nazýváme funkci, která nemusí být nutně diferencovatelná, a přesto vyhovuje zadané rovnici v jistém přesně definovaném smyslu. Myšlenka slabého řešení je taková, že všechny derivace vyskytující se původně na zkoumané funkci, se pomocí integrace rovnice a použitím Greenovy věty objeví na tzv. testovací funkci, čímž obdržíme řešení, která nutně nesplňují podmínku diferencovatelnosti.

Uvažujme homogenní lineární parciální diferenciální rovnici (PDR) k-tého řádu pro funkci $u : \mathcal{O} \to \mathbb{R}, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \mathrm{D}^\alpha u(x) = 0, \tag{1.5}$$

kde α je multiindex a $a_\alpha(x)$ jsou dostatečně hladké funkce. Vynásobme nyní (1.5) testovací funkcí $\varphi \in C_0^\infty(\mathcal{O})$[1] a integrujme rovnost přes $\mathcal{O}$. S použitím Greenovy věty dostáváme

$$\int_{\mathcal{O}} u(x) \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} \mathrm{D}^\alpha \big(a_\alpha(x) \varphi(x) \big) \, \mathrm{d}x = 0. \tag{1.6}$$

Vidíme, že pro $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O})$ je rovnice (1.6) splněna i bez nutnosti diferencovatelnosti u, a její řešení budeme tedy nazývat *slabým řešením* homogenní lineární PDR. Rovnici (1.6) pak nazveme *slabou formulací* PDR (1.5).

Podmínky kladené na testovací funkci φ závisí na konkrétním problému, obecně není například nutné vyžadovat, aby testovací funkce byla nekonečněkrát spojitě diferencovatelná, ale stačí pouze dostatečná hladkost, aby výraz (1.6) měl smysl. My zde však budeme pro jednoduchost uvažovat testovací funkce náležející do prostoru $C_0^\infty((0,T) \times \Omega)$.

1.3 Klasické odvození bilančních rovnic ve slabé formulaci

Platnost bilančních zákonů mechaniky tekutin formulovaných na kontrolních objemech je požadována pro každou otevřenou podmnožinu $\mathcal{B}$ oblasti Ω vyplněné tělesem a ležící v Ω v časovém intervalu $[0,T]$. Jak již bylo řečeno, obecná integrální forma těchto zákonů má tvar (viz (1.1))

$$\int_{\mathcal{B}} D(t_2,x) \, \mathrm{d}x - \int_{\mathcal{B}} D(t_1,x) \, \mathrm{d}x + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{F}(t,x) \cdot \mathbf{n}(x) \, \mathrm{dS}_x \, \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{B}} P(t,x) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t.$$

[1] $C_0^\infty(\mathcal{O})$ značíme prostor nekonečněkrát spojitě diferencovatelných funkcí s kompaktním nosičem v $\mathcal{O}$.

Uvědomme si nejprve, jaké předpoklady na funkce D, $\mathbf{F}$ a P plynou z (1.1), aby měla uvedená rovnost smysl. Funkce by měly splňovat[2]

$$\begin{aligned} & D \in L^1_{\text{loc}}(\Omega); \\ & \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \in L^1_{\text{loc}}((0,T); L^1(\partial \mathcal{B})), \forall \mathcal{B} \subset \bar{\mathcal{B}} \subset \Omega; \\ & P \in L^1_{\text{loc}}((0,T) \times \Omega). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Tradiční postup odvození slabé formulace bilančních rovnic ovšem spočívá v předpokladu dostatečné hladkosti řešení – tedy požaduje mnohem silnější předpoklady na funkce vystupující v bilančních zákonech. Ukažme si tento obvyklý způsob odvození bilančních rovnic ve slabé formulaci z jejich integrálního tvaru (1.1). Předpokládejme, že funkce D a $\mathbf{F}$ jsou alespoň spojitě diferencovatelné. Použitím Gaussovy-Ostrogradského věty potom z (1.1) plyne

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{B}} (\partial_t D(t,x) + \operatorname{div}_x \mathbf{F}(t,x) - P(t,x)) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = 0.$$

Protože $(t_1, t_2) \subset [0, T]$ je libovolný časový interval a $\mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{B}} \subset \Omega$ je libovolný kontrolní objem, dostáváme tak, že za předpokladu spojitosti integrandu $\forall x \in \Omega$, $\forall t \in (0,T)$ platí[3]

$$\partial_t D(t,x) + \operatorname{div}_x \mathbf{F}(t,x) = P(t,x).$$

Vynásobme nyní tuto rovnici testovací funkcí $\varphi \in C_0^\infty((0,T) \times \Omega)$ a výslednou rovnost zintegrujme. Dostáváme

$$\int_0^T \int_\Omega (\partial_t D(t,x) \varphi(t,x) + (\operatorname{div}_x \mathbf{F}(t,x)) \varphi(t,x)) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = \int_0^T \int_\Omega P(t,x) \varphi(t,x) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t.$$

Pro vyjádření bilančních rovnic ve slabé formulaci zbývá přesunout všechny derivace na testovací funkci φ (integrály přes hranici vzniklé použitím Greenovy věty jsou nulové z důvodu nulovosti φ na hranici). Dostaneme tak slabou formulaci

[2]Symbolem $L^p((0,T); X)$, $1 \leq p < \infty$, kde X je Banachův prostor, rozumíme prostor všech měřitelných funkcí $u\colon (0,T) \to X$, pro které je norma

$$\|u\|_{L^p((0,T);X)} \equiv \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

[3]Nechť $\int_{\mathcal{V}} f(x) \mathrm{d}x = 0$ pro $\mathcal{V} \subset \overline{\mathcal{V}} \subset \Omega$, f je spojitá na Ω. Chceme ukázat, že odtud plyne, že $f(x) \equiv 0$ $\forall x \in \Omega$. Předpokládejme, že $\exists x_0 \in \Omega$ takové, že $f(x_0) > 0$. Protože je však f spojitá, musí existovat okolí $\mathcal{U}(x_0)$ bodu x_0 takové, že $f(x) > 0$ pro $x \in \mathcal{U}(x_0)$. Zvolme tedy $\mathcal{V} := \mathcal{U}(x_0)$. Potom ale dostáváme $\int_{\mathcal{U}(x_0)} f(x) \mathrm{d}x > 0$, což nám dává spor.

obecného bilančního zákona mechaniky tekutin, která platí $\forall \varphi \in C_0^\infty((0,T)\times\Omega)$

$$\int_0^T \int_\Omega (-D(t,x)\partial_t\varphi(t,x) - \mathbf{F}(t,x)\cdot\nabla_x\varphi(t,x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^T \int_\Omega P(t,x)\varphi(t,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{1.8}$$

Jak je vidět, při klasickém odvození slabé formulace bilančních rovnic je vyžadována hladkost funkcí, která není v (1.1) obsažena. Ukážeme, že (1.8) lze odvodit i za mnohem slabších předpokladů na funkce D, $\mathbf{F}$ a P, a to přímo z bilančních rovnic v integrálním tvaru (1.1). Tím současně ukážeme, že není potřeba formulovat bilanční rovnice klasickým způsobem a že slabé řešení je pro tyto zákony přirozeným pojmem.

2. Přechod ke slabé formulaci bilančních zákonů

2.1 Odvození výchozího integrálního tvaru

V následujících úvahách předpokládáme, že Ω je omezená souvislá otevřená množina, nezávislá na čase a s dostatečně hladkou hranicí.

Vraťme se opět k obecné integrální formulaci bilančních zákonů (1.1)

$$\int_{\mathcal{B}} (D(t_2,x) - D(t_1,x)) \, \mathrm{d}x + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{F}(t,x) \cdot \mathbf{n}(x) \, \mathrm{dS}_x \, \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{B}} P(t,x) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t.$$

Rozdělme nyní prostor třemi navzájem kolmými systémy rovin tak, že roviny každého systému jsou kolmé na jednu ze souřadnicových os. Označme ε mezirovinnou vzdálenost těchto systémů, tj. vzdálenost dvou sousedních rovin každého systému. Rozdělili jsme tak prostor na spočetné množství krychlových podoblastí, jejichž hrana je rovna ε. Budeme uvažovat pouze krychle, které jsou podmnožinou oblasti Ω vyplněné tělesem, a tyto krychle nějakým způsobem očíslujeme. Zaveďme tedy pro naše krychle značení $\mathcal{C}_\varepsilon^k$, kde $k = \{1, \dots, N\}$ a $N = N(\varepsilon)$ je celkový počet krychlí obsažených v oblasti Ω. Střed každé krychle $\mathcal{C}_\varepsilon^k$ označíme x^k.

Číslo ε budeme volit tak malé, aby pro nosič testovací funkce $\varphi \in C_0^\infty((0,T)\times\Omega)$ platilo $\operatorname{supp}_{x\in\Omega} \varphi \subset \bigcup_{k=1}^{N(\varepsilon)} \mathcal{C}_\varepsilon^k$.

Vezměme (1.1) na krychli $\mathcal{C}_\varepsilon^k$ a položme $t_2 = t_1 + \Delta t$. Vzniklou rovnost vynásobíme hodnotou $\varphi(t_1, x^k)$ a $\frac{1}{\Delta t}$, provedeme sumaci přes všechny krychle a nakonec výsledný výraz zintegrujeme od 0 do T podle t_1. Dostaneme tak rovnici

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta t} \int_0^T \left(\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \left(\int_{\mathcal{C}_\varepsilon^k} (D(t_1+\Delta t,x) - D(t_1,x)) \, \mathrm{d}x \right) \varphi(t_1,x^k) \right) \mathrm{d}t_1 \\
&\qquad + \frac{1}{\Delta t} \int_0^T \left(\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \left(\int_{t_1}^{t_1+\Delta t} \int_{\partial\mathcal{C}_\varepsilon^k} \mathbf{F}(t,x) \cdot \mathbf{n}(x) \, \mathrm{dS}_x \, \mathrm{d}t \right) \varphi(t_1,x^k) \right) \mathrm{d}t_1 \\
&\qquad\qquad = \frac{1}{\Delta t} \int_0^T \left(\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \left(\int_{t_1}^{t_1+\Delta t} \int_{\mathcal{C}_\varepsilon^k} P(t,x) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \right) \varphi(t_1,x^k) \right) \mathrm{d}t_1. \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

Naším cílem teď bude provést limitní přechody $\varepsilon \to 0+$ a $\Delta t \to 0+$ v rovnici (2.1) a ukázat, že tak za jistých předpokladů na funkce D, $\mathbf{F}$ a P dostaneme obecnou formu bilančního zákona ve slabé formulaci. Pro větší přehlednost se budeme věnovat každému členu rovnice (2.1) zvlášť.

2.2 První člen rovnice (2.1)

2.2.1 Limitní přechod $\varepsilon \to 0+$

První člen rovnice (2.1) můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{1}{\Delta t}\int_0^T \int_\Omega (D(t_1+\Delta t, x) - D(t_1, x)) \left(\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \varphi(t_1, x^k)\chi_{\mathcal{C}_\varepsilon^k}(x) \right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}t_1, \tag{2.2}$$

kde χ_A je charakteristická funkce množiny A. Funkce φ je hladká na kompaktní množině, a je tedy na této množině omezená. Zároveň díky hladkosti φ pro $x \in \Omega$ platí[1]

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \varphi(t_1, x^k)\chi_{\mathcal{C}_\varepsilon^k}(x) = \varphi(t_1, x).$$

Pokud tedy budeme požadovat, aby $D \in L^1_{\mathrm{loc}}((0,T) \times \Omega)$, můžeme pro záměnu limity a integrálu použít Lebesgueovu větu o majorizované konvergenci (věta A1) a z výrazu (2.2) při přechodu $\varepsilon \to 0+$ dostaneme

$$\frac{1}{\Delta t}\int_0^T \int_\Omega (D(t_1+\Delta t, x) - D(t_1, x))\, \varphi(t_1, x) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t_1. \tag{2.3}$$

2.2.2 Limitní přechod $\Delta t \to 0+$

Před samotným limitním přechodem musíme nejprve výraz (2.3) upravit do vhodnějšího tvaru. Rozdělíme proto integrál na dva členy a v prvním použijeme sub-

[1] φ je spojitá na kompaktní množině, a je tam tedy stejnoměrně spojitá, tj. $\forall \eta > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_1, x_2 \in \Omega$: $|x_1 - x_2| < \delta$ platí $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \eta$. Pokud zvolíme ε tak, aby $\frac{\varepsilon\sqrt{3}}{2} \leq \delta$, platí $|x - x^k| < \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{2} \leq \delta$ pro $x \in \mathcal{C}_\varepsilon^k$. Ze stejnoměrné spojitosti pak máme $|\varphi(x) - \varphi(x^k)| < \eta$ a zbytek už je zřejmý díky tomu, že $\varphi(x^k) = \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \varphi(x^k)\chi_{\mathcal{C}_\varepsilon^k}(x)$.

stituci $\tau = t_1 + \Delta t$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta t}\int_0^T\int_\Omega \left(D(t_1+\Delta t, x) - D(t_1, x)\right)\varphi(t_1, x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t_1\\
&\quad= \frac{1}{\Delta t}\int_0^T\int_\Omega D(t_1+\Delta t, x)\varphi(t_1, x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t_1 - \frac{1}{\Delta t}\int_0^T\int_\Omega D(t_1, x)\varphi(t_1, x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t_1\\
&\quad= \frac{1}{\Delta t}\int_{\Delta t}^{T+\Delta t}\int_\Omega D(\tau, x)\varphi(\tau-\Delta t, x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau - \frac{1}{\Delta t}\int_0^T\int_\Omega D(t_1, x)\varphi(t_1, x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t_1.
\end{aligned}
$$

Proměnnou τ opět přeznačíme na t_1 a výraz dále upravíme

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta t}\int_{\Delta t}^{T+\Delta t}\int_\Omega D(t_1, x)\varphi(t_1-\Delta t, x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t_1 - \frac{1}{\Delta t}\int_0^T\int_\Omega D(t_1, x)\varphi(t_1, x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t_1\\
&= \frac{1}{\Delta t}\int_{\Delta t}^{T}\int_\Omega D(t_1, x)\varphi(t_1-\Delta t, x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t_1 + \frac{1}{\Delta t}\int_{T}^{T+\Delta t}\int_\Omega D(t_1, x)\varphi(t_1-\Delta t, x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t_1\\
&-\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\int_\Omega D(t_1, x)\varphi(t_1, x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t_1 - \frac{1}{\Delta t}\int_{\Delta t}^T\int_\Omega D(t_1, x)\varphi(t_1, x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t_1.
\end{aligned}
$$

Sečteme první a poslední člen předchozího výrazu a v druhém členu použijeme substituci $\tau = t_1 - \Delta t$ (τ opět zpátky přeznačíme na t_1). Z (2.3) tak celkově dostaneme

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta t}\int_{T-\Delta t}^{T}\int_\Omega D(t_1+\Delta t, x)\varphi(t_1, x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t_1 - \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\int_\Omega D(t_1, x)\varphi(t_1, x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t_1&\\
- \int_{\Delta t}^T\int_\Omega D(t_1, x)\frac{\varphi(t_1-\Delta t, x) - \varphi(t_1, x)}{(-\Delta t)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t_1.& \quad (2.4)
\end{aligned}
$$

Pro Δt dostatečně malé bude testovací funkce $\varphi(t_1, x)$ na intervalech $(T - \Delta t\ ,\ T)$ a $(0, \Delta t)$ nulová, a při přechodu $\Delta t \to 0+$ tedy dostaneme z prvního a druhého členu (2.4) nulu[2].

Pro limitní přechod ve zbývajícím členu (2.4) nám bude opět stačit Lebesgueova věta. Pokud budeme požadovat, aby $D \in L^1_{\mathrm{loc}}((0, T)\times\Omega)$, dostaneme

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\Delta t\to 0^+}\int_{\Delta t}^T\int_\Omega D(t_1, x)\frac{\varphi(t_1-\Delta t, x) - \varphi(t_1, x)}{(-\Delta t)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t_1\\
&\quad= \lim_{\Delta t\to 0^+}\int_0^T\int_\Omega D(t_1, x)\frac{\varphi(t_1-\Delta t, x) - \varphi(t_1, x)}{(-\Delta t)}\chi_{(\Delta t, T)}(t_1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t_1\\
&\quad= \int_0^T\int_\Omega D(t_1, x)\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t_1, x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t_1.
\end{aligned}
$$

[2] Někdy se uvažuje testovací funkce $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_0^+\times\Omega)$. Limitním přechodem $\Delta t \to 0+$ bychom tak za předpokladu $D \in C\big([0, T]; L^1(\Omega)\big)$ z prvního a druhého členu (2.4) dostali

$$
\int_\Omega D(T, x)\varphi(T, x)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega D(0, x)\varphi(0, x)\,\mathrm{d}x.
$$

Celkově tak pro $D \in L^1_{\mathrm{loc}}((0,T)\times\Omega)$ z prvního členu (2.1) limitními přechody $\varepsilon \to 0+$ a $\Delta t \to 0+$ dostáváme

$$-\int_0^T \int_\Omega D(t_1,x)\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t_1,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t_1. \tag{2.5}$$

2.3 Druhý člen rovnice (2.1)

Zde využijeme toho, že pracujeme s krychlovými oblastmi. Plošný integrál přes hranici k-té krychle můžeme rozepsat do tvaru

$$\int_{\partial\mathcal{C}^k_\varepsilon} \mathbf{F}(t,x)\cdot\mathbf{n}(x)\,\mathrm{dS}_x$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{x_3^k-\frac{\varepsilon}{2}}^{x_3^k+\frac{\varepsilon}{2}}\int_{x_2^k-\frac{\varepsilon}{2}}^{x_2^k+\frac{\varepsilon}{2}} F_1(t,x_1^k+\frac{\varepsilon}{2},x_2,x_3)\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 + \int_{x_3^k-\frac{\varepsilon}{2}}^{x_3^k+\frac{\varepsilon}{2}}\int_{x_1^k-\frac{\varepsilon}{2}}^{x_1^k+\frac{\varepsilon}{2}} F_2(t,x_1,x_2^k+\frac{\varepsilon}{2},x_3)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_3\\
&+ \int_{x_2^k-\frac{\varepsilon}{2}}^{x_2^k+\frac{\varepsilon}{2}}\int_{x_1^k-\frac{\varepsilon}{2}}^{x_1^k+\frac{\varepsilon}{2}} F_3(t,x_1,x_2,x_3^k+\frac{\varepsilon}{2})\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 - \int_{x_3^k-\frac{\varepsilon}{2}}^{x_3^k+\frac{\varepsilon}{2}}\int_{x_2^k-\frac{\varepsilon}{2}}^{x_2^k+\frac{\varepsilon}{2}} F_1(t,x_1^k-\frac{\varepsilon}{2},x_2,x_3)\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\\
&- \int_{x_3^k-\frac{\varepsilon}{2}}^{x_3^k+\frac{\varepsilon}{2}}\int_{x_1^k-\frac{\varepsilon}{2}}^{x_1^k+\frac{\varepsilon}{2}} F_2(t,x_1,x_2^k-\frac{\varepsilon}{2},x_3)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_3 - \int_{x_2^k-\frac{\varepsilon}{2}}^{x_2^k+\frac{\varepsilon}{2}}\int_{x_1^k-\frac{\varepsilon}{2}}^{x_1^k+\frac{\varepsilon}{2}} F_3(t,x_1,x_2,x_3^k-\frac{\varepsilon}{2})\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\\
&= \sum_{i=1}^3\int_{\mathcal{S}^k_{\varepsilon,i}} F_i(t,x_1,\dots,x_i^k+\frac{\varepsilon}{2},\dots,x_3)\,\mathrm{d}\hat{x}_i - \sum_{i=1}^3\int_{\tilde{\mathcal{S}}^k_{\varepsilon,i}} F_i(t,x_1,\dots,x_i^k-\frac{\varepsilon}{2},\dots,x_3)\,\mathrm{d}\hat{x}_i,
\end{aligned}$$

kde $\mathcal{S}^k_{\varepsilon,i}$, resp. $\tilde{\mathcal{S}}^k_{\varepsilon,i}$ je stěna krychle $\mathcal{C}^k_\varepsilon$ s vnější normálou směřující v kladném, resp. záporném směru i-té souřadnice. Symbolem $\mathrm{d}\hat{x}_i$ rozumíme dvourozměrnou Lebesgueovu míru v proměnných různých od x_i (tedy např. $\mathrm{d}\hat{x}_1 = \mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$).

Uvědomme si nyní, že kromě krychlí u hranice Ω je každá ploška, přes kterou počítáme integrál, společnou stěnou dvou sousedních krychlí. Druhý člen rovnice (2.1)

$$\frac{1}{\Delta t}\int_0^T\int_{t_1}^{t_1+\Delta t}\left(\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)}\int_{\partial\mathcal{C}^k_\varepsilon}\mathbf{F}(t,x)\cdot\mathbf{n}(x)\varphi(t_1,x^k)\,\mathrm{dS}_x\right)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t_1$$

proto můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{1}{\Delta t}\int_0^T\int_{t_1}^{t_1+\Delta t}\left(\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)}\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathcal{S}^k_{\varepsilon,i}}F_i(t,x_1,\dots,x_i^k+\frac{\varepsilon}{2},\dots,x_3)\left(\varphi(t_1,x^k)-\varphi(t_1,x^k+\varepsilon\mathbf{e}_i)\right)\mathrm{d}\hat{x}_i\right)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t_1, \tag{2.6}$$

kde $\mathbf{e}_i, i=\{1,2,3\}$ jsou bázové vektory ve směru souřadnicových os x_i. Tímto způsobem vynecháme některé integrály přes plošky u hranice oblasti Ω. Testovací funkce φ je však na okolí $\partial\Omega$ nulová, a proto budou nulové i integrály přes hraniční plošky. Testovací funkci zde navíc pokládáme rovnou nule vně oblasti Ω (může se totiž stát, že prostorový argument $\varphi(t_1, x^k + \varepsilon \mathbf{e}_i)$ vystoupí z Ω, kde φ není definována).

Zřejmě platí

$$\begin{aligned} \varphi(t_1, x^k) - \varphi(t_1, x^k + \varepsilon \mathbf{e}_i) &= -\int_{x_i^k}^{x_i^k+\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(t_1, x_1^k, \ldots, x_i, \ldots, x_3^k) \mathrm{d}x_i \\ &= -\int_{x_i^k-\frac{\varepsilon}{2}}^{x_i^k+\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(t_1, x_1^k, \ldots, x_i + \frac{\varepsilon}{2}, \ldots, x_3^k) \mathrm{d}x_i. \end{aligned}$$

Výraz (2.6) proto můžeme upravit do tvaru

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{\Delta t}\int_0^T \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} \left(\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathcal{C}_\varepsilon^k} F_i(t, x_1, \ldots, x_i^k + \frac{\varepsilon}{2}, \ldots, x_3) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(t_1, x_1^k, \ldots, x_i + \frac{\varepsilon}{2}, \ldots, x_3^k) \mathrm{d}x_i \, \mathrm{d}\hat{x}_i \right) \mathrm{d}t \, \mathrm{d}t_1 \\ &= -\frac{1}{\Delta t}\int_0^T \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} \int_\Omega \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \sum_{i=1}^{3} F_i(t, x_1, \ldots, x_i^k + \frac{\varepsilon}{2}, \ldots, x_3) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(t_1, x_1^k, \ldots, x_i + \frac{\varepsilon}{2}, \ldots, x_3^k) \chi_{\mathcal{C}_\varepsilon^k}(x) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}t_1. \end{aligned}$$

Pro jednoduchost se budeme dále zabývat pouze první složkou vektorové funkce $\mathbf{F}$. Bude nás tedy zajímat výraz

$$-\frac{1}{\Delta t}\int_0^T \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} \int_\Omega \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} F_1(t, x_1^k + \frac{\varepsilon}{2}, x_2, x_3) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t_1, x_1 + \frac{\varepsilon}{2}, x_2^k, x_3^k) \chi_{\mathcal{C}_\varepsilon^k}(x) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}t_1. \tag{2.7}$$

Limitní přechody pro zbylé složky $\mathbf{F}$ by se provedly zcela analogicky.

2.3.1 Limitní přechod $\varepsilon \to 0+$

Dokažme nejprve, že

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\Omega \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} F_1(t, x_1^k + \frac{\varepsilon}{2}, x_2, x_3) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t_1, x_1 + \frac{\varepsilon}{2}, x_2^k, x_3^k) \chi_{\mathcal{C}_\varepsilon^k}(x) \, \mathrm{d}x \\ = \int_\Omega F_1(t, x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t_1, x) \, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.8}$$

K tomu použijeme Vitaliho větu (věta A2). Pro s.v. $x \in \Omega$ zřejmě platí

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} F_1(t, x_1^k + \frac{\varepsilon}{2}, x_2, x_3) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t_1, x_1 + \frac{\varepsilon}{2}, x_2^k, x_3^k) \chi_{\mathcal{C}_\varepsilon^k}(x) = F_1(t, x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t_1, x).$$

Dále potřebujeme zaručit, že integrály přes malé množiny jsou stejnoměrně malé, tedy že pro $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tak, že $\forall E \subset \Omega, |E| < \delta$ platí

$$\left|\int_E \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} F_1(t, x_1^k + \frac{\varepsilon}{2}, x_2, x_3) \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t_1, x_1 + \frac{\varepsilon}{2}, x_2^k, x_3^k) \chi_{\mathcal{C}_\varepsilon^k}(x) \,\mathrm{d}x\right| < \epsilon.$$

Zkoumejme tedy výraz na levé straně nerovnosti. Jistě platí

$$\left|\int_E \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} F_1(t, x_1^k + \frac{\varepsilon}{2}, x_2, x_3) \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t_1, x_1 + \frac{\varepsilon}{2}, x_2^k, x_3^k) \chi_{\mathcal{C}_\varepsilon^k}(x) \,\mathrm{d}x\right|$$
$$\leq \max_{\substack{t_1\in(0,T)\\ x\in\Omega}} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t_1, x)\right| \int_E \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \left|F_1(t, x_1^k + \frac{\varepsilon}{2}, x_2, x_3)\right| \chi_{\mathcal{C}_\varepsilon^k}(x) \,\mathrm{d}x.$$

Zaveďme značení

$$F_1^\varepsilon(t_1, x) := \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} F_1(t, x_1^k + \frac{\varepsilon}{2}, x_2, x_3) \chi_{\mathcal{C}_\varepsilon^k}(x).$$

Potom dostáváme

$$|F_1^\varepsilon(t_1, x)| = \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} |F_1(t, x_1^k + \frac{\varepsilon}{2}, x_2, x_3)| \chi_{\mathcal{C}_\varepsilon^k}(x)$$

a můžeme psát

$$\max_{\substack{t_1\in(0,T)\\ x\in\Omega}} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t_1, x)\right| \int_E \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \left|F_1(t, x_1^k + \frac{\varepsilon}{2}, x_2, x_3)\right| \chi_{\mathcal{C}_\varepsilon^k}(x) \,\mathrm{d}x$$
$$= \max_{\substack{t_1\in(0,T)\\ x\in\Omega}} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t_1, x)\right| \int_E |F_1^\varepsilon(t, x)| \,\mathrm{d}x.$$

Pokud budeme požadovat, aby $F_1 \in L^{1+\eta}(\mathcal{S}_1)$, kde $\mathcal{S}_1 \subset \Omega$ je libovolná 2-plocha taková, že její normála má v každém bodě směr souřadnicové osy x_1 (jedná se tedy o plochu rovnoběžnou s rovinou $x_2 x_3$ a ležící v Ω), máme zaručeno, že také $F_1^\varepsilon \in L^{1+\eta}(\Omega)$, neboť zřejmě platí

$$\int_{\mathcal{C}_\varepsilon^k} |F_1^\varepsilon(t, x)|^{1+\eta} \,\mathrm{d}x = \varepsilon \int_{\mathcal{S}_{\varepsilon,1}^k} |F_1(t, x)|^{1+\eta} \,\mathrm{dS}_x.$$

Z Hölderovy nerovnosti (věta A3) potom dostaneme

$$\max_{\substack{t_1\in(0,T)\\x\in\Omega}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t_1,x)\right|\int_E |F_1^\varepsilon(t,x)|\,\mathrm{d}x$$
$$\leq \max_{\substack{t_1\in(0,T)\\x\in\Omega}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t_1,x)\right| |E|^{\frac{\eta}{1+\eta}}\left(\int_E |F_1^\varepsilon(t,x)|^{1+\eta}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{1+\eta}}.$$

Využijme dále následující nerovnosti

$$\max_{\substack{t_1\in(0,T)\\x\in\Omega}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t_1,x)\right| |E|^{\frac{\eta}{1+\eta}}\left(\int_E |F_1^\varepsilon(t,x)|^{1+\eta}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{1+\eta}}$$
$$\leq \max_{\substack{t_1\in(0,T)\\x\in\Omega}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t_1,x)\right| |E|^{\frac{\eta}{1+\eta}}\left(\int_\Omega |F_1^\varepsilon(t,x)|^{1+\eta}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{1+\eta}}$$
$$= \max_{\substack{t_1\in(0,T)\\x\in\Omega}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t_1,x)\right| |E|^{\frac{\eta}{1+\eta}}\left(\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)}\int_{\mathcal{C}_\varepsilon^k} |F_1^\varepsilon(t,x)|^{1+\eta}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{1+\eta}}.$$

Jestliže se vrátíme k původní funkci F_1, můžeme psát

$$\max_{\substack{t_1\in(0,T)\\x\in\Omega}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t_1,x)\right| |E|^{\frac{\eta}{1+\eta}}\left(\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)}\int_{\mathcal{C}_\varepsilon^k} |F_1^\varepsilon(t,x)|^{1+\eta}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{1+\eta}}$$
$$= \max_{\substack{t_1\in(0,T)\\x\in\Omega}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t_1,x)\right| |E|^{\frac{\eta}{1+\eta}}\left(\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)}\int_{\mathcal{C}_\varepsilon^k} |F_1(t,x_1^k+\frac{\varepsilon}{2},x_2,x_3)|^{1+\eta}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{1+\eta}}$$
$$= \max_{\substack{t_1\in(0,T)\\x\in\Omega}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t_1,x)\right| |E|^{\frac{\eta}{1+\eta}}\left(\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)}\varepsilon\int_{\mathcal{S}_{\varepsilon,1}^k} |F_1(t,x)|^{1+\eta}\,\mathrm{dS}_x\right)^{\frac{1}{1+\eta}}$$
$$= \max_{\substack{t_1\in(0,T)\\x\in\Omega}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t_1,x)\right| |E|^{\frac{\eta}{1+\eta}}\left(\sum_{k=1}^{\tilde N(\varepsilon)}\varepsilon\int_{\mathcal{S}_1^k} |F_1(t,x)|^{1+\eta}\,\mathrm{dS}_x\right)^{\frac{1}{1+\eta}},$$

kde $\mathcal{S}_1^k$ jsou plochy, které vznikly sjednocením plošek $\mathcal{S}_{\varepsilon,1}^k$ ležících ve stejné rovině, a $\tilde N(\varepsilon)=\frac{|\Omega_{x_1}|}{\varepsilon}$, kde Ω_{x_1} je průmět Ω do souřadnicové osy x_1. Přijměme nyní další předpoklad na funkci F_1, a to aby pro s.v. $t\in(0,T)$

$$\sup_{\mathcal{S}_1}\int_{\mathcal{S}_1}|F_1(t,x)|^{1+\eta}\,\mathrm{dS}_x<+\infty.$$

Z předcházejícího výrazu potom dostaneme

$$\begin{aligned}
\max_{\substack{t_1\in(0,T)\\ x\in\Omega}} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t_1,x)\right| |E|^{\frac{\eta}{1+\eta}} \left(\sum_{k=1}^{\tilde N(\varepsilon)} \varepsilon \int_{\mathcal{S}_1^k} |F_1(t,x)|^{1+\eta}\,\mathrm{dS}_x\right)^{\frac{1}{1+\eta}} \\
\le \max_{\substack{t_1\in(0,T)\\ x\in\Omega}} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t_1,x)\right| |E|^{\frac{\eta}{1+\eta}} \left(\tilde N(\varepsilon)\,\varepsilon \sup_{\mathcal{S}_1} \int_{\mathcal{S}_1} |F_1(t,x)|^{1+\eta}\,\mathrm{dS}_x\right)^{\frac{1}{1+\eta}} \\
= \max_{\substack{t_1\in(0,T)\\ x\in\Omega}} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t_1,x)\right| |E|^{\frac{\eta}{1+\eta}} |\Omega_{x_1}|^{\frac{1}{1+\eta}} \sup_{\mathcal{S}_1} \|F_1(t,x)\|_{L^{1+\eta}(\mathcal{S}_1,\,\mathrm{dS}_x)}.
\end{aligned}$$

Poslední výraz již ovšem závisí pouze na $|E|$, čímž jsme ověřili předpoklady Vitaliho věty. Zároveň jsme stanovili požadavky na funkci F_1, aby bylo její použití možné.

Nyní s pomocí Lebesgueovy věty ukážeme, že

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} \int_\Omega \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} F_1(t, x_1^k + \frac{\varepsilon}{2}, x_2, x_3) \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t_1, x_1 + \frac{\varepsilon}{2}, x_2^k, x_3^k) \chi_{\mathcal{C}_\varepsilon^k}(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
= \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} \int_\Omega F_1(t,x) \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t_1,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \quad (2.9)
\end{aligned}$$

Již víme, že platí (2.8). Stačí tedy požadovat, aby pro

$$\left|\int_\Omega \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} F_1(t, x_1^k + \frac{\varepsilon}{2}, x_2, x_3) \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t_1, x_1 + \frac{\varepsilon}{2}, x_2^k, x_3^k) \chi_{\mathcal{C}_\varepsilon^k}(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

existovala integrovatelná majoranta. To ovšem plyne z nerovnosti, kterou bychom odvodili stejně jako při důkazu platnosti (2.8)

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} F_1(t, x_1^k + \frac{\varepsilon}{2}, x_2, x_3) \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t_1, x_1 + \frac{\varepsilon}{2}, x_2^k, x_3^k) \chi_{\mathcal{C}_\varepsilon^k}(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
\le \max_{\substack{t_1\in(0,T)\\ x\in\Omega}} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t_1,x)\right| |\Omega|^{\frac{\eta}{1+\eta}} |\Omega_{x_1}|^{\frac{1}{1+\eta}} \sup_{\mathcal{S}_1} \|F_1(t,x)\|_{L^{1+\eta}(\mathcal{S}_1,\,\mathrm{dS}_x)}.
\end{aligned}$$

Pro provedení limity (2.9) tedy bude stačit, aby $F_1 \in L^1_{\mathrm{loc}}((0,T); L^{1+\eta}(\mathcal{S}_1))$.

Zbývá dokázat, že

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^T\int_{t_1}^{t_1+\Delta t}\int_\Omega\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)}F_1(t,x_1^k+\frac{\varepsilon}{2},x_2,x_3)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t_1,x_1+\frac{\varepsilon}{2},x_2^k,x_3^k)\chi_{\mathcal{C}_\varepsilon^k}(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t_1$$
$$=\int_0^T\int_{t_1}^{t_1+\Delta t}\int_\Omega F_1(t,x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t_1,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t_1.$$

To ovšem opět plyne z Lebesgueovy věty, neboť platí (2.9) a dále

$$\left|\int_{t_1}^{t_1+\Delta t}\int_\Omega\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)}F_1(t,x_1^k+\frac{\varepsilon}{2},x_2,x_3)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t_1,x_1+\frac{\varepsilon}{2},x_2^k,x_3^k)\chi_{\mathcal{C}_\varepsilon^k}(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t_1\right|$$
$$\leq\max_{\substack{t_1\in(0,T)\\ x\in\Omega}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t_1,x)\right||\Omega|^{\frac{\eta}{1+\eta}}|\Omega_{x_1}|^{\frac{1}{1+\eta}}\sup_{\mathcal{S}_1}\left\|\|F_1(t,x)\|_{L^{1+\eta}(\mathcal{S}_1,\,\mathrm{dS}_x)}\right\|_{L^1(t_1,t_1+\Delta t)}.$$

Celkově tak pro provedení limitního přechodu $\varepsilon\to 0+$ budeme požadovat, aby

$$\sup_{\mathcal{S}_1}\left\|\|F_1(t,x)\|_{L^{1+\eta}(\mathcal{S}_1,\,\mathrm{dS}_x)}\right\|_{L^1_{\mathrm{loc}}((0,T),\,\mathrm{d}t)}<+\infty.$$

V takovém případě z výrazu (2.7) dostáváme

$$-\frac{1}{\Delta t}\int_0^T\int_{t_1}^{t_1+\Delta t}\int_\Omega F_1(t,x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t_1,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t_1. \tag{2.10}$$

2.3.2 Limitní přechod $\Delta t\to 0+$

Limitní přechod v čase provedeme pomocí Vitaliho věty. Za předpokladu že $F_1\in L^1_{\mathrm{loc}}((0,T)\times\Omega)$, dostaneme z věty o Lebesgueových bodech (věta A4)

$$\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_1+\Delta t}\int_\Omega F_1(t,x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t_1,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\int_\Omega F_1(t_1,x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t_1,x)\,\mathrm{d}x.$$

Zbývá tedy ověřit, že pro $\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0$ tak, že $\forall E\subset(0,T),|E|<\delta$ platí

$$\left|-\frac{1}{\Delta t}\int_E\int_{t_1}^{t_1+\Delta t}\int_\Omega F_1(t,x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t_1,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t_1\right|<\epsilon.$$

Zde bude vhodné uvažovat namísto Ω kompaktní množinu $K\subset\Omega$ takovou, že $\mathrm{supp}_{x\in\Omega}\varphi\subset K$. Nerovnost výše potom zapíšeme ve tvaru

$$\left|-\frac{1}{\Delta t}\int_E\int_{t_1}^{t_1+\Delta t}\int_K F_1(t,x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t_1,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t_1\right|<\epsilon.$$

Zřejmě platí

$$
\begin{aligned}
&\left| -\frac{1}{\Delta t}\int_E \int_{t_1}^{t_1+\Delta t}\int_K F_1(t,x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t_1,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t_1 \right| \\
&\qquad\qquad \le \frac{1}{\Delta t}\int_E \int_{t_1}^{t_1+\Delta t}\int_K \left|F_1(t,x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t_1,x)\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t_1 \\
&\qquad\qquad \le \frac{1}{\Delta t}\max_{\substack{t_1\in(0,T)\\ x\in\Omega}}\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t_1,x)\right| \int_E \int_{t_1}^{t_1+\Delta t}\int_K |F_1(t,x)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t_1
\end{aligned}
$$

Protože $F_1 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, dostáváme

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta t}\max_{\substack{t_1\in(0,T)\\ x\in\Omega}}\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t_1,x)\right| \int_E \int_{t_1}^{t_1+\Delta t}\int_K |F_1(t,x)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t_1 \\
&\qquad\qquad = \frac{1}{\Delta t}\max_{\substack{t_1\in(0,T)\\ x\in\Omega}}\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t_1,x)\right| \int_E \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} \|F_1(t,x)\|_{L^1(K,\,\mathrm{d}x)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t_1.
\end{aligned}
$$

Zavedením substituce $y = t - t_1$ a použitím Fubiniho věty z posledního výrazu dostaneme

$$
\frac{1}{\Delta t}\max_{\substack{t_1\in(0,T)\\ x\in\Omega}}\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t_1,x)\right| \int_0^{\Delta t}\int_E \|F_1(y+t_1,x)\|_{L^1(K,\,\mathrm{d}x)}\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}y.
$$

Pokud budeme nyní předpokládat, že $F_1 \in L^{1+\eta}_{\mathrm{loc}}((0,T);L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega))$, pak podle Hölderovy nerovnosti platí

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta t}\max_{\substack{t_1\in(0,T)\\ x\in\Omega}}\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t_1,x)\right| \int_0^{\Delta t}\int_E \|F_1(y+t_1,x)\|_{L^1(K,\,\mathrm{d}x)}\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}y \\
&\qquad \le \frac{1}{\Delta t}\max_{\substack{t_1\in(0,T)\\ x\in\Omega}}\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t_1,x)\right| \int_0^{\Delta t} \big\| \|F_1(z,x)\|_{L^1(K,\,\mathrm{d}x)}\big\|_{L^1(E,\,\mathrm{d}z)} |E|^{\frac{\eta}{1+\eta}}\,\mathrm{d}y \\
&\qquad\qquad = \max_{\substack{t_1\in(0,T)\\ x\in\Omega}}\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t_1,x)\right| \big\| \|F_1(z,x)\|_{L^1(K,\,\mathrm{d}x)}\big\|_{L^1(E,\,\mathrm{d}z)} |E|^{\frac{\eta}{1+\eta}}.
\end{aligned}
$$

Předpoklady Vitaliho věty máme tedy splněny a limitní přechod $\Delta t \to 0+$ tak bude možný za předpokladu, že $F_1 \in L^{1+\eta}_{\mathrm{loc}}((0,T);L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega))$. Z (2.10) potom dostaneme

$$
-\int_0^T \int_\Omega F_1(t_1,x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t_1,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t_1.
$$

Limitní přechody $\varepsilon \to 0+$ a $\Delta t \to 0+$ pro složky F_2, F_3 bychom provedli analogicky a s obdobnými požadavky na příslušné funkce. Celkově tak dostáváme předpoklad[3]

$$\mathbf{F} \in L^{1+\eta}_{\mathrm{loc}}((0,T); L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)),$$

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} \in L^1_{\mathrm{loc}}((0,T); L^1(\partial\mathcal{B})), \quad \sup_{\mathcal{S}} \|\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\|_{L^1_{\mathrm{loc}}((0,T);\, L^{1+\eta}(\mathcal{S}))} < +\infty,$$

kde $\mathcal{B} \subset \bar{\mathcal{B}} \subset \Omega$ je libovolný kontrolní objem, $\mathcal{S} \subset \Omega$ je libovolná 2-plocha rovnoběžná s jednou z rovin x_1x_2, x_1x_3, nebo x_2x_3 a $\mathbf{n}$ je příslušná normála k $\mathcal{S}$ nebo $\partial\mathcal{B}$. Připojili jsme zde i minimální požadavek z (1.7). Za těchto předpokladů z druhého členu (2.1) limitními přechody $\varepsilon \to 0+$ a $\Delta t \to 0+$ dostaneme

$$-\int_0^T \int_\Omega \mathbf{F}(t_1,x)\cdot\nabla_x\varphi(t_1,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t_1. \tag{2.11}$$

2.4 Třetí člen rovnice (2.1)

2.4.1 Limitní přechod $\varepsilon \to 0+$

Zcela obdobně jako pro limitní přechod $\varepsilon \to 0+$ v prvním členu rovnice (2.1) dostaneme pro $P \in L^1_{\mathrm{loc}}((0,T)\times\Omega)$ použitím Lebesgueovy věty o majorizované konvergenci

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to0^+} \frac{1}{\Delta t}\int_0^T \left(\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \left(\int_{t_1}^{t_1+\Delta t} \int_{\mathcal{C}^k_\varepsilon} P(t,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \right) \varphi(t_1,x^k) \right) \mathrm{d}t_1 \\
&\quad = \lim_{\varepsilon\to0^+} \frac{1}{\Delta t}\int_0^T \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} \int_\Omega P(t,x) \left(\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \varphi(t_1,x^k)\chi_{\mathcal{C}^k_\varepsilon}(x) \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t_1 \\
&\quad = \frac{1}{\Delta t}\int_0^T \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} \int_\Omega P(t,x)\varphi(t_1,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t_1.
\end{aligned}$$

2.4.2 Limitní přechod $\Delta t \to 0+$

Zde opět použijeme Vitaliho větu. Nechť $P \in L^1_{\mathrm{loc}}((0,T)\times\Omega)$. Podle věty o Lebesgueových bodech potom pro s.v. $t_1 \in (0,T)$ máme

$$\lim_{\Delta t\to0^+} \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_1+\Delta t}\int_\Omega P(t,x)\varphi(t_1,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_\Omega P(t_1,x)\varphi(t_1,x)\,\mathrm{d}x.$$

[3] Zápis $\mathbf{u} \in Y$, kde $\mathbf{u}$ je vektorová funkce a Y prostor funkcí, chápeme tak, že do Y náleží jednotlivé složky vektorové funkce $\mathbf{u}$. Stejně tak budeme rozumět zápisu $\mathbb{A} \in Y$ pro matici $\mathbb{A}$, tedy že prvky matice $\mathbb{A}$ patří do příslušného prostoru funkcí.

Dále potřebujeme zaručit, že integrály přes malé množiny jsou stejnoměrně malé, tedy že $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tak, že $\forall E \subset (0,T), |E| < \delta$ platí[4]

$$\left| \frac{1}{\Delta t} \int_E \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} \int_K P(t,x)\varphi(t_1,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t_1 \right| < \epsilon.$$

My ovšem máme

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{\Delta t} \int_E \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} \int_K P(t,x)\varphi(t_1,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t_1 \right| \\
&\qquad\qquad \le \frac{1}{\Delta t} \int_E \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} \int_K |P(t,x)\varphi(t_1,x)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t_1 \\
&\qquad\qquad \le \max_{\substack{t_1 \in (0,T)\\ x \in \Omega}} |\varphi(t_1,x)| \frac{1}{\Delta t} \int_E \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} \|P(t,x)\|_{L^1(K,\mathrm{d}x)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t_1.
\end{aligned}$$

Použitím substituce $y = t - t_1$ a Fubiniho věty z posledního výrazu dostáváme

$$\max_{\substack{t_1 \in (0,T)\\ x \in \Omega}} |\varphi(t_1,x)| \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \int_E \|P(y+t_1,x)\|_{L^1(K,\mathrm{d}x)}\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}y.$$

Pokud budeme nyní předpokládat, že $P \in L^{1+\eta}_{\mathrm{loc}}((0,T); L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega))$, pak podle Hölderovy nerovnosti platí

$$\begin{aligned}
&\max_{\substack{t_1 \in (0,T)\\ x \in \Omega}} |\varphi(t_1,x)| \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \int_E \|P(y+t_1,x)\|_{L^1(K,\mathrm{d}x)}\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}y \\
&\quad \le \max_{\substack{t_1 \in (0,T)\\ x \in \Omega}} |\varphi(t_1,x)| \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \Big\| \|P(z,x)\|_{L^1(K,\mathrm{d}x)} \Big\|_{L^{1+\eta}(E,\mathrm{d}z)} |E|^{\frac{\eta}{1+\eta}}\,\mathrm{d}y \\
&\qquad\qquad = \max_{\substack{t_1 \in (0,T)\\ x \in \Omega}} |\varphi(t_1,x)| \Big\| \|P(z,x)\|_{L^1(K,\mathrm{d}x)} \Big\|_{L^{1+\eta}(E,\mathrm{d}z)} |E|^{\frac{\eta}{1+\eta}}.
\end{aligned}$$

Ověřili jsme tedy předpoklady pro použití Vitaliho věty a stanovili jsme tím současně podmínky kladené na funkci P, aby byl uvažovaný limitní přechod možný. Pro $P \in L^{1+\eta}_{\mathrm{loc}}((0,T); L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega))$ tedy z třetího členu rovnice (2.1) limitními přechody $\varepsilon \to 0+$ a $\Delta t \to 0+$ dostaneme

$$\int_0^T \int_\Omega P(t_1,x)\varphi(t_1,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t_1. \tag{2.12}$$

[4]Opět namísto Ω píšeme kompaktní množinu $K \subset \Omega$ takovou, že $\mathrm{supp}_{x\in\Omega}\varphi \subset K$.

2.5 Výsledek limitních přechodů v rovnici (2.1)

V předcházejícím jsme provedli přechod od integrálního tvaru bilančních zákonů (1.1) k jejich slabé formulaci, a to aplikací limitních přechodů v rovnosti (2.1). Dospěli jsme tak zároveň k požadavkům na veličiny D, $\mathbf{F}$ a P, aby byl zmíněný přechod možný. Předpoklady na funkce vystupující v obecné formulaci bilančních rovnic jsou tedy následující

$$
\begin{aligned}
&D \in L^1_{\mathrm{loc}}((0,T)\times\Omega);\\
&\mathbf{F} \in L^{1+\eta}_{\mathrm{loc}}((0,T); L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)),\\
&\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} \in L^1_{\mathrm{loc}}((0,T); L^1(\partial\mathcal{B})), \quad \sup_{\mathcal{S}} \|\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\|_{L^1_{\mathrm{loc}}((0,T);\, L^{1+\eta}(\mathcal{S}))} < +\infty;\\
&P \in L^{1+\eta}_{\mathrm{loc}}((0,T); L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega));
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

kde $\mathcal{B} \subset \bar{\mathcal{B}} \subset \Omega$ je libovolný kontrolní objem, $\mathcal{S} \subset \Omega$ je libovolná 2-plocha rovnoběžná s jednou z rovin x_1x_2, x_1x_3, nebo x_2x_3 a $\mathbf{n}$ je příslušná normála k $\mathcal{S}$ nebo $\partial\mathcal{B}$. Srovnáním s (1.7) vidíme, že minimální požadavky na funkce D, $\mathbf{F}$ a P máme splněny. Pro libovolnou testovací funkci $\varphi \in C_0^\infty((0,T)\times\Omega)$ tak za těchto podmínek dostaneme z (1.1) rovnost (1.8)

$$
\int_0^T \int_\Omega (-D(t,x)\partial_t\varphi(t,x) - \mathbf{F}(t,x)\cdot\nabla_x\varphi(t,x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^T \int_\Omega P(t,x)\varphi(t,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
$$

3. Bilanční zákony ve slabé formulaci

Pro ilustraci se nyní podívejme, jaké podmínky na fyzikální veličiny plynou z (2.13) pro bilanci hmoty a bilanci hybnosti a jak konkrétně vypadají příslušné slabé formulace těchto rovnic. Bilanci celkové energie zde opomíjíme, neboť předpoklady na příslušné fyzikální veličiny by byly poměrně nepřehledné (dostali bychom je ovšem zcela obdobně jako u dvou předchozích zákonů zachování z obecných požadavků (2.13)).

Bilance hmoty

Nechť platí

$$\varrho \in L^1_{\mathrm{loc}}((0,T)\times\Omega);$$

$$\varrho\mathbf{v} \in L^{1+\eta}_{\mathrm{loc}}((0,T); L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)),$$

$$\varrho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} \in L^1_{\mathrm{loc}}((0,T); L^1(\partial\mathcal{B})), \quad \sup_{\mathcal{S}} \|\varrho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\|_{L^1_{\mathrm{loc}}((0,T);\,L^{1+\eta}(\mathcal{S}))} < +\infty.$$

Slabá formulace zákona zachování hmoty (1.2) má potom tvar

$$\int_0^T \int_\Omega (-\varrho(t,x)\partial_t\varphi(t,x) - \varrho(t,x)\mathbf{v}(t,x)\cdot\nabla_x\varphi(t,x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0. \tag{3.1}$$

Bilance hybnosti

Nechť jsou splněny předpoklady

$$\varrho\mathbf{v} \in L^1_{\mathrm{loc}}((0,T)\times\Omega);$$

$$\varrho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}, \mathbb{T} \in L^{1+\eta}_{\mathrm{loc}}((0,T); L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)),$$

$$\varrho\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}), \mathbb{T}\mathbf{n} \in L^1_{\mathrm{loc}}((0,T); L^1(\partial\mathcal{B})),$$

$$\sup_{\mathcal{S}} \|\varrho\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\|_{L^1_{\mathrm{loc}}((0,T);\,L^{1+\eta}(\mathcal{S}))} < +\infty, \quad \sup_{\mathcal{S}} \|\mathbb{T}\mathbf{n}\|_{L^1_{\mathrm{loc}}((0,T);\,L^{1+\eta}(\mathcal{S}))} < +\infty;$$

$$\varrho\mathbf{b} \in L^{1+\eta}_{\mathrm{loc}}((0,T); L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)).$$

Přepsáním systému tří rovnic (1.3) do slabé formulace a jejich sečtením potom dostaneme jednu bilanční rovnici hybnosti ve slabé formulaci s vektorovou testovací funkcí $\boldsymbol{\varphi} \in C_0^\infty((0,T) \times \Omega)$

$$\int_0^T \int_\Omega (-\varrho(t,x)\mathbf{v}(t,x) \cdot \partial_t \boldsymbol{\varphi}(t,x) - (\varrho(t,x)\mathbf{v}(t,x) \otimes \mathbf{v}(t,x) - \mathbb{T}(t,x)) : \nabla_x \boldsymbol{\varphi}(t,x)) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t = \int_0^T \int_\Omega \varrho(t,x)\mathbf{b}(t,x) \cdot \boldsymbol{\varphi}(t,x) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t.$$

Speciálně, pro *newtonovskou stlačitelnou* tekutinu má tenzor napětí tvar

$$\mathbb{T} = (-p + \lambda \mathrm{div}_x \mathbf{v})\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D},$$

kde $\mathbb{D}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}[\nabla_x \mathbf{v} + (\nabla_x \mathbf{v})^T]$ je symetrický gradient rychlosti, $p = p(\varrho, \vartheta)$ je tlak (ϑ představuje absolutní teplotu) a μ a λ jsou tzv. koeficienty vazkosti, které mohou být obecně též funkcemi termodynamických veličin (pro jednoduchost je ovšem považujme za konstanty). Za předpokladu, že

$$\begin{aligned}
&\varrho\mathbf{v} \in L^1_{\mathrm{loc}}((0,T) \times \Omega);\\
&p, \varrho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}, \mathrm{div}_x \mathbf{v}, \nabla_x \mathbf{v} \in L^{1+\eta}_{\mathrm{loc}}((0,T); L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)),\\
&p\mathbf{n}, \varrho\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}), (\mathrm{div}_x \mathbf{v})\mathbf{n}, (\nabla_x \mathbf{v})\mathbf{n} \in L^1_{\mathrm{loc}}((0,T); L^1(\partial\mathcal{B})),\\
&\sup_{\mathcal{S}} \|p\mathbf{n}\|_{L^1_{\mathrm{loc}}((0,T);\, L^{1+\eta}(\mathcal{S}))} < +\infty, \quad \sup_{\mathcal{S}} \|\varrho\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\|_{L^1_{\mathrm{loc}}((0,T);\, L^{1+\eta}(\mathcal{S}))} < +\infty,\\
&\sup_{\mathcal{S}} \|(\mathrm{div}_x \mathbf{v})\mathbf{n}\|_{L^1_{\mathrm{loc}}((0,T);\, L^{1+\eta}(\mathcal{S}))} < +\infty, \quad \sup_{\mathcal{S}} \|(\nabla_x \mathbf{v})\mathbf{n}\|_{L^1_{\mathrm{loc}}((0,T);\, L^{1+\eta}(\mathcal{S}))} < +\infty;\\
&\varrho\mathbf{b} \in L^{1+\eta}_{\mathrm{loc}}((0,T); L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega));
\end{aligned}$$

můžeme bilanci hybnosti zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega (-\varrho(t,x)\mathbf{v}(t,x) \cdot \partial_t \boldsymbol{\varphi}(t,x) + (-p + \lambda \mathrm{div}_x \mathbf{v}(t,x))\, \mathrm{div}_x \boldsymbol{\varphi}(t,x)\\
&- (\varrho(t,x)\mathbf{v}(t,x) \otimes \mathbf{v}(t,x) - 2\mu\mathbb{D}(\mathbf{v})) : \mathbb{D}(\boldsymbol{\varphi})) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t = \int_0^T \int_\Omega \varrho(t,x)\mathbf{b}(t,x) \cdot \boldsymbol{\varphi}(t,x) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

kde jsme využili symetrie tenzorů vystupujících v příslušném skalárním součinu, abychom $\nabla_x \boldsymbol{\varphi}(t,x)$ zapsali v příhodnějším tvaru $\mathbb{D}(\boldsymbol{\varphi})$. Rovnost (3.2) potom představuje jeden z možných zápisů Navierových-Stokesových rovnic ve slabé formulaci pro stlačitelnou tekutinu.

Závěr

Ukázali jsme způsob, jak z bilančních zákonů mechaniky kontinua formulovaných na kontrolních objemech získat jejich slabou formulaci bez nutnosti předpokladu existence klasického řešení. Bilanční zákony mechaniky kontinua formulované na kontrolních objemech tedy představují rovnice, pro něž je slabé řešení přirozeným pojmem, a klasické řešení je pak spíše pojmem odvozeným. Ukázali jsme tak, že v mechanice a termodynamice kontinua se diferenciální rovnice vyskytují ve slabé formulaci přirozeným způsobem.

Appendix

Následuje seznam hlavních matematických vět použitých v textu. Věty A1, A2, A3 jsou k nalezení v [2], věta A4 pak v [3]. Věty jsou seřazeny podle pořadí jejich uvedení v textu.

Věta A1. (Lebesgue, o majorizované konvergenci)
Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost měřitelných funkcí taková, že* $f_n \to f$ *skoro všude na měřitelné množině* Ω. *Pokud existuje funkce* $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ *taková, že* $|f_n| \leq g$ *skoro všude na* Ω *a pro všechna* $n \in \mathbb{N}$, *pak* $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ *a*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu.$$

Věta A2. (Vitali)
Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost funkcí taková, že* $f_n \to f$ *skoro všude na měřitelné množině* Ω, $|\Omega| < \infty$. *Nechť* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ *a* f *je skoro všude konečná. Předpokládejme navíc, že funkce* f_n *jsou stejnoměrně měřitelné, tj. pro* $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall E \subset \Omega$, $|E| < \delta$ *platí* $|\int_E f_n \,\mathrm{d}\mu| < \epsilon$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$. *Potom* $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ *a*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu.$$

Věta A3. (Hölderova nerovnost)
Nechť $p \in [1,\infty]$ *a* $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$, *kde* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *s úmluvou* $p = 1 \Rightarrow p' = \infty$. *Potom* $fg \in L^1(\Omega)$ *a*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Věta A4. (o Lebesgueových bodech)
Nechť $I \subset \mathbb{R}$ *a* $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$. *Pak skoro všechny body* $x \in I$ *jsou Lebesgueovy body funkce* f, *tj. pro s.v.* $x \in I$ *platí*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} |f(x+t) - f(x)| \,\mathrm{d}t = 0.$$

Seznam použité literatury

[1] Feireisl, E., Novotný, A. *Singular Limits in Thermodynamics of Viscous Fluids*. Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2009.

[2] Fučík, S., John, O., Kufner, A. *Function Spaces*. Academia, Praha, 1977.

[3] Lukeš, J., Malý, J. *Measure and Integral*. Skripta MFF UK, Matfyzpress, 1995.

[4] Oseen, C.W. *Neuere Methoden in der Hydrodynamik*. Leipzig, Akad. Verlagsgesellschaft M.B.H., 1927.