Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Filip Lacina

Stochastická integrace

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	Prof. RNDr. Josef Štěpán, DrSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Finanční matematika

Praha 2013

Na tomto místě bych rád poděkoval svému školiteli Prof. RNDr. Josefu Štěpánovi, DrSc. za jeho odborné rady, ochotu a laskavost při vedení této práce. Dále bych chtěl vyjádřit dík své přítelkyni Lucii Chybové za její lásku, podporu, trpělivost a pochopení.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 14. 05. 2013 Filip Lacina

Název práce: Stochastická integrace

Autor: Filip Lacina

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Josef Štěpán, DrSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Moderní teorie pravděpodobnosti, náhodných procesů a finanční matematika vyžadují pro matematické modelování zavedení různých důležitých pojmů. Jeden z nich je předmětem této práce. Jedná se o stochastický integrál, tedy integrál náhodné funkce (procesu) podle Wienerova procesu (Brownova pohybu) - jakožto procesu s ortogonálními přírůstky. Problémem je, že Wienerův proces nemá konečnou variaci, a proto stochastický integrál nelze budovat jako Lebesgue-Stieltjesův. K řešení této situace přispěje konečná kvadratická variace Wienerova procesu a Doobovy rovnosti. Samotná konstrukce je, na rozdíl od klasického způsobu popsaného např. v J. Dupačová, J. Hurt and J. Štěpán: Stochastic Modeling in Economics and Finance, odstavec III.2, vedena poněkud netradiční cestou, a to pomocí Lenglartovy nerovnosti. Poté ukážeme, že každý spojitý proces je vhodným integrandem pro námi zkonstruovaný integrál. V samém závěru práce je taktéž dokázána jednorozměrná Itôova formule.

Klíčová slova: martingal, markovský čas, Wienerův proces, stochastický integrál.

Title: Stochastic integration

Author: Filip Lacina

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Prof., RNDr. Josef Štěpán, DrSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: The modern theory of probability, theory of stochastic processes and financial mathematics insist on the inctroduction of many important notions. This work deals with one of them. Namely the stochastic integral, it means integral of a random function (stochastic process) with respect to the Wiener process (Brownian motion), as a process with independent increments. The problem is, the Wiener process is not off a finite variation, thus we cannot construct stochastic integral as a Lebesgue-Stieltjes integral. To solve this situation we will use finite quadratic variation of Wiener process and Doob inequalities. The construction of stochastic integral itself uses the Lenglart inequality, unlike the construction introduced in J. Dupačová, J. Hurt and J. Štěpán: Stochastic Modeling in Economics and Finance, paragraph III.2. After that we will show that every continouous process is an appropriate integrand for our stochastic intergal. At the end of this work we will prove the one-dimensional Itô formula.

Keywords: martingale, Markov time, Wiener process, stochastic integral.

Obsah

1 Základní pojmy a nástroje **3**

2 Wienerův proces, martingaly, markovské časy **9**

3 Stochastická integrace **21**

Úvod

Úkolem práce je zkonstruovat stochastický integrál, tedy integrál náhodného procesu podle Wienerova procesu. Konečným objektem bude lokální martingal, mající klasické vlastnosti integrálu: linearitu a spojitost a který je spojitý podle pravděpodobnosti. Hlavním úkolem bude docílit toho, abychom byli schopni integrovat každý spojitý proces a dokázat jednorozměrnou Itôovu formuli. Vzhledem k tomu, že Wienerovův proces nemá konečnou variaci, nelze postupovat jako při konstrukci Lebesgue-Stieltjesova integrálu. V první kapitole jsou zavedeny základní matematické pojmy a nástroje potřebné k dalšímu postupu. Ve druhé kapitole se nachází definice a věty o vlastnostech Wienerova procesu, martingalech a markovských časech. V poslední kapitole je provedena samotná kontrukce stochastického integrálu. Postup spočívá v tom, že je nejprve zkonstruován stochastický integrál pro jednoduchý proces, poté $\mathcal{L}_2$-integrál a nakonec integrál pro každý spojitý proces, připomínající integrál Riemannův. Závěrem je dokázána zmíněná Itôova formule a uvedeno několik příkladů.

Kapitola 1

Základní pojmy a nástroje

V této kapitole uvedeme některé základní pojmy teorie pravděpodobnosti a náhodných procesů.

Definice 1.1. Uspořádanou trojici $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nazýváme pravděpodobnostní prostor jestliže Ω je neprázdná množina, $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$ je σ-algebra a P je pravděpodobnostní míra na $\mathcal{F}$.

Definice 1.2. Nechť $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravděpodobnostní prostor a $(E, \mathcal{E})$ je měřitelný prostor. Budeme říkat, že zobrazení $X : \Omega \to E$ je náhodná veličina (dále jen n.v.) s hodnotami v $(E, \mathcal{E})$, jestliže je měřitelná t.j.

$$[X \in B] \stackrel{\text{def.}}{=} \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = X^{-1}B \in \mathcal{F} \text{ pro každé } B \in \mathcal{E}.$$

Tento fakt budeme značit $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathcal{E})$. Pokud $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$, nazýváme X reálnou n.v., pokud $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^*, \mathbb{B}(\mathbb{R}^*))$, nazýváme X zobecněnou reálnou n.v. $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ zde značí borelovskou σ-algebru na $\mathbb{R}$.

Definice 1.3. Je li X n.v. s hodnotami v $(E, \mathcal{E})$, pak zavádíme pojem rozdělení (pravděpodobnosti) n.v. X jako pravděpodobnostní míru P_X definovanou na $\mathcal{E}$ předpisem $P_X(B) = P(X \in B) \stackrel{\text{def.}}{=} P([X \in B])$ pro $B \in \mathcal{E}$. Jiné používané značení je $P_X = \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X/\mathrm{P})$.

Úmluva 1.4. Symbol $\int_F f \, \mathrm{d}P$ bude v celé práci značit Lebesgueův integrál z f přes F podle P.

Definice 1.5. Pro zobecněnou reálnou n.v. X definovanou na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definujeme její střední hodnotu jako $\mathrm{E}X = \int_\Omega X \, \mathrm{d}P$, pokud integrál existuje. Jinak budeme říkat, že X nemá střední hodnotu.

Definice 1.6. Zavedeme značení:
(i) $L(\Omega, \mathcal{F})$ je množina všech zobecněných reálných n.v. definovaných na $(\Omega, \mathcal{F})$;

(ii) $L_p(\Omega, \mathcal{F}, P) = X \in L(\Omega, \mathcal{F}) : \mathrm{E}|X|^p < \infty$ pro každé $1 \leq p < \infty$.

Úmluva 1.7. V této práci budeme používat úmluvu běžnou při integrování:

$$0 \cdot (-\infty) = -\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0.$$

Dále v textu budeme u rovností a nerovností vynechávat poznámku "platí skoro jistě", pokud bude z kontextu jasné, zdali se o takový případ jedná, či ne.

Tvrzení 1.8. Vlastnosti střední hodnoty: Nechť $X, Y \in L(\Omega, \mathcal{F})$, $c \in \mathbb{R}$, pak platí:
(i) pro každé $F \in \mathcal{F}$ je $\mathrm{E}\mathbb{I}_F = P(F)$;
(ii) pokud $X \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, pak $\mathrm{E}[cX] = c\mathrm{E}X$;
(iii) pro každé $X, Y \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ platí $\mathrm{E}[X + Y] = \mathrm{E}X + \mathrm{E}Y$;
(iv) pro každé $X, Y \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ platí: $X \leq Y \Longrightarrow \mathrm{E}X \leq \mathrm{E}Y$.

Důkaz:
Plyne přímo z vlastností abstraktního Lebesgueova integrálu.

□

Definice 1.9. Nechť $X \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ je σ-algebra. Pak každou reálnou n.v. Y s vlastnostmi:
(i) $Y \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P_{\mathcal{B}})$, kde $P_{\mathcal{B}}$ značí restrikci P na $\mathcal{B}$;
(ii) pro každou množinu B $\in \mathcal{B}$ platí

$$\int_B Y \,\mathrm{d}P = \int_B X \,\mathrm{d}P;$$

nazveme podmíněnou střední hodnotou n.v. X vzhledem k σ-algebře $\mathcal{B}$ (při podmínce $\mathcal{B}$). Takovouto n.v. Y budeme označovat $\mathrm{E}[X|\mathcal{B}]$, nebo $\mathrm{E}^{\mathcal{B}}X$. Protože podmíněná střední hodnota není určena jednoznačně, označujeme $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$ množinu všech podmíněných středních hodnot $\mathrm{E}[X|\mathcal{B}]$.

Tvrzení 1.10. Existence podmíněné střední hodnoty: Je-li $X \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ je σ-algebra, pak existuje alespoň jedna podmíněná střední hodnota n.v. X za podmínky $\mathcal{B}$ a množina $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$ je třídou ekvivalence s.j. v $L_1(\Omega, \mathcal{F}, P/_{\mathcal{B}})$. Označíme-li

$$\mu(B) = \int_B X \,\mathrm{d}P \text{ pro } B \in \mathcal{B},$$

potom $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$ je množinou všech Radon-Nikodýmových derivací μ podle $P/_{\mathcal{B}}$.

Důkaz:
Viz [Lach], str. 41.

□

Definice 1.11. Nechť $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravděpodobnostní prostor a $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ je σ-algebra. Pak pro jev $F \in \mathcal{F}$ definujeme podmíněnou pravděpodobnost jako

$$P(F|\mathcal{B}) = \mathrm{E}[\mathbb{I}_F|\mathcal{B}]$$

a množinu všech podmíněných pravděpodobností jako

$$\mathbb{P}(F|\mathcal{B}) = \mathbb{E}[\mathbb{I}_F|\mathcal{B}].$$

Definice 1.12. Nechť $X \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a $Y : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathcal{E})$ budeme označovat

$$\mathrm{E}[X|Y] = \mathrm{E}[X|\sigma(Y)],\ \mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X|\sigma(Y)]$$

a pro jev $F \in \mathcal{F}$

$$P(F|Y) = P(F|\sigma(Y)),\ \mathbb{P}(F|Y) = \mathbb{P}(F|\sigma(Y)),$$

kde

$$\sigma(Y) \text{ značí } \sigma(\bigcup_{B \in \mathcal{E}} Y^{-1}(B)).$$

Nyní se podívejme na vlastnosti podmíněné střední hodnoty, které jsou podobné vlastnostem obyčejné střední hodnoty (tedy integrálu).

Tvrzení 1.13. Vlastnosti podmíněné střední hodnoty: Nechť $X, Y \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ je σ-algebra. Pak platí:
(i) Pro konstanty $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ platí:

$$\mathrm{E}[aX + bY + c|\mathcal{B}] = a\mathrm{E}[X|\mathcal{B}] + b\mathrm{E}[Y|\mathcal{B}] + c.$$

(ii) Pokud $[X \leq Y]$ s.j., pak $\mathrm{E}[X|\mathcal{B}] \leq \mathrm{E}[Y|\mathcal{B}]$ s.j.
(iii) Vždy platí $\mathrm{E}[\mathrm{E}[X|\mathcal{B}]] = \mathrm{E}X$.
(iv) Když X je $\mathcal{B}$-měřitelná, pak $\mathrm{E}[X|\mathcal{B}] = X$.
(v) Pokud $\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ jsou σ-algebry, pak

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}[X|\mathcal{B}]|\mathcal{C}] = \mathrm{E}[\mathrm{E}[X|\mathcal{C}]|\mathcal{B}] = \mathrm{E}[X|\mathcal{C}].$$

(vi) Když $\sigma(X)$ a $\mathcal{B}$ jsou nezávislé σ-algebry, pak $\mathrm{E}[X|\mathcal{B}] = X$ s.j., kde nezávislost znamená $P(F \cap S) = P(F) \cdot P(S)$ pro všechna $F \in \sigma(X)$, $S \in \mathcal{B}$. Definujme nyní ještě nezávislost n.v.: X, Y jsou nezávislé (píšeme $X \perp Y$) $\overset{\text{def}}{\iff} \sigma(X) \perp \sigma(Y)$. Přirozeně pokud X je n.v. a $\mathcal{F}$ je σ-algebra, pak $X \perp \mathcal{F} \overset{\text{def}}{\iff} \sigma(X) \perp \mathcal{F}$.

Důkaz:
Viz [Lach], str. 41.

□

Tvrzení 1.14. Nechť X je reálná n.v. a Y je n.v. s hodnotami v měřitelném prostoru $(E, \mathcal{E})$. Když $\sigma(X) \subset \sigma(Y)$, pak existuje měřitelná funkce $f : (E, \mathcal{E}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$ taková, že $X = f(Y)$.

Důkaz:
Viz [Lach], str. 48.

□

Důsledek 1.15. Pokud $X \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a $Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{E})$, pak lze podmíněnou střední hodnotu psát jako $\mathrm{E}[X|Y] = f(Y)$ pro vhodnou funkci $f : (E, \mathcal{E}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$.

Důkaz:
Tento fakt je přímým důsledkem tvrzení 1.14., neboť $\sigma(\mathrm{E}[X|Y]) \subset \sigma(Y)$, protože $\mathrm{E}[X|Y]$ je dle definice $\sigma(Y)$-měřitelná.

□

Definice 1.16. Pro $X \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a $Y : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathcal{E})$ budeme označovat

$$\mathrm{E}[X|Y = y] = f(y), \quad \text{pro každé } y \in E,$$

kde $f : (E, \mathcal{E}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$ splňuje $\mathrm{E}[X|Y] = f(Y)$.

Definice 1.17. Nechť $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{E})$, $Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (H, \mathcal{H})$ jsou n.v. s hodnotami v měřitelných prostorech. Podmíněným rozdělením n.v. X za podmínky Y budeme rozumět funkci

$$P_{X|Y} : \mathcal{E} \times H \to [0, 1] : (B, y) \mapsto P_{X|Y}(B|y),$$

která splňuje následující tři podmínky:

1. Pro každé $y \in H$ je množinová funkce $(B, y) \mapsto P_{X|Y}(B|y)$ pravděpodobnostní mírou na $\mathcal{E}$.
2. Pro každé $B \in \mathcal{E}$ je funkce $y \mapsto P_{X|Y}(B|y)$ $\mathcal{H}$-měřitelná.
3. Pro každé $B \in \mathcal{E}$ a $C \in \mathcal{H}$ platí

$$\int_C P_{X|Y}(B|y) \, \mathrm{d}P_Y(y) = P(X \in B, Y \in C).$$

Symbolem $\mathcal{L}(X|Y)$ budeme označovat množinu všech podmíněných rozdělení X za podmínky Y.

Nyní uvedeme bez důkazu některé základní vlastnosti podmíněného rozdělení.

Tvrzení 1.18. Vztah podmíněného rozdělení a podmíněné střední hodnoty: Nechť jsou dány n.v. $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathcal{E})$, $Y : (\Omega, \mathcal{F}) \to (H, \mathcal{H})$ s hodnotami v měřitelných prostorech a nechť existuje jejich podmíněné rozdělení $P_{X|Y}$. Pokud $G : (E \times H, \mathcal{E} \otimes \mathcal{H}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$ a $G(X, Y) \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, pak

$$\mathrm{E}[G(X, Y)|Y = y] = \int_E G(x, y) \, \mathrm{d}P_{X|Y}(x|y) \text{ pro } P_Y\text{-skoro všechna } y \in H.$$

Důkaz:
Viz [Lach], str. 58.

□

Tvrzení 1.19. Existence podmíněného rozdělení: Za podmínek jako v předchozím tvrzení platí, že existuje alespoň jedno podmíněné rozdělení n.v. X za podmínky n.v. Y, pokud je splňena alespoň jedna z následujících podmínek:

1. E je úplný separabilní metrický prostor;
2. n.v. X, Y jsou nezávislé;
3. existuje nejvýše spočetná množina $I \subset H$ taková, že $P(Y \in I) = 1$ a $\{y\} \in \mathcal{H},\ P(Y = y) > 0$ pro každé $y \in I$.

Důkaz:
Viz [Lach], str. 59, 60.

□

Nyní se začneme zabývat značně složitějšími "strukturami"− přesně řečeno kolekcemi − náhodných veličin.

Úmluva 1.20. Zafixujme nyní pro budoucí účely prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, na kterém budeme pracovat, abychom jej nemuseli stále explicitně psát do předpokladů definic a vět.

Definice 1.21. Kolekci reálných n.v. X nazveme stochastickým procesem nebo taktéž náhodným procesem, pokud $X = (X(t), t \in T)$, taktéž
$X = (X(\omega, t), t \in T)$, $T \subset \mathbb{R}_0^+$. Pokud nebude řečeno jinak, budeme chápat stochastický proces na celém $\mathbb{R}_0^+$. Trajektorií stochastického procesu rozumíme reálnou funkci reálné proměnné $X_\omega(t)$ takovou, že $t \mapsto X_\omega(t)$ pro nějaké $\omega \in \Omega$. Proces nazveme spojitý, rostoucí, klesající, neklesající..., pokud jeho trajektorie splňují danou vlastnost. Podobně nazveme proces skoro jistě spojitý, skoro jistě klesající..., pokud jeho trajektorie splňují danou vlastnost mimo množinu, která má pravděpodobnost nula.

Nyní uvedeme na ukázku jednoduché příklady stochastických procesů.

Příklad 1.22. Nechť $([0,1], \mathbb{B}([0,1]), \lambda)$ je pravděpodobnostní prostor. Pak $X(\omega, t) = \mathbb{I}_{\{\omega\}}(t)$, $X(\omega, t) = \sin(\omega t)$ jsou stochastické procesy. Ve druhém případě jde dokonce o proces spojitý.

Pro práci s náhodnými procesy se ukáže velmi užitečné zavést následující pojem.

Definice 1.23. Filtrací rozumíme množinu σ-algeber $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_0^+\}$, pokud pro každé $t \in \mathbb{R}_0^+$ $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ a pro každé $s, t \in \mathbb{R}_0^+,\ s < t$ platí $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$. Filtraci nazveme

standardní, pokud splňuje následující dvě podmínky:
(i) spojitost zprava: $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$ pro každé $t \geq 0$;
(ii) úplnost: $\mathcal{F}_0$ obsahuje všechny množiny z $\mathcal{F}$, jejichž pravděpodobnost je 0.

Pojem filtrace je úzce spjat s náhodnými procesy. Každému procesu určitým způsobem "přísluší" jistá filtrace. Tento fenomén popíše následující definice.

Definice 1.24. Pro stochastický proces X definujeme jeho kanonickou filtraci jako:

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X(s), s \leq t), \quad \mathcal{F}_\infty^X = \sigma(X(t), t \geq 0).$$

Definice 1.25. Nechť $\mathcal{F}_t$ je filtrace. Pak proces X nazveme $\mathcal{F}_t$-adaptovaný, pokud pro každé $t \geq 0$ platí $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t$, speciálně tedy pokud pro každé $t \geq 0$ je n.v. $X(t)$ $\mathcal{F}_t$-měřitelná.

Na proměnnou t ve stochastickém procesu se často díváme jako na čas. Kanonická filtrace je nejmenší filtrace, na kterou je proces adaptován a $\mathcal{F}_t^X$ potom reprezentuje jakousi historii událostí do času t.

Kapitola 2

Wienerův proces, martingaly, markovské časy

Definice 2.1. Brownovým pohybem nazýváme gaussovský proces s nulovou střední hodnotou a kovarianční funkcí $\operatorname{cov}(X(s), X(t)) = s \wedge t$ pro $s, t \in \mathbb{R}_0^+$. Tedy takový proces, kdy

$$\forall\ (t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_0^+) : \mathcal{L}(X(t_1), \ldots, X(t_n)) = N_n(0, (t_i \wedge t_j)_{i,j=1}^n),$$

kde $N_n(\mu, \Sigma)$ značí n-rozměrné normální rozdělení s vektorem středních honot μ a kovarianční maticí Σ. Dále $s \wedge t$ značí minimum z prvků s a t.

Tvrzení 2.2. Existence Brownova pohybu: Brownův pohyb existuje a každý Brownův pohyb lze modifikovat (změnit na množině s pravděpodobností nula) tak, aby vznikl spojitý proces. Spojitý Brownův pohyb budeme nazývat
Wienerův proces a budeme jej značit $W = (W(t), t \in \mathbb{R}_0^+)$.

Důkaz:
Viz [DHS, str. 239].

□

Věta 2.3. Ekvivalentní definice Brownova pohybu: Proces X je Brownův pohyb, právě když
(i) $X(0) = 0$ skoro jistě;
(ii) má nezávislé přírůstky, tedy

$$X(t_1) - X(0),\ X(t_2) - X(t_1), \ldots,\ X(t_n) - X(t_{n-1}) \text{ jsou nezávislé n.v.}; \tag{2.1}$$

(iii) $\mathcal{L}(X(t) - X(s)) = N(0, |t-s|)$ pro všechna $t, s \in \mathbb{R}_0^+$.

Důkaz:
Nechť X je gaussovský proces s nulovou střední hodnotou. Potom nejprve $\mathrm{E}[X(0)] = 0,\ \operatorname{cov}(X(0), X(0)) = \operatorname{var}(X(0)) = 0 \wedge 0 = 0$. Tedy $X(0) = 0$ skoro

jistě. Dále pro $0 \leq s \leq u \leq t < \infty$ platí

$$\mathrm{cov}(X(t) - X(u), X(u) - X(s)) = \mathrm{E}[(X(t) - X(u))(X(u) - X(s))] =$$

$$= \mathrm{E}[X(t)X(u)] - \mathrm{E}[X(t)X(s)] - \mathrm{E}[X^2(u)] + \mathrm{E}[X(u)X(s)] = u - s - u + s = 0$$

pro $s \leq u \leq t$ a vektor (2.1) má tedy normální rozdělení, protože lineární transformace normálně rozděleného vektoru je opět normálně rozdělený vektor. Z toho vyplývá, že přírůstky jsou nezávislé a příslušně rozdělené, protože pro normální rozdělení platí, že pokud jsou n.v. nekorelované, pak jsou i nezávislé.

Nechť naopak X splňuje vlastnosti (i), (ii) a (iii). Nejprve se podívejme na střední hodnotu a rozptyl marginálů. Platí $\mathrm{E}[X(t)] = \mathrm{E}[X(t) - X(0)] = 0$, $\mathrm{var}(X(t)) = \mathrm{var}(X(t) - X(0)) = t$. Dále

$$\mathrm{cov}(X(s), X(t)) = \mathrm{E}[X(t) \cdot X(s)] = \mathrm{E}[(X(t) - X(s))(X(s) - X(0)) + X^2(s)] =$$

$$= 0 + E[X^2(s)] = \mathrm{var}(X(s)) = s = s \wedge t,$$

pro všechna $s, t \in \mathbb{R},\ s < t$. Zbývá tedy ukázat, že $X(t_i)$ jsou normálně rozděleny. Po provedení transformace
$f(X(t_1) - X(0),\ X(t_2) - X(t_1) \ldots,\ X(t_n) - X(t_{n-1})) = (X(t_1), \ldots, X(t_n))$ vznikne skutečně vektor s požadovanými vlastnostmi, protože f je lineární.

Wienerův proces je stabilní vůči poměrně široké škále transformací. Uveďme proto některé z nich.

Tvrzení 2.4. Transformace Wienerova procesu: Nechť $W = (W(t), t \geq 0)$ je Wienerův proces. Pak
(i) $(-W(t), t \geq 0)$, $(\sigma^{-1}W(\sigma^2 t), t \geq 0)$, $\sigma^2 > 0$ jsou Wienerovy procesy.
(ii) $(W(t + t_0) - W(t), t \geq 0)$, $t_0 \geq 0$ je Wienerův proces.
(iii) Označíme-li $\overline{W}(t) = tW(t^{-1}), t > 0$ a $\overline{W}(0) = 0$, pak existuje Wienerův proces $(W^*(t), t \geq 0)$, že $\overline{W}(t) = W^*(t),\ t \geq 0$ skoro jistě.

Důkaz:
Viz [TPMZ, str. 406].

□

Nyní bychom chtěli zkoumat další, složitější vlastnosti Wienerova procesu. K tomu bude nutné zavést několik pojmů a ukázat, že Wienerův proces je splňuje.

Definice 2.5. Nechť $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je filtrace, pak Wienerův proces $W = (W(t), t \geq 0)$ nazveme $\mathcal{F}_t$-Wienerovým procesem, pokud:
(i) W je adaptován na $\mathcal{F}_t$;
(ii) $(W(t) - W(s)) \perp \mathcal{F}_s$ pro všechna $0 \leq s \leq t$.

Věta 2.6. Nechť $W = (W(t), t \geq 0)$ je Wienerův proces. Pak W je $\mathcal{F}_t^W$-Wienerův proces.

Důkaz:
Nejprve si zaveďme označení: $g_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma\left(W\left(\frac{kt}{2^n}\right) - W\left(\frac{(k-1)t}{2^n}\right),\ k = 1, 2, \ldots, 2^n,\right)$, $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$. Dále $g(t) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} g_n(t)$. Existence g je zaručena monotonií g_n. Nyní budeme chtít ukázat, že $g(t) = \mathcal{F}_t^W$. Ale

$$g(t) = \sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[W\left(\frac{kt}{2^n}\right) - W\left(\frac{(k-1)t}{2^n}\right)\right],\ k = 1, 2, \ldots, 2^n,\right) =$$

$$= \sigma\left(W\left(\frac{kt}{2^n}\right),\ k = 1, 2, \ldots, 2^n,\right) = \sigma(W(s),\ s \leq t) = \mathcal{F}_t^W.$$

Druhá rovnost platí, protože pro $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ bijekci platí $\sigma(f(\mathbb{X})) = \sigma(\mathbb{X})$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Třetí rovnost pak platí ze spojitosti Wienerova procesu.
Nyní ukážeme, že $W(t) - W(s) \perp \mathcal{F}_s$ pro $s \leq t$. Jelikož Wienerův proces má nezávislé přírůstky, platí

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} : W(t) - W(s) \perp g_n(s) \Longrightarrow W(t) - W(s) \perp \bigcup_{n=1}^{\infty} g_n(s) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow W(t) - W(s) \perp \sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} g_n(s)\right) = \mathcal{F}_s^W,$$

kde poslední implikace platí proto, že $\bigcup_{n=1}^{\infty} g_n(s)$ je uzavřeno na konečné průniky. Pro podrobnosti k tomuto kroku viz [TPMZ], odstavec II.5.

□

Nyní bychom rádi zkoumali Wienerův proces z mírně odlišného úhlu pohledu, a to podmiňování.

Definice 2.7. Nechť $X = X(t), t \geq 0$ je stochastický proces a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je filtrace. Proces X nazveme martingal, pokud splňuje následující dvě vlastnosti:
(i) $X(t) \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, pro každé $t \geq 0$;
(ii) $\mathrm{E}^{\mathcal{F}_s^X}[X(t)] = X(s)$ pro každé $s \leq t$.

Proces X nazveme $\mathcal{F}_t$-martingal, pokud platí:
(i) X je adaptován na $\mathcal{F}_t$;
(ii) $X(t) \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$;
(iii) $\mathrm{E}^{\mathcal{F}_s}[X(t)] = X(s)$, pro každé $s \leq t$.

Nyní uvedeme jednoduchý vztah mezi právě definovanými pojmy.

Věta 2.8. Za podmínek v předchozí definici platí: Pokud je stochastický proces X $\mathcal{F}_t$-martingal pro nějakou filtraci $\mathcal{F}_t$, pak je martingal.

Důkaz:
Důkaz provedeme přímým výpočtem:

$$\mathrm{E}^{\mathcal{F}_s^X}[X(t)] = \mathrm{E}^{\mathcal{F}_s^X}[\mathrm{E}^{\mathcal{F}_s}[X(t)]] = \mathrm{E}^{\mathcal{F}_s^X}[X(s)] = X(s) \quad \text{pro všechna } s \leq t.$$

Tento výpočet platí dle tvrzení 1.13.(v).

$\square$

Vraťme se nyní k Wienerovu procesu. Vzhledem k tomu, že pro něj platí

$$(W(t) - W(s)) \sim N(0, |s-t|) \text{ a zároveň } W(t) - W(s) \perp \mathcal{F}_s^W, \quad s \leq t,$$

by se dalo intuitivně očekávat, že Wienerův proces bude martingal. Tato myšlenka bude nyní formálně dokázána.

Věta 2.9. Nechť $W = (W(t), t \geq 0)$ je Wienerův proces. Pak W je martingal.

Důkaz:
Důkaz opět provedeme přímým výpočtem:

$$\mathrm{E}^{\mathcal{F}_s^W}[W(t)] = \mathrm{E}^{\mathcal{F}_s^W}[(W(t) - W(s)) + W(s)] = 0 + W(s) = W(s), \quad s \leq t.$$

Výpočet platí díky tomu, že W je $\mathcal{F}_t^W$-Wienerův proces.

$\square$

Jak již bylo zmíněno, Wienerův proces je stabilní vůči některým transformacím. Ani jeho martingalová vlastnost se v určitých případech neztrácí.

Věta 2.10. Nechť $W = (W(t), t \geq 0)$ je Wienerův proces. Pak $W^2(t) - t$ je martingal.

Důkaz:
Ukažme, že $W^2(t) - t$ je $\mathcal{F}_t^W$-martingal a tedy martingal. Počítejme

$$\mathrm{E}^{\mathcal{F}_s^W}[W^2(t)] = \mathrm{E}^{\mathcal{F}_s^W}[W(t) - W(s)]^2 + 2\mathrm{E}^{\mathcal{F}_s^W}[W(t)W(s)] - \mathrm{E}^{\mathcal{F}_s^W}[W^2(s)] =$$

$$= (t-s) + 2W^2(s) - W^2(s) = W^2(s) - s + t, \quad s \leq t.$$

Tedy $\mathrm{E}^{\mathcal{F}_s^W}[W^2(t) - t] = W^2(s) - s$.

$\square$

Nyní bychom chtěli zkoumat hladkost a velikost oscilací trajektorií Wienerova procesu. Proto zavedeme následující pojmy.

Definice 2.11. Variací reálné funkce f na intervalu $[a, b]$ rozumíme funkci

$$\mathcal{V}_{[a,b]}(f) = \sup \left(\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \right),$$

kde supremum je bráno přes všechna dělení $\mathcal{D}_n = \{a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$.
Kvadratickou variací f na intervalu $[a, b]$ rozumíme funkci

$$\mathcal{V}^2_{[a,b]}(f) = \lim_{||\mathcal{D}_n|| \to 0} \mathcal{S}_{\mathcal{D}_n}, \text{ kde } \mathcal{S}_{\mathcal{D}_n} = \sum_{k=0}^{n-1} (f(t_{k+1}^{(n)}) - f(t_k^{(n)}))^2,$$

kde $||\mathcal{D}_n||$ nazýváme normou dělení $\mathcal{D}_n$ a

$$||\mathcal{D}_n|| \stackrel{\text{def}}{=} \max_k |t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}|.$$

□

Tyto nově zavedené veličiny nyní použijeme jako míry hladkosti a velikosti oscilací Wienerova procesu.

Tvrzení 2.12. Derivace a variace Wienerova procesu: Nechť $W = (W(t), t \geq 0)$ je Wienerův proces. Pak W nemá konečnou derivaci v žádném bodě skoro jistě a tudíž nemá konečnou variaci na žádném intervalu $[a, b]$, kde $0 \leq a < b \leq \infty$.

Důkaz:
Důkaz tohoto tvrzení je poměrně technický a je podrobně popsán v [TPMZ], str. 406.

□

Věta 2.13. Kvadratická variace Wienerova procesu: Nechť $W = (W(t), t \geq 0)$ je Wienerův proces a $\mathcal{D}_n$ dělení intervalu $[a, b]$, $0 \leq a < b < \infty$. Pak platí:
(i) $||\mathcal{D}_n|| \to 0 \Longrightarrow \mathcal{S}_{\mathcal{D}_n} \to b - a$ v L_2;
(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} ||\mathcal{D}_n|| < \infty \Longrightarrow \mathcal{V}^2_{[a,b]}(W) = b - a$ s.j. pro $n \to \infty$.

Důkaz:
Zřejmě platí $\mathrm{E}[\mathcal{S}_{\mathcal{D}_n}] = b - a$. Nyní počítejme

$$\mathrm{E}[\mathcal{S}_{\mathcal{D}_n} - (b-a)]^2 = \mathrm{var}(\mathcal{S}_{\mathcal{D}_n}) = \sum_k \mathrm{var}(W(t_{k+1}^{(n)}) - W(t_k^{(n)}))^2 =$$

$$= \sum_k \mathrm{E}[(W(t_{k+1}^{(n)}) - W(t_k^{(n)}))^2 - ((t_{k+1}^{(n)}) - (t_k^{(n)}))]^2 \stackrel{*}{=}$$

$$\stackrel{*}{=} \sum_k (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)})^2 \, \mathrm{E}[W^2(1) - 1]^2 \leq \mathrm{E}[W^2(1) - 1]^2 \sum_k (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) ||\mathcal{D}_n|| =$$

$$= \mathrm{E}[W^2(1) - 1]^2 \, (b-a) \, ||\mathcal{D}_n|| \to 0,$$

kde rovnost $\stackrel{*}{=}$ platí, protože

$$\mathcal{L}\left(\frac{(W(t_{k+1}^{(n)}) - W(t_k^{(n)}))^2}{\sqrt{t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}}} \right) = \mathcal{L}(W(1)).$$

Pro důkaz (ii) nyní nechť $\varepsilon > 0$ a označme: $a_n = P(|\mathcal{S}_{\mathcal{D}_n} - (b-a)| \geq \varepsilon)$. Pak platí

$$a_n = P(|\mathcal{S}_{\mathcal{D}_n} - (b-a)| \geq \varepsilon) \leq \varepsilon^{-2} \mathrm{var}(\mathcal{S}_{\mathcal{D}_n}) \leq \varepsilon^{-2} \mathrm{E}[W^2(1) - 1]^2 \, (b-a) \, ||\mathcal{D}_n||.$$

A tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Nyní důkaz druhé části tohoto tvrzení získáme aplikací Borel-Cantelliho lemmatu (viz [TPMZ], str. 135).

□

Nyní se podívejme na asymptotické chování trajektorií Wienerova procesu.

Věta 2.14. Zákon velkých čísel: Nechť $W = (W(t), t \geq 0)$ je Wienerův proces. Pak

$$\lim_{t \to \infty} \frac{W(t)}{t} = 0 \text{ s.j.}$$

Důkaz:
Pokud dodržíme značení z tvrzení 2.4., pak

$$\lim_{t \to \infty} \frac{W(t)}{t} = \lim_{t \to 0} \overline{W}(t) = \lim_{t \to 0} W^*(t) = 0 \quad s.j.,$$

kde pravá rovnost platí proto, že $W^*(t)$ je Wienerův proces.

□

Nyní budeme chtít stochastický proces zastavovat v různých důležitých okamžicích. K tomu nám bude sloužit pojem, který je předmětem následující definice.

Definice 2.15. Nechť $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$ je filtrace. Pak funkci $\tau : (\Omega, \mathcal{F}) \to ([0, \infty], \mathbb{B}([0, \infty]))$ nazveme ($\mathcal{F}_t$-)markovským časem, pokud $[\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t$ pro každé $t \geq 0$. Markovským časem procesu X pak nazveme $\mathcal{F}_t^X$-markovský čas. Nyní definujme

$$\mathcal{F}_\tau = \{F \in \mathcal{F}_\infty : F \cap [\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t\} \quad \text{pro všchna } t \geq 0.$$

$\mathcal{F}_\tau$ označujeme jako σ-algebru událostí do času τ.

Poznámka 2.16. Název σ-algebra událostí do času τ byl zvolen proto, že τ je skutečně σ-algebra (viz [Chung], str. 10) a τ je $\mathcal{F}_\tau$-měřitelná funkce, neboť pokud označíme F_s množinu $[\tau \leq s]$ pro $s \geq 0$, pak $F_s \in \mathcal{F}_\tau$ pro každé s. Neboť $F_s \cap [\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t$, protože

$$F_s \cap [\tau \leq t] = [\tau \leq s, \tau \leq t] = [\tau \leq s \wedge t] \in \mathcal{F}_{s \wedge t} \subset \mathcal{F}_t.$$

Tedy v každém čase t umíme rozhodnout, zdali do tohoto času událost popisovaná τ nastala, či nikoliv.

Tvrzení 2.17. Vlastnosti markovských časů: Nechť τ a ν jsou $\mathcal{F}_t$-markovské časy. Potom

1. $\nu \wedge \tau$, $\nu \vee \tau$ a $\nu + \tau$ jsou taktéž $\mathcal{F}_t$-markovské časy;
2. $\tau \wedge t$ je $\mathcal{F}_t$-měřitelná n.v. pro každé $t \geq 0$;
3. $F \in \mathcal{F}_\nu \Longrightarrow F \cap [\nu \leq \tau] \in \mathcal{F}_\tau$;
4. $\nu \leq \tau \Longrightarrow \mathcal{F}_\nu \subset \mathcal{F}_\tau$;
5. $[\nu < \tau],\ [\nu \leq \tau],\ [\nu = \tau] \in \mathcal{F}_\nu \cap \mathcal{F}_\tau$;
6. $\mathcal{F}_\nu \cap \mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{\nu \wedge \tau}$.

Důkaz:
Viz [DHS], str. 245.

□

Nyní uvedeme dva netriviální příklady markovských časů.

Příklad 2.18. Nechť $X = (X(t), t \geq 0)$ je spojitý stochastický proces, $b \in \mathbb{R}$. Dále nechť τ_b značí první vstup procesu X do b, tedy

$$\tau_b = \inf \{t \geq 0 : X(t) = b\}.$$

Potom τ_b je markovský čas procesu X.

Důkaz:

$$[\tau_b \leq t] = [\exists s \leq t : X(s) = b] = [\inf_{\substack{q \leq t \\ q \in \mathbb{Q} \cup t}} X(q) = b] \in \mathcal{F}_t^X.$$

□

Poznámka 2.19. Poznamenejme ještě, že předchozí důkaz se dá snadno modifikovat a ukázat, že první vstup spojitého procesu do obecné uzavřené množiny je taktéž markovský čas. Pokud bychom přidali ještě předpoklad spojitosti $\mathcal{F}_t^X$ zprava, pak i první vstup do otevřené množiny je markovským časem.

Příklad 2.20. Nechť τ je markovský čas procesu, pak τ_n definováno jako

$$\tau_n = k2^{-n} \text{ pro } (k-1)2^{-n} \leq \tau < k2^{-n},\ \tau_n = \infty \text{ pro } \tau \geq n,\ 1 \leq k \leq n2^{-n}, n \in \mathbb{N}$$

je posloupnost markovských časů a platí $\tau_n \downarrow \tau$ pro $n \to \infty$. Stejné vlastnosti má i posloupnost τ_n definovaná jako

$$\tau_n = \frac{K}{n}, \text{ pro } \frac{K-1}{n} \leq \tau < \frac{K}{n}, \quad K \in \mathbb{N},$$
$$\tau_n = \infty \text{ pro } \tau = \infty.$$

Důkaz:
Zafixujme $t \leq 0$ a ověřme:

$$(k-1)2^{-n} \leq t < k2^{-n} \Longrightarrow [\tau_n \leq t] = [\tau < (k-1)2^{-n}] \in \mathcal{F}_{(k-1)2^{-n}} \subset \mathcal{F}_t,$$
$$t \geq n \Longrightarrow [\tau_n \leq t] = [\tau \leq n] \in \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_t.$$

Bodová konvergence je zřejmá. Důkaz pro druhou posloupnost je zcela analogický předchozímu.

□

Několik následujích tvrzení se bude věnovat kalkulu při podmiňování σ-algebrami markovských časů.

Tvrzení 2.21. Nechť $Z \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a τ a ν jsou markovské časy. Pak:
(i) $[\nu \leq \tau] \Longrightarrow \mathrm{E}[Z|\mathcal{F}_\nu] = \mathrm{E}[Z|\mathcal{F}_{\nu\wedge\tau}]$ skoro jistě.
(ii) $E^{\mathcal{F}_\nu} E^{\mathcal{F}_\tau} Z = E^{\mathcal{F}_{\nu\wedge\tau}} Z$ skoro jistě.

Důkaz:
Viz [DHS], str. 246.

$\square$

Věta 2.22. Waldova rovnost: Nechť $X = (X(t), t \geq 0)$ je spojitý martingal, $X(0) = 0$,
$\mathrm{E}[\max_{s \leq t} |X(s)|] < \infty$. Pak pro každý markovský čas τ takový, že

- $\tau > 0$;
- $\tau < \infty$ skoro jistě;
- $t \leq \tau(\omega) \Longrightarrow |X_\omega(t)| \leq c < \infty$

platí $X(\tau) \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a $\mathrm{E}X(\tau) = 0$.

Důkaz:
Použijeme druhou aproximaci τ z příkladu 2.20. Pro $L \in \mathbb{N}$ platí

$$\int_{[\tau \leq L]} X(\tau_n)\, \mathrm{d}P = \sum_{k=0}^{nL-1} \int_{\left[\frac{k-1}{n} \leq \tau < \frac{k}{n}\right]} X\left(\frac{k}{n}\right)\, \mathrm{d}P \overset{*}{=} \sum_{k=0}^{nL-1} \int_{\left[\frac{k-1}{n} \leq \tau < \frac{k}{n}\right]} X(L)\, \mathrm{d}P =$$

$$= \int_{[\tau \leq L]} X(L)\, \mathrm{d}P \overset{**}{=} - \int_{[\tau > L]} X(L)\, \mathrm{d}P.$$

Rovnost $\overset{*}{=}$ platí proto, že $\mathrm{E}[X(L)|\mathcal{F}_{\frac{k}{n}}] = X\left(\frac{k}{n}\right)$ a tedy díky integrální rovnosti z definice 1.9. zde můžeme tyto n.v. zaměnit. Rovnost $\overset{**}{=}$ pak platí proto, že

$$\mathrm{E}[X(L)] = \mathrm{E}[\mathrm{E}[X(L)|\mathcal{F}_0]] = \mathrm{E}[X(0)] = \mathrm{E}0 = 0.$$

Platí

$$|X(\tau_n)| \leq \max_{t \leq L+1} |X(t)| \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P) \text{ na } [\tau \leq L].$$

Nyní díky Lebesgueově větě o integrovatelné majorantě a spojitosti X můžeme udělat limitní přechod a získat

$$\lim_{n \to \infty} \int_{[\tau \leq L]} X(\tau_n)\, \mathrm{d}P = \int_{[\tau \leq L]} \lim_{n \to \infty} X(\tau_n)\, \mathrm{d}P = \int_{[\tau \leq L]} X(\tau)\, \mathrm{d}P = - \int_{[\tau > L]} X(L)\, \mathrm{d}P.$$

V tomto okamžiku budeme potřebovat ještě jeden limitní přechod a to $L \to \infty$. Aplikujeme tento limitní přechod na poslední rovnost v předchozím výpočtu a dostaneme

$$\mathrm{E}X(\tau) = - \lim_{L \to \infty} \int_{[\tau > L]} X(L)\, \mathrm{d}P = 0,$$

protože

$$\int_{[\tau>L]} X(L)\,\mathrm{d}P \leq cP[\tau > L] \overset{L\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$\square$

Tvrzení 2.23. Optional sampling theorem: Nechť $X = (X(t), t \geq 0)$ je zprava spojitý $\mathcal{F}_t$-martingal a $\nu \leq \tau \leq T < \infty$ dvojice omezených $\mathcal{F}_t$-markovských časů. Pak

$$X(\nu),\ X(\tau) \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P), \quad \mathrm{E}[X(\tau)|\mathcal{F}_\nu] = X(\nu).$$

Důkaz:
Viz [DHS], str. 248.

$\square$

Tvrzení 2.24. Stopping theorem: Nechť $X = (X(t), t \geq 0)$ je zprava spojitý $\mathcal{F}_t$-martingal a $\nu,\ \tau$ jsou $\mathcal{F}_t$-markovské časy, pak platí:
(i) Pokud $\nu \leq \tau$, pak pro každé $t \geq 0$ platí

$$\mathrm{E}^{\mathcal{F}_\nu}[X(t \wedge \tau)] = X(t \wedge \nu).$$

(ii) Pokud je navíc X omezený proces a $\nu \leq \tau$ jsou konečné $\mathcal{F}_t$-markovské časy, pak

$$\mathrm{E}^{\mathcal{F}_\nu} X(\tau) = X(\nu).$$

Důkaz:
Viz [DHS], str. 249.

$\square$

Nyní jsme již schopni ukázat, že Wienerův proces splňuje důležitou vlastnost, která je předmětem následující definice.

Definice 2.25. Nechť $X = (X(t), t \geq 0)$ je stochastický proces a τ je markovský čas takový, že $\tau < \infty$ skoro jistě. Označme $B_\tau^X(t) = X(\tau + t) - X(\tau)$. Pak o procesu X řekneme, že má silnou markovskou vlastnost, pokud jsou splněny následující dvě podmínky:
(i) $B_\tau^X \perp \mathcal{F}_\tau$;
(ii) $\mathcal{L}(B_\tau^X(t)) = \mathcal{L}(X(t))$.

Věta 2.26. Silná markovská vlastnost Wienerova procesu:
Nechť $W = (W(t), t \geq 0)$ je Wienerův proces. Pak W má silnou markovskou vlastnost.

Důkaz:
Nechť $t \geq 0$ a τ je markovský čas procesu W takový, že $\tau < \infty$ s.j. $B_\tau^W(t)$ je spojitý proces a platí $B_\tau^W(0) = 0$. Abychom ukázali, že je Wienerův, stačí ukázat, že má stejná konečněrozměrná rozdělení jako proces W (viz [TPMZ], str. 422.). Nyní opět použijme druhou aproximaci z příkladu 2.20. a počítejme

$$P[W(\tau_n + t) - W(\tau_n) \leq a] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P\left[\frac{k-1}{n} \leq \tau < \frac{k}{n},\ W\left(t+\frac{k}{n}\right) - W\left(\frac{k}{n}\right) \leq a\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P\left[\frac{k-1}{n} \leq \tau < \frac{k}{n}\right] \cdot P\left[W\left(t+\frac{k}{n}\right) - W\left(\frac{k}{n}\right) \leq a\right] =$$

$$= P[W(t) \leq a] \cdot 1,$$

kde první rovnost plyne z věty o úplné pravděpodobnosti, druhá rovnost platí proto, že $W\left(t+\frac{k}{n}\right) - W\left(\frac{k}{n}\right) \perp \mathcal{F}^W_{\frac{k}{n}}$, neboť W je $\mathcal{F}^W_t$-Wienerův proces a konečně poslední rovnost vyplývá z toho, že $W\left(t+\frac{k}{n}\right) - W\left(\frac{k}{n}\right) \sim N(0,t) \sim W(t)$. Pro libovolné konečně dimenzionální rozdělení by výpočet proběhl zcela analogicky. Tedy

$$P[(W(\tau_n+t_1)-W(\tau_n),\ldots,W(\tau_n+t_r)-W(\tau_n)) \in M] = P[(W(t_1),\ldots,W(t_r)) \in M]$$

pro každou $M \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^r)$, pro každé $r \in \mathbb{N}$. Nyní se podívejme na nezávislost $B^X_\tau(t)$ a $\mathcal{F}_\tau$. Pro každou $F \in \mathcal{F}_\tau$ a $M \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^r)$ platí

$$P[F \cap (W(\tau_n+t_1)-W(\tau_n),\ldots,W(\tau_n+t_r)-W(\tau_n)) \in M] =$$

$$= P(F) \cdot P[(W(t_1),\ldots,W(t_r)) \in M] \quad \text{(viz výše)}.$$

Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $B^X_{\tau_n}(t) \perp \mathcal{F}_\tau$. Ze spojitosti W platí $B^X_{\tau_n}(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} B^X_\tau(t)$. A tedy $B^X_\tau(t)$ je Wienerův proces a $B^X_\tau(t) \perp \mathcal{F}_\tau$ dle [TPMZ], odstavec II.5.

□

Nyní uvedeme ještě pomocné tvrzení a definici a začneme se věnovat prostorům L_2.

Tvrzení 2.27. Doobovy nerovnosti:
Nechť $X = (X(t), t \geq 0)$ je spojitý martingal, pak
(i) pro $p \geq 1$ platí: $P[\sup_{0\leq s\leq t} |X(s)| \geq a] \leq \frac{\mathrm{E}|X(t)|^p}{a^p}$;
(ii) pro $p > 1$ platí: $\mathrm{E}[\sup_{0\leq s\leq t} |X(s)|^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathrm{E}|X(t)|^p$.

Důkaz:
Viz [DHS], str. 243.

□

Definice 2.28. $\mathcal{F}_t$-adaptovaný proces $X = (X(t), t \geq 0)$ nazveme lokální $\mathcal{F}_t$-martingal, pokud existuje posloupnost $\mathcal{F}_t$-markovských časů $\tau_n \uparrow \infty$ taková, že každý z procesů $X(\tau_n \wedge t)$ je $\mathcal{F}_t$-martingal.

Poznámka 2.29. Je zřejmé, že pokud je proces martingal, pak je lokální martingal. Opačná implikace ovšem neplatí. A to ani po dodání předpokladu integrovatelnosti marginálů, tedy $\mathrm{E}|X(t)| < \infty$ pro každé $t \geq 0$.

Nyní již přichází na řadu L_2.

Definice 2.30. Nechť $X = (X(t), t \geq 0)$ je spojitý martingal, pak jej nazveme

L_2-martingalem, pokud pro všechna $t \geq 0$ platí, že $\mathrm{E}|X(t)|^2 < \infty$.

Poznámka 2.31. Důsledkem druhé Doobovy nerovnosti je, že pokud $X = (X(t), t \geq 0)$ je spojitý L_2-martingal, pak

$$\mathrm{E}[\sup_{0\leq s\leq t} |X(s)|^2] \leq 4\mathrm{E}[|X(t)|^2] < \infty \Longrightarrow \sup_{0\leq s\leq t} |X(s)| \in L_2.$$

Věta 2.32. Nechť $M = (M(t), t \geq 0)$ je L_2-martingal a $0 \leq u \leq s \leq t$. Pak platí:
(i) $\mathrm{E}[(M(t)-M(s))\cdot(M(s)-M(u))] = \mathrm{E}[M(s)-M(u)]\cdot \mathrm{E}^{\mathcal{F}_s}(M(t)-M(s)) = 0$;
(ii) $\mathrm{E}[M(t)-M(u)]^2 = \mathrm{E}[M(t)-M(s)]^2 + \mathrm{E}[M(s)-M(u)]^2$;
(iii) $\mathrm{E}^{\mathcal{F}_s}[M(t)-M(u)]^2 = \mathrm{E}^{\mathcal{F}_s}[M(t)-M(s)]^2 + (M(s)-M(u))^2$;
(iv) $\mathrm{E}^{\mathcal{F}_u}[M(t)-M(u)]^2 = \mathrm{E}^{\mathcal{F}_u}[M^2(t)-M^2(u)]$.

Důkaz:
Provedeme přímým výpočtem.

(i)

$$\begin{gathered}\mathrm{E}[(M(t)-M(s))\cdot(M(s)-M(u))] = \\ = \mathrm{E}[\mathrm{E}^{\mathcal{F}_s}[(M(t)-M(s))\cdot(M(s)-M(u))]] = \\ = \mathrm{E}[(M(s)-M(u))\mathrm{E}^{\mathcal{F}_s}[(M(t)-M(s))]] = 0.\end{gathered}$$

(ii)

$$\begin{gathered}\mathrm{E}[M(t)-M(u)]^2 = \mathrm{E}[(M(t)-M(s)) + (M(s)-M(u))]^2 \overset{*}{=} \\ \overset{*}{=} \mathrm{E}[M(t)-M(s)]^2 + 2\mathrm{E}[(M(t)-M(s))\cdot(M(s)-M(u))] + \mathrm{E}[M(s)-M(u)]^2 = \\ = \mathrm{E}[M(t)-M(s)]^2 + \mathrm{E}[M(s)-M(u)]^2,\end{gathered}$$

neboť $\mathrm{E}[(M(t)-M(s))\cdot(M(s)-M(u))] = 0$ dle (i). Rovnost $\overset{*}{=}$ platí, protože marginály M jsou v L_2.

(iii)

$$\begin{gathered}\mathrm{E}^{\mathcal{F}_s}[M(t)-M(u)]^2 = \mathrm{E}^{\mathcal{F}_s}[(M(t)-M(s)) + (M(s)-M(u))]^2 = \\ = \mathrm{E}^{\mathcal{F}_s}[M(t)-M(s)]^2 - 2\mathrm{E}^{\mathcal{F}_s}[M(t)-M(s)\cdot(M(s)-M(u))] + \mathrm{E}^{\mathcal{F}_s}[M(s)-M(u)]^2 = \\ = \mathrm{E}^{\mathcal{F}_s}[M(t)-M(s)]^2 + (M(s)-M(u))^2,\end{gathered}$$

neboť druhý člen ve výrazu před poslední rovností je roven 0 díky martingalové vlastnosti a třetí člen je $\mathcal{F}_s$-měřitelný.

(iv)

$$\mathrm{E}^{\mathcal{F}_u}[M(t)-M(u)]^2 = \mathrm{E}^{\mathcal{F}_u}[M^2(t) - 2M(u)M(t) + M^2(u)] = \mathrm{E}^{\mathcal{F}_u}[M^2(t)] - M^2(u).$$

□

Nyní uvedeme vztah mezi martingaly a procesy s konečnou variací.

Věta 2.33. Vztah mezi martingaly a procesy s konečnou omezenou variací:
Nechť $M = (M(t), t \geq 0)$ je spojitý L_2-martingal takový, že $M(0) = 0$ a M má konečnou omezenou variaci. Tedy pro každé $t \geq 0$: $\mathcal{V}_{[0,t]}(M) \leq c < \infty$. Pak $M(t) = 0$ pro všechna $t \geq 0$ skoro jistě.

Důkaz:
Předpokládáme $\mathcal{V}_{[0,t]}(M) = \sup_{\mathcal{D}_n(t)} \sum_{j=1}^n |M(t_j) - M(t_{j-1})| \leq c < \infty$, kde $\mathcal{D}_n(t) = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}$ pro všechna $(t, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$. Uvažme posloupnost $\mathcal{D}_n(t) = \left\{0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{K_n}^n = t\right\}$, že $||\mathcal{D}_n(t)|| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Počítejme

$$\sum_{j=1}^{K_n} (M(t_j) - M(t_{j-1}))^2 \leq \max_{1 \leq j \leq K_n} |M(t_j^n) - M(t_j^{n-1})| \cdot \sum_{j=1}^{n} |M(t_j^n) - M(t_{j-1}^n)| \leq$$

$$\leq \max_{1 \leq j \leq K_n} |M(t_j^n) - M(t_j^{n-1})| \cdot c \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Víme, že $\mathrm{E}[M(t)] = 0$ pro všechna $t \geq 0$ a pomocí Lebesgueovy věty o integrovatelné majorantě a 2.32.(ii) spočteme

$$\mathrm{E}[M(t)]^2 = \mathrm{E}[M(t) - 0]^2 = \sum_{j=1}^{K_n} \mathrm{E}[M(t_j^n) - M(t_{j-1}^n)]^2 \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

A tedy $M(t) = 0$ skoro jistě díky Čebyševově nerovnosti.

□

K dispozici je ovšem ještě silnější tvrzení:

Tvrzení 2.34. Nechť L je spojitý lokální martingal s $L(0) = 0$. Pak existuje nulová množina $N \in \mathcal{F}$, že pro všechna $\omega \notin N$ platí implikace

$$\mathcal{V}_{[0,t]}(L) < \infty \Longrightarrow L(s) = 0 \text{ pro } s \leq t.$$

Důkaz:
Viz [DHS], str. 270.

□

Kapitola 3

Stochastická integrace

Úmluva 3.1. Máme zafixován pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Nyní na něj bude třeba klást silnější předpoklady. Od tohoto okamžiku nechť je prostor Ω úplný a filtrace $\mathcal{F}_t$ úplná.

Stochastický integrál $\int_0^t G \, \mathrm{d}W$ nelze kvůli nekonečné variaci budovat jako Lebesgue-Stieltjesův. Proto provedeme následující konstrukci.

Definice 3.2. Prostorem $\underline{\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2(\mathcal{F}_t)}$ rozumíme funkce $G : \mathbb{R}_0^+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ měřitelné vzhledem k $\mathbb{B}(\mathbb{R}_0^+) \times \mathcal{F}$, $\mathcal{F}_t$-adaptované a splňující $\mathrm{E}\left[\int_0^t G^2(s) \, \mathrm{d}s\right] < \infty$ pro všechna $t \geq 0$. Řekneme, že posloupnost $G^{(n)} \in \mathcal{L}_2$ konverguje ke $G \in \mathcal{L}_2$ v $\mathcal{L}_2$, pokud $\mathrm{E}\left[\int_0^t (G^{(n)}(s) - G(s))^2 \, \mathrm{d}s\right] \longrightarrow 0, \ \forall t \geq 0$. Je zřejmé, že $\mathcal{L}_2$ je lineární prostor.

Nyní postupně zkonstruujeme stochastický integrál právě pro procesy z $\mathcal{L}_2$.

Tvrzení 3.3. Nechť $G \in \mathcal{L}_2$. Pak $\int_0^t G(s) \, \mathrm{d}s$, $\int_0^t G^2(s) \, \mathrm{d}s$ jsou spojité $\mathcal{F}_t$-adaptované procesy.

Důkaz:
Viz [DHS], str. 259.

□

Definice 3.4. Nechť $G : \mathbb{R}_0^+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ je náhodný proces. G nazveme jednoduchý, pokud existuje lokálně konečné dělení $\{t_j\}$ intervalu $\mathbb{R}_0^+$, $t_j \to \infty$, že $G = \sum_{j=1}^{\infty} G_j \cdot \mathbb{I}_{[t_j, t_{j+1})}$, G_j jsou $\mathcal{F}_{t_j}$-měřitelné a $\mathrm{E}G_j^2 < \infty$. Množinu všech takových procesů budeme značit $\mathcal{J}_2$.

Tvrzení 3.5. Věta o hustotě:
(i) Nechť $G \in \mathcal{L}_2$, $|G| \leq c < \infty$, pak existuje posloupnost omezených procesů $G^{(n)} \in \mathcal{J}_2$ taková, že $G^{(n)} \to G$ v $\mathcal{L}_2$.
(ii) Nechť $G \in \mathcal{L}_2$, pak existuje posloupnost procesů $G^{(n)} \in \mathcal{J}_2$ taková, že

$G^{(n)} \to G$ v $\mathcal{L}_2$.

Důkaz:
Viz [DHS], str. 261.

$\square$

Definice 3.6. Označme množinu spojitých L_2-martingalů M takových, že $M(0) = 0$ jako $\underline{\mathcal{CM}_2}$. Řekneme, že posloupnost $M^{(n)} \in \mathcal{CM}_2$ konverguje k $M \in \mathcal{CM}_2$, pokud $\mathrm{E}\left[\max_{s\le t} |M^{(n)}(s) - M(s)|^2\right] \to 0$ pro všechna $t \ge 0$. Zřejmě $\mathcal{CM}_2$ tvoří lineární podprostor prostoru $\mathcal{L}_2$.

Poznámka 3.7. Přímým důsledkem druhé Doobovy nerovnosti je, že posloupnost $M^{(n)} \in \mathcal{CM}_2$ konverguje k $M \in \mathcal{CM}_2$, právě když $\mathrm{E}\left[|M^{(n)}(t) - M(t)|^2\right] \to 0$ pro všechna $t \ge 0$.

Tvrzení 3.8. Nechť $M^{(n)}$ je posloupnost v $\mathcal{CM}_2$ taková, že $\mathrm{E}\left[(M^{(n)}(t) - M^{(m)}(t))^2\right] \overset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ pro všechna $t \ge 0$. Pak existuje $M \in \mathcal{CM}_2$, že $\mathrm{E}\left[|M^{(n)}(t) - M(t)|^2\right] \to 0$ pro všechna $t \ge 0$. Tedy jakási analogie úplnosti prostoru $\mathcal{CM}_2$.

Důkaz:
Viz [DHS], str. 255.

$\square$

Definice 3.9. <u>Stochastický integrál pro jednoduchý proces:</u> Nechť G je jednoduchý proces a W je Wienerův proces. Pak proces

$$I_G(t) := \sum_{j=0}^{k-1} G_j(W(t_{j+1}) - W(t_j)) + G_k(W(t) - W(t_k))$$

pro $t_k \le t < t_{k+1}$, kde časy $\{t_j\}$ hrají stejnou úlohu jako v definici jednoduchého procesu, nazveme <u>stochastický integrál G</u>.

Nyní ukážeme některé vlastnosti takto zavedeného integrálu.

Věta 3.10. Nechť $G \in \mathcal{J}_2$, pak $I_G(t) \in \mathcal{CM}_2$ takový, že

$$\mathrm{E}[I_G(t)] = 0 \text{ a } \mathrm{E}[I_G(t)]^2 = \mathrm{E}\left[\int_0^t G^2 \,\mathrm{d}s\right], \ \forall t \ge 0.$$

Důkaz:
Začneme s jednoduchou situací, kdy $G(t) = G_1 \mathbb{I}_{[t_1,t_2]}(t)$, že G_1 je $\mathcal{F}$-měřitelná a $\mathrm{E}[G_1^2] < \infty$. Pak jistě $I_G(0) = 0$. Nyní chceme spočítat $\mathrm{E}^{\mathcal{F}_s}[I_G(t)]$ pro $0 \le s \le t$. Netriviální situace nastane, pokud $t_1 \le s \le t$. Tedy

$$\mathrm{E}^{\mathcal{F}_s}[I_G(t)] = E^{\mathcal{F}_s}[G_1(W(t) - W(t_1))] = G_1 E^{\mathcal{F}_s}[(W(t) - W(t_1))] =$$

$$= G_1(W(s) - W(t_1)) = I_G(s).$$

V této situaci platí:

$$\mathrm{E}[I_G(t)] = \mathrm{E}[G_1(W(t) - W(t_1))] = \mathrm{E}[G_1] \cdot \mathrm{E}[(W(t) - W(t_1))] = 0.$$

Dále pak:

$$\mathrm{E}[I_G(t)]^2 = \mathrm{E}[G_1(W(t) - W(t_1))]^2 = \mathrm{E}[G_1^2] \cdot \mathrm{E}[(W(t) - W(t_1))]^2 =$$

$$= \mathrm{E}[G_1]^2 \cdot (t - t_1) = \mathrm{E}\left[\int_0^t G^2 \,\mathrm{d}s\right].$$

Nyní již jednoduchým rozšířením dané situace získáme důkaz této věty.

□

Věta 3.11. Nechť $G \in \mathcal{L}_2$ a $\{G^{(n)}\} \in \mathcal{J}_2$ je posloupnost taková, že $G^{(n)} \to G$ v $\mathcal{L}_2$. Pak existuje martingal $M \in \mathcal{CM}_2$ takový, že $I_{G^{(n)}} \to M$ v $\mathcal{L}_2$. Navíc je tento proces určen jednoznačně.

Důkaz:
Nechť $M^{(n)} = I_{G^{(n)}}$, pak $\{M^{(n)}\} \in \mathcal{CM}_2$ dle věty 3.10. Platí

$$\mathrm{E}[M^{(n)}(t) - M^{(m)}(t)]^2 = \mathrm{E}\left[\int_0^t G^{(n)} - G^{(m)} \,\mathrm{d}W\right]^2 =$$

$$= \mathrm{E}\left[\int_0^t (G^{(n)} - G^{(m)})^2 \,\mathrm{d}s\right] \overset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

kde poslední rovnost platí opět díky větě 3.10. A tedy díky větě 3.8. existuje M s požadovanými vlastnostmi. Nyní ukážeme jednoznačnost. Nechť tedy jsou $G_1^{(n)}$, $G_2^{(n)} \in \mathcal{J}_2$, že

$$\mathrm{E}\left[\int_0^t (G_1^{(n)} - G)^2 \,\mathrm{d}s\right] \to 0,\ \mathrm{E}\left[\int_0^t (G_2^{(n)} - G)^2 \,\mathrm{d}s\right] \to 0,\ \forall t \geq 0.$$

Uvažme posloupnost $G^* := (G_1^{(1)}, G_2^{(1)}, G_1^{(2)}, G_2^{(2)}, \dots)$. Tato posloupnost je cauchyovská, neboť

$$\mathrm{E}\left[\int_0^t (G_m^* - G_n^*)^2 \,\mathrm{d}s\right] = \mathrm{E}\left[\int_0^t (G_m^* - G + G - G_n^*)^2 \,\mathrm{d}s\right] =$$

$$= \mathrm{E}\left[\int_0^t (G_m^* - G)^2 \,\mathrm{d}s\right] + \mathrm{E}\left[\int_0^t (G_m^* - G)(G_n^* - G) \,\mathrm{d}s\right] + \mathrm{E}\left[\int_0^t (G_n^* - G)^2 \,\mathrm{d}s\right].$$

Limita tohoto výrazu je ovšem rovna nule, protože první a třetí člen konvergují k nule z předpokladu a prostřední člen lze rozepsat jako

$$\left[\int_0^t (G_m^* - G)(G_n^* - G)\ \mathrm{d}s\right] = \frac{1}{4}((G_m^* - G) + (G_n^* - G))^2 - \frac{1}{4}((G_m^* - G) - (G_n^* - G))^2,$$

a tedy limita pro $m, n \to \infty$ je rovna nule zřejmě. Nechť $M_*^n = I_{G_n^*}$, pak i tato posloupnost je cauchyovská (argument je stejný jako v prvním výpočtu tohoto důkazu). Tedy $I_{G_1^{(n)}}, I_{G_2^{(n)}}$ mají stejnou limitu v $\mathcal{CM}_2$.

□

Definice 3.12. Nechť $G \in \mathcal{L}_2$. Uvažme posloupnost procesů $\{G^{(n)}\} \in \mathcal{J}_2$ takovou, že $G^{(n)} \to G$ v $\mathcal{L}_2$. Taková posloupnost existuje díky tvrzení 3.5. Dále uvažme $I_G^{\mathcal{L}_2}(t)$, pro který platí $I_G^{\mathcal{L}_2}(t) = \lim_{n\to\infty} I_{G^{(n)}}(t)$. Pak $I_G^{\mathcal{L}_2}(t)$ nazveme stochastickým $\mathcal{L}_2$-integálem G. Tato definice je korektní, neboť pro jakoukoliv přípustnou posloupnost $\{G^{(n)}\}$ zajišťuje existenci i jednoznačnost $I_G^{\mathcal{L}_2}(t)$ věta 3.11.

Nyní uvedeme dvě důležité vlastnosti $\mathcal{L}_2$-integrálu.

Tvrzení 3.13. Nechť $G, G_1, G_2 \in \mathcal{L}_2$ a $a, b \in \mathbb{R}$. Pak
(i) $I_{(a\cdot G_1 + b\cdot G_2)}^{\mathcal{L}_2}(t) = a \cdot I_{G_1}^{\mathcal{L}_2}(t) + b \cdot I_{G_2}^{\mathcal{L}_2}(t), \quad \forall t \geq 0;$
(ii) $\mathrm{E}[I_G^{\mathcal{L}_2}(t)] = 0,\ \mathrm{E}[I_G^{\mathcal{L}_2}(t)]^2 = \mathrm{E}\left[\int_0^t G^2(s)\ \mathrm{d}s\right], \quad \forall t \geq 0.$

Důkaz:
Plyne přímo z definice $I_G^{\mathcal{L}_2}(t)$ a věty 3.10. limitním přechodem.

□

Poznámka 3.14. První vlastnost z předchozího tvrzení se nazývá linearita, druhá pak isometrie.

Poznámka 3.15. Povšimněme si, že pro $G \in \mathcal{L}_2$ je $I_G^{\mathcal{L}_2}(t)$ spojitý, $\mathcal{F}_t$-adaptovaný proces takový, že

$$\mathrm{E}\left[\int_0^t (I_G^{\mathcal{L}_2}(s))^2\ \mathrm{d}s\right] = \int_0^t \mathrm{E}\left[(I_G^{\mathcal{L}_2}(s))^2\right]\ \mathrm{d}s = \int_0^t \mathrm{E}\left[\int_0^s G^2(u)\ \mathrm{d}u\right]\ \mathrm{d}s \leq$$

$$\leq t \cdot \mathrm{E}\left[\int_0^t G^2(u)\ \mathrm{d}u\right] < \infty.$$

A tedy je vhodným argumentem pro další integraci. A tedy i samotný Wienerův proces je v $\mathcal{L}_2$, neboť $W(t) = I_1^{\mathcal{L}_2}(t)$. Můžeme se zajímat, co je $I_W^{\mathcal{L}_2}(t)$.

Věta 3.16. Nechť W je Wienerův proces. Pak platí

$$I_W^{\mathcal{L}_2}(t) = \frac{W^2(t) - t}{2}, \quad \forall t \geq 0.$$

Důkaz:
Uvažme posloupnost dělení $\mathcal{D}^{(n)} = \left\{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_{K_n}^{(n)} = t\right\}$ intervalu $[0,t]$ takovou, že $||\mathcal{D}^{(n)}|| \to 0$. Platí

$$W^2(t) = \sum_{j=1}^{K_n} \left(W(t_j^{(n)}) - W(t_{j-1}^{(n)})\right)^2 + 2 \cdot \sum_{j=1}^{K_n} W(t_{j-1}^{(n)}) \cdot \left(W(t_j^{(n)}) - W(t_{j-1}^{(n)})\right). \quad (\star)$$

První člen konverguje pro $n \to \infty$ k t v pravděpodobnosti, protože jeho střední hodnota je zjevně t a pro každé n dle vzorce pro čtvrtý obecný moment normálního rozdělení plyne, že

$$\mathrm{var}\left[\left(W(t_j^{(n)}) - W(t_{j-1}^{(n)})\right)^2\right] = 3\left(t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}\right)^2.$$

Z nezávislosti přírůstků Wienerova procesu vyplývá, že rozptyl součtu se rovná součtu rozptylů a tedy

$$\mathrm{var}\left[\sum_{j=1}^{K_n} \left(W(t_j^{(n)}) - W(t_{j-1}^{(n)})\right)^2\right] = \sum_{j=1}^{K_n} \mathrm{var}\left[\left(W(t_j^{(n)}) - W(t_{j-1}^{(n)})\right)^2\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{K_n} 3\left(t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}\right)^2.$$

Tento výraz ovšem pro $n \to \infty$ konverguje k nule, protože kvadratická variace identity, jakožto spojitě diferencovatelného zobrazení, je na $[0,t]$ rovna nule. A tedy, díky Čebyševově nerovnosti, máme konvergenci k t v pravděpodobnosti zaručenu. Druhý výraz v $(\star)$ jest $2 \cdot \sum_{j=1}^{K_n} W(t_{j-1}^{(n)}) \cdot \left(W(t_j^{(n)}) - W(t_{j-1}^{(n)})\right) = I_{G_n}$ pro $G_n := \sum_{j=1}^{K_n} W(t_{j-1}^{(n)}) \cdot \mathbb{I}_{\left(W(t_j^{(n)}) - W(t_{j-1}^{(n)})\right)} \in \mathcal{J}_2$. Ze spojitosti W na $[0,t]$ plyne, že $G_n \to W$ všude na $[0,t] \times \Omega$. Tím je vzhledem k existenci a jednoznačnosti limity G_n a tím i I_{G_n} věta dokázána.

□

Budeme potřebovat ještě některé další vlastnosti stochastického $\mathcal{L}_2$-integrálu.

Věta 3.17. Nechť $G \in \mathcal{L}_2$, $0 \le s \le t < \infty$. Dále nechť $G = 0$ na $[0,s]$, G je omezený a ξ buď $\mathcal{F}_s$-měřitelná náhodná veličina v L_2. Pak $\xi \cdot G \in \mathcal{L}_2$ a platí $I_{\xi \cdot G}^{\mathcal{L}_2}(t) = \xi \cdot I_G^{\mathcal{L}_2}(t)$.

Důkaz:
Nechť nejprve J je jednoduchý proces, že $J = \sum_{j=0}^{\infty} G_j \mathbb{I}_{[t_j, t_{j+1})}$ dle definice jednoduchého procesu. Dále nechť $t_n = t$ a $s = t_{k-1}$. Pak

$$\xi \cdot I_J^{\mathcal{L}_2}(t) = \xi \sum_{j=1}^{n} J_j(W(t_j) - W(t_{j-1})) = \sum_{j=k}^{n} \xi \cdot J_j(W(t_j) - W(t_{j-1})) = I_{\xi \cdot J}^{\mathcal{L}_2}(t).$$

Pro $G \in \mathcal{L}_2$ je $\mathrm{E}\left[\int_0^t G^2(s) \cdot \xi \,\mathrm{d}s\right] \le c \cdot t \cdot \mathrm{E}[\xi^2] < \infty$. Požadované tvrzení nyní získáme pomocí aproximace G jednoduchými procesy a limitním přechodem pro $n \to \infty$ v předchozím výpočtu.

$\square$

Věta 3.18. Nechť $G \in \mathcal{L}_2$ a τ buď markovský čas. Pak $G \cdot \mathbb{I}_{[0,\tau]} \in \mathcal{L}_2$ a platí

$$I_G^{\mathcal{L}_2}(\tau \wedge t) = I_{G\cdot \mathbb{I}_{[0,\tau]}}^{\mathcal{L}_2}(t).$$

Důkaz:
Uvažme první diskrétní aproximaci τ_n z příkladu 2.20. Body, ve kterých je aproximace nespojitá, nazveme t_j, $t_0 = 0, t = t_{K_n}$. Nyní nechť $J \cdot \mathbb{I}_{[0,\tau]} \in \mathcal{J}_2$.
Pro $t > 0$ platí

$$I_J^{\mathcal{L}_2}(\tau_n \wedge t) = \sum_{j=0}^{K_n-1} J_j(W(t_{j+1} \wedge \tau_n) - W(t_j \wedge \tau_n)) = I_{J\cdot \mathbb{I}_{[0,\tau]}}^{\mathcal{L}_2}(t).$$

Nyní buď $G \in \mathcal{L}_2$, $G_m \to G$ v $\mathcal{L}_2$, $G_m \in \mathcal{J}_2$, pak platí

$$I_{G_m}(s) \xrightarrow{P} I_G^{\mathcal{L}_2}(s),\ I_{G_m \mathbb{I}_{[0,\tau_n]}}(s) \xrightarrow{P} I_{G_m \mathbb{I}_{[0,\tau_n]}}^{\mathcal{L}_2}(s).$$

A tedy

$$I_G^{\mathcal{L}_2}(\tau_n \wedge t) = \lim_{m\to\infty} I_{G_m}^{\mathcal{L}_2}(\tau_n \wedge t) = \lim_{m\to\infty} I_{G_m \mathbb{I}_{[0,\tau_n]}}^{\mathcal{L}_2}(t) = I_{G \mathbb{I}_{[0,\tau_n]}}^{\mathcal{L}_2}(t),$$

kde limita je podle pravděpodobnosti. Nyní již požadovanou rovnost získáme limitním přechodem pro $n \to \infty$.

$\square$

Takto definovaný stochastický integrál stále není dostačující, protože ani spojitý proces nemusí být integrandem. To pomůže změnit následující klíčová věta.

Věta 3.19. Lenglartova nerovnost: Nechť $G \in \mathcal{L}_2$. Buď $M(t) := I_G^{\mathcal{L}_2}(t)$ a $\varepsilon, \delta > 0$. Pak

$$P\left[\max_{s\le t} |M(s)| \ge \varepsilon,\ \int_0^t G^2(s)\ \mathrm{d}s < \delta\right] \le 4\varepsilon^{-2}\mathrm{E}\left[\min\left(\delta, \int_0^t G^2(s)\ \mathrm{d}s\right)\right].$$

Důkaz:
τ buď markovský čas prvního vstupu $\int_0^t G^2(s)\ \mathrm{d}s$ do δ. Pak

$$P\left[\max_{s\le t} |M(s)| \ge \varepsilon,\ \int_0^t G^2(s)\ \mathrm{d}s < \delta\right] = P[\max_{s\le t} |M(s)| \ge \varepsilon, \tau > t] \overset{a}{\le}$$

$$\overset{a}{\le} \varepsilon^{-2} \int_{[\tau > t]} \max_{s\le t} M^2(s)\ \mathrm{d}P \overset{b}{\le} \varepsilon^{-2}\mathrm{E}\left[\max_{s\le t} M^2(s\wedge\tau)\right] \overset{c}{=}$$

$$\overset{c}{=} \varepsilon^{-2}\mathrm{E}\left[\max_{s\le t}\left(I_G^{\mathcal{L}_2}(s\wedge\tau)\right)^2\right] \overset{d}{=} \varepsilon^{-2}\mathrm{E}\left[\max_{s\le t}(I_{G\cdot\mathbb{I}_{[0,\tau]}}^{\mathcal{L}_2}(s))^2\right] \overset{e}{\le}$$

$$\overset{e}{\leq} 4\varepsilon^{-2}\mathrm{E}\left[(I^{\mathcal{L}_2}_{G\cdot\mathbb{I}_{[0,\tau]}}(t))^2\right] \overset{f}{=}$$

$$\overset{f}{=} 4\varepsilon^{-2}\mathrm{E}\left[\int\limits_0^{\tau\wedge t} G^2(s)\ \mathrm{d}s\right] \leq 4\varepsilon^{-2}\mathrm{E}\left[\min\left(\delta, \int\limits_0^t G^2(s)\ \mathrm{d}s\right)\right],$$

kde nerovnost $\overset{a}{\leq}$ plyne z Čebyševovy nerovnosti, nerovnost $\overset{b}{\leq}$ z nezápornosti M^2, rovnost $\overset{c}{=}$ pak z isometrie $\mathcal{L}_2$-integrálu (tvrzení 3.13. (ii)), rovnost $\overset{d}{=}$ z věty 3.18., nerovnost $\overset{e}{\leq}$ z druhé Doobovy nerovnosti a rovnost $\overset{f}{=}$ opět z tvrzení 3.13.

□

Nyní již zkonstruujeme stochastický integrál, který bude spojitý vzhledem ke konvergenci podle pravděpodobnosti a bude schopen integrovat všechny spojité procesy. Nejprve rozšíříme prostor $\mathcal{L}_2$ a potom zavedeme prostor integrandů pro finální stochastický integrál.

Definice 3.20. Prostorem $\mathcal{L} \supset \mathcal{L}_2$ nazveme množinu procesů G: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{F}_t) = \Big\{G$ adaptované, měřitelné $\mathbb{B}(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{F} \to \mathbb{B}(\mathbb{R}^+)$, $\int_0^t G^2(s)\ \mathrm{d}s < \infty$, $\forall t \geq 0$ s.j.$\Big\}$. Řekneme, že G_n konvergují v $\mathcal{L}$ ke G v $\mathcal{L}$, pokud $\int_0^t (G_n(s) - G(s))^2\ \mathrm{d}s \xrightarrow{P} 0$, $\forall t \geq 0$. Prostor všech jednoduchých měřitelných procesů nazveme $\mathcal{J} \supset \mathcal{J}_2$. Prostor integrandů pro stochastický integrál budeme značit jako $\mathcal{CP} = \mathcal{CP}(\mathcal{F}_t)$ a budeme jej definovat jako množinu spojitých $\mathcal{F}_t$-adaptovaných procesů X s konvergencí: $X_n \to X$ v $\mathcal{CP} \iff \sup_{0\leq s\leq t} |X_n(s) - X(s)| \xrightarrow{P} 0$, $\forall t \geq 0$. Poznamenejme ještě, že všechny tři objekty jsou lineární prostory a $\mathcal{CP}$ je úplný, neboť konverguje-li posloupnost spojitých (a tedy i správně měřitelných) funkcí stejnoměrně, pak je i limita spojitá (a správně měřitelná) funkce.

Věta 3.21. Množina $\mathcal{L}_2$ je hustá v $\mathcal{L}$ vzhledem ke konvergenci v $\mathcal{L}$.

Důkaz:
Nechť $G \in \mathcal{L}$. Uvažme posloupnost $G_n = \min(\max(G, -n), n)$. Zřejmě $G_n \in \mathcal{L}_2$, $|G_n| \leq |G|$ a $|G_n| \uparrow |G|$. Dle Lebesgueovy věty o integrovatelné majorantě $\int_0^t (G_n(s) - G(s))^2\ \mathrm{d}s \longrightarrow 0$ s.j., neboť integrovatelnou majorantou pro výraz $(G_n - G)^2$ na $[0, t]$ je $4G^2$ a dle [Lach], věta 6.7 konvergence skoro jistě implikuje konvergenci v pravděpodobnosti.

□

Věta 3.22. Nechť $G \in \mathcal{L}$ a $G_n \in \mathcal{L}_2$, že $G_n \to G$ v $\mathcal{L}$, to jest $\int_0^t (G_n(s) - G(s))^2\ \mathrm{d}s \xrightarrow{P} 0$, $\forall t \geq 0$. Pak posloupnost $I^{\mathcal{L}_2}_{G_n}(t)$ je cauchyovská, a tedy konvergentní v $\mathcal{CP}$.

Důkaz:
Nejprve si uvědomme, že platí jednoduché lemma: Pro náhodné jevy A, B platí: $P(A) \leq P(B) + P(A \cap B^C)$, kde B^C značí doplňkový jev k B. Důkaz: $P(B) + P(A \cap B^C) = P(B) + P(A \setminus B) \geq P(A \cup B) \geq P(A)$. Nerovnosti plynou přímo z vlastností pravděpodobnosti jako konečné míry. Pro $n, m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$

tedy platí:

$$P\left[\sup_{0\le s\le t}\left|I^{\mathcal{L}_2}_{G_n-G_m}(s)\right|\ge\varepsilon\right]\le P\left[\int\limits_0^t (G_n(s)-G_m(s))^2\ \mathrm{d}s\ge\varepsilon\right]+$$

$$+P\left[\sup_{0\le s\le t}\left|I^{\mathcal{L}_2}_{G_n-G_m}(s)\right|\ge\varepsilon,\quad \int\limits_0^t (G_n(s)-G_m(s))^2\ \mathrm{d}s<\varepsilon\right]\le$$

$$\le P\left[\int\limits_0^t (G_n(s)-G_m(s))^2\ \mathrm{d}s\ge\varepsilon\right]+4\varepsilon^{-2}\mathrm{E}\left[\min\left(\int\limits_0^t (G_n(s)-G_m(s))^2\ \mathrm{d}s,\ \varepsilon\right)\right],$$

kde první nerovnost plyne z lemmatu uvedeného na začátku důkazu a druhá z Lenglartovy nerovnosti (3.19.). Posloupnost je tedy cauchyovská a díky větě 3.3. a úplnosti $\mathcal{CP}$ je důkaz hotov.

□

Definice 3.23. Za předpokladů v předchozí větě nazveme limitu $I^{\mathcal{L}_2}_{G_n}(t)$ stochastickým integrálem G. Tento proces budeme označovat jako $\int G\ \mathrm{d}W=\int_0^t G(s)\ \mathrm{d}W(s)$. Jeho existence je zaručena předchozí větou a jednoznačnost platí díky stejnému argumentu jako jednoznačnost $\mathcal{L}_2$-integrálu (3.11.).

Nyní budeme potřebovat pomocné tvrzení, abychom mohli zformulovat základní vlastnosti právě definovaného stochastického integrálu. Musíme totiž rozšířit platnost Lenglartovy nerovnosti.

Věta 3.24. Nechť $G\in\mathcal{L}$ a $\varepsilon,\delta>0$. Dále buď $M(t):=\int_0^t G(s)\ \mathrm{d}W(s)$. Potom

$$P\left[\sup_{0\le s\le t}|M(s)|\ge\varepsilon,\int\limits_0^t G^2(s)\ \mathrm{d}s<\delta\right]\le 4\varepsilon^{-2}\mathrm{E}\left[\min\left(\delta,\int\limits_0^t G^2(s)\ \mathrm{d}s\right)\right].$$

Důkaz:
Buďte $G_n\in\mathcal{L}_2$ takové, že $\int_0^t(G_n(s)-G(s))^2\ \mathrm{d}s\xrightarrow{P}0$. (Existence takových G_n je zaručena podle věty 3.21.) Označme $M_n(t):=\int_0^t G_n(s)\ \mathrm{d}W(s)$. Dle Lenglartovy nerovnosti (3.19.) platí

$$P\left[\sup_{0\le s\le t}|M_n(s)|\ge\varepsilon,\int\limits_0^t G_n^2(s)\ \mathrm{d}s<\delta\right]\le 4\varepsilon^{-2}\mathrm{E}\left[\min\left(\delta,\int\limits_0^t G_n^2(s)\ \mathrm{d}s\right)\right].$$

Dle definice stochastického integrálu $\sup_{0\le s\le t}|M_n(s)-M(s)|\xrightarrow{P}0$. Navíc platí

$$\int\limits_0^t (G_n(s)-G(s))^2\ \mathrm{d}s\xrightarrow{P}0\Longrightarrow\int\limits_0^t G_n^2(s)\ \mathrm{d}s\xrightarrow{P}\int\limits_0^t G^2(s)\ \mathrm{d}s,$$

protože pro $a,b\ge0$ obecně platí $(a+b)^2\le a^2-b^2\iff b\ge a$. Tudíž bychom potřebovali, aby $G_n\le G$, to ale po rozdělení na kladnou a zápornou část platí vzhledem k důkazu věty 3.21. A tedy díky integrovatelnosti G^2, G_n^2, jednoznačnosti limity a monotonii integrálu jsou implikace i celé tvrzení dokázány.

$\square$

Tvrzení 3.25. Vlastnosti stochastického integrálu: Nechť $G, G_n \in \mathcal{L}$. Pak
(i) Stochastický integrál je lineární funkcionál $L \mapsto \mathcal{CP}$.
(ii) Pro pevné t platí záměna limity a integrálu:

$$\int_0^t (G_n(s) - G(s))^2 \, \mathrm{d}s \xrightarrow{P} 0 \Longrightarrow \sup_{0 \le s \le t} \left| \int_0^s G_n(u) \, \mathrm{d}W(u) - \int_0^s G(u) \, \mathrm{d}W(u) \right| \xrightarrow{P} 0.$$

(iii) Pro $G = 0$ na $[0, s]$, ξ náhodnou veličinu, která je $\mathcal{F}_s$-měřitelná jest $\xi \cdot G \in \mathcal{L}$ a $\xi \cdot \int_0^t G(u) \, \mathrm{d}W(u) = \int_0^t \xi \cdot G(u) \, \mathrm{d}W(u)$ pro všechna $t \ge 0$.

(iv) Nechť τ je markovský čas procesu G, pak $G \cdot \mathbb{I}_{[0,\tau]} \in \mathcal{L}$ a

$$\int_0^{t \wedge \tau} G(s) \, \mathrm{d}W(s) = \int_0^t G(s) \cdot \mathbb{I}_{[0,\tau]} \, \mathrm{d}W(s).$$

(v) Pro $G \in \mathcal{J}$, $G = \sum_{j=0}^{\infty} G_j \cdot \mathbb{I}_{[t_j, t_{j+1})}$ platí

$$\int_0^t G(s) \, \mathrm{d}W(s) = \sum_{j=0}^{K-1} G_j(W(t_{j+1}) - W(t_j)) + G_K(W(t) - W(t_K)), \; t_K \le t < t_{K+1}.$$

(vi) $\int_0^t G(s) \, \mathrm{d}W(s)$ je lokální $\mathcal{F}_t$-martingal.

Důkaz:
(i) Plyne přímo z linearity $\mathcal{L}_2$-integrálu a konstrukce stochastického integrálu.
(ii) Díky rozšíření platnosti Lenglartovy nerovnosti je důkaz stejný jako při konstrukci stochastického integrálu ve větě 3.22.

(iii), (iv) Něchť $G_n \in \mathcal{L}_2$ takové, že $G_n \to G$ v $\mathcal{L}$. Daná vlastnost platí pro každý G_n a tedy díky vlastnostem limity i pro G.

(v) Nechť $J_n = J \cdot \mathbb{I}_{|J| \le n}$. Pak $J_n \in \mathcal{J}$ a $J_n \to J$. A opět se daná vlastnost přenese limitním přechodem.

(vi) Buď α_n čas prvního vstupu $\int_0^t G^2(s) \, \mathrm{d}s$ do n. Skutečnost, že se jedná o markovský čas plyne z 2.18. Dle (iv)

$$\int_0^{\alpha_n \wedge t} G(s) \, \mathrm{d}W(s) = \int_0^t G(s) \cdot \mathbb{I}_{[0,\alpha_n]} \, \mathrm{d}W(s)$$

a navíc

$$\mathrm{E} \left[\int_0^t (G(s) \cdot \mathbb{I}_{[0,\alpha_n]})^2 \, \mathrm{d}s \right] = \mathrm{E} \left[\int_0^{\alpha_n \wedge t} G^2(s) \, \mathrm{d}s \right] \le n.$$

A tedy z 3.11. a 3.12. vyplývá, že pro každé n je $\int_0^t G(s)\ \mathrm{d}W(s) \in \mathcal{CM}_2$. Nyní zbývá ukázat, že $\alpha_n \uparrow \infty$. Pro spor předpokládejme, že není pravda, že $\alpha_n \uparrow \infty$ pro $n \to \infty$. Pro pevné $\omega \in \Omega$ je α_n neklesající posloupnost, a tedy má limitu, která musí být konečná. Spočtěme

$$P\left[\lim_{n\to\infty} \alpha_n < \infty\right] = P\left[\exists\ t_0 < \infty : \int\limits_0^{t_0} G^2(s)\ \mathrm{d}s = \infty\right] = 0,$$

protože $\int_0^t G^2(s)\ \mathrm{d}s$ je spojitý proces.

□

Věta 3.26. Riemannova integrace: Nechť X je spojitý proces, pak $X \in \mathcal{L}$, navíc pro $t \geq 0$ a pro posloupnost dělení intervalu $[0,t]$
$\mathcal{D}_n = \left\{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \cdots < t_{K_n}^{(n)} = t\right\}$ takovou, že $||\mathcal{D}_n|| \to 0$ platí

$$\sum_{k=0}^{K_n-1} X(t_k^{(n)}) \cdot (W_{t_{k+1}}^{(n)} - W_{t_k}^{(n)}) \xrightarrow{P} \int\limits_0^t X(s)\ \mathrm{d}W(s).$$

Důkaz:
Buď $X_n = \sum_{k=0}^{K_n-1} X(t_k{}^{(n)}) \cdot \mathbb{I}_{[t_k{}^{(n)}, t_{k+1}{}^{(n)})}$. Pak

$$\sum_{k=0}^{K_n-1} X(t_k^{(n)}) \cdot (W_{t_{k+1}}^{(n)} - W_{t_k}^{(n)}) = \int\limits_0^t X_n(s)\ \mathrm{d}W(s).$$

Ze spojitosti X přímo vyplývá, že $\int_0^t (X_n - X)^2\ \mathrm{d}s \to 0$ všude na Ω. Odtud, opět díky Lenglartově nerovnosti, plyne důkaz našeho tvrzení.

□

Věta 3.27. Itôova formule: Nechť f je dvakrát spojitě diferencovatelná reálná funkce. Pak

$$f(W(t)) = f(0) + \int\limits_0^t f'(W(s))\ \mathrm{d}W(s) + \frac{1}{2}\int\limits_0^t f''(W(s))\ \mathrm{d}s.$$

Zapsáno pomocí diferenciálů:

$$\mathrm{d}f(W(t)) = f'(W(t))\ \mathrm{d}W(t) + \frac{1}{2}f''(W(t))\ \mathrm{d}t.$$

Důkaz:
Nechť $0 \leq s < t$. Proveďme Taylorův rozvoj v bodě s:

$$f(W(t)) - f(W(s)) = f'(W(s)) \cdot (W(t) - W(s)) + \frac{1}{2}f''(\theta_{s,t}) \cdot (W(t) - W(s))^2 =$$

$$= f'(W(s)) \cdot (W(t) - W(s)) + \frac{1}{2}f''(W(s)) \cdot (W(t) - W(s))^2 +$$

$$+\frac{1}{2}(f''(\theta_{s,t}) - f''(W(s))) \cdot (W(t) - W(s))^2,$$

kde $\theta_{s,t} \in [W(s), W(t)]$ (respektive $[W(t), W(s)]$). Uvažme posloupnost dělení $\mathcal{D}_n = \left\{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \cdots < t_{K_n}^{(n)} = t\right\}$ takovou, že $||\mathcal{D}_n|| \to 0$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\mathcal{D}_n \subset \mathcal{D}_{n+1}$. Označme $f_n(W(t)) := f(0) + \sum_{j=1}^{K_n} f'(W(t_{j-1}^{(n)})) \cdot (W(t_j^{(n)}) - (t_{j-1}^{(n)})) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K_n} f''(W(t_{j-1}^{(n)})) \cdot (W(t_j^{(n)}) - W(t_{j-1}^{(n)}))^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K_n}(f''(\theta_j^{(n)}) - f''(W(t_{j-1}^{(n)}))) \cdot (W(t_j^{(n)}) - W(t_{j-1}^{(n)}))^2$, kde $\theta_j^{(n)} \in [W(t_j^{(n)}), W(t_{j-1}^{(n)})]$, respektive $[W(t_{j-1}^{(n)}), W(t_j^{(n)})]$.

$\sum_{j=1}^{K_n} f'(W(t_{j-1}^{(n)})) \cdot (W(t_j^{(n)}) - (t_{j-1}^{(n)})) \xrightarrow{P} \int_0^t f'(W(s))\,\mathrm{d}W(s)$ díky větě 3.24. Dále pak

$$\left|\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K_n}(f''(\theta_j^{(n)}) - f''(W(t_{j-1}^{(n)}))) \cdot (W(t_j^{(n)}) - W(t_{j-1}^{(n)}))^2\right| \leq$$

$$\leq \max_{\substack{u,v:|u|,|v|\in[0,\max_{0\leq s\leq t}|W(s)|]\\ |u-v|\leq\max_{1\leq j\leq K_n}|W(t_j^{(n)})-W(t_{j-1}^{(n)})|}} |f''(u) - f''(v)| \cdot \sum_{j=1}^{K_n}(W(t_j^{(n)}) - W(t_{j-1}^{(n)}))^2.$$

Tento výraz ale pro $n \to \infty$ konverguje k nule díky konečné kvadratické variaci Wienerova procesu a stejnoměrné spojitosti f'' a W na $[0, t]$. Nyní zbývá ukázat, že

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K_n} f''(W(t_{j-1}^{(n)})) \cdot (W(t_j^{(n)}) - W(t_{j-1}^{(n)}))^2 \xrightarrow{P} \frac{1}{2}\int_0^t f''(W(s))\,\mathrm{d}s.$$

To ale plyne přímo z toho, že

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K_n}(W(t_j^{(n)}) - W(t_{j-1}^{(n)}))^2 \xrightarrow{P} t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)},$$

jak bylo ukázáno ve větě 3.16. Nyní tedy $f_n \xrightarrow{P} f$ a zároveň $f_n \xrightarrow{P} f(0) + \int_0^t f'(W(s))\,\mathrm{d}W(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W(s))\,\mathrm{d}s$. Díky jednoznačnosti limity je tedy důkaz hotov.

□

Předchozí věta dává praktický návod, jak počítat různé příklady. Nyní pro ukázku uvedeme některé z nich.

Příklady 3.28. Nechť $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Spočtěme pomocí předchozí věty, kolik je $W^2(t)$, $W^3(t)$, $\sin(W(t))$ a $\mathrm{e}^{W(t)}$.

Řešení:

$$W^2(t) = \int_0^t 2W(s)\,\mathrm{d}W(s) + \frac{1}{2}\int_0^t 2\,\mathrm{d}s = \int_0^t 2W(s)\,\mathrm{d}W(s) + t.$$

Díky zkonstruovanému stochastickému integrálu víme, že je vše dobře definováno (spojitost). Díky postupu v důkazu jednoznačnosti ve větě 3.11. navíc víme, jak jej libovolně přesně numericky aproximovat. Poznamenejme ještě, že výsledek je stejný jako ve větě 3.16.

□

$$W^3(t) = \int_0^t 3W^2(s)\ \mathrm{d}W(s) + \frac{1}{2}\int_0^t 6W(s)\ \mathrm{d}s.$$

Poznamenejme, že $\int_0^t W(s)\ \mathrm{d}s$ je gaussovský proces s nulovou střední hodnotou a rozptylem

$$\mathrm{E}\left[\left(\int_0^t W(s)\ \mathrm{d}s\right)^2\right] = \mathrm{E}\left[\left(\int_0^t W(s_1)\ \mathrm{d}s_1\right)\cdot\left(\int_0^t W(s_2)\ \mathrm{d}s_2\right)\right] =$$

$$= \mathrm{E}\left[\int_0^t\int_0^t W(s_1)\cdot W(s_2)\ \mathrm{d}s_1\ \mathrm{d}s_2\right] = \int_0^t\int_0^t \mathrm{E}\left[W(s_1)\cdot W(s_2)\right]\ \mathrm{d}s_1\ \mathrm{d}s_2 =$$

$$= \int_0^t\int_0^t \min(s_1, s_2)\ \mathrm{d}s_1\ \mathrm{d}s_2 = 2\cdot\int_0^t\int_0^{s_1} s_2\ \mathrm{d}s_2\ \mathrm{d}s_1 = \frac{t^3}{3}.$$

K výpočtu byla použita Fubiniova věta a Lebesgueova věta o integrovatelné majorantě.

□

$$\mathrm{e}^{W(t)} = \int_0^t \mathrm{e}^{W(s)}\ \mathrm{d}W(s) + \int_0^t \mathrm{e}^{W(s)}\ \mathrm{d}s.$$

□

$$\sin(W(t)) = \int_0^t \cos(W(s))\ \mathrm{d}W(s) - \int_0^t \sin(W(s))\ \mathrm{d}s.$$

□

Z těchto výpočtů vyplývá, jak se projevuje nekonečná variace Wienerova procesu. Oproti klasické analýze se objevuje drift.

Seznam použité literatury

[Lach] P. Lachout: *Teorie pravděpodobnosti.* Karolinum, Praha, 2004.

[TPMZ] J. Štěpán: *Teorie pravděpodobnosti: matematické základy.* Academia, Praha, 1987.

[DHS] J. Dupačová, J. Hurt and J. Štěpán: *Stochastic Modeling in Economics and Finance.* Kluwer Academic Publishers, Dodrecht, Boston, London, 2002.

[Chung] K.L. Chung and R.J. Williams: *Introduction to Stochastic Integration.* Birkhauser, Boston, Stuttgart, 1984.