Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Martin Marcinčín

Tři důkazy centrální limitní věty

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	prof. RNDr. Josef Štěpán, DrSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2013

Rád bych poděkoval vedoucímu mé bakalářské práce prof. RNDr. Josefu Štěpánovi, DrSc. a všem, kteří mě jakkoliv podpořili při jejím psaní. Zejména děkuji konzultantovi Mgr. Ing. Pavlu Křížovi za jeho podněty, rady a ochotu.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Název práce: Tři důkazy centrální limitní věty

Autor: Martin Marcinčín

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Josef Štěpán, DrSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Práce ukazuje tři různé důkazy centrální limitní věty s použitím elementárních metod. Centrální limitní věta ve Feller - Lindebergově tvaru je dokázána pomocí konvergence charakteristických funkcí a Fejérovy věty díky stejnoměrné aproximaci omezené funkce trigonometrickým polynomem na omezeném intervalu. Dále je uveden důkaz využívající charakterizace konvergence v distribuci jako konvergence středních hodnot funkcí s omezenými derivacemi všech řádů. Ve tvaru pro součty nezávislých náhodných veličin se všemi momenty konečnými je věta dokázána pomocí konvergence všech momentů k momentům normálního rozdělení, které jej jednoznačně definují.

Klíčová slova: Centrální limitní věta, konvergence v distribuci

Title: Three proofs of a limit theorem

Author: Martin Marcinčín

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: prof. RNDr. Josef Štěpán, DrSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: We show three diferent proofs of the central limit theorem using elementary methods. The central limit theorem with the Feller - Lindeberg condition is proven using a convergence of charakteristic functions and Fejer theorem about uniform convergence of trigonometric polynoms on a bounded interval. The second proof is based on the fact that convergence in distribution is equivalent to convergence of means of functions with all derivatives bounded. The central limit theorem for sums of independent random variables with all moments finite is shown using convergence of all moments and determinacy of normal distribution by its moments.

Keywords: Central limit theorem, convergence in distribution

Obsah

Úvod

Centrální limitní věta, kterou budeme v tomto textu dokazovat, patří mezi klasické a slavné výsledky matematické statistiky a je zásadní pro mnohé statistické metody. Předmětem centrální limitní věty je tvrzení, že vhodně normovaný součet nezávislých náhodných veličin konverguje v distribuci k normálnímu rozdělení. Zde se pokusíme toto tvrzení dokázat třemi různými přístupy, pokaždé se ale budeme držet „elementárních“ metod.

V první kapitole sledujeme postup použitý při přednáškách *Teorie pravděpodobnosti I* pomocí charakteristických funkcí. Ukážeme ale, že není nutné se odkazovat na Prochorovovu větu, která vyžaduje složitější aparát, ale místo ní použijeme větu Fejérovu a aproximaci trigonometrickými polynomy.

Druhá kapitola se zabývá důkazem uvedeným v knize *Teorie pravděpodobnosti* (Štěpán, 1987), který využívá výhodnější charakterizace konvergence v distribuci spočívající v konvergenci integrálů funkcí s omezenými derivacemi všech řádů. Hlavní myšlenka je pak nahrazovat jednotlivé sčítance normálně rozdělenými veličinami. V tomto textu se budeme věnovat i důkazu některých kroků, které autor vynechává jako cvičení.

Aproximace trigonometrickými polynomy z první části vyvolává otázku, zda je možné použít i mocniny, a tedy konvergence momentů náhodných veličin. Souvislostí mezi konvergencí v distribuci a konvergencí momentů se zabývá třetí kapitola, ve které pomocí konvergence momentů a Hellyho věty ukážeme slabší verzi centrální limitní věty.

Z důvodu úplnosti uvádíme i u dobře známých vět důkazy, které lze běžně najít v literatuře. Laskavý čtenář může tyto důkazy přeskočit, aniž by tím ovlivnil porozumění celému textu.

Kapitola 1

Důkaz pomocí konvergence trigonometrických polynomů

V první kapitole si ukážeme důkaz pomocí charakteristických funkcí podle přednášek *Teorie pravděpodobnosti I*, avšak místo Prochorovovy věty (viz Štěpán, 1987, III.3.3) využijeme věty Fejérovy (Věta 4) a konvergence trigonometrických polynomů.

1.1 Konvergence charakteristických funkcí

Nejprve zavedeme několik základních pojmů.

Definice 1 (Náhodná veličina, indukovaná míra)**.** *(Štěpán, 1987, I.3)*
Náhodnou veličinou budeme v tomto textu rozumět reálnou náhodnou veličinu, tj. měřitelné zobrazení z pravděpodobnostního prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *do prostoru reálných čísel opatřených borelovskou* σ*-algebrou (značíme* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*).*
Pravděpodobnostní mírou P_X *na reálných číslech budeme rozumět míru indukovanou náhodnou veličinou* X*, tj.*

$$P_X[M] := P[X \in M] = P[\omega : X(\omega) \in M], \quad M \subset \mathbb{R}.$$

Definice 2 (Prostor L_n)**.** *(Štěpán, 1987, II.6)*
Nechť číslo n *je přirozené. Množinu všech náhodných veličin* X *z pravděpodobnostního prostoru* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *takových, že*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^n \mathrm{d}P_X(x) < \infty$$

značíme $L_n(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Definice 3 (Charakteristická funkce)**.** *(Štěpán, 1987, II.7.5)*
Nechť X *je náhodná veličina. Komplexní funkci*

$$\widehat{P}_X(t) := \mathrm{E}e^{\mathrm{i}tX} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{i}tx} \mathrm{d}P_X(x), \quad t \in \mathbb{R}$$

nazveme charakteristickou funkcí náhodné veličiny X.

Pro právě zavedené charakteristické funkce budeme potřebovat následující vlastnost.

Věta 1 (Derivace charakteristické funkce)**.** *(Štěpán, 1987, II.7.9)*

Nechť $X \in L_n(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *je náhodná veličina,* $n \in \mathbb{N}$*. Pak existují všude na* $\mathbb{R}$ *spojité omezné derivace funkce* $\widehat{P}_X$ *do řádu* n *a platí*

$$\widehat{P}_X^{(k)}(t) = \mathrm{i}^k \mathrm{E}\left[X^k e^{\mathrm{i}tX}\right], t \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, n.$$

Důkaz. Je $X \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Dále $|Xe^{\mathrm{i}tX}| = |X|$. Z věty o integrovatelné majorantě je funkce

$$\widehat{P}_X'(t) = \mathrm{i}\mathrm{E}e^{\mathrm{i}tX}, \ t \in \mathbb{R}$$

omezená číslem $\mathrm{E}|X|$ a spojitá. Tvrzení nyní plyne indukcí. □

Lemma 2. *Nechť pro každé přirozené* n *je* $\{a_{n,k}\}_{k=1}^{k_n}$ *posloupnost komplexních čísel,* $k_n \in \mathbb{N}$*. Dále nechť*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} a_{n,k} = a \in \mathbb{C}, \quad \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} |a_{n,k}| < \infty, \quad \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} |a_{n,k}|^2 = 0.$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{k_n} (1 + a_{n,k}) = e^a.$$

Důkaz. Nejprve indukcí dokážeme následující tvrzení:

Nechť pro $l \in \mathbb{N}$ jsou $i = 1 \dots l, y_i \in \mathbb{C}, z_i \in \mathbb{C}$. Potom platí

$$\left| \prod_{i=1}^{l} y_i - \prod_{i=1}^{l} z_i \right| \leq \sum_{i=1}^{l} \left| \left(\prod_{j=1}^{i-1} y_j \right) (y_i - z_i) \left(\prod_{j=i+1}^{l} z_j \right) \right|,$$

kde součin přes prázdnou množinu je roven jedné.

Pro l = 2 dostaneme tvrzení ihned z trojúhelníkové nerovnosti. Pro libovolné $l \in \mathbb{N}$ je z případu pro $l = 2$ a z indukčního předpokladu

$$\begin{aligned}
\left| \prod_{i=1}^{l} y_i - \prod_{i=1}^{l} z_i \right| &\leq \left| \left(\prod_{i=1}^{l-1} y_i - \prod_{i=1}^{l-1} z_i \right) z_l \right| + \left| \left(\prod_{i=1}^{l-1} y_i \right) (y_l - z_l) \right| \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{l-1} \left| \left(\prod_{j=1}^{i-1} y_j \right) (y_i - z_i) \left(\prod_{j=i+1}^{l-1} z_j \right) \right| \right) |z_l| + \left| \left(\prod_{i=1}^{l-1} y_i \right) (y_l - z_l) \right| \\
&= \sum_{i=1}^{l} \left| \left(\prod_{j=1}^{i-1} y_j \right) (y_i - z_i) \left(\prod_{j=i+1}^{l} z_j \right) \right|.
\end{aligned}$$

Nyní přistoupíme k důkazu lemmatu. Pomocí právě dokázaného tvrzení a rozvoje $e^{a_{n,k}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^j}{j!}$ odhaneme následující výraz:

$$\begin{aligned}
R := \left| \prod_{k=1}^{k_n} (1 + a_{n,k}) - e^{\sum_{k=1}^{k_n} a_{n,k}} \right| &= \left| \prod_{k=1}^{k_n} (1 + a_{n,k}) - \prod_{k=1}^{k_n} e^{a_{n,k}} \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{k_n} \left| \left(\prod_{l=1}^{k-1} (1 + |a_{n,l}|) \right) \left(\sum_{i=2}^{\infty} \frac{a_{n,k}^i}{i!} \right) \left(\prod_{l=k+1}^{k_n} e^{a_{n,l}} \right) \right|.
\end{aligned}$$

Využijeme toho, že pro každé $x > 0$ je $1 + x < e^x$:

$$R \leq \sum_{k=1}^{k_n} \left| \left(\prod_{l=1}^{k-1} e^{\left|a_{n,l}\right|} \right) \left(\frac{a_{n,k}^2}{2} e^{a_{n,k}} \right) \left(\prod_{l=k+1}^{k_n} e^{a_{n,l}} \right) \right|$$
$$\leq \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{k_n} \left|a_{n,k}\right|^2 \right) \left(e^{\sum_{k=1}^{k_n} \left|a_{n,k}\right|} \right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

protože z předpokladů lemmatu víme, že $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left|a_{n,k}\right|^2 = 0$ a dále

$$e^{\sum_{k=1}^{k_n} \left|a_{n,k}\right|} \leq e^{\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left|a_{n,k}\right|} < \infty.$$

□

Právě dokázané lemma je sice pouze „technické“, jeho důležitost ale ukáže následující věta.

Věta 3 (Konvergence charakteristických funkcí)**.** *Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $k_n \in \mathbb{N}$. Náhodné veličiny $X_{n,k} \in L_2(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$ nechť jsou nezávislé pro $k = 1, \ldots, k_n, n \in \mathbb{N}$, mají nulovou střední hodnotu a zároveň platí*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mathrm{var} X_{n,k} = 1,$$

$$\forall \epsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mathrm{E} X_{n,k}^2 \mathbb{I}_{\left[\left|X_{n,k}\right| > \epsilon\right]} = 0,$$

kde druhé podmínce říkáme Feller - Lindebergova. Potom

$$\widehat{P}_{\sum_{k=1}^{k_n} X_{n,k}}(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \widehat{P}_Z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \;\; t \in \mathbb{R},$$

kde Z je náhodná veličina s normovaným normálním rozdělením (viz Anděl, 1985, II.6).

Důkaz. Nejprve ukážeme, že $\widehat{P}_Z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$:

$$\widehat{P}_Z(t) = \mathrm{E} e^{\mathrm{i}tZ} = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-\mathrm{i}t)^2} \mathrm{d}x = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z = e^{-\frac{t^2}{2}},$$

kde jsme použili substituci $z = x - \mathrm{i}t$. (Kompletní důkaz viz Štěpán, 1987, str. 160, II.7.17 c)

Upravíme nyní charakteristickou funkci součtu $X_{n,k}$:

$$\widehat{P}_{\sum_{k=1}^{k_n} X_{n,k}}(t) = \mathrm{E} e^{\mathrm{i}t \sum_{k=1}^{k_n} X_{n,k}} = \prod_{k=1}^{k_n} \mathrm{E} e^{\mathrm{i}t X_{n,k}} = \prod_{k=1}^{k_n} \widehat{P}_{X_{n,k}}.$$

Každá $X_{n,k} \in L_2(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$, podle Věty 1 o derivaci charakteristické funkce tedy existují dvě spojité derivace, tudíž pro $t \in \mathbb{R}$ existují $\Phi_{n,k}$ a $\Theta_{n,k}$ takové, že $|\Phi_{n,k}| < |t|$ a $|\Theta_{n,k}| < |t|$ a platí

$$\widehat{P}_{X_{n,k}}(t) = \widehat{P}_{X_{n,k}}(0) + t\widehat{P}'_{X_{n,k}}(0) + \frac{t^2}{2}\left(\mathrm{Re}\widehat{P}''_{X_{n,k}}(\Phi_{n,k}) + \mathrm{i}\mathrm{Im}\widehat{P}''_{X_{n,k}}(\Theta_{n,k})\right)$$
$$= 1 - \frac{t^2}{2}\mathrm{E}\Big[X_{n,k}^2\big(\cos(\Phi_{n,k}X_{n,k}) + \mathrm{i}\sin(\Theta_{n,k}X_{n,k})\big)\Big].$$

Pro $t \in \mathbb{R}$ definujme

$$a_{n,k}(t) := -\frac{t^2}{2}\mathrm{E}\Big[X_{n,k}^2\big(\cos(\Phi_{n,k}X_{n,k}) + \mathrm{i}\sin(\Theta_{n,k}X_{n,k})\big)\Big].$$

Potom

$$\widehat{P}_{\sum_{k=1}^{k_n} X_{n,k}}(t) = \prod_{k=1}^{k_n}(1 + a_{n,k}(t)).$$

Ukážeme, že posloupnost $\{a_{n,k}(t)\}_{k=1}^{k_n}$ splňuje podmínky z Lemmatu 2:

$$\sum_{k=1}^{k_n}|a_{n,k}(t)| \leq \sum_{k=1}^{k_n}\left|\frac{t^2}{2}\mathrm{E}\left[X_{n,k}^2(1+\mathrm{i})\right]\right| \leq t^2\sum_{k=1}^{k_n}\mathrm{var}X_{n,k},$$

odkud dostáváme první podmínku:

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n}|a_{n,k}(t)| < \infty.$$

Zvolme $\epsilon > 0$. Pro dostatečně velké n je

$$|a_{n,k}(t)| \leq t^2\left(\mathrm{E}\left[X_{n,k}^2\mathbb{I}_{\left[|X_{n,k}|>\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{2}t}\right]}\right] + \mathrm{E}\left[X_{n,k}^2\mathbb{I}_{\left[|X_{n,k}|\leq\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{2}t}\right]}\right]\right)$$

$$\leq t^2\sum_{l=1}^{k_n}\mathrm{E}\left[X_{n,l}^2\mathbb{I}_{\left[|X_{n,l}|>\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{2}t}\right]}\right] + t^2\frac{\epsilon}{2t^2} < \epsilon,$$

odkud

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n}|a_{n,k}(t)|^2 \leq \lim_{n\to\infty}\sup_{k=1,\dots,n}|a_{n,k}(t)|\sum_{k=1}^{k_n}|a_{n,k}(t)| = 0,$$

čímž je splněna druhá podmínka.

Zbývá dokázat, že $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n}a_{n,k}(t) = -\frac{t^2}{2}$:

$$\left|a_{n,k}(t) + \frac{t^2}{2}\mathrm{var}X_{n,k}\right| \leq \frac{t^2}{2}\mathrm{E}\Big[X_{n,k}^2\big|1 - \cos(\Phi_{n,k}X_{n,k}) - \mathrm{i}\sin(\Theta_{n,k}X_{n,k})\big|\Big]$$

$$\leq \frac{3t^2}{2}\mathrm{E}\left[X_{n,k}^2\mathbb{I}_{[|X_{n,k}|>\xi]}\right] + \frac{t^2}{2}\mathrm{E}\left[X_{n,k}^2\mathbb{I}_{[|X_{n,k}|\leq\xi]}\right]\big(1 - \cos(|t|\,\xi) + \sin(|t|\,\xi)\big)$$

pro libovolné $\xi > 0, \xi < \frac{\pi}{2|t|}$. K danému $\epsilon > 0$ najdeme ξ takové, že $\big(1-\cos(|t|\,\xi)+\sin(|t|\,\xi)\big) < \epsilon$. Pro dostatečně velké n máme

$$\left|\sum_{k=1}^{k_n}a_{n,k}(t) + \frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^{k_n}\mathrm{var}X_{n,k}\right| \leq \sum_{k=1}^{k_n}\left|a_{n,k}(t) + \frac{t^2}{2}\mathrm{var}X_{n,k}\right|$$

$$\leq \frac{3t^2}{2}\sum_{k=1}^{k_n}\mathrm{E}\left[X_{n,k}^2\mathbb{I}_{[|X_{n,k}|>\xi]}\right] + \frac{t^2}{2}\sum_{k=1}^{k_n}\mathrm{var}X_{n,k}\big(1 - \cos(|t|\,\xi) + \sin(|t|\,\xi)\big) < \epsilon.$$

Celkem tedy dostáváme pro každé $t \in \mathbb{R}$, že

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} a_{n,k}(t) = -\frac{t^2}{2}$$

a z Lemmatu 2 plyne

$$\widehat{P}_{\sum_{k=1}^{k_n} X_{n,k}}(t) = \prod_{k=1}^{k_n} (1 + a_{n,k}(t)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{t^2}{2}}, \;\; \forall t \in \mathbb{R}.$$

□

Vidíme tedy, že charakteristické funkce náhodných veličin splňujících Feller - Lindebergovu podmínku konvergují k charakteristické funkci normálního rozdělení. V následujícím oddíle ukážeme, že díky aproximaci trigonometrickými polynomy již konvergují náhodné veličiny i v distribuci (Věta 7).

1.2 Konvergence v distribuci a konvergence charakteristických funkcí

Definice 4 (Slabá konvergence, konvergence v distribuci)**.** *(Štěpán, 1987, II.3 a II.4) Řekneme, že posloupnost pravděpodobnostních měr* $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ *na* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *konverguje slabě k pravděpodobnostní míře* P *na* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*, jestliže*

$$\forall f \in C_b(\mathbb{R}) : \int_{-\infty}^{\infty} f \mathrm{d}P_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} f \mathrm{d}P,$$

kde $C_b(\mathbb{R})$ *je množina všech spojitých omezených funkcí na* $\mathbb{R}$*. Píšeme* $P_n \xrightarrow{w} P$*.*

Řekneme, že posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}, X_i$ *definovaná na prostoru* $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, P_i), i \in \mathbb{N}$ *konverguje v distribuci k náhodné veličině* X *definované na* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$*, jestliže posloupnost indukovaných měr* $\{P_{X_n}\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje slabě k indukované míře* P_X *na* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*, tj.*

$$\forall f \in C_b(\mathbb{R}) : \mathrm{E}f(X_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{E}f(X).$$

Značíme $X_n \xrightarrow{d} X$*.*

Věta 4 (Fejérova věta)**.** *(Jarník, 1955, Věta 191 II.)*

Nechť $f \in C_b(\mathbb{R})$ *je* 2π *- periodická funkce,* $a < b$*.* $s_k(x)$ *nechť je součet prvních* $k+1$ *členů Fourierovy řady funkce* f *v bodě* x*, tj.*

$$s_k = \sum_{j=-k}^{k} c_j e^{\mathrm{i}jx}; \;\; c_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-\mathrm{i}jx} \mathrm{d}x.$$

Položme

$$\sigma_m(x) := \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} s_k(x).$$

Potom pro každé $x \in [a,b]$ *platí*

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_m(x) = f(x).$$

Navíc tato konvergence je stejnoměrná na $[a,b]$*.*

Důkaz. (Pro kompletní důkaz viz Jarník, 1955, Věta 191 b), zde uvedeme jen některé kroky.

Z definice $s_m(x)$ se nejprve ukáže, že

$$\begin{aligned} s_m(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(v) \sum_{k=-m}^{m} e^{\mathrm{i}k(v-x)} \mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(f(x+2t) + f(x-2t)\big) \frac{\sin\big((2m+1)t\big)}{\sin t} \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Navíc je

$$\sum_{k=0}^{m} e^{(2k+1)\mathrm{i}t} = e^{\mathrm{i}t} \frac{e^{(2m+2)\mathrm{i}t} - 1}{e^{2\mathrm{i}t}} = \frac{e^{(2m+2)\mathrm{i}t} - 1}{2\mathrm{i} \sin t}$$

a z imaginární části máme

$$\sum_{k=0}^{m} \sin\big((2k+1)t\big) = \frac{1 - \cos\big((2m+2)t\big)}{2 \sin t} = \frac{\Big[\sin\big((m+1)t\big)\Big]^2}{\sin t}.$$

Pro $\sigma_m(x)$ pak dostáváme

$$\sigma_m(x) = \frac{1}{(m+1)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(f(x+2t) + f(x-2t)\Big) \left(\frac{\sin\big((m+1)t\big)}{\sin t}\right)^2 \mathrm{d}t$$

a navíc pro funkci $g(x) = 1$ je

$$1 = \frac{2}{(m+1)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin\big((m+1)t\big)}{\sin t}\right)^2 \mathrm{d}t.$$

Pro $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ je

$$\begin{aligned} &\sigma_m(x) - f(x) \\ &\quad = \frac{1}{(m+1)\pi} \int_0^{\delta} \Big(f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)\Big) \left(\frac{\sin\big((m+1)t\big)}{\sin t}\right)^2 \mathrm{d}t \\ &\quad + \frac{1}{(m+1)\pi} \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \Big(f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)\Big) \left(\frac{\sin\big((m+1)t\big)}{\sin t}\right)^2 \mathrm{d}t \\ &\quad =: \sigma_m(x,\delta) + \tau_m(x,\delta). \end{aligned}$$

Z omezenosti a periodicity f dostaneme

$$|\tau_m(x,\delta)| \leq \frac{1}{(m+1)\sin^2\delta} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(v)| \mathrm{d}v + K\right) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ze stejnoměrné spojitosti f na $[0, 2\pi]$ najdeme takové δ, že pro $t \in (0,\delta)$ je $|f(x+2t) - f(x)| < \epsilon$ a $|f(x-2t) - f(x)| < \epsilon$ pro $x \in (0, 2\pi)$. Potom i $|\sigma_m(x,\delta)| < \epsilon$ pro každé m a tedy $|\sigma_m(x) - f(x)|$ nezávisle na x.

□

Věta 5 (Spojitost charakteristické funkce). *(Štěpán, 1987, II.7.2. (6))*
Charakteristická funkce libovolné náhodné veličiny X je stejnoměrně spojitá na $\mathbb{R}$.

Důkaz. Pro libovolné $s, t \in \mathbb{R}$ je

$$\left|\widehat{P}_X(s+t) - \widehat{P}_X(s)\right| = \left|\mathrm{E}e^{\mathrm{i}(s+t)X} - \mathrm{E}e^{\mathrm{i}sX}\right| \leq \mathrm{E}\left|e^{\mathrm{i}sX}(e^{\mathrm{i}tX} - 1)\right| = \mathrm{E}|e^{\mathrm{i}tX} - 1|.$$

Stačí tedy ukázat spojitost v 0. Máme $|e^{\mathrm{i}tx} - 1| \leq 2$ integrovatelnou majorantu (podle míry P_X) a podle Lebesgueovy věty je

$$\lim_{t\to 0} \mathrm{E}|e^{\mathrm{i}tX} - 1| = \lim_{t\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{\mathrm{i}tx} - 1| \mathrm{d}P_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{t\to 0} |e^{\mathrm{i}tx} - 1| \mathrm{d}P_X(x) = 0.$$

□

Lemma 6. *(Kallenberg, 1997, Lemma 4.1)*
Pro náhodnou veličinu X a $r > 0$ platí

$$P\big[|X| > r\big] \leq \frac{r}{2} \int_{-\frac{2}{r}}^{\frac{2}{r}} \left|1 - \widehat{P}_X(t)\right| \mathrm{d}t.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}
\frac{r}{2} \int_{-\frac{2}{r}}^{\frac{2}{r}} \left|1 - \widehat{P}_X(t)\right| \mathrm{d}t &= \frac{r}{2} \left| \int_{-\frac{2}{r}}^{\frac{2}{r}} \left(1 - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{i}tx} \mathrm{d}P_X(x)\right) \mathrm{d}t \right| \\
&= \frac{r}{2} \left| \int_{-\frac{2}{r}}^{\frac{2}{r}} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos tx - \mathrm{i} \sin tx)\, \mathrm{d}P_X(x) \mathrm{d}t \right| \\
&= \frac{r}{2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{2}{r}}^{\frac{2}{r}} (1 - \cos tx - \mathrm{i} \sin tx)\, \mathrm{d}t \mathrm{d}P_X(x) \right| \\
&= r \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left[t - \frac{\sin tx}{x} \right]_{t=0}^{\frac{2}{r}} \mathrm{d}P_X(x) \right| \geq 2 \int_{|x|>r} \left(1 - \frac{\sin \frac{2x}{r}}{\frac{2x}{r}}\right) \mathrm{d}P_X(x) \\
&\geq 2 \int_{|x|>r} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}P_X(x) = P\big[|X| > r\big].
\end{aligned}$$

□

Věta 7. *(Znění viz Kallenberg, 1997, Theorem 4.3)*
Nechť $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost náhodných veličin, jejichž charakteristické funkce bodově konvergují k charakteristické funkci náhodné veličiny W. Potom Y_n konvergují k W i v distribuci, $Y_n \xrightarrow{d} W$.

Důkaz. Dle Definice 2 chceme ukázat, že $\mathrm{E}f(Y_n) \to \mathrm{E}f(W)$ pro každou $f \in C_b(\mathbb{R})$. Nejprve dokážeme tvrzení pro libovolný reálný trigonometrický polynom

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{k} a_j \cos(jx) + \sum_{j=1}^{k} b_j \sin(jx),$$

kde $k \in \mathbb{N}, a_0, a_j, b_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, k$. Definujme nové koeficienty

$$c_j := \begin{cases} \frac{a_j}{2} + \frac{b_j}{2\mathrm{i}}, & j = 0, \ldots, k, \\ \frac{a_j}{2} - \frac{b_j}{2\mathrm{i}}, & j = -k, \ldots, -1. \end{cases}$$

Polynom g potom lze přepsat do tvaru

$$g(x) = \sum_{j=-k}^{k} c_j e^{\mathrm{i}jx}, x \in \mathbb{R}$$

a platí pro něj

$$\begin{aligned} \mathrm{E}g(Y_n) &= \mathrm{E} \sum_{j=-k}^{k} c_j e^{\mathrm{i}jY_n} = \sum_{j=-k}^{k} c_j \mathrm{E}e^{\mathrm{i}jY_n} \\ &= \sum_{j=-k}^{k} c_j \widehat{P}_{Y_n}(j) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{j=-k}^{k} c_j \widehat{P}_W(j) = \mathrm{E}g(W), \end{aligned}$$

kde jsme využili předpoklad o bodové konvergenci charakteristických funkcí.

Mějme nyní libovolnou funkci $f \in C_b(\mathbb{R}), \epsilon > 0$. Víme, že $\widehat{P}_W(0) = \mathrm{E}e^0 = 1$, ze spojitosti charakteristické funkce $\widehat{P}_W$ (Věta 5) a z Lemmatu 6 najdeme $r_1 > 0$ takové, že

$$P\big[|W| > r_1\big] \le \frac{r_1}{2} \int_{-\frac{2}{r_1}}^{\frac{2}{r_1}} \big|1 - \widehat{P}_W(t)\big| \mathrm{d}t \le 2 \sup_{|s| \le \frac{2}{r_1}} |1 - \widehat{P}_W(s)| < \frac{\epsilon}{9(\sup_{\mathbb{R}} |f| + \epsilon)}.$$

Z Lemmatu 6 odhadneme i pravděpodobnosti

$$\limsup_{n\to\infty} P\big[|Y_n| > r_1\big] \le \frac{r_1}{2} \limsup_{n\to\infty} \int_{-\frac{2}{r_1}}^{\frac{2}{r_1}} \big|1 - \widehat{P}_{Y_n}(t)\big| \mathrm{d}t$$

$$= \frac{r_1}{2} \int_{-\frac{2}{r_1}}^{\frac{2}{r_1}} \lim_{n\to\infty} \big|1 - \widehat{P}_{Y_n}(t)\big| \mathrm{d}t = \frac{r_1}{2} \int_{-\frac{2}{r_1}}^{\frac{2}{r_1}} \big|1 - \widehat{P}_W(t)\big| \mathrm{d}t < \frac{\epsilon}{9(\sup_{\mathbb{R}} |f| + \epsilon)}.$$

Najdeme tedy $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > n_1 : P\big[|Y_n| > r_1\big] < \frac{2\epsilon}{9(\sup_{\mathbb{R}} |f| + \epsilon)}.$$

Definujme $r_0 := \lfloor r_1 \rfloor + 1$. Pro každé $n > n_1$ platí

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}\setminus[-r_0,r_0]} f(y) \mathrm{d}P_{Y_n}(y) - \int_{\mathbb{R}\setminus[-r_0,r_0]} f(w) \mathrm{d}P_W(w) \right| \\ &\quad \le \sup_{\mathbb{R}} |f| \Big(P\left[|Y_n| > r_1\right] + P\left[|W| > r_1\right] \Big) \le \frac{3\epsilon}{9}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Definujme dále funkci $\bar{f}$ předpisem

$$\bar{f}(x) := f(r_0 x); x \in [-1, 1].$$

Na intervalech $(-\pi,-1)$ a $(1,\pi)$ spojitě dodefinujeme vždy lineárně tak, aby $\bar{f}(-\pi)=\bar{f}(\pi)=0$. Navíc tuto funkci 2π - periodicky rozšíříme na $\mathbb{R}$.

Podle Fejérovy věty (Věta 4) poté najdeme reálný trigonometrický polynom

$$\bar{g}=\frac{a_0}{2}+\sum_{j=1}^{k}a_j\cos(jx)+\sum_{j=1}^{k}b_j\sin(jx)$$

takový, že

$$\sup_{\mathbb{R}}\left|\bar{f}-\bar{g}\right|<\frac{\epsilon}{9},$$

odkud plyne

$$\sup_{[-1,1]}\left|\bar{f}-\bar{g}\right|<\frac{\epsilon}{9}.$$

Funkce $g(x):=\bar{g}\left(\frac{r_0}{x}\right)$ je také reálný trigonometrický polynom a platí

$$\sup_{[-r_0,r_0]}|f-g|=\sup_{[-1,1]}\left|\bar{f}-\bar{g}\right|<\frac{\epsilon}{9},$$

$$\sup_{\mathbb{R}}|g|=\sup_{[-r_0,r_0]}|g|\le\sup_{\mathbb{R}}|f|+\epsilon.$$

Odtud a z trojúhelníkové nerovnosti plyne pro každé přirozené n

$$\begin{aligned}&\left|\int_{[-r_0,r_0]}f(y)\mathrm{d}P_{Y_n}(y)-\int_{[-r_0,r_0]}g(y)\mathrm{d}P_{Y_n}(y)\right|\\ \le&\int_{[-r_0,r_0]}|f(y)-g(y)|\,\mathrm{d}P_{Y_n}(y)\le\sup_{[-r_0,r_0]}|f-g|<\frac{\epsilon}{9}.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Obdobně

$$\left|\int_{[-r_0,r_0]}f(w)\mathrm{d}P_W(w)-\int_{[-r_0,r_0]}g(w)\mathrm{d}P_W(w)\right|<\frac{\epsilon}{9}.\tag{1.3}$$

K funkci g najdeme z první části důkazu $n_2\in\mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n\in\mathbb{N},n>n_2:|\mathrm{E}g(Y_n)-\mathrm{E}g(W)|<\frac{\epsilon}{9}.$$

Pak pro $n\in\mathbb{N},n>\max\{n_1,n_2\}$ je

$$\begin{aligned}&\left|\int_{[-r_0,r_0]}g(y)\mathrm{d}P_{Y_n}(y)-\int_{[-r_0,r_0]}g(w)\mathrm{d}P_W(w)\right|\\ \le&\left|\int_{\mathbb{R}}g(y)\mathrm{d}P_{Y_n}(y)-\int_{\mathbb{R}}g(w)\mathrm{d}P_W(w)\right|\\ +&\left|\int_{\mathbb{R}\setminus[-r_0,r_0]}g(y)\mathrm{d}P_{Y_n}(y)-\int_{\mathbb{R}\setminus[-r_0,r_0]}g(w)\mathrm{d}P_W(w)\right|\\ \le&\frac{\epsilon}{9}+\sup_{\mathbb{R}}|g|\left(P\left[|Y_n|>r_0\right]+P\left[|W|>r_0\right]\right)\\ \le&\frac{\epsilon}{9}+\left(\sup_{\mathbb{R}}|f|+\epsilon\right)\frac{3\epsilon}{9\left(\sup_{\mathbb{R}}|f|+\epsilon\right)}<\frac{4\epsilon}{9}.\end{aligned}\tag{1.4}$$

Nyní již odhadujme pomocí (1.1), (1.2), (1.3) a (1.4) následují rozdíl pro $n>\max\{n_1,n_2\}$:

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{E}f(Y_n) - \mathrm{E}f(W)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(y)\mathrm{d}P_{Y_n}(y) - \int_{\mathbb{R}} f(w)\mathrm{d}P_W(w) \right| \\
&\leq \frac{3\epsilon}{9} + \left| \int_{[-r_0,r_0]} f(y)\mathrm{d}P_{Y_n}(y) - \int_{[-r_0,r_0]} f(w)\mathrm{d}P_W(w) \right| \\
&\leq \frac{3\epsilon}{9} + \left| \int_{[-r_0,r_0]} f(y)\mathrm{d}P_{Y_n}(y) - \int_{[-r_0,r_0]} g(y)\mathrm{d}P_{Y_n}(y) \right| \\
&\quad + \left| \int_{[-r_0,r_0]} g(y)\mathrm{d}P_{Y_n}(y) - \int_{[-r_0,r_0]} g(w)\mathrm{d}P_W(w) \right| \\
&\quad + \left| \int_{[-r_0,r_0]} g(w)\mathrm{d}P_W(w) - \int_{[-r_0,r_0]} f(w)\mathrm{d}P_W(w) \right| < \epsilon,
\end{aligned}
$$

tedy $\mathrm{E}f(Y_n) \to \mathrm{E}f(W)$ pro každou f omezenou spojitou funkci.

□

Nyní již snadno dokážeme centrální limitní větu.

1.3 Centrální limitní věta, důkaz první

Věta 8 (Centrální limitní věta s Feller - Lindebergovou podmínkou)**.** *(Znění např. Štěpán, 1987, IV.3.1) Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $k_n \in \mathbb{N}$. Náhodné veličiny $X_{n,k} \in L_2(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$ nechť jsou nezávislé pro $k = 1, \ldots, k_n, n \in \mathbb{N}$ a mají nulovou střední hodnotu. Označme $s_n^2 := \sum_{k=1}^{k_n} \mathrm{var} X_{n,k}$. Nechť dále platí*

$$
\forall \epsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mathrm{E}\left[\left(\frac{X_{n,k}}{s_n} \right)^2 \mathbb{I}_{\left[\left| \frac{X_{n,k}}{s_n} \right| > \epsilon \right]} \right] = 0.
$$

Potom

$$
S_n = \frac{\sum_{k=1}^{k_n} X_{n,k}}{s_n} \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}(0{,}1).
$$

Důkaz. Definujme nové náhodné veličiny $Y_{n,k} := \frac{X_{n,k}}{s_n}, n \in \mathbb{N}, k = 1, \ldots k_n$. Potom $Y_{n,k} \in L_2(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$ jsou nezávislé pro $k = 1, \ldots, k_n, n \in \mathbb{N}$ a mají nulovou střední hodnotu. Dále

$$
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mathrm{var} Y_{n,k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mathrm{var} \frac{X_{n,k}}{s_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{k_n} \mathrm{var} X_{n,k}}{s_n^2} = 1
$$

a

$$
\forall \epsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mathrm{E}\left[Y_{n,k}^2 \mathbb{I}_{[|Y_{n,k}|>\epsilon]} \right] = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mathrm{E}\left[\left(\frac{X_{n,k}}{s_n} \right)^2 \mathbb{I}_{\left[\left| \frac{X_{n,k}}{s_n} \right| > \epsilon \right]} \right] = 0.
$$

Náhodné veličiny $Y_{n,k}$ tedy splňují podmínky Věty 3 a platí pro ně

$$
\widehat{P}_{S_n}(t) = \widehat{P}_{\frac{\sum_{k=1}^{k_n} X_{n,k}}{s_n}}(t) = \widehat{P}_{\sum_{k=1}^{k_n} Y_{n,k}}(t) \xrightarrow{n\to\infty} \widehat{P}_Z(t), t \in \mathbb{R}.
$$

Podle Věty 7 potom S_n konvergují v distribuci k $Z \sim \mathcal{N}(0{,}1)$.

□

Kapitola 2

Důkaz pomocí funkcí se spojitými omezenými derivacemi všech řádů

Ukážeme, že konvergence v distribuci je ekvivalentní s konvergencí středních hodnot pro funkce se všemi omezenými spojitými derivacemi (Věta 13), odkud následně centrální limitní větu dokážeme. Tento postup je popsán v *Teorii pravděpodobnosti* (Štěpán, 1987). Zde dokážeme i některá tvrzení a kroky, které jsou v knize uvedeny jako cvičení bez důkazu (Lemma 9, Věta 10), nebo jsou považovány za zřejmé.

2.1 Charakterizace konvergence v distribuci

Uvedeme nejdřív řešení pomocného tvrzení (viz Štěpán, 1987, Cvičení III.4.15).

Lemma 9. *Mějme funkci* ϕ *definovanou jako*

$$\phi(t) = \begin{cases} 0; & t \leq 0, \\ 1; & t \geq 1, \\ C \int_0^t e^{-[(1-s)s]^{-1}} \mathrm{d}s; & t \in (0,1), \end{cases}$$

kde

$$C^{-1} = \int_0^1 e^{-[(1-s)s]^{-1}} \mathrm{d}s.$$

Potom funkce ϕ *a* $\rho(t) = \phi(1-t)$ *náleží do množiny funkcí se všemi spojitými omezenými derivacemi na* $\mathbb{R}$ *(značíme* $C_b^\infty(\mathbb{R})$*) a platí*

$$\rho(t) = \begin{cases} 0; & t \geq 1, \\ 1; & t \leq 0, \end{cases}$$

$$\rho(t) \in [0,1]; t \in \mathbb{R}.$$

Důkaz. Zřejmě je $\phi \in C_b(\mathbb{R})$. Dále $\phi'(t) = 0; t \in \mathbb{R}\backslash[0,1]$ a

$$\phi'(t) = Ce^{-[(1-t)t]^{-1}}; t \in (0,1).$$

Navíc

$$\lim_{t\to 0^+} \phi'(t) = \lim_{t\to 1^-} \phi'(t) = 0,$$

tedy $\phi \in C_b^1(\mathbb{R})$. Z dalších derivací již snadno plyne, že $\phi \in C_b^\infty(\mathbb{R})$. Funkce ρ je zřejmě také prvkem $C_b^\infty(\mathbb{R})$ a vyhovuje daným požadavkům.

□

Uvedeme ještě definici distribuční funkce a její bezprostřední vlastnost.

Definice 5 (Distribuční funkce náhodné veličiny)**.** *(Štěpán, 1987, I.6.10)*
Distribučí funkcí náhodné veličiny X budeme rozumět reálnou funkci F_X takovou, že

$$F_X(x) := P[X < x] = P_X\big[(-\infty, x)\big], x \in \mathbb{R}.$$

Věta 10. *(Štěpán, 1987, I.6.10) Distribuční funkce náhodné veličiny X má nejvýše spočetně bodů nespojitosti.*

Důkaz. Mějme $x \in \mathbb{R}$ bod nespojitosti funkce F_X, potom $P[X = x] > 0$. Definujme A množinu všech bodů nespojitosti funkce F_X a přepokládejme, že A je nespočetná. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme dále množiny

$$M_n := \left\{ x \in A : P[X = x] > \frac{1}{n} \right\}$$

Máme

$$\sum_{x\in A} P[X = x] \le 1,$$

odkud plyne, že všechny množiny M_n jsou konečné. Pak ale z

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n,$$

je množina A spočetným sjednocením konečných množin, tedy A je spočetná, což je spor s předpokladem nespočentě mnoha bodů nespojitosti.

□

Následující tři věty jsou jako tvrzení III.4.7 a III.4.8 v knize (Štěpán, 1987).

Věta 11. *Pro náhodné veličiny $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}, X$ platí, že pokud pro každou funkci $f \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ je*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E} f(X_n) = \mathrm{E} f(X),$$

potom

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

pro každé x, které je bodem spojitosti distribuční funkce F_X náhodné veličiny X.

Důkaz. Mějme $x \in \mathbb{R}$ bod spojitosti funkce F_X a funkci $\rho \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ z Lemmatu 9. Pro $u > 0$ definujeme funkci $\rho_u \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ předpisem $\rho_u(t) = \rho(ut)$. Potom pro každé $y \in \mathbb{R}, u > 0$ je zřejmě

$$\mathbb{I}_{(-\infty,x)}(y) \le \rho_u(y - x) \le \mathbb{I}_{(-\infty,x+u^{-1})}(y),$$

$$\mathbb{I}_{(-\infty,x)}(y) \geq \rho_u(y - x + u^{-1}) \geq \mathbb{I}_{(-\infty,x-u^{-1})}(y).$$

Odtud plyne

$$\limsup_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \limsup_{n\to\infty} P_{X_n}[(-\infty, x)] \leq \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_u(y-x)\mathrm{d}P_{X_n}(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \rho_u(y-x)\mathrm{d}P_X(y) \leq P_X[(-\infty, x+u^{-1})] = F_X(x+u^{-1})$$

a

$$\liminf_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \liminf_{n\to\infty} P_{X_n}[(-\infty,x)] \geq \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_u(y-x+u^{-1})\mathrm{d}P_{X_n}(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \rho_u(y-x+u^{-1})\mathrm{d}P_X(y) \geq P_X[(-\infty, x-u^{-1})] = F_X(x-u^{-1}).$$

Přechodem $u \to \infty$ dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \limsup_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = \liminf_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x).$$

$\square$

Věta 12. *Nechť* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *,* X *jsou náhodné veličiny, pro které je*

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$*, které je bodem spojitosti* F_X*. Potom* X_n *konvergují k* X *v distribuci.*

Důkaz. Mějme funkci $f \in C_b(\mathbb{R})$ a $\epsilon > 0$. X je reálná náhodná veličina, tedy existují $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{R}$ tak, že $P_X\left[[\hat{a}, \hat{b}]\right] \geq 1 - \frac{2\epsilon}{6\sup_{\mathbb{R}}|f|}$. Z Lemmatu 9 existují $a < \hat{a}, b > \hat{b}$ body spojitosti F_X, pro které tedy platí $P_X\left[[a, b]\right] \geq 1 - \frac{2\epsilon}{6\sup_{\mathbb{R}}|f|}$. Navíc

$$P_X\left[[a,b]\right] = F_X(b) - F_X(a) = \lim_{n\to\infty} \{F_{X_n}(b) - F_{X_n}(a)\} = \lim_{n\to\infty} P_{X_n}\left[[a,b)\right],$$

tedy existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 : P_{X_n}\left[[a,b)\right] \geq 1 - \frac{\epsilon}{6\sup_{\mathbb{R}}|f|},$$

odkud plyne

$$P_{X_n}\left[\mathbb{R}\backslash(a,b]\right] \leq \frac{\epsilon}{6\sup_{\mathbb{R}}|f|},\ P_X\left[\mathbb{R}\backslash(a,b]\right] \leq \frac{2\epsilon}{6\sup_{\mathbb{R}}|f|}$$

a tedy

$$\left|\int_{\mathbb{R}\backslash(a,b]} f\mathrm{d}P_{X_n} - \int_{\mathbb{R}\backslash(a,b]} f\mathrm{d}P_X\right| \leq 3\sup_{\mathbb{R}}|f| \frac{\epsilon}{6\sup_{\mathbb{R}}|f|} \leq \frac{3\epsilon}{6}$$

Dále f je na interalu $[a,b]$ stejnoměrně spojitá, tedy

$$\exists \delta > 0 \,\forall x,y \in [a,b] : |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{6}$$

Pro dělení $\{x_i\}_{i=1}^k; a = x_1 < x_2 < \cdots < x_k = b$ s normou menší, než δ a pro libovolnou pravděpodobnostní míru ν na $\mathbb{R}$ platí

$$\left| \int_{[a,b)} f \mathrm{d}\nu - \sum_{i=1}^{k-1} f(x_i)\nu\big[[x_i,x_{i+1})\big] \right| \leq \frac{\epsilon}{6} \sum_{i=1}^{k-1} \nu\big[[x_i,x_{i+1})\big] \leq \frac{\epsilon}{6}.$$

Odtud a z trojúhelníkové nerovnosti plyne

$$\left| \int_{[a,b)} f \mathrm{d}P_{X_n} - \int_{[a,b)} f \mathrm{d}P_X \right| \leq \frac{2\epsilon}{6} + \left| \sum_{i=1}^{k-1} f(x_i) \Big(P_{X_n}\big[[x_i,x_{i+1})\big] - P_X\big[[x_i,x_{i+1})\big] \Big) \right|$$

$$\leq \frac{2\epsilon}{6} + \left| \sum_{i=1}^{k-1} f(x_i) \big(F_{X_n}(x_i) - F_X(x_i) \big) \right| + \left| \sum_{i=2}^{k} f(x_i) \big(F_{X_n}(x_i) - F_X(x_i) \big) \right|.$$

Pro dělení, kde x_i jsou body spojitosti F_X pro každé i, a pro $n > n_1$, kde n_1 je dostatčně velké, máme z předpokladů věty

$$\left| \int_{[a,b)} f \mathrm{d}P_{X_n} - \int_{[a,b)} f \mathrm{d}P_X \right| \leq \frac{3\epsilon}{6}$$

Celkem dostáváme pro $n > max\{n_0, n_1\}$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}P_{X_n} - \int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}P_X \right| \leq \epsilon$$

a tedy $X_n \xrightarrow{d} X$. □

Z právě dokázaných vět snadno plyne následující charakterizace konvergence v distribuci.

Věta 13. *Následující podmínky jsou ekvivalentní:*
a) $X_n \xrightarrow{d} X$
b) $\forall f \in C_b^\infty(\mathbb{R}) : \mathrm{E}f(X_n) \to \mathrm{E}f(X)$
c) $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$ *pro každé* $x \in \mathbb{R}$ *bod spojitosti* F_X.

Důkaz. Plyne ihned z předchozích dvou vět a z $C_b^\infty(\mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R})$. □

2.2 Centrální limitní věta, důkaz druhý

Nyní již můžeme přistoupit k samotnému důkazu, jehož myšlenka je velmi elegantní. Nahrazujeme postupně veličiny $X_{n,k}$ veličinami s normálním rozdělením. Nejprve ukážeme pomocné lemma.

Lemma 14. *(Štěpán, 1987, Lemma IV.3.2)*
Buď $f \in C_b^\infty(\mathbb{R})$. *Pro* $h \in \mathbb{R}$ *položme*

$$g(h) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f(x+h) - f(x) - f'(x)h - f''(x)\frac{h^2}{2} \right| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |G(x,h)|.$$

Potom g *je borelovsky měřitelná a existuje* $K > 0$ *takové, že*

$$\forall h \in \mathbb{R} : g(h) \leq K \min\left\{ \left|h^2\right|, \left|h^3\right| \right\}.$$

Důkaz. Platí

$$[g < a] = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{h : |G(x,h)| > a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); a \in \mathbb{R},$$

protože G je spojitá při pevném h a měřitelná při pevném x. Odtud je g měřitelná.

Dále dle Taylorova rozvoje funkce f je

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(\theta)\frac{h^2}{2}$$
$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + f'''(\phi)\frac{h^3}{6}$$

pro $x,h \in \mathbb{R}, \theta, \phi \in (x-h, x+h)$.

Protože f'' je omezená, $K' > \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$, plyne z prvního rozvoje

$$g(h) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} - f(x) - f'(x)h - f''(x)\frac{h^2}{2} \right| \leq K'h^2,$$

obdobně ze druhého rozvoje, $K'' > \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'''(x)|$, je

$$g(h) \leq K''h^3$$

pro libovolné $h \in \mathbb{R}$. Pro $K = \max\{K', K''\}$ dostáváme tvrzení lemmatu.

□

Věta 15 (Centrální limitní věta)**.** *(Štěpán, 1987, IV.3.1)*

Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $k_n \in \mathbb{N}$. Náhodné veličiny $X_{n,k} \in L_2(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$ nechť jsou nezávislé pro $k = 1, \ldots, k_n, n \in \mathbb{N}$ a mají nulovou střední hodnotu. Označme $s_n^2 := \sum_{k=1}^{k_n} varX_{n,k}$. Nechť dále platí

$$\forall \epsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mathrm{E}\left[\left(\frac{X_{n,k}}{s_n} \right)^2 \mathbb{I}_{\left[\left|\frac{X_{n,k}}{s_n}\right| > \epsilon\right]} \right] = 0.$$

Potom

$$S_n = \frac{\sum_{k=1}^{k_n} X_{n,k}}{s_n} \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Důkaz. K ověření konvergence v distribuci dokážeme, že

$$\forall f \in C_b^\infty(\mathbb{R}) : \mathrm{E}f\left(\frac{S_n}{s_n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \mathrm{E}f(Z).$$

Definujme nejprve náhodné veličiny $Z_{n,k} \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{var}\, X_{n,k})$ na $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}; k = 1, \ldots, k_n$, tak, že $X_{n,1}, \ldots, X_{n,k_n}, Z_{n,1}, Z_{n,k_n}$ jsou nezávislé pro každé n.

Na intervalu [0,1] s borelovskou σ-algebrou a Lebegovou mírou lze definovat veličinu s normálním rozdělením s nulovou střední hodnotou a libovolným rozptylem. Pokud by na některém $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$ nebylo možné definovat požadované nezávislé veličiny, vezmeme součinový prostor $(\Omega_n, \mathcal{A}_n) \times ([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ a definujeme na něm pravděpodobnostní míru $\bar{P}$ takovou, že $\bar{P}[A \times [0,x)] = xP_n(A)$

pro libovolnou $A \in \mathcal{A}_n$ a $x \in [0{,}1]$. Na tomto prostoru můžeme definovat $X_{n,k}$ a $Z_{n,1}$ nezávislé. Opakováním tohoto postupu máme všechny $Z_{n,k}$.

Položme

$$D_{n,k} = \sum_{i=1}^{k-1} X_{n,i} + \sum_{i=k+1}^{k_n} Z_{n,i}; 1 \leq k \leq k_n, n \in \mathbb{N},$$

kde $X_{n,0} = Z_{n,k_n+1} = 0$. Pro $1 \leq k \leq k_n - 1, n \in \mathbb{N}$ platí

$$D_{n,k} + X_{n,k} = \sum_{i=1}^{k} X_{n,i} + \sum_{i=k+1}^{k_n} Z_{n,i} = D_{n,k+1} + Z_{n,k+1}$$

a

$$\frac{D_{n,k_n} + X_{n,k_n}}{s_n} = \frac{S_n}{s_n}$$

a náhodná veličina $\frac{D_{n,1}+Z_{n,1}}{s_n}$ má normované normální rozdělení pro každé $n \in \mathbb{N}$. Stačí tedy ověřit konvergenci

$$\forall f \in C_b^\infty(\mathbb{R}) : \mathrm{E}f\left(\frac{D_{n,k_n} + X_{n,k_n}}{s_n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \mathrm{E}f\left(\frac{D_{n,1} + Z_{n,1}}{s_n}\right).$$

Mějme libovolnou $f \in C_b^\infty\mathbb{R}$. Platí

$$\begin{aligned}
F_n :=& f\left(\frac{D_{n,k_n} + X_{n,k_n}}{s_n}\right) - f\left(\frac{D_{n,1} + Z_{n,1}}{s_n}\right)\\
=& f\left(\frac{D_{n,k_n} + X_{n,k_n}}{s_n}\right) - f\left(\frac{D_{n,k_n-1} + X_{n,k_n-1}}{s_n}\right)\\
&+ f\left(\frac{D_{n,k_n-1} + X_{n,k_n-1}}{s_n}\right) - f\left(\frac{D_{n,k_n-2} + X_{n,k_n-2}}{s_n}\right) + \dots\\
&+ f\left(\frac{D_{n,3} + X_{n,3}}{s_n}\right) - f\left(\frac{D_{n,2} + X_{n,2}}{s_n}\right)\\
&+ f\left(\frac{D_{n,2} + X_{n,2}}{s_n}\right) - f\left(\frac{D_{n,1} + Z_{n,1}}{s_n}\right).
\end{aligned}$$

Nyní použijeme dokázané rovnosti $D_{n,k} + X_{n,k} = D_{n,k+1} + Z_{n,k+1}$:

$$F_n = \sum_{k=1}^{k_n} \left[f\left(\frac{D_{n,k} + X_{n,k}}{s_n}\right) - f\left(\frac{D_{n,k} + Z_{n,k}}{s_n}\right)\right]$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Přistoupíme k odhadu středních hodnot:

$$\begin{aligned}
R :=& \left|\mathrm{E}f\left(\frac{D_{n,k_n} + X_{n,k_n}}{s_n}\right) - \mathrm{E}f\left(\frac{D_{n,1} + Z_{n,1}}{s_n}\right)\right|\\
\leq& \sum_{k=1}^{k_n} \left|\mathrm{E}\left[f\left(\frac{D_{n,k} + X_{n,k}}{s_n}\right) - f\left(\frac{D_{n,k} + Z_{n,k}}{s_n}\right)\right]\right|.
\end{aligned}$$

Z nezávisloti $X_{n,k}, Z_{n,k}$ plyne nezávislost $D_{n,k}, X_{n,k}, Z_{n,k}$ a máme

$$\mathrm{E}\left[f'\left(\frac{D_{n,k}}{s_n}\right)\left(\frac{X_{n,k}}{s_n} - \frac{Z_{n,k}}{s_n}\right)\right] = \mathrm{E}f'\left(\frac{D_{n,k}}{s_n}\right)\left(\mathrm{E}\frac{X_{n,k}}{s_n} - \mathrm{E}\frac{Z_{n,k}}{s_n}\right) = 0$$

a

$$\mathrm{E}\left[f''\left(\frac{D_{n,k}}{s_n}\right)\left\{\left(\frac{X_{n,k}}{s_n}\right)^2-\left(\frac{Z_{n,k}}{s_n}\right)^2\right\}\right]$$

$$=\mathrm{E}f''\left(\frac{D_{n,k}}{s_n}\right)\left(\frac{\mathrm{var}X_{n,k}}{s_n^2}-\frac{\mathrm{var}X_{n,k}}{s_n^2}\right)=0.$$

Tedy pokračujeme v úpravách:

$$R\le\sum_{k=1}^{k_n}\left|\mathrm{E}\left[f\left(\frac{D_{n,k}+X_{n,k}}{s_n}\right)-f\left(\frac{D_{n,k}+Z_{n,k}}{s_n}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-f'\left(\frac{D_{n,k}}{s_n}\right)\left(\frac{X_{n,k}}{s_n}-\frac{Z_{n,k}}{s_n}\right)-\frac{1}{2}f''\left(\frac{D_{n,k}}{s_n}\right)\left\{\left(\frac{X_{n,k}}{s_n}\right)^2-\left(\frac{Z_{n,k}}{s_n}\right)^2\right\}\right]\right|$$

$$\le\sum_{k=1}^{k_n}\left|\mathrm{E}\left[f\left(\frac{D_{n,k}+X_{n,k}}{s_n}\right)-f'\left(\frac{D_{n,k}}{s_n}\right)\left(\frac{X_{n,k}}{s_n}\right)-\frac{1}{2}f''\left(\frac{D_{n,k}}{s_n}\right)\left(\frac{X_{n,k}}{s_n}\right)^2\right]\right|$$

$$+\sum_{k=1}^{k_n}\left|\mathrm{E}\left[f\left(\frac{D_{n,k}+Z_{n,k}}{s_n}\right)-f'\left(\frac{D_{n,k}}{s_n}\right)\left(\frac{Z_{n,k}}{s_n}\right)-\frac{1}{2}f''\left(\frac{D_{n,k}}{s_n}\right)\left(\frac{Z_{n,k}}{s_n}\right)^2\right]\right|$$

$$\le\sum_{k=1}^{k_n}\mathrm{E}g\left(\frac{X_{n,k}}{s_n}\right)+\sum_{k=1}^{k_n}\mathrm{E}g\left(\frac{Z_{n,k}}{s_n}\right),$$

kde funkce g je jako v předchozím lemmatu.

Nyní pro dané $\epsilon\in(0,1)$ je

$$\sum_{k=1}^{k_n}\mathrm{E}g\left(\frac{X_{n,k}}{s_n}\right)=\sum_{k=1}^{k_n}\mathrm{E}\left[g\left(\frac{X_{n,k}}{s_n}\right)\mathbb{I}_{\left[\left|\frac{X_{n,k}}{s_n}\right|>\epsilon\right]}\right]+\sum_{k=1}^{k_n}\mathrm{E}\left[g\left(\frac{X_{n,k}}{s_n}\right)\mathbb{I}_{\left[\left|\frac{X_{n,k}}{s_n}\right|\le\epsilon\right]}\right]$$

$$\le\sum_{k=1}^{k_n}\mathrm{E}\left[K\left(\frac{X_{n,k}}{s_n}\right)^2\mathbb{I}_{\left[\left|\frac{X_{n,k}}{s_n}\right|>\epsilon\right]}\right]+\sum_{k=1}^{k_n}\mathrm{E}\left[K\left(\frac{X_{n,k}}{s_n}\right)^3\mathbb{I}_{\left[\left|\frac{X_{n,k}}{s_n}\right|\le\epsilon\right]}\right]$$

pro K příslušící k funkci g z Lemmatu 14.

Platí

$$\sum_{k=1}^{k_n}\mathrm{E}\left[K\left(\frac{X_{n,k}}{s_n}\right)^3\mathbb{I}_{\left[\left|\frac{X_{n,k}}{s_n}\right|\le\epsilon\right]}\right]\le K\sum_{k=1}^{k_n}\mathrm{E}\left[\left|\frac{X_{n,k}}{s_n}\right|^3\mathbb{I}_{\left[\left|\frac{X_{n,k}}{s_n}\right|\le\epsilon\right]}\right]$$

$$\le\frac{K\epsilon}{s_n^2}\sum_{k=1}^{k_n}\mathrm{E}\left|X_{n,k}\right|^2\le K\epsilon,$$

což spolu s Feller - Lindebergovou podmínkou implikuje

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\mathrm{E}g\left(\frac{X_{n,k}}{s_n}\right)=0.$$

Stejně tak náhodné veličiny $Z_{n,k}$ splňují Feller - Lindebergovu podmínku:

$$\sum_{k=1}^{k_n}\mathrm{E}\left[\left(\frac{Z_{n,k}}{s_n}\right)^2\mathbb{I}_{\left[\left|\frac{Z_{n,k}}{s_n}\right|>\epsilon\right]}\right]\le\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{k_n}\frac{1}{\epsilon s_n}\mathrm{E}|Z_{n,r}|^3$$

$$= \frac{1}{\epsilon s_n^3} \sum_{k=1}^{k_n} (\mathrm{var} X_{n,k})^{3/2}\, \mathrm{E}|Z|^3 \le \frac{\mathrm{E}|Z|^3}{\epsilon} \max_{1\le k\le k_n} \frac{(\mathrm{var} X_{n,k})^{1/2}}{s_n} \sum_{k=1}^{k_n} \frac{\mathrm{var} X_{n,k}}{s_n^2}$$

$$\le \frac{\mathrm{E}|Z|^3}{\epsilon} \max_{1\le k\le k_n} \frac{(\mathrm{var} X_{n,k})^{1/2}}{s_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

pro každé $\epsilon > 0$, kde $Z \sim \mathcal{N}(0{,}1)$, protože platí

$$\frac{\mathrm{var} X_{n,k}}{s_n^2} = \mathrm{E}\left[\frac{X_{n,k}^2}{s_n^2} \mathbb{I}_{\left[\left|\frac{X_{n,k}}{s_n}\right| \le \epsilon\right]}\right] + \mathrm{E}\left[\frac{X_{n,k}^2}{s_n^2} \mathbb{I}_{\left[\left|\frac{X_{n,k}}{s_n}\right| > \epsilon\right]}\right]$$
$$\le \epsilon^2 + \sum_{k=1}^{k_n} \mathrm{E}\left[\frac{X_{n,k}^2}{s_n^2} \mathbb{I}_{\left[\left|\frac{X_{n,k}}{s_n}\right| > \epsilon\right]}\right] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

tedy i

$$\max_{1\le k\le k_n} \frac{(\mathrm{var} X_{n,k})^{1/2}}{s_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Stejným postupem jako pro veličiny $X_{n,k}$ zjistíme, že i

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mathrm{E} g\left(\frac{Z_{n,k}}{s_n}\right) = 0.$$

Dohromady tedy máme

$$\lim_{n\to\infty} \left| \mathrm{E} f\left(\frac{S_n}{s_n}\right) - \mathrm{E} f\left(Z\right) \right| \le \sum_{k=1}^{k_n} \mathrm{E} g\left(\frac{X_{n,k}}{s_n}\right) + \sum_{k=1}^{k_n} \mathrm{E} g\left(\frac{Z_{n,k}}{s_n}\right) = 0$$

pro každou $f \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ a tedy $\frac{S_n}{s_n} \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}(0{,}1)$.

□

Kapitola 3

Důkaz pomocí konvergence momentů

V této kapitole najdeme postačující podmínky pro posloupnost náhodných veličin, které zajistí, že její limitní momenty jsou shodné s momenty normálního rozdělení a tudíž konverguje k normálnímu rozdělení i v distribuci. Důležitou roli při tom bude hrát Hellyho věta (Věta 19). Kallenberg (1997) nabízí ve cvičení Exercise 11 na straně 78 souvislost konvergence momentů a konvergence v distribuci. Tuto myšlenku dokazujeme částečně ve Větě 17 a Důsledku 18.

3.1 Distribuční funkce, těsnost a stejnoměrná integrovatelnost

Věta 16 (O vlastnostech distribuční funkce)**.** *(Štěpán, 1987, I.6.13) Reálná funkce F je distribuční funkcí náhodné veličiny, právě tehdy, když je neklesající, zprava spojitá a platí*

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0.$$

Důkaz. Nechť nejprve je X náhodná veličina a F_X je její distribuční funkce. Z vlastností pravděpodobnostní míry se ihned dokáží požadované vlastnosti.

Naopak pro funkci F splňující všechny podmínky definujeme X jako identické zobrazení na reálných číslech a míru P jako

$$P[(-\infty, x)] := F(x).$$

Potom P je pravděpodobnostní míra na reálných číslech a X je náhodná veličina s požadovanou distribuční funkcí.

□

Definice 6 (Těsná posloupnost náhodných veličin)**.** *(Kallenberg, 1997, str. 43) Řekneme, že posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je těsná, jestliže platí*

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} P\left[|X_n| > r\right] = 0.$$

Definice 7 (Stejnoměrně integrovatelná posloupnost)**.** *(Kallenberg, 1997, str. 44) Posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je stejnoměrně integrovatelná, jestliže platí*

$$\lim_{r\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{E}\left(|X_n|\mathbb{I}_{[|X_n|>r]}\right)=0.$$

Věta 17 (Stejnoměrná integrovatelnost a těsnost)**.** *Nechť $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou nedegenerované náhodné veličiny se všemi momenty konečnými, pro něž existují $a_k\in\mathbb{R}, k\in\mathbb{N}$ takové, že*

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}X_n^k=a_k.$$

Potom pro každé $k\in\mathbb{N}$ je posloupnost $\left\{X_n^k\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ stejnoměrně integrovatelná a $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je těsná.

Důkaz. Mějme pevné $r>0$ a $k\in\mathbb{R}$. Posloupnost $\left\{\mathrm{E}X_n^{2k}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ má limitu a_{2k}, tedy je omezená, $0<\mathrm{E}X_n^{2k}\le m_{2k}$ pro nějaké kladné m_{2k}. Pro každé $n\in\mathbb{N}$ pak platí

$$\mathrm{E}\left(|X_n^k|\mathbb{I}_{[|X_n^k|>r]}\right)=\mathrm{E}\left(\left|\frac{X_n^{2k}}{X_n^k}\right|\mathbb{I}_{[|X_n^k|>r]}\right)\le\frac{m_{2k}}{r}\overset{r\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

přechodem k supremu dostáváme, že $\left\{X_n^k\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ je stejnoměrně integrovatelná.

Obdobně je

$$P\left[|X_n|>r\right]=\mathrm{E}\mathbb{I}_{[|X_n|>r]}=\mathrm{E}\left(\frac{X_n^2}{X_n^2}\mathbb{I}_{[|X_n|>r]}\right)\le\frac{m_2}{r^2}\overset{r\to\infty}{\longrightarrow}0$$

a $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je těsná.

□

Důsledek 18. *Nechť $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost nedegenerovaných náhodných veličin se všemi momenty konečnými a nechť momenty konvergují, tj.*

$$\forall k\in\mathbb{N}:\ \lim_{n\to\infty}\mathrm{E}X_n^k=a_k\in\mathbb{R}.$$

Nechť dále X_n konvergují v distribuci k náhodné veličině X. Pak X má všechny momenty konečné a platí $\mathrm{E}X^k=a_k$.

Důkaz. Pro přirozená i,j definujme pomocné funkce

$$f_j^{(i)}(x):=\begin{cases}j^i, |x|>j;\\ x^i, |x|\le j,\end{cases}$$

které jsou spojité a omezené.

Ověříme nejprve, že X má všechny momenty konečné. Nechť pro $i\in\mathbb{N}$ je $\mathrm{E}X^{2i}=\infty$. Máme $\mathrm{E}X^{2i}=\lim_{j\to\infty}\mathrm{E}f_j^{(2i)}(X)$, tedy existuje $j_0\in\mathbb{N}$ takové, že pro každé $j>j_0$ je $\mathrm{E}f_j^{(2i)}(X)>2a_{2i}$. Ze stejnoměrné integrovatelnosti X_n^{2i} najdeme $j_1>j_0$ takové, že

$$\left|\mathrm{E}X_n^{2i}-\mathrm{E}\left(X_n^{2i}\mathbb{I}_{[|X_n|<j_1]}\right)\right|<\frac{a_{2i}}{2}\implies\left|\mathrm{E}X_n^{2i}-\mathrm{E}f_{j_1}^{(2i)}(X_n)\right|<\frac{a_{2i}}{2}$$

pro každé přirozené n, resp. k. Potom je

$$\left|\mathrm{E}f_{j_1}^{(2i)}(X) - \mathrm{E}f_{j_1}^{(2i)}(X_n)\right| > \frac{a_{2i}}{2} > 0,$$

což je spor s konvergencí X_n v distribuci k X a tedy X má omezené momenty.

Nyní pro $\epsilon > 0, i \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{E}X^i - a_i\right| \leq & \left|\mathrm{E}X^i - \mathrm{E}f_j^{(i)}(X)\right| + \left|\mathrm{E}f_j^{(i)}(X) - \mathrm{E}f_j^{(i)}(X_n)\right| \\ & + \left|\mathrm{E}f_j^{(i)}(X_n) - \mathrm{E}X_n^i\right| + \left|\mathrm{E}X_n^i - a_i\right| < \epsilon\end{aligned}$$

pro dostačně velké n z konvergence momentů a konvergence v distribuci, a j stejnoměrné integrovatelnosti a již dokázané konečnosti momentů náhodné veličiny X.

□

V případě konvergentních mometnů tedy známe momenty limity v distribuci. Následující věta se naopak zabývá existencí takové limity.

Věta 19 (Hellyho věta). *(Kallenberg, 1997, Theorem 4.19)*

Nechť posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je těsná. Potom existuje její podposlopnost, která konverguje v distribuci.

Důkaz. Pro zjednodušení zápisu označme $F_i = F_{X_i}$.

Nejprve ukážeme, že existuje funkce Q a podposloupnost $\{X_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ taková, že pro každé racionální q je $F_{n_k}(q) \to Q(q)$. Postupujeme diagonalizačním schématem:

Mějme $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ posloupnost všech racionálních čísel. Pro $i = 1$ je posloupnost $\{F_n(q_1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ jistě omezená, lze tedy vybrat její konvergentí podposloupnost $\left\{F_{1(k)}(q_1)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$. Pro $i = 2$ je posloupnost $\left\{F_{1(k)}(q_2)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ opět omezená a lze tedy vybrat její konvergentní podposloupnost $\left\{F_{2(k)}(q_2)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ a indukcí pokračujeme dále pro všechna i.

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ nyní položme $n_k := k(k)$, tj. k-tý index definujeme jako k-tý index z k-té podposloupnosti. Potom zřejmě pro libovolné i je posloupnost $\{F_{n_k}(q_i)\}_{k\in\mathbb{N}}$ podposloupnost $\left\{F_{i(k)}(q_i)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ a má tedy stejnou limitu, kterou označíme $Q(q_i)$.

Nyní pomocí Věty 16 dokážeme, že funkce F definovaná jako

$$F(x) := \inf\left\{Q(r) : r \in \mathbb{Q}, r > x\right\}.$$

je distribuční funkcí nějaké náhodné veličiny.

Mějme $x, y \in \mathbb{R}, y > x$. Potom

$$F(y) = \inf\left\{Q(r) : r \in \mathbb{Q}, r > y\right\} \geq \inf\left\{Q(r) : r \in \mathbb{Q}, r > x\right\} = F(x)$$

a tedy F je neklesající.

Dále pro pevné $x \in \mathbb{R}$ a $\epsilon > 0$ lze najít $q \in \mathbb{Q}, q > x$ tak, že

$$F(x) \leq Q(q) \leq F(x) + \epsilon.$$

Potom ale pro každé $y \in (x, q)$ platí

$$F(x) \leq F(y) \leq F(x) + \epsilon$$

z monotonie F a F je spojitá zprava.

Pro limity máme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} F(x) &= \lim_{x\to-\infty} \inf\{Q(r) : r \in \mathbb{Q}, r > x\} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \inf\left\{\lim_{k\to\infty} F_{n_k}(r) : r \in \mathbb{Q}, r > x\right\} \geq 0,\end{aligned}$$

protože $F_{n_k} \geq 0, k \in \mathbb{N}$. Obdobně je $\lim_{x\to+\infty} F(x) \leq 1$. Pro dané $\epsilon > 0$ najdeme z těsnosti $r > 0, n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 : P\left[|X_{n_k}| > r\right] < \epsilon.$$

Potom pro $q < -r, n > n_0$ platí $F_{n_k}(q) < \epsilon$, odkud plyne $\lim_{x\to-\infty} F(x) < \epsilon$. Podobně $\lim_{x\to\infty} F(x) > 1 - \epsilon$. Odtud již vidíme, že

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.$$

a F je tedy distribuční funkce.

Nyní dokážeme, že $F_{n_k}(x) \to F(x), k \to \infty$ pro každé x bod spojitosti funkce F a tedy X_{n_k} konvergují v distribuci k náhodné veličině s distribuční funkcí F podle Věty 13.

Je-li x bod spojitosti F a $\epsilon > 0$, najdeme z definice F racionální číslo $q > x$ tak, aby $|F(x) - Q(q))| < \epsilon/7$. Dále z definice Q najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ je $|Q(q) - F_{n_k}(q)| < \epsilon/7$. Potom

$$|F(x) - F_{n_k}(q)| \leq |F(x) - Q(q)| + |Q(q) - F_{n_k}(q)| < \frac{2\epsilon}{7}.$$

Ze spojitosti F v x najdeme $y < x$ takové, že $|F(x) - F(y)| < \epsilon/7$. K němu pak najdeme $p \in \mathbb{Q}, y < p < x$. Jistě je $|F(y) - Q(p)| < \epsilon/7$. K p najdeme z definice Q číslo $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_1$ je $|Q(p) - F_{n_k}(p)| < \epsilon/7$.

Pro $n > \max\{n_0, n_1\}$ máme

$$\begin{aligned}&|F_{n_k}(x) - F_{n_k}(q)| \leq |F_{n_k}(p) - F_{n_k}(q)| \\ &\leq |F_{n_k}(p) - Q(p)| + |Q(p) - F(y)| + |F(y) - F(x)| + |F(x) - F_{n_k}(q)| < \frac{5\epsilon}{7}.\end{aligned}$$

Opět pro $n > \max\{n_0, n_1\}$ celkem dostáváme

$$|F(x) - F_{n_k}(x)| \leq |F(x) - F_{n_k}(q)| + |F_{n_k}(q) - F_{n_k}(x)| < \epsilon.$$

□

Poznámka. Hellyho věta je speciální případ obecnější Prochorovovy věty pro reálné náhodné veličiny. Uvádíme ji, protože je postačující pro důkaz centrální limitní věty a její důkaz je založen na elementárních prostředcích.

3.2 Konvergence momentů

Dokážeme vzorec pro momenty normálního rozdělení a ukážeme, že určitá třída posloupností náhodných veličin má limity momentů stejné. Dále ukážeme, že momenty normálního rozdělení jednoznačně definují náhodnou veličinu.

Věta 20 (Tvar n-tého momentu normovaného normálního rozdělení)**.** *(Vzorec viz Štěpán, 1987, II.6.15)*

Nechť $Z \sim \mathcal{N}(0,1), k \in \mathbb{N}$. *Potom* $\mathrm{E}Z^{2k-1} = 0$ *a* $\mathrm{E}Z^{2k} = \frac{(2k)!}{k!2^k}$.

Důkaz. Vypočítáme nejprve střední hodnotu Z:

$$\mathrm{E}Z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = 0,$$

protože $xe^{-\frac{x^2}{2}}$ je lichá funkce. Dále je

$$\mathrm{E}Z^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[xe^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = 1.$$

Pro libovolné $k \in \mathbb{N}, k > 2$ je

$$\begin{aligned}\mathrm{E}Z^k &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^k e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[x^{k-1} e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{-\infty}^{\infty} + (k-1)\mathrm{E}Z^{k-2} \\ &= (k-1)\mathrm{E}Z^{k-2}.\end{aligned}$$

Z nulové střední hodnoty dostáváme indukcí nulové všechny liché momenty, z jednotkového rozptylu a právě dokázaného vzorce indukcí máme požadované číslo i pro sudé momenty. □

Věta 21 (Jednoznačnost náhodné veličiny s momenty normánlího rozdělení)**.** *(Kallenberg, 1997, Theorem 4.3)*

Nechť náhodná veličina X *má všechny momenty shodné s náhodnou veličinou* $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. *Potom* $F_X = F_Z$.

Důkaz. Ukážeme, že momenty normálního rozdělení jednoznačně definují charakteristickou funkci. Je

$$\begin{aligned}\widehat{P}_X(t) = \mathrm{E}e^{itX} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(itx)^k}{k!} \mathrm{d}P_X(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^{2k}}{(2k)!} \frac{(2k)!}{k!2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^{2k}}{k!2^k} = e^{-\frac{t^2}{2}} = \widehat{P}_Z(t)\end{aligned}$$

stejně jako ve Větě 3.

Chceme dokázat, že $\mathrm{E}f(X) = \mathrm{E}f(Z)$ pro každou $f \in C_b(\mathbb{R})$. K tomu lze použít zjednodušený postup pomocí Fejérovy věty (Věta 4) jako v důkazu Věty 7 a charakteristická funkce definuje jednoznačně rozdělení náhodné veličiny. □

Věta 22. *Nechť* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *je posloupnost nezávislých náhodných veličin s nulovou střední hodnotou, jednotkovým rozptylem a nechť platí*

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists C_k > 0\ \forall n \in \mathbb{N} : C_k \geq |\mathrm{E}X_n^k|.$$

Nechť dále $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. *Pak*

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{E} \left(\frac{\sum_{n=1}^{N} X_n}{\sqrt{N}} \right)^k = \mathrm{E}Z^k.$$

Důkaz. Nejprve počítejme střední hodnotu, tj. $k = 1$:

$$\mathrm{E}\left(\frac{\sum_{n=1}^{N} X_n}{\sqrt{N}}\right) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=1}^{N}\mathrm{E}X_n = 0.$$

Dále pro $k = 2$ je

$$\mathrm{E}\left(\frac{\sum_{n=1}^{N} X_n}{\sqrt{N}}\right)^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\mathrm{E}X_nX_m = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathrm{E}X_n^2 = 1$$

z nezávislosti X_n.

Pro $k \geq 3$ je opět z nezávislosti

$$\mathrm{E}\left(\frac{\sum_{n=1}^{N} X_n}{\sqrt{N}}\right)^k = \sum_{\substack{(k_1,\dots,k_N)\in[0,\dots,k]^N \\ \sum_{n=1}^{N} k_n = k}} N^{-\frac{k}{2}}\prod_{n=1}^{N}\mathrm{E}X_n^{k_n},$$

kde sčítáme přes všechny přípustné uspořádané N-tice.

Rozdělme tento součet podle počtu nenulových mocnin v závěrečném součinu pro $t \in \{1,\dots,k\}$. Označme sčítanec s t nenulovými prvky S_t. Potom je předchozí výraz roven součtu všech S_t. Pro libovolné t je

$$|S_t| \leq N^{-\frac{k}{2}}\sum_{\{i_1,\dots,i_t\}\subset\{1,\dots,N\}}\ \sum_{\substack{(k_{i_1},\dots,k_{i_t}) \\ \sum_{l=1}^{t} k_{i_t}=k \\ k_{i_l}>0}}\ \prod_{l=1}^{t} C_{k_l},$$

kde nejprve vybereme t-tici náhodných veličin (první suma), kterým přiřadíme všechny přípustné kombinace mocnin (druhá suma). Pokud dále označíme K_t počet možností, jak vybrat t-tici čísel $k_1,\dots,k_t$ větších než nula, jejichž součet je k, můžeme odhadovat

$$|S_t| \leq K_t\left(\max_{j=1\dots k} C_j\right)^t N^{-\frac{k}{2}}\binom{N}{t}.$$

Pro $t < \frac{k}{2}$ jde tento odhad k nule pro $N \to \infty$, protože na N závisí pouze

$$N^{-\frac{k}{2}}\binom{n}{t} \leq \frac{N^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2}}}{N^{\frac{k}{2}}} \to 0$$

pro liché k, resp.

$$N^{-\frac{k}{2}}\binom{N}{t} \leq \frac{N^{\frac{k}{2}-1}}{N^{\frac{k}{2}}} \to 0$$

pro sudé k.

Je-li $t > \frac{k}{2}$, pak jistě existuje alespoň jedno $k_i = 1$ a díky nulovým středním hodnotám je celý součin nulový. Odtud vydíme, že pro liché k je limita vždy nulová. Pro k sudé zbývá spočítat limitu $S_{\frac{k}{2}}$. Vyřadíme-li všechny možnosti, kde se vyskytuje $k_i = 1$, které jsou všechny nulové, dostáváme, že všechny mocniny jsou rovny dvěma ($k_l = 2$). Díky nezávislosti a tomu, že pro každé i je $\mathrm{E}X_i^2 = 1$ dostáváme

$$S_{\frac{k}{2}} = N^{-\frac{k}{2}}\binom{N}{\frac{k}{2}}\binom{k}{2}\binom{k-2}{2}\dots\binom{2}{2} = N^{-\frac{k}{2}}\frac{N!}{(N-\frac{k}{2})!}\frac{k!}{\frac{k}{2}!2^{\frac{k}{2}}} \to \frac{k!}{\frac{k}{2}!2^{\frac{k}{2}}},$$

což je podle požadovaný vzorec podle Věty 20. □

3.3 Centrální limitní věta, důkaz třetí

Snadnou kombinací předchozích tvrzení již dokážeme centrální limitní větu v následujícím tvaru se silnějšími předpoklady než v předchozích kapitolách.

Věta 23 (Centrální limitní věta pro náhodné veličiny s konečnými momenty)**.** *Nechť $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem a nechť platí*

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists C_k > 0\ \forall i \in \mathbb{N} : C_k \geq |\mathrm{E}X_i^k|.$$

Potom

$$S_n := \frac{\sum_{n=1}^N X_n}{\sqrt{N}} \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}(0{,}1)$$

pro $N \to \infty$.

Poznámka. *Požadované vlastnosti má například posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s konečnými momenty.*

Důkaz. Z Věty 22 víme, že $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}S_n^k = \mathrm{E}Z^k$ pro každé přirozené k, tedy i pro každou podposloupnost $\left\{S_{n_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ jsou limity momenty normálního rozdělení.

Z Věty 17 máme, že posloupnost $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je těsná, tedy podle Hellyho věty (Věta 19) existuje podposloupnost konvergující v distribuci. Tato podposloupnost potom podle Důsledku 18 a Věty 22 konverguje k náhodné veličině s momenty shodnými s normovaným normálním rozdělením. Konečně podle Věty 21 tato podposloupnost konverguje v distribuci k Z.

Popsaný postup můžeme zopakovat s libovolnou podposloupností $\left\{S_{n_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$, tedy z každé podposloupnosti lze vybrat podposloupnost konvegující v distribuci k Z a tedy $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje k Z.

Kdyby $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nekonvergovala k Z v distribuci, existovala by podposloupnost $\left\{S_{n_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ taková, že

$$|\mathrm{E}f(S_{n_k}) - \mathrm{E}f(X)| > \epsilon$$

pro každé k. Z této podposloupnosti ale nelze vybrat podposloupnost konvergující k Z distribuci, což je spor s uvedeným postupem.

□

Závěr

V prvních dvou kapitolách se nám podařilo dokázat centrální limitní větu s Feller - Lindebergovou podmínkou elementárními metodami.

Druhý důkaz uvádíme pro jeho zajímavost v nahrazování jednotlivých náhodných veličin náhodnými veličinami s normálním rozdělením, i kvůli charakterizaci konvergence v distribuci užitečné v tomto i v posledním důkazu. Tato metoda je také zajímavá tím, že narozdíl od běžně uváděných důkazů vůbec nepoužívá charakteristické funkce.

V prvním důkazu jsme viděli, že konvergence charakteristických funkcí spolu s Fejérovou větou je už dostačující pro konvergenci v distribuci. Důkaz je potom přímočarý a myšlenka aproximace omezených funkcí trigonometrickými polynomy je náročná pouze technicky.

Pokud se ale pokusíme místo Fejérovy věty použít větu Weierstrassovu, tj. místo aproximace omezených funkcí omezenými trigonometrickými polynomy použijeme neomezené polynomy (na $\mathbb{R}$), zjistíme, že právě neomezeně rostoucí mocniny situaci komplikují. Pro veličiny $X_{n,k}$ z centrální limitní věty ve znění s Feller - Lindebergovou podmínkou potom ani nemusejí vyšší momenty, a tedy i střední hodnoty z polynomů, existovat. Musíme se tedy smířit s výsledkem slabším, tak jak je prezentován ve třetí kapitole.

Otázkou zůstává, zda důkaz centrální limitní věty ve Feller - Lindebergově tvaru pomocí konvergence momentů možný není, nebo se nám jej pouze nepodařilo nalézt.

Literatura

ANDĚL, J. (1985). *Matematická statistika.* 2. vyd. Státní akladatelství technické literatury, Praha.

JARNÍK, V. (1955). *Integrální počet II.* Academia, Praha.

KALLENBERG, O. (1997). *Foundations of Modern Probability.* Springer, New York. ISBN 0-387-94957-7.

ŠTĚPÁN, J. (1987). *Teorie pravděpodobnosti.* Academia, Praha.

Seznam použitého značení

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$	pravděpodobnostní prostor
$L_n(\Omega, \mathcal{A}, P)$	prostor L_n
$\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	přirozená, racionální, reálná a komplexní čísla
i	komplexní jednotka
$[a,b]$	uzavřený interval a, b
(a,b)	otevřený interval a, b
$\lfloor a \rfloor$	dolní celá část čísla a
$\mathcal{B}(A), A \subset \mathbb{R}$	borelovská σ-algebra na A
$C_b(\mathbb{R})$	množina všech spojitých funkcí na $\mathbb{R}$
$C_b^\infty(\mathbb{R})$	množina funkcí s omezenými derivacemi všech řádů na $\mathbb{R}$
$\mathbb{I}_{[A]}(y), A \subset \mathbb{R}$	indikátor množiny A
$\mathbb{I}_{[W]}, W \in \mathcal{A}$	indikátor jevu W
X,W,Z	náhodná veličina
P_X	pravděpodobnostní míra indukovaná náhodnou veličinou X
$\widehat{P}_X$	charakteristická funkce náhodné veličiny X
F_X	distribuční funkce náhodné veličiny X
$\mathrm{E}X$	střední hodnota náhodné veličiny X
$\mathrm{var}X$	rozptyl náhodné veličiny X
$P_n \xrightarrow{w} P$	P_n konvergují slabě k P
$X_n \xrightarrow{d} X$	X_n konvergují v distribuci k X
$Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$	náhodná veličina Z s normálním rozdělením se střední hodnotou μ a rozptylem σ