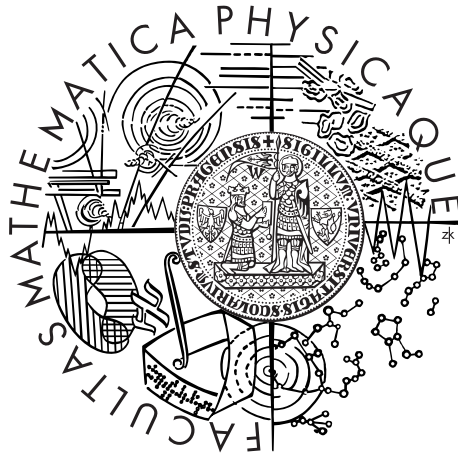


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Martin Melicherčík

Testování linearity v časových řadách

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Zuzana Prášková, CSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická statistika
a ekonometrie

Praha 2013

Na tomto mieste by som chcel poďakovať vedúcej práce, Doc. RNDr. Zuzane Práškovej, CSc., za odborné vedenie a cenné pripomienky pri jej písaní, za trpezlivosť, ústretovosť a čas pri početných konzultáciach a prechádzaní práce.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Testy linearity v časových řadách

Autor: Martin Melicherčík

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Zuzana Prášková, CSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Práce v začiatku podáva potrebné teoretické základy z oblasti časových radov, ktoré sú potom využité na zostavenie viacerých testov linearity. Vzhľadom na rôznorodosť prístupov, teória zasahuje pomerne široko do korelačnej aj spektrálnej analýzy a uvádza niektoré základné nelineárne modely. Testy sú v druhej časti popísané, utriedené a porovnané teoreticky aj prakticky na simulovaných dátach z viacerých lineárnych a nelineárnych modelov. V závere sú spomenuté užitočné rady z aplikácie testov na dáta v jazyku R.

Klíčová slova: lineárne časové rady, bispektrum, testovanie linearity, nelineárne modely

Title: Testing for linearity in time series

Author: Martin Melicherčík

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Zuzana Prášková, CSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: In the first part of the thesis, a necessary theoretical base from time series analysis is explained, which is consequently used to formulate several tests for linearity. According to variety of approaches the theory includes wide range of knowledge from correlation and spectral analysis and introduces some basic nonlinear models. In the second part, linearity tests are described, classified and compared both theoretically and practically on simulated data from several linear and nonlinear models. At the end, some scripts and hints in R language are introduced that could be used when applying tests to real data.

Keywords: linear time series, bispectrum, testing for linearity, nonlinear models

Názov práce: Testy linearity v časových řadách

Autor: Martin Melicherčík

Katedra/Ústav: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci diplomovej práce: doc. RNDr. Zuzana Prášková, CSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Práca v začiatku podáva potrebné teoretické základy z oblasti časových radov, ktoré sú potom využité na zostavenie viacerých testov linearity. Vzhľadom na rôznorodosť prístupov, teória zasahuje pomerne široko do korelačnej aj spektrálnej analýzy a uvádza niektoré základné nelineárne modely. Testy sú v druhej časti popísané, utriedené a porovnané teoreticky aj prakticky na simulovaných dátach z viacerých lineárnych a nelineárnych modelov. V závere sú spomenuté užitočné rady z aplikácie testov na dáta v jazyku R.

Kľúčové slová: lineárne časové rady, bispektrum, testovanie linearity, nelineárne modely

Obsah

Úvod	2
1 Základné pojmy	3
1.1 Lineárne modely časových radov	7
1.2 Odhady a konštrukcia lineárnych modelov	14
1.3 Nelineárne modely časových radov	25
2 Testy linearity	28
2.1 Linearita vs. nelinearita všeobecne	28
2.1.1 McLeodov-Liov test	28
2.1.2 Keenanov test	29
2.1.3 Tsayov test	30
2.1.4 Bispektrálny test	31
2.1.5 BDS test	38
2.2 Linearita vs. špecifický nelineárny model	39
2.2.1 Test pomerom vierohodností pre prahovú nelinearitu . . .	39
2.2.2 Tsayov test usporiadanej autoregresie	40
2.2.3 Test pre STAR modely	41
2.2.4 Ďalšie odkazy	43
3 Výsledky testov na simulovaných dátach	45
4 Implementácia	51
Záver	52
Seznam použité literatury	53
Príloha A - doplňujúce tvrdenia	55
Príloha B - ukážky skriptov	56
Príloha C - obsah priloženého CD	64

Úvod

Lineárne ARMA modely sú v štatistike pomerne silným a teoreticky prepracovaným nástrojom na prácu so závislými pozorovaniami v čase, ktoré dokážu uspokojuivo popísať správanie širokej triedy časových radov s aj veľmi všobecnými priebehmi. Preto je často predpoklad, že skúmaný časový rad sa ARMA modelom riadi na mieste. Niekedy je však nesprávny a bohužiaľ, lineárne modely naozaj nemôžu dostatočne zachytiť správanie všetkých časových radov, ktoré v praxi potrebujeme skúmať. V tomto prípade sme častokrát nútení hľadať vhodný model postupnosti medzi zložitejšími nelineárnymi štruktúrami, ktorých skúmanie môže byť náročnejšie (napríklad menším objemom teoretických poznatkov). Z tohto dôvodu majú testy linearity nemalú dôležitosť v štatistickej analýze časových radov. Za posledné desaťročia bolo navrhnutých viac prístupov a možností, ako k testovaniu pristupovať. Táto práca má za cieľ podať a vysvetliť dostatočný teoretický základ k pochopeniu podstaty rôznych testov, ďalej ponúknuť ich prehľad, popísať ich a na záver porovnať opakovanou aplikáciou na simulované dáta.

Prvá kapitola sa zaoberá práve zavedením pojmov, s ktorými je potrebné byť oboznámený pre dostatočné chápanie súvislostí, nielen v problematike testovania linearity, ale aj v ostatných odvetviach štatistickej analýzy časových radov. Uvádza aj základy postupov z teórie konštrukcie lineárnych modelov, bez ktorých by sme mnohé testy nemohli vykonať. Na záver podáva prehľad niektorých jednoduchších nelineárnych modelov, ktoré sa začali zavádzať do praxe ako jedny z prvých. Viaceré testy sú totiž koncipované proti alternatíve konkrétneho tvaru nelineárneho modelu. V druhej kapitole prejdeme priamo k samotným testom linearity, ktoré popíšeme, provnáme teoreticky a v zápätí si ich vlastnosti v tretej kapitole overíme prakticky na simuláciach. Nakoniec štvrtá kapitola v krátkosti informuje o praktickej aplikácii na dáta, problémoch, ktoré sa pri nej vyskytli a softwarovom vybavení, ktoré bolo použité.

1. Základné pojmy

Začneme definovaním najzákladnejších pojmov týkajúcich sa časových radov, ktoré budeme potrebovať k ďalšiemu výkladu.

Definícia. Nech (Ω, \mathcal{A}, P) je pravdepodobnostný priestor a $T \subset \mathbb{R}$. Rodina reálnych náhodných veličín $\{X_t, t \in T\}$ definovaných na (Ω, \mathcal{A}, P) sa nazýva náhodný proces. V prípade, že $T = \mathbb{Z}$ alebo $T \subset \mathbb{Z}$ hovoríme o procese s diskretným časom alebo o **časovom rade**, alebo náhodnej postupnosti.

Definícia. Nech $\{X_t, t \in T\}$ je náhodný proces taký, že pre každé $t \in T$ existuje EX_t , potom funkciu $\mu_t = EX_t$ definovanú na T nazývame **stredná hodnota** procesu.

Ak $EX_t^2 < \infty$ pre všetky $t \in T$, potom funkcia definovaná na $T \times T$ predpisom $R(s, t) = \text{cov}(X_s, X_t) = E(X_s - \mu_s)(X_t - \mu_t)$ sa nazýva **autokovariančná funkcia** procesu $\{X_t, t \in T\}$. Hodnota $R(t, t)$ sa nazýva rozptyl procesu v čase t .

Ak $E|X_s X_t X_u| < \infty$ pre všetky $(s, t, u) \in T^3 = T \times T \times T$, potom funkcia definovaná na T^3 predpisom $c(s, t, u) = E(X_s - \mu_s)(X_t - \mu_t)(X_u - \mu_u)$ sa nazýva **(auto-)kumulantová funkcia** procesu $\{X_t, t \in T\}$.

Definícia. Nech $n \in \mathbb{N}$ a $\{X_t, t \in T\}$ je náhodný proces. Povieme, že $\{X_t, t \in T\}$ je **slabo stacionárny do n -tého rádu**, ak pre všetky $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, $t \in T$ a $s_1, \dots, s_k \in T$ také, že $s_1 + t, \dots, s_k + t \in T$ existuje $E[X_{s_1} \dots X_{s_k}] < \infty$ a platí

$$E[(X_{s_1} - \mu_{s_1}) \dots (X_{s_k} - \mu_{s_k})] = E[(X_{s_1+t} - \mu_{s_1+t}) \dots (X_{s_k+t} - \mu_{s_k+t})].$$

Definícia slabej stacionarity do rádu n v podstate hovorí, že existujú všetky združené momenty procesu až do rádu n a sú invariantné vzhľadom na posun v čase. Slabú stacionaritu budeme nazývať jednoducho stacionarita. Existuje aj tzv. silná stacionarita, ktorej definícia sa od slabej líši tým, že v čase sú pre všetky n invariantné združené distribučné funkcie a nevyžaduje existenciu momentov (prvky náhodnej postupnosti môžu mať teda napríklad aj Cauchyho rozdelenie). Pre časové rady stacionárne do 2. a vyššieho rádu teda autokovariančná funkcia závisí len na posunutí v čase. Podobne to je aj u kumulantovej funkcie v prípade radov stacionárnych do 3. a vyššieho rádu. Navyše postupnosti stacionárne do 1. a vyššieho rádu majú konštantnú strednú hodnotu. Preto

v spomínaných prípadoch pozmeníme označenie týchto funkcií nasledovne.

$$\begin{aligned}\mu &= \text{E}[X_t] \\ R(t) &= \text{E}[(X_s - \mu)(X_{s+t} - \mu)] \\ c(t_1, t_2) &= \text{E}[(X_s - \mu)(X_{s+t_1} - \mu)(X_{s+t_2} - \mu)]\end{aligned}$$

Z praktického hľadiska je pri hľadaní vhodných lineárnych modelov dôležitejšia autokorelačná a parciálna autokorelačná funkcia. Sú totiž normované tak, že ich veľkosť v absolútnej hodnote je najviac 1, aby nezáležalo na jednotkách, v ktorých číselné údaje sú. Odhadnuté korelácie a parciálne korelácie sa potom môžu porovnávať s ich teoretickými náprotivkami rôznych modelov.

Definícia. Nech $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je postupnosť stacionárna do 2. rádu. Potom **autokorelačnú funkciu** definujeme ako

$$r(t) = \frac{R(t)}{R(0)} = \text{corr}(X_1, X_{1+|t|}), \quad t \in \mathbb{Z}$$

a **parciálnu autokorelačnú funkciu** ako

$$\alpha(k) = \begin{cases} \text{corr}(X_1, X_{k+1}) & k = 1 \\ \text{corr}(X_1 - \tilde{X}_1, X_{1+k} - \tilde{X}_{1+k}) & k > 1, \end{cases}$$

kde \tilde{X}_1 , resp. \tilde{X}_{1+k} je lineárna kombinácia veličín $\{1, X_2, \dots, X_k\}$ minimalizujúca strednú štvorcovú chybu $\text{E}(X_1 - \tilde{X}_1)^2$, resp. $\text{E}(X_{1+k} - \tilde{X}_{1+k})^2$.

Hodnoty parciálnej autokorelačnej funkcie môžeme spočítať pomocou hodnôt autokorelačnej funkcie. O tom ako, hovorí nasledujúca veta.

Veta 1. Nech $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je centrovaná postupnosť stacionárna do 2. rádu s autokovariančnou funkciou $R(t)$, pre ktorú platí $R(0) > 0$ a $R(k) \rightarrow 0$, keď $k \rightarrow \infty$. Potom platí

$$\alpha(1) = r(1),$$

$$\alpha(k) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & r(1) & \cdots & r(k-2) & r(1) \\ r(1) & 1 & \cdots & r(k-3) & r(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r(k-1) & r(k-2) & \cdots & r(1) & r(k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r(1) & \cdots & r(k-1) \\ r(1) & 1 & \cdots & r(k-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(k-1) & r(k-2) & \cdots & 1 \end{vmatrix}} \quad k > 1, \quad (1.1)$$

kde $r(k)$ je autokorelačná funkcia postupnosti $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$.

Dôkaz. Vid' [16], veta 9.2 alebo [23], kapitola 2.3. □

Parciálna autokorelačná funkcia sa dá počítať aj jednoduchším spôsobom pomocou rekurzívnych algoritmov, napr. Durbinovho - Levinsonovho (vid' [23] kapitola 2.5.4).

Významnou časťou analýzy časových radov je aj takzvaná spektrálna analýza. V nej sa na postupnosti nepozeraťme v časovej doméne (korelovanosť v čase), ale v spektrálnej. V podstate ide o Fourierove transformácie autokovariančných funkcií. Nasledujúca lemma z matematickej analýzy Fourierových radov je pomocným tvrdením k nasledujúcej vete.

Lemma 2. *Nech postupnosť $\left\{ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n r_k e^{-ik\lambda} \right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne k $f(\lambda)$ na $[-\pi, \pi]$. Potom pre každé $k \in \mathbb{Z}$ platí*

$$r_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f(\lambda) \, d\lambda.$$

Dôkaz. Nech $k \in \mathbb{Z}$. Podľa predpokladu $\left\{ \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-n}^n r_j e^{-ij\lambda} \right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne k $f(\lambda)$ na $[-\pi, \pi]$. Potom určite $\left\{ e^{ik\lambda} \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-n}^n r_j e^{-ij\lambda} \right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne na $[-\pi, \pi]$ k $e^{ik\lambda} f(\lambda)$. Platí

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f(\lambda) \, d\lambda &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-n}^n r_j e^{-i(j-k)\lambda} \, d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-n}^n r_j \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(j-k)\lambda} \, d\lambda = r_k, \end{aligned}$$

kde sme využili rovnomernú konvergenciu pri zámene limity a integrálu. □

Veta 3. *Nech $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je postupnosť stacionárna do 2. rádu s autokovariančnou funkciou $R(t)$, pre ktorú platí $\sum_{t=-\infty}^{\infty} |R(t)| < \infty$. Potom pre funkciu*

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} R(t) \tag{1.2}$$

a pre všetky $t \in \mathbb{Z}$ platí

$$R(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} f(\lambda) \, d\lambda. \tag{1.3}$$

Naviac $f(\lambda)$ je reálna, párna a nezáporná.

Dôkaz. Keďže $\sum_{t=-\infty}^{\infty} |R(t)| < \infty$, tak postupnosť $\{s_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-n}^n R(j)e^{-ij\lambda}\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne k $f(\lambda)$ (definovanej v (1.2)) na $[-\pi, \pi]$, pretože $|e^{-ij\lambda}| \leq 1$. K dôkazu (1.3) stačí už len použiť lemmu 2. Reálnosť $f(\lambda)$ plynie z nepárnosti funkcie sínus. Ďalej párnosť plynie z párnosti funkcie kosínus. Dôkaz nezápornosti môžeme nájsť v [23], časť 11.1.1, strany 233-234. □

Funkcia $f(\lambda)$ z vety 3 sa nazýva **spektrálna hustota**. Všimnime si, že $R(t)$ z (1.3) sú v podstate Fourierove koeficienty funkcie $f(\lambda)$ a (1.2) je zápis Fourierovej rady funkcie $f(\lambda)$ v komplexnom tvare. Podobným spôsobom sa teraz pozrieme aj na kumulantovú funkciu postupností stacionárnych do rádu 3.

Veta 4. *Nech $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je postupnosť stacionárna do 3. rádu s kumulantovou funkciou $c(t_1, t_2)$, pre ktorú platí $\sum_{t_1, t_2 \in \mathbb{Z}} |c(t_1, t_2)| < \infty$. Potom pre funkciu*

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{t_1, t_2 \in \mathbb{Z}} e^{-i(t_1\lambda_1 + t_2\lambda_2)} c(t_1, t_2) \quad (1.4)$$

a pre všetky $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ platí

$$c(t_1, t_2) = \int_{[-\pi, \pi]^2} e^{it_1\lambda_1 + it_2\lambda_2} f(\lambda_1, \lambda_2) d(\lambda_1, \lambda_2). \quad (1.5)$$

Dôkaz. Z konvergenzie radu $\sum_{t_1, t_2 \in \mathbb{Z}} |c(t_1, t_2)|$ vieme, že rad

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{t_1, t_2 \in \mathbb{Z}} c(t_1, t_2) e^{-it_1\lambda_1 - it_2\lambda_2}$$

konverguje absolútne pre všetky $\lambda_1, \lambda_2 \in [-\pi, \pi]$, teda nezáleží na poradí sčítovania. Nech $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}^2$, $t(j) = (t(j)_1, t(j)_2)$ je bijekcia, potom

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{j=1}^{\infty} c(t(j)) e^{-it(j)_1\lambda_1 - it(j)_2\lambda_2}$$

a podobne ako v lemmu 2 pre ľubovoľné $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ platí

$$\begin{aligned} & \int_{[-\pi, \pi]^2} e^{it_1\lambda_1 + it_2\lambda_2} f(\lambda_1, \lambda_2) d(\lambda_1, \lambda_2) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{[-\pi, \pi]^2} \sum_{j=1}^{\infty} c(t(j)) e^{-i[t(j)_1 - t_1]\lambda_1 - i[t(j)_2 - t_2]\lambda_2} d(\lambda_1, \lambda_2) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{j=1}^{\infty} c(t(j)) \int_{[-\pi, \pi]^2} e^{-i[t(j)_1 - t_1]\lambda_1 - i[t(j)_2 - t_2]\lambda_2} d(\lambda_1, \lambda_2) \\ &= c(t_1, t_2), \end{aligned}$$

kde sme pri zámene limity (nekonečnej sumy) a integrálu použili Lebesgueovu vetu s majorantou $\sum_{t_1, t_2 \in \mathbb{Z}} |c(t_1, t_2)|$.

□

Funkcia $f(\lambda_1, \lambda_2)$ z práve dokázanej vety sa nazýva **bispektrálna hustota**. K dôkazu ešte poznamenajme, že sme v ňom využili zámenu limity a integrálu, no pôvodne bola suma dvojité. Pomocou absolútnej konvergenencie sme ju však boli schopní previesť na sumu jednoduchú, sčítajúcu cez prirodzené čísla a aplikovať tak Lebesgueovu vetu. Tento trik pri zámene viacnásobnej sumy a integrálu ešte využijeme, no nebudeme ho už detailne rozoberať.

1.1 Lineárne modely časových radov

V tejto časti si zavedieme pojem linearity a základné lineárne modely časových radov, ktoré potrebujeme poznať, aby sme vôbec mohli nejakú linearitu testovať. Základným procesom, pomocou ktorého je linearita definovaná je tzv. biely šum, ktorý si teraz zdefinujeme.

Definícia. Postupnosť $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ navzájom nekorelovaných náhodných veličín s nulovou strednou hodnotou a kladným, konečným a konštantným rozptylom nazývame **biely šum**.

V ďalšom budeme predpokladať, že náhodné veličiny bieleho šumu sú dokonca nezávislé, pokiaľ nebude povedané inak.

Veta 5. *Nech $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je náhodná postupnosť stacionárna do 2. rádu s autokovariančnou funkciou $R(t)$. Nech $\{c_j, j \in \mathbb{N}_0\}$ je postupnosť reálnych konštánt taká, že $\sum_{j=0}^{\infty} |c_j| < \infty$. Potom rad $\sum_{j=0}^{\infty} c_j X_{t-j}$ konverguje pre každé $t \in \mathbb{Z}$ v \mathcal{L}_2 a aj absolútne s pravdepodobnosťou 1.*

Dôkaz. Vid' [16].

□

Práve uvedená veta nám umožňuje vysloviť nasledovnú definíciu.

Definícia. Nech $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je biely šum, $\{c_j, j \in \mathbb{N}_0\}$ postupnosť konštánt taká, že $\sum_{j=0}^{\infty} |c_j| < \infty$ a $\mu \in \mathbb{R}$. Náhodná postupnosť $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ definovaná predpisom

$$X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1.6)$$

sa nazýva **kauzálny lineárny proces**.

Slovo kauzálny je v názve preto, lebo náhodná veličina X_t (pozorovaná v čase t) je v tomto prípade súčtom náhodných vplyvov realizovaných v minulosti a súčasnosti a nezávisí na budúcnosti. Všeobecný lineárny proces je definovaný analogicky ako kauzálny, s tým rozdielom, že $X_t = \mu + \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \varepsilon_{t-j}$, kde $\{c_j, j \in \mathbb{Z}\}$ je opäť postupnosť reálnych konštánt taká, že $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |c_j| < \infty$. V praxi však index t predstavuje čas, t.j. poradie, v akom na seba realizácie náhodných veličín chronologicky naväzujú, a tak si pre analýzu časových radov ďalej vystačíme s kauzálnym lineárnym procesom. Ďalej je v definícii lineárneho procesu dôležitá nezávislosť. Použitie bieleho šumu s len nekorelovanými veličinami by pre naše účely nebolo najvhodnejšie vzhľadom na Woldov rozklad (viď [5], kapitola 5.7). Podľa neho sa každá čisto nedeterministická, do 2. rádu stacionárna centrovaná postupnosť X_t dá zapísať v tvare

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon_{t-j},$$

kde $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je biely šum s nekorelovanými náhodnými veličinami, $c_0 = 1$ a $\sum_{j=0}^{\infty} c_j^2 < \infty$. Aby bolo predchádzajúce tvrdenie jasné, treba ešte vysvetliť, čo znamená, že postupnosť je čisto nedeterministická. Presná definícia je nasledovná. Postupnosť X_t je čisto nedeterministická, ak platí

$$\mathcal{M}_{-\infty} = \bigcap_{t=-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{M}}\{X_s, s \leq t\} = \{0\},$$

kde $\overline{\mathcal{M}}\{X_s, s \leq t\}$ označuje uzáver lineárneho obalu veličín $\{X_s, s \leq t\}$. Pre lepšiu predstavu ešte tento pojem približne vysvetlíme pomocou pojmu deterministická postupnosť. Deterministický by sa v tomto prípade dalo nahradiť slovom nenáhodný. Postupnosť X_t je deterministická, ak $X_t \in \mathcal{M}_{-\infty}$ pre všetky $t \in \mathbb{Z}$. V podstate to znamená, že budúce hodnoty postupnosti vieme v čase t "poskladať" z hodnôt minulých, a to vo všetkých časoch t . Presný zápis poslednej vety by bol, že $E|\hat{X}_{t+1} - X_{t+1}|^2 = 0$ pre všetky $t \in \mathbb{Z}$, kde \hat{X}_{t+1} je projekcia X_{t+1} do $\overline{\mathcal{M}}\{X_s, s \leq t\}$. Čisto nedeterministická postupnosť bude potom taká, ktorá nebude mať žiadnu deterministickú (nenáhodnú) zložku. Ak by sme teda lineárny proces chceli definovať pomocou bieleho šumu len s nekorelovanými náhodnými veličinami, tak by boli všetky čisto nedeterministické procesy stacionárne do 2. rádu lineárne. Z Woldovho rozkladu ešte plyní, že ak majú veličiny nejakej (čisto nedeterministickej) náhodnej postupnosti normálne rozdelenie, tak táto postupnosť je už lineárna. Platí to z toho dôvodu, že potom sú normálne rozdelené aj veličiny vo Woldovom rozklade a tým aj nezávislé.

Teraz si zadefinujeme niektoré základné typy lineárnych modelov náhodných

postupností, ktoré, ako bude hneď vidno, sú špeciálnymi prípadmi lineárneho procesu.

Definícia. Náhodná postupnosť $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ definovaná predpisom

$$X_t = \varepsilon_t + b_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + b_n\varepsilon_{t-n}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

kde $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je nezávislý biely šum, b_1, \dots, b_n sú reálne konštanty a $b_n \neq 0$, sa nazýva **postupnosť kľavých súčtov rádu n** , značíme MA(n).

Definícia. Náhodná postupnosť $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ sa nazýva **autoregresná postupnosť rádu n** (značíme AR(n)), ak spĺňa stochastickú diferenčnú rovnicu

$$X_t + a_1X_{t-1} + \cdots + a_nX_{t-n} = \varepsilon_t \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1.7)$$

kde a_1, \dots, a_n sú reálne konštanty, $a_n \neq 0$ a $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je biely šum.

Nasledujúce tvrdenie hovorí o tom, že autoregresná postupnosť je za určitej podmienky pre jej koeficienty kauzálny lineárny proces.

Veta 6. *Nech $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je autoregresná postupnosť rádu n definovaná vzťahom (1.7). Ak má polynóm $a(z) = 1 + a_1z + \cdots + a_nz^n$ všetky korene zvonka jednotkového kruhu, potom $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je kauzálny lineárny proces, t.j. platí*

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} c_j\varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

kde koeficienty c_j sú určené vzťahom

$$c(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_jz^j = \frac{1}{a(z)}, \quad |z| \leq 1.$$

Dôkaz. Vid' [16].

□

K práve uvedenej vete len poznamenajme, že vďaka predpokladu, že korene $a(z)$ sú zvonka jednotkového kruhu, mocninný rad $c(z)$ konverguje absolútne aspoň na jednotkovom kruhu a teda (pre $z=1$) $\sum_{j=0}^{\infty} |c_j| < \infty$. Podľa vety 5 je potom náhodná veličina

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} c_j\varepsilon_{t-j}$$

dobře definovaná pre všetky $t \in \mathbb{Z}$.

Definícia. Náhodná postupnosť $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ sa riadi *modelom ARMA(m,n)*, ak pre ňu platí

$$X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_m X_{t-m} = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_n \varepsilon_{t-n}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1.8)$$

kde $a_i, i = 1, \dots, m, b_i, i = 1, \dots, n$ sú reálne konštanty, $a_m \neq 0, b_n \neq 0$, $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je biely šum.

Podobne ako pre autoregresné postupnosti, aj postupnosť riadiaca sa modelom ARMA(m,n) sa dá za rovnakej podmienky zapísať v tvare lineárneho procesu. Ak $a(z) = 1 + a_1 z + \cdots + a_m z^m, b(z) = 1 + b_1 z + \cdots + b_n z^n, a(z), b(z)$ nemajú spoločné korene a $a(z)$ má všetky korene zvonka jednotkového kruhu, tak rad

$$c(z) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^j = \frac{b(z)}{a(z)}$$

konverguje aspoň na jednotkovom kruhu a postupnosť typu (1.8) môžeme zapísať v tvare (1.6).

K práve zavedeným modelom poznamenajme, že všetky postupnosti, ktoré sa podľa nich riadia majú nulovú strednú hodnotu. Nie je ale ťažké ich rozšíriť pre prípady nenulovej konštatnej strednej hodnoty μ . Rovnosť uvedieme len pre model ARMA, pretože prvé dva sú jeho špeciálnymi prípadmi. Náhodná postupnosť so strednou hodnotou μ sa riadi modelom *ARMA(m,n)* ak platí

$$(X_t - \mu) + a_1 (X_{t-1} - \mu) + \cdots + a_m (X_{t-m} - \mu) = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_n \varepsilon_{t-n}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

alebo ekvivalentne

$$X_t + a_0 + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_m X_{t-m} = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_n \varepsilon_{t-n}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

kde $a_0 = -\mu(1 + a_1 + \cdots + a_m)$.

Nasledujúca veta hovorí, ako vyzerá v prípade kauzálneho lineárneho procesu autokovariančná a kumulantová funkcia a spektrálna a bispektrálna hustota.

Veta 7. *Nech $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je biely šum stacionárny do 3. rádu a $\{c_j\}_{j=0}^{\infty}$ postupnosť reálnych konštánt taká, že $\sum_{j=0}^{\infty} |c_j| < \infty$. Potom kauzálny lineárny proces $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon_{t-j}$ je stacionárny do 3. rádu a pre $t, t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ platí*

$$R(t) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} c_j c_{j+|t|}, \quad (1.9)$$

$$c(t_1, t_2) = \gamma_3 \sum_{j=\max\{t_1^-, t_2^-\}}^{\infty} c_j c_{j+t_1} c_{j+t_2}, \quad (1.10)$$

kde $\sigma^2 = E\varepsilon_t^2$, $\gamma_3 = E\varepsilon_t^3$ a $s^- = \max\{0, -s\}$. Ďalej označme $g(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j e^{-ij\lambda}$.
Pre spektrálnu a bispektrálnu hustotu platí

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |g(\lambda)|^2, \quad (1.11)$$

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\gamma_3}{(2\pi)^2} g(-\lambda_1 - \lambda_2) g(\lambda_1) g(\lambda_2). \quad (1.12)$$

Pred dôkazom ešte poznamenajme, že vzorec (1.9) budeme v dôkaze používať v ekvivalentnom tvare

$$R(t) = \sigma^2 \sum_{j=t^-}^{\infty} c_j c_{j+t},$$

Rozdiel je len v inom indexovaní (v prípade z vety má vždy prvé c v súčine menší index a začína nulou, v tomto prípade to závisí na znamienku t .)

Dôkaz. Stacionarita a vzťahy (1.9), (1.10) sa dajú jednoducho overiť priamym výpočtom. Zo vzťahov (1.11), (1.12) pre overenie dosadíme do (1.3), (1.5). Najskôr si uvedomme, že $EX_t = 0$ pre všetky $t \in \mathbb{Z}$. Následne overíme (1.9) a zároveň konečnosť druhých momentov. Pre $s, t \in \mathbb{Z}$ platí

$$\begin{aligned} E[X_s X_{s+t}] &= E \left[\sum_{i=0}^{\infty} c_i \varepsilon_{s-i} \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon_{s+t-j} \right] = \sum_{i,j \in \mathbb{N}_0} c_i c_j E[\varepsilon_{s-i} \varepsilon_{s+t-j}] \\ &= \sigma^2 \sum_{i=t^-}^{\infty} c_i c_{t+i} = R(t), \end{aligned}$$

kde sme pri zámene sumy a strednej hodnoty použili Lebesgueovu vetu s integrovateľnou majorantou $\sum_{i,j \in \mathbb{N}_0} |c_i c_j| |\varepsilon_{s-i} \varepsilon_{s+t-j}|$. Jej integrovateľnosť plynie z nasledujúcich úprav, kde využijeme nerovnosť $E|\varepsilon_t| \leq \sqrt{E|\varepsilon_t|^2} = \sigma$.

$$\begin{aligned} E \left[\sum_{i,j \in \mathbb{N}_0} |c_i c_j| |\varepsilon_{s-i} \varepsilon_{s+t-j}| \right] &= \sum_{i=t^-}^{\infty} |c_i c_{i+t}| E|\varepsilon_{s-i}|^2 + \sum_{\substack{i,j \in \mathbb{N}_0 \\ j \neq i+t}} |c_i c_j| E|\varepsilon_{s-i}| E|\varepsilon_{s+t-j}| \\ &\leq \sigma^2 \sum_{i,j \in \mathbb{N}_0} |c_i c_j| = \sigma^2 \sum_{j \in \mathbb{N}_0} |c_j| \sum_{i \in \mathbb{N}_0} |c_i| < \infty \end{aligned}$$

Autokovariančná funkcia teda naozaj závisí len na rozdieli t . Ďalej overíme (1.10) a zároveň konečnosť 3. momentov. Pre $s, t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ platí

$$\begin{aligned} E[X_s X_{s+t_1} X_{s+t_2}] &= E \left[\sum_{i=0}^{\infty} c_i \varepsilon_{s-i} \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon_{s+t_1-j} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon_{s+t_2-k} \right] \\ &= \sum_{i,j,k \in \mathbb{N}_0} c_i c_j c_k E[\varepsilon_{s-i} \varepsilon_{s+t_1-j} \varepsilon_{s+t_2-k}] = \gamma_3 \sum_{i=\max\{t_1^-, t_2^-\}}^{\infty} c_i c_{t_1+i} c_{t_2+i} \\ &= c(t_1, t_2), \end{aligned}$$

kde sme pri zámene sumy a strednej hodnoty použili Lebesgueovu vetu s integrovateľnou majorantou $\sum_{i,j,k \in \mathbb{N}_0} |c_i c_j c_k| |\varepsilon_{s-i} \varepsilon_{s+t_1-j} \varepsilon_{s+t_2-k}|$. Integrovateľnosť opäť plynie z nasledovných úprav, kde využijeme nerovnosti $E|\varepsilon_t| \leq \sqrt[3]{E|\varepsilon_t|^3} = (\gamma'_3)^{1/3}$ a $E|\varepsilon_t|^2 \leq (\gamma'_3)^{2/3}$.

$$\begin{aligned} E \left[\sum_{i,j,k \in \mathbb{N}_0} |c_i c_j c_k| |\varepsilon_{s-i} \varepsilon_{s+t_1-j} \varepsilon_{s+t_2-k}| \right] &= \sum_{i=\max\{t_1^-, t_2^-\}}^{\infty} |c_i c_{i+t_1} c_{i+t_2}| E|\varepsilon_{s-i}|^3 + \\ &3 \sum_{\substack{i,j \in \mathbb{N}_0, i \geq t_2^- \\ j \neq i+t_1}} |c_i| |c_j| |c_{i+t_2}| E|\varepsilon_{s-i}|^2 E|\varepsilon_{s+t_1-j}| + \\ &\sum_{\substack{i,j,k \in \mathbb{N}_0, j \neq i+t_1 \\ k \neq i+t_2, t_1-j \neq t_2-k}} |c_i| |c_j| |c_k| E|\varepsilon_{s-i}| E|\varepsilon_{s+t_1-j}| E|\varepsilon_{s+t_2-k}| \leq \gamma'_3 \sum_{i,j,k \in \mathbb{N}_0} |c_i c_j c_k| < \infty \end{aligned}$$

Kumulantová funkcia teda závisí len na rozdieloch t_1, t_2 , a tým máme aj stacionaritu do 3 rádu. Ďalej overíme (1.11). Pre $t \in \mathbb{Z}$ platí

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} f(\lambda) d\lambda &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} c_j e^{-ij\lambda} \overline{\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{-ik\lambda}} d\lambda \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j,k \in \mathbb{N}_0} c_j c_k e^{i\lambda(t-j+k)} d\lambda \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \sum_{j,k \in \mathbb{N}_0} c_j c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(t-j+k)} d\lambda \\ &= \sigma^2 \sum_{k=t^-}^{\infty} c_k c_{t+k} = R(t), \end{aligned}$$

kde sme pri zámene sumy a integrálu použili Lebesgueovu vetu s majorantou $\sum_{i,j \in \mathbb{N}_0} |c_i c_j| |e^{i\lambda(t-j+k)}| = \sum_{i,j \in \mathbb{N}_0} |c_i| |c_j| < \infty$. Jej integrovateľnosť plynie z jej konštantnosti a toho, že obor integrácie je ohraničená množina $(-\pi, \pi)$. Zostáva overiť, že funkcia z (1.12) je bispektrálnou hustotou (teda, že jej Fourierova transformácia je $c(t_1, t_2)$).

$$\begin{aligned} \int_{[-\pi, \pi]^2} e^{it_1 \lambda_1 + it_2 \lambda_2} f(\lambda_1, \lambda_2) d(\lambda_1, \lambda_2) &= \\ &= \frac{\gamma_3}{(2\pi)^2} \int_{[-\pi, \pi]^2} e^{it_1 \lambda_1 + it_2 \lambda_2} \sum_{j=0}^{\infty} c_j e^{-ij(-\lambda_1 - \lambda_2)} \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{-ik\lambda_1} \sum_{l=0}^{\infty} c_l e^{-il\lambda_2} d(\lambda_1, \lambda_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\gamma_3}{(2\pi)^2} \int_{[-\pi, \pi]^2} \sum_{j, k, l \in \mathbb{N}_0} c_j c_k c_l e^{i\lambda_1(t_1+j-k) + i\lambda_2(t_2+j-l)} d(\lambda_1, \lambda_2) \\
&= \frac{\gamma_3}{(2\pi)^2} \sum_{j, k, l \in \mathbb{N}_0} c_j c_k c_l \int_{[-\pi, \pi]^2} e^{i\lambda_1(t_1+j-k) + i\lambda_2(t_2+j-l)} d(\lambda_1, \lambda_2) \\
&= \gamma_3 \sum_{j=\max\{t_1^-, t_2^-\}}^{\infty} c_j c_{t_1+j} c_{t_2+j} = c(t_1, t_2),
\end{aligned}$$

kde sme pri zámene sumy a integrálu použili opäť Lebesgueovu vetu s majorantou $\sum_{j, k, l \in \mathbb{N}_0} |c_j c_k c_l| |e^{i\lambda_1(t_1+j-k) + i\lambda_2(t_2+j-l)}| = \sum_{j, k, l \in \mathbb{N}_0} |c_j| |c_k| |c_l| < \infty$. Jej integrovateľnosť opäť plynie z toho, že integrujeme cez ohraničenú množinu. Pre tvrdenia len o autokovariančnej funkcii a hustote by nám zrejme stačil aj biely šum stacionárny do 2. rádu (dokonca len nekorelovaný). □

Z tvaru funkcie (1.9) si môžeme všimnúť, že pre postupnosti typu MA(n) sú pre $t > n$ všetky autokovariancie, a teda aj autokorelácie, nulové. Podobný výsledok dostaneme aj v prípade parciálnej autokovariančnej funkcie pre centrovane postupnosti typu AR(m). Ak v rovnosti (1.7) obe strany vynásobíme X_{t-k} , $k \geq 1$ a následne aplikujeme operátor strednej hodnoty, dostaneme vzťah pre autokovariancie postupnosti. Vynásobenie konštantou $1/R(0)$ nám dá nasledujúcu rovnosť pre autokorelácie:

$$r(k) + a_1 r(k-1) + \dots + a_m r(k-m) = 0. \quad (1.13)$$

Z (1.13) vyplýva, že pre $k > m$ má matica v čitateli (1.1) lineárne závislé stĺpce, pretože

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ r(1) \\ \vdots \\ r(k-1) \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} r(1) \\ 1 \\ \vdots \\ r(k-2) \end{pmatrix} + \dots + a_m \begin{pmatrix} r(m-1) \\ r(m-2) \\ \vdots \\ r(k-m) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r(1) \\ r(2) \\ \vdots \\ r(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

a posledný stĺpec je lineárnou kombináciou prvých m . Pre $k > m$ bude teda parciálna autokorelačná funkcia $\alpha(k)$ v prípade postupnosti typu AR(m) nulová. Hodnota $k = k_0$, za ktorou začína byť autokorelačná, resp. parciálna autokorelačná funkcia nulová sa nazýva *bod useknutia*. Pre identifikáciu vhodného lineárneho modelu je dôležité vedieť túto hodnotu nájsť, prípadne zistiť, že neexistuje. Z vety 7 vidno z (1.11) a (1.12) ešte jednu vlastnosť lineárnych procesov. Podiel

$$D(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{|f(\lambda_1, \lambda_2)|^2}{f(\lambda_1) f(\lambda_2) f(\lambda_1 + \lambda_2)} \quad (1.14)$$

totiž po vykrátení vychádza konštantne $\gamma_3^2/(2\pi\sigma^6)$ a je nezávislý na frekvenciách λ_1, λ_2 . V prípade gaussovského procesu je (1.14) dokonca nula, pretože tretí moment γ_3 je u normálneho rozdelenia nulový. Toto môže byť jedna z možností, ako pomocou vhodných odhadov hustôt testovať, či sa jedná o lineárny proces.

1.2 Odhady a konštrukcia lineárnych modelov

Prvým krokom mnohých testov lineariry je nájdenie čo najvhodnejšieho lineárneho modelu, kde sa následnými testami na hodnoty vypočítaného bieleho šumu môže ukázať, že lineárny model nie je dostačujúci na zachytenie vzťahov medzi pozorovanými hodnotami a je treba prejsť k zložitejším nelineárnym štruktúram. Pri hľadaní správneho modelu hrajú dôležitú úlohu odhady autokorelačnej a parciálnej autokorelačnej funkcie, ktoré si teraz zavedieme. Na základe ich porovania so známymi teoretickými funkciami rôznych modelov môžeme potom získať predstavu, o aký model by mohlo ísť.

Definícia. Majme $n \in \mathbb{N}$ pozorovaní X_1, \dots, X_n z nejakej náhodnej postupnosti. **Výberovú autokovariančnú funkciu** definujeme ako

$$\hat{R}(k) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (X_t - \bar{X}_n)(X_{t+k} - \bar{X}_n), \quad k = 0, \dots, n-1$$

a pre $k = -n+1, \dots, -1$ ako $\hat{R}(k) = \hat{R}(-k)$. Ďalej definujeme **výberovú autokorelačnú funkciu** predpisom

$$\hat{r}(k) = \frac{\hat{R}(k)}{\hat{R}(0)}, \quad k = -n+1, \dots, n-1,$$

kde $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t$.

Poznamenajme, že $\hat{R}(k)$ nie je nestranným odhadom $R(k)$, no za istých predpokladov je asymptoticky nestranný. Viac nám o tom povedia nasledujúce tvrdenia.

Lemma 8. *Nech $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je postupnosť stacionárna do 2. rádu s autokovariančnou funkciou $R(t)$ takou, že $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0$. Potom*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{var} \bar{X}_n = 0.$$

Dôkaz. Vid' [8], dôsledok 6.1.1.1, strana 309.

□

Veta 9. *Nech $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je postupnosť definovaná predpisom*

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon_{t-j},$$

kde $\sum_{j=0}^{\infty} |c_j| < \infty$, $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je biely šum, $E\varepsilon_t^2 = \sigma^2$, $E\varepsilon_t^4 = \eta\sigma^4$ a η je kladná konštanta. Potom pre pevné $k \in \mathbb{N}_0$ platí

$$E[\hat{R}(k) - R(k)] = -\frac{k}{n}R(k) - \frac{n-k}{n}\text{var}(\bar{X}_n) + O(n^{-2}), \quad (1.15)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n-k} \text{var}[\hat{R}(k)] = (\eta - 3)R(k)^2 + \sum_{t=-\infty}^{\infty} [R(t)^2 + R(t+k)R(t-k)]. \quad (1.16)$$

Dôkaz. Vid' [8], veta 6.2.2, strana 316. □

Z rovnosti (1.15) vidíme, že na asymptotickú nestrannosť odhadu $\hat{R}(k)$ stačí, aby $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}(\bar{X}_n) = 0$. Na to však podľa lemmy 8 stačí, aby $R(k)$ išla k nule pre $k \rightarrow \infty$. Na konzistenciu z (1.16) stačí, aby $\sum_{t=-\infty}^{\infty} |R(t)| < \infty$, pretože potom aj $\sum_{t=-\infty}^{\infty} [R(t)^2 + R(t+k)R(t-k)] < \infty$. Z dôvodu asymptotickej nestrannosti sa pri odhadoch odporúča, aby $k \leq n/4$. Výberovú parciálnu autokorelačnú funkciu dostaneme, ak v 1.1 použijeme $\hat{r}(k)$ miesto $r(k)$.

Veta 10. *Nech $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je náhodná postupnosť taká, že*

$$X_t - \mu = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \varepsilon_{t-j},$$

kde $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je postupnosť nezávislých rovnako rozdelených náhodných veličín. Ďalej nech $E|\varepsilon_0|^4 < \infty$ a $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |c_j| < \infty$. Nech $r(k)$, $k \in \mathbb{Z}$ je autokorelačná funkcia postupnosti $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ a nech $\hat{r}(k)$ je k -tý výberový korelačný koeficient založený na X_1, \dots, X_n . Potom pre každé pevné $h \in \mathbb{N}$ náhodný vektor $\sqrt{n}(\hat{\mathbf{r}}(h) - \mathbf{r}(h))$ pre $n \rightarrow \infty$ konverguje v distribúcii k normálnemu rozdeleniu $N(\mathbf{0}, \mathbf{W})$, kde

$$\hat{\mathbf{r}}(h) = (\hat{r}(1), \dots, \hat{r}(h))' \quad \mathbf{r}(h) = (r(1), \dots, r(h))'$$

a \mathbf{W} je matica typu $h \times h$ s prvkami

$$w_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} [r(k+i) + r(k-i) - 2r(i)r(k)][r(k+j) + r(k-j) - 2r(j)r(k)] \quad (1.17)$$

pre $i, j = 1, \dots, h$.

Dôkaz. Vid' [5], veta 7.2.1. □

Vzťah (1.17) sa nazýva Bartlettov vzorec a pomocou vety 10 vieme testovať hypotézy o bode useknutia autokorelačnej funkcie. Testy o hodnotách parciálnej autokorelačnej funkcie využívajú Quenouvilleovu aproximáciu (viď [6]). Konkrétne, ak pre $k > k_0$ je $\alpha_k = 0$, tak približne platí

$$\hat{\alpha}(k) \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right). \quad (1.18)$$

Analogicky existuje podľa vety 10 Bartlettova aproximácia. Ak k_0 je bod useknutia autokorelačnej funkcie, tak pre $k > k_0$ približne platí

$$\hat{r}(k) \sim N\left(0, \frac{1}{n}\left(1 + 2\sum_{t=1}^{k_0} r(t)^2\right)\right). \quad (1.19)$$

V praxi sa neznáme hodnoty korelácií v rozptyle v (1.19) odhadnú ich výberovými verziami.

Z tvaru výberovej autokorelačnej a výberovej parciálnej autokorelačnej funkcie nie sme vždy schopní určiť, o ktorý lineárny model sa jedná. Napríklad $r(t)$ a $\alpha(t)$ postupnosti typu $ARMA(m, n)$, $m > 0$, $n > 0$, nemajú žiadne body useknutia, a teda často len z odhadov $\hat{r}(t)$, $\hat{\alpha}(t)$ nevieme dobre identifikovať lineárny model vhodný pre pozorované hodnoty. V tomto prípade môžeme rôzne zvažované modely porovnať pomocou tzv. informačných kritérií. Postupujeme tak, že spomedzi rôznych kandidátov $ARMA(p, q)$ modelov, $p \geq 0$, $q \geq 0$, vyberieme ten $ARMA(\hat{p}, \hat{q})$, ktorý spĺňa

$$(\hat{p}, \hat{q}) = \arg \min_{(p, q)} A(p, q),$$

kde $A(p, q)$ je nejaké vhodne zvolené kritérium, ku ktorého konštrukcii potrebujeme odhadnúť model $ARMA(p, q)$. Jednou z možností by bolo minimalizovať smerodatnú odchýlku odhadnutého bieleho šumu. V tomto prípade by sme však často dostávali zložitejšie modely s veľa neznámymi parametrami. Preto je vhodnejšie do kritéria pridať penalizáciu príliš veľkého počtu neznámych parametrov. Na tejto myšlienke založené a najviac využívané kritériá sú:

- *Akaikeho informačné kritérium (AIC):*

$$AIC(p, q) = n \ln \hat{\sigma}_{p, q}^2 + 2(p + q + 1).$$

- *Schwarzovo-Bayesovo informačné kritérium (SBC):*

$$SBC(p, q) = n \ln \hat{\sigma}_{p, q}^2 + \ln n(p + q + 1),$$

kde $\hat{\sigma}_{p,q}^2$ je odhad rozptylu bieleho šumu procesu $ARMA(p, q)$ získaný metódou maximálnej vierohodnosti a n je počet pozorovaní. Je vidieť, že kritérium SBC penalizuje počet neznámych parametrov silnejšie než AIC.

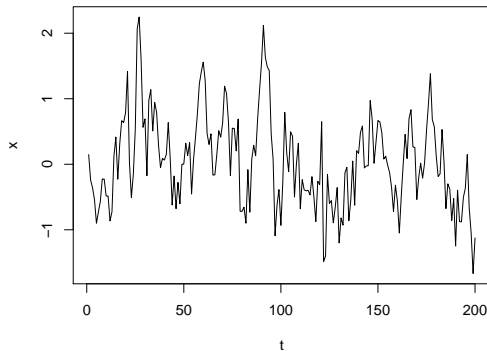
Vyššie spomenuté metódy hľadania vhodného modelu si ilustrujeme na jednoduchom príklade. Majme teda 200 pozorovaní X_1, \dots, X_{200} náhodnej postupnosti, ktorá sa riadi modelom AR(1), konkrétne

$$X_t = 0,7X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

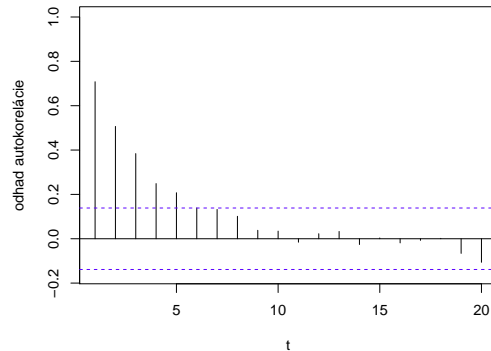
Veličiny ε_t tvoria gaussovský biely šum so smerodatnou odchýlkou $\sigma = 0,5$. Na obrázku 1.1 máme postupne priebeh postupnosti, odhady jej autokorelácií a parciálnych autokorelácií a niektoré hodnoty kritérií AIC a SBC. Z priebehu na obrázku 1.1a je jasné, že sa nejedná o biely šum a hodnoty sú v čase korelované. Na obrázkoch 1.1b, 1.1c sú odhady autokorelačnej a parciálnej autokorelačnej funkcie, kde sú čiarkovane vyznačené kritické obory testov nulovosti korelácií pomocou Bartlettovej, resp. Quenouilleovej aproximácie. Bartlettova aproximácia tu predpokladá, že postupnosť je biely šum. Jasne vidieť, že parciálna autokorelačná funkcia má bod useknutia $k_0 = 1$, čo podporuje aj spomínaný test. Autokorelačná funkcia postupne klesá k nule, a teda jasným kandidátom je model AR(1). To nám potvrdzuje aj výber pomocou informačných kritérií na obrázku 1.1d. Na vodorovnej osi sú hodnoty Akaikeho kritéria, na zvislej Bayesovho a každý bod odpovedá jednému modelu. Popis bodu (m, n) vždy znamená, že ide o model $ARMA(m, n)$. Najvhodnejšie modely sa budú nachádzať v ľavom dolnom rohu, kde je práve model AR(1). Model odhadnutý metódou maximálnej vierohodnosti má tvar

$$X_t = 0,7154X_{t-1} + \varepsilon_t$$

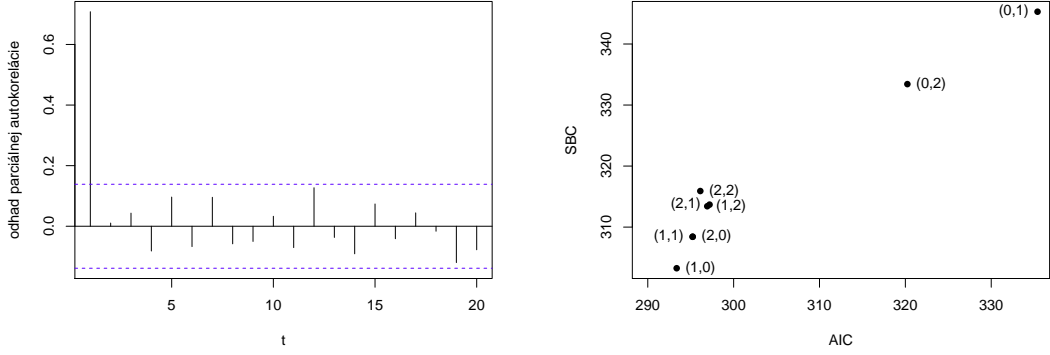
s odhadnutým rozptylom bieleho šumu $\hat{\sigma}^2 = 0,2544$.



(a) priebeh



(b) výberové autokorelácie



(c) výber. parc. autokorelácie

(d) informačné kritériá

Obrázek 1.1: Simulácia AR(1) modelu

Na záver podkapitoly o odhadoch ešte rozoberieme odhady spektrálnej a bispektrálnej hustoty, ktoré môžu byť taktiež užitočným nástrojom na detekciu nelinearity. Výberové verzie týchto funkcií budú vychádzať zo vzťahov (1.2) a (1.4), kde budeme používať odhady $\hat{R}(t)$ a $\hat{c}(t_1, t_2)$. Výberovú kumulantovú funkciu definujeme prirodzene pre $t_1, t_2 = -n + 1, \dots, n - 1$ ako

$$\hat{c}(t_1, t_2) = \frac{1}{n} \sum_{t=l}^{n-k} (X_t - \bar{X}_n)(X_{t+t_1} - \bar{X}_n)(X_{t+t_2} - \bar{X}_n), \quad (1.20)$$

kde $k = \max\{t_1, t_2, 0\}$ a $l = \max\{-t_1, -t_2, 0\}$. Podľa vzorca (1.2) sa ponúka definovať odhad spektrálnej hustoty z pozorovaní X_1, \dots, X_n ako

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-n+1}^{n-1} \hat{R}(t)e^{-it\lambda}. \quad (1.21)$$

Pozrime sa teraz bližšie na jeho vlastnosti. Podľa nasledujúcej vety je $\hat{f}(\lambda)$ za pomerne všeobecných predpokladov asymptoticky nestranným odhadom.

Veta 11. *Nech $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je stacionárna postupnosť do 2. rádu s $EX_t = \mu$ a autokovariančnou funkciou $R(t)$, pre ktorú platí $\sum_{t=-\infty}^{\infty} |R(t)| < \infty$. Potom*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\hat{f}(\lambda) = f(\lambda), \quad \lambda \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\hat{f}(0) - \frac{n\mu^2}{2\pi} = f(0).$$

Dôkaz Vid' [8], veta 7.1.1. □

Ďalej podľa nasledujúcej vety, za trochu sprísnených predpokladov, sú odhady hustoty v rôznych frekvenciách asymptoticky nezávislé.

Veta 12. *Nech $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je postupnosť definovaná vzťahom*

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon_{t-j},$$

kde $\{c_j, j \in \mathbb{N}_0\}$ je postupnosť reálnych konštánt, pre ktoré platí $\sum_{j=0}^{\infty} |c_j| < \infty$ a $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je biely šum s nezávislými rovnako rozdelenými veličinami s nulovou strednou hodnotou a kladným konečným rozptylom σ^2 . Nech je spektrálna hustota $f(\lambda)$ postupnosti X_t kladná. Potom pre všetky $\lambda, \omega \in (0, \pi)$, $\omega \neq \lambda$ konvergujú postupnosti $2\hat{f}(\lambda)/f(\lambda)$ a $2\hat{f}(\omega)/f(\omega)$ v distribúcii k nezávislým náhodným veličinám s chí-kvadrát rozdelením s 2 stupňami voľnosti.

Dôkaz. Vid' [8], veta 7.1.2. □

Symbolicky by sme teda mohli napísať pre postupnosti a frekvencie spĺňajúce predpoklady vety 12, že

$$\hat{f}(\lambda) \xrightarrow{D} f(\lambda) \frac{\chi^2(2)}{2}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Odhad $\hat{f}(\lambda)$ teda nie je vhodným odhadom spektrálnej hustoty, pretože jeho rozpyl nejde k nule so vzrastajúcim n . O tom, ako to vyzerá v prípade gaussovských postupností, hovorí nasledujúca veta.

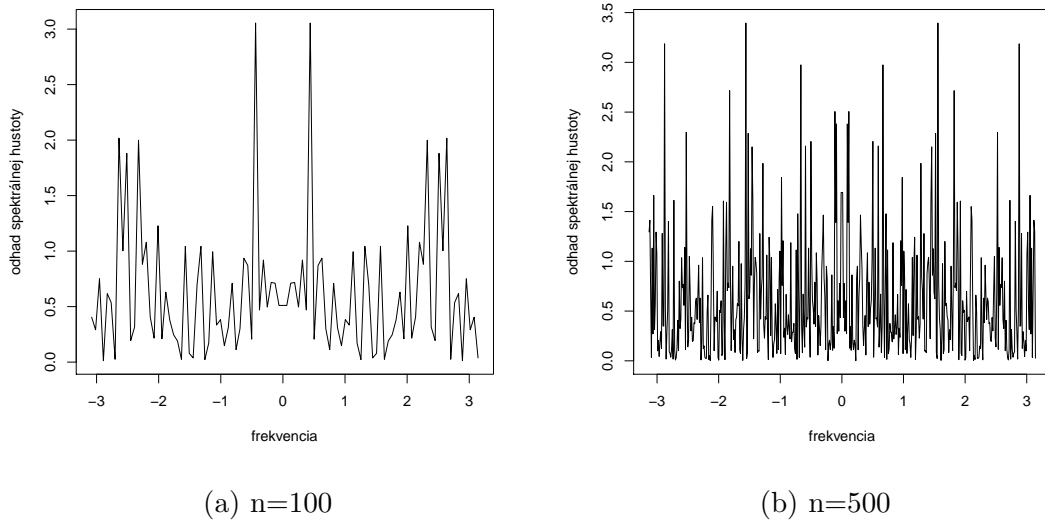
Veta 13. *Nech $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je stacionárna gaussovská postupnosť s nulovou strednou hodnotou a spojitou spektrálnou hustotou $f(\lambda)$. Potom platí:*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{var} \hat{f}(\lambda) &= f^2(\lambda), & 0 \neq \lambda \in (-\pi, \pi), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \text{var} \hat{f}(\lambda) &= 2f^2(\lambda), & \lambda \in \{-\pi, 0, \pi\}. \end{aligned}$$

Dôkaz. Vid' [2], veta 10, strana 103. □

Kvôli rozptylu a asymptotickej nezávislosti je so vzrastajúcim n priebeh $\hat{f}(\lambda)$ stále viac a viac zubatý a nestabilný. Na obrázku 1.2 máme odhadnuté hodnoty hustoty bieleho šumu vo frekvenciách $-\pi + 2k\pi/n$, $k = 1, \dots, n$ pre $n = 100$ a $n = 500$ (teoretická hustota je konštanta $\sigma^2/(2\pi)$).

Odhad $\hat{f}(\lambda)$ musíme teda poupraviť, aby bol konzistentý. Chceme to ale urobiť tak, aby výsledok platil pre čo najviac lineárnych postupností, pretože naším cieľom je testovanie linearity. Prirodzeným riešením, ako obmedziť vysokú variabilitu odhadu $\hat{f}(\lambda)$, sa javí byť vyrovňovanie pomocou kľzavých priemerov. Priebeh odhadu vyhladáme teda tým, že hodnotu vo frekvencii λ_0 definujeme ako



Obrázek 1.2: Odhady spektrálnej hustoty bieleho šumu s $\sigma = 2$

vhodne spriemerované hodnoty $\hat{f}(\lambda)$ vo frekvenciách blízkeho okolia λ_0 . Toto priemerovanie sa robí pomocou vážiacej funkcie $\mathcal{W}_n(\lambda)$. Zvykne sa nazývať aj spektrálne okno, pretože je nenulová len na okolí nuly, ktoré určuje pomocou akého veľkého okolia jednotlivých frekvencií budeme priebeh hustoty vyhladzovať. Šírku okna si určujeme sami podľa toho, ako chceme priebeh vyhladiť. Vážiaca funkcia \mathcal{W}_n má štandardne vlastnosti:

1. $\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{W}_n(\lambda) d\lambda = 1$, teda súčet všetkých váh je 1,
2. $\mathcal{W}_n(\lambda) = \mathcal{W}_n(-\lambda)$, teda súmernosť kvôli zachovaniu súmernosti odhadu okolo nuly

V nasledujúcich partiách k nim ešte pridáme ďalšie vlastnosti, ktoré zabezpečia, aby rozptyl vyhladeného odhadu konvergoval k nule. Nový, vyrovnaný odhad spektrálnej hustoty so spektrálnym oknom $\mathcal{W}_n(\lambda)$ definujeme nasledovne.

$$\hat{f}_{\mathcal{W}}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\lambda - \omega) \mathcal{W}_n(\omega) d\omega \quad (1.22)$$

Spriemerovaním susedných hodnôt sa nám však môže zvýšiť vychýlenie. Čím širšie spektrálne okno zvolíme, tým budeme mať hladší odhad hustoty s menšou variabilitou. Na druhú stranu však vychýlenie odhadu môže byť o to väčšie. Tieto dva protichodné faktory sa v štatistických odhadoch vyskytujú pomerne často. Prakticky by sa ale odhad $\hat{f}_{\mathcal{W}}$ podľa vzorca (1.22) zle počítal. Môžeme ho však vyjadriť aj pomocou kľzavých priemerov už v tzv. časovej doméne (t.j. pomocou odhadnutých autokovariancií). Vážiacu funkciu v časovej doméne budeme

nazývať časové okno $W_n(t)$, ktoré bude nenulové pre $t = -M_n, \dots, M_n$, $M_n < n$. Keďže je odhad autokovariancie $\hat{R}(t)$ tým presnejší, čím je $|t|$ menšie, tak sa od časového okna očakáva, aby váhy so stúpajúcim $|t|$ klesali (nerástli). Časové okno býva odvodené od nejakej spojitej ohraničenej funkcie $w(x)$, pre ktorú platí:

$$\begin{aligned} |w(x)| &\leq 1 \\ w(0) &= 1 \\ w(x) &= w(-x) \\ w(x) &= 0 \text{ pre } |x| > 1. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Potom $W_n(t) = w(t/M_n)$. Označme $\mathcal{W}_n(\lambda)$ Fourierovu transformáciu $W_n(t)$, t.j.

$$\mathcal{W}_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-M_n}^{M_n} W_n(t) e^{-it\lambda}, \tag{1.24}$$

$$W_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{W}_n(\lambda) e^{it\lambda} d\lambda. \tag{1.25}$$

Ďalej podľa (1.21) je $\hat{f}(\lambda)$ Fourierova transformácia $\hat{R}(t)$. Vyrovnaný odhad $\hat{f}_{\mathcal{W}}(\lambda)$ s použitím spektrálneho okna \mathcal{W}_n dostaneme aplikáciou časového okna na vzorec (1.21). Svedčia o tom nasledujúce úpravy:

$$\begin{aligned} \hat{f}_{\mathcal{W}}(\lambda) &= \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{W}_n(\omega) \hat{f}(\lambda - \omega) d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{W}_n(\lambda - \omega) \hat{f}(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{t=-M_n}^{M_n} W_n(t) e^{-it(\lambda - \omega)} \hat{f}(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-M_n}^{M_n} W_n(t) e^{-it\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\omega} \hat{f}(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-M_n}^{M_n} W_n(t) e^{-it\lambda} \hat{R}(t). \end{aligned}$$

Všimnime si, že vďaka párnosti $w(x)$ je spektrálne okno v tvare (1.24) tiež párne a navyše spĺňa aj prvú vlastnosť o integrácii na jednotku. Teraz si uvedieme príklad dvojice časového a spektrálneho okna pre rôzne body useknutia M_n (pre tento príklad budeme bod useknutia značiť len M). Konkrétne to bude Parzenovo okno, ktoré neskôr použijeme aj v ďalších kapitolách (ďalšie príklady a ich vlastnosti sa dajú nájsť v [23], kapitola 12.3.3). Jeho časová verzia má tvar

$$W^P(t) = \begin{cases} 1 - 6(t/M)^2 + 6(|t|/M)^3, & |t| \leq M/2 \\ 2(1 - |t|/M)^3, & M/2 < |t| \leq M \\ 0, & |t| > M \end{cases} \tag{1.26}$$

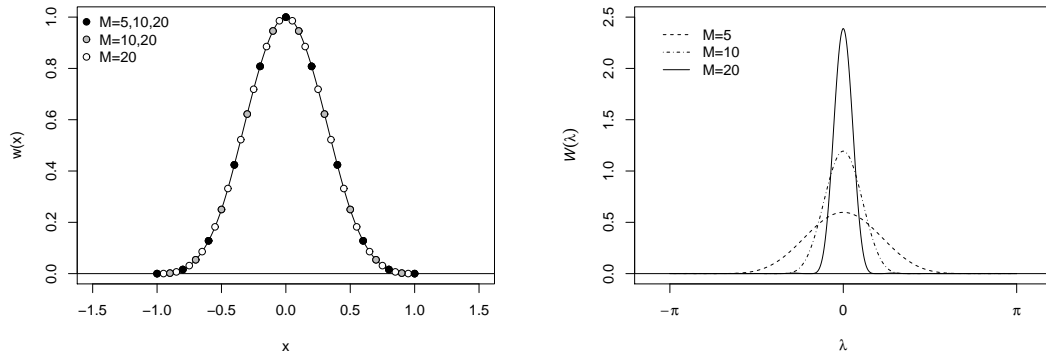
a je odvodená od funkcie

$$w(x) = \begin{cases} 1 - 6x^2 + 6|x|^3, & |x| \leq 1/2 \\ 2(1 - |x|)^3, & 1/2 < |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \quad (1.27)$$

Odpovedajúca spektrálna verzia okna (Fourierova transformácia) je po úpravách (viď [23], strana 278)

$$\mathcal{W}^P(\lambda) = \frac{3}{8\pi M^3} \left(\frac{\sin(\lambda M/4)}{1/2 \sin(\lambda/2)} \right)^4 \{1 - 2/3[\sin(\lambda/2)]^2\}.$$

Ich grafy pre $M = 5, 10, 20$ vyzerajú nasledovne.



(a) body časového okna a pôvodná funkcia

(b) spektrálne okno

Obrázek 1.3: Parzenovo okno pre $M = 5, 10, 20$

Na obrázku 1.3a je funkcia (1.27) a vyznačené body sú hodnoty časového okna. Všetky vyznačené body patria oknu s $M = 20$. Oknu s $M = 10$ patria čierne a šedé a oknu s $M = 5$ len čierne. Na obrázku 1.3b je potom odpovedajúca verzia spektrálneho okna, t.j. Fourierova transformácia časového. Parzenovo okno sme zvolili práve kvôli jeho hladkosti. Ako je v [23] pekne ilustrované, ak by totiž hodnoty okna pochádzali z nespojitej funkcie, prípadne takej, ktorá má "ostré rohy", spektrálna verzia tohto okna by bola značne zvlnená a váhy by boli pomerne veľké aj v dosť veľkej vzdialenosti od frekvencie, v ktorej hodnotu hustoty vyrovnávame. Ako príklad takéhoto menej vhodného okna môžeme uviesť funkciu, od ktorej je odvodené Bartlettovo okno. Má tvar $w(x) = \max\{1 - |x|, 0\}$. Z obrázku 1.3b ďalej vidíme, že s rastúcim bodom useknutia sa spektrálne okno viac a viac "zoštíhľuje" a "zošpicatľuje". Aby sme dosiahli to, čo sme vyrovnávaním chceli docieľiť, teda konvergenciu rozptylu odhadu k nule, nemôže sa tento proces

”zoštíhľovania” a ”zošpicaťovania” so vzrastajúcim n diať príliš rýchlo. Teraz uveďme tvrdenie, ktoré hovorí aké musí byť M_n , aby rozptyl vyrovnaného odhadu išiel k nule.

Veta 14. *Nech $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je postupnosť stacionárna do 4. rádu s autokovariančnou funkciou $R(t)$ takou, že $\sum_{t=-\infty}^{\infty} |R(t)| < \infty$. Ďalej nech $w(x)$ je spojitá ohraničená funkcia, ktorá spĺňa (1.23), $M_n \rightarrow \infty$ a $M_n/n \rightarrow 0$ pre $n \rightarrow \infty$. Potom pre ľubovoľné $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, \pi)$ a pre odhad*

$$\hat{f}_w(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-M_n}^{M_n} w(t/M_n) \hat{R}(t) e^{-it\lambda}$$

platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{M_n} \text{cov}[\hat{f}_w(\lambda_1), \hat{f}_w(\lambda_2)] = \delta(\lambda_1, \lambda_2) f^2(\lambda_1) \int_{-1}^1 w^2(x) dx,$$

kde $\delta(\lambda_1, \lambda_2) = 1$ ak $\lambda_1 = \lambda_2$ a 0 ak $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Navyše, pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ je konvergencia rovnomerná v λ_1 a λ_2 ak $\lambda_1 \leq \varepsilon$ a $\lambda_2 \leq \varepsilon$.

Dôkaz. Vid' [15], veta 5A. □

Veta vlastne hovorí, že rozptyl $\hat{f}_w(\lambda)$ sa dá aproximovať výrazom

$$\frac{M_n}{n} f^2(\lambda) \int_{-1}^1 w^2(x) dx$$

Bude teda o to menší, o čo pôjde M_n ”pomalšie” do nekonečna. Menšie hodnoty M_n však zvyšujú vychýlenie odhadu (”rozširujú” spektrálne okno), no aby sme dostali nami želanú konvergenciu rozptylu k nule, M_n musí ísť do nekonečna ”pomalšie” než n v zmysle $\lim_{n \rightarrow \infty} n/M_n = \infty$. My by sme však zároveň chceli vychýlenie natoľko malé, aby si odhad zachoval asymptotickú neustrannosť. Vtedy nesmie byť rast M_n príliš pomalý, no bude záležať aj na rýchlosti konvergencie $R(t)$ k nule a vlastnosti zvoleného okna. O tom, kedy je to možné, hovorí nasledujúce tvrdenie. Aby sme mu mohli porozumieť, zavedieme si pred tým pojem charakteristického exponentu.

Definícia. Nech $w(x)$ je spojitá ohraničená funkcia spĺňajúca (1.23). Definujme

$$k^{(r)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - w(x)}{|x|^r}.$$

Potom $r^* = \sup\{r, k^{(r)} \text{ existuje}, r < \infty\}$ nazveme **charakteristický exponent**.

Veta 15. *Nech platia predpoklady vety 14. Nech existuje $q > 0$ také, že*

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} |t|^q |R(t)| < \infty$$

a $w(x)$ má charakteristický exponent $r \geq q$. Nech $\lim_{n \rightarrow \infty} n/(M_n^{1+2q}) \in (0, \infty)$. Potom rovnomerne v λ platí

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} M_n^{2q} |E\hat{f}_w(\lambda) - f(\lambda)| &= 0, & r > q \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| k^{(q)} \sum_{t=-\infty}^{\infty} |t|^q R(t) e^{-it\lambda} \right|^2, & r = q. \end{aligned}$$

Dôkaz. Vid' [15], veta 5B. □

Práve uvedená veta hovorí vlastne to, že ak autokovariančná funkcia postupnosti ide dostatočne rýchlo k nule (existencia kladného q) a ak vyberieme okno s charakteristickým exponentom aspoň q , tak pri správnom výbere M_n dostaneme asymptoticky nestranný odhad. Vzhľadom na to, že autokorelačná funkcia lineárnej postupnosti riadiacej sa modelom ARMA je (konečná) lineárna kombinácia geometricky klesajúcich postupností (vid' [6], strana 337), s existenciou kladného q z vety 15 by nemal byť veľký problém. Nami používané Parzenove okno má zrejme charakteristický exponent $r = 2$.

Posledným článkom v podkapitole o odhadoch je odhad bispektrálnej hustoty. Vzhľadom na to, že je analógiou odhadu spektrálnej hustoty, nebudeme sa ním zaoberať do takého detailu. Intuitívne zavedený odhad podľa vzorca (1.4) s použitím (1.20) nie je opäť vhodný a musíme použiť odhad vyrovnaný. V tejto práci sa použije dvojrozmerné časové okno odvodené z funkcie (1.27), konkrétne

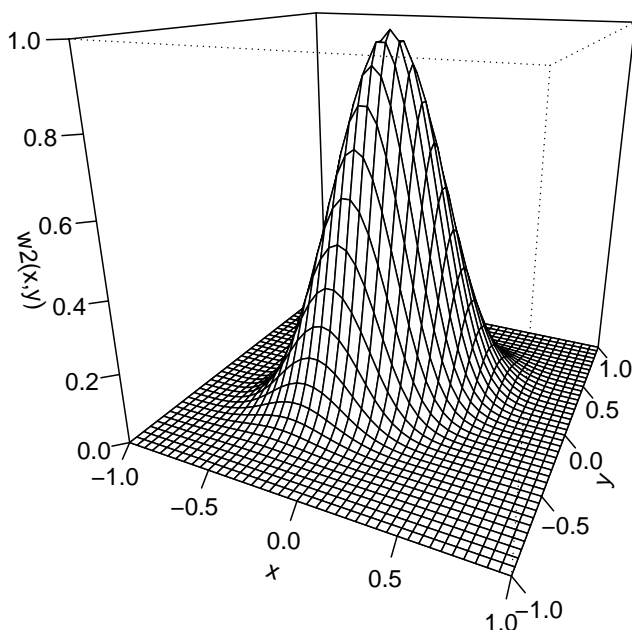
$$w_2(x_1, x_2) = w(x_1)w(x_2)w(x_1 - x_2),$$

kde pre hodnoty okna v časoch t_1, t_2 dosadíme za x_1, x_2 hodnoty $t_1/M_n, t_2/M_n$. Tvar tohto okna sa volí tak, aby boli zachované rôzne symetrické vlastnosti bispektra. O tejto téme bude ešte pojednané v ďalších častiach. Graf funkcie w_2 je na nasledujúcom obrázku. Vyrovnaný odhad bispektrálnej hustoty teda môžeme zapísať v tvare

$$\hat{f}_w(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{t_1=-M_n}^{M_n} \sum_{t_2=-M_n}^{M_n} w_2\left(\frac{t_1}{M}, \frac{t_2}{M}\right) \hat{c}(t_1, t_2) e^{-it_1\lambda_1 - it_2\lambda_2}.$$

Za podobných (no trochu zložitejších) predpokladov ako vo vete 14 (t.j. absolútna konvergencia nekonečných súm autokumulantových funkcií vyšších rádo) sa dá dokázať (vid' [22]), že za platnosti $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n^2/n = 0$ je vyrovnaný odhad $\hat{f}_w(\lambda_1, \lambda_2)$ konzistentný a navyše náhodná veličina

$$\frac{\sqrt{n}}{M_n} \left[\hat{f}_w(\lambda_1, \lambda_2) - E\hat{f}_w(\lambda_1, \lambda_2) \right]$$



Obrázek 1.4: funkcia dvojrozmerného časového okna

konverguje v distribúcii ku komplexnej náhodnej veličine $X + iY$, kde X aj Y sú nezávislé, normálne rozdelené náhodné veličiny s nulovou strednou hodnotou a rozptylom

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \frac{v_2}{2\pi} f(\lambda_1) f(\lambda_2) f(\lambda_1 + \lambda_2),$$

kde

$$v_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 w_2^2(x, y) \, dx \, dy.$$

Tvrdenie platí vo vnútri tzv. hlavnej domény bispektra $A = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq \lambda_2 \leq \min(\lambda_1, 2(\pi - \lambda_1))\}$, ktorej význam špecifikujeme neskôr. V ďalšom budeme teda predpokladať, že body useknutia pre odhady spektra a bispektra spĺňajú $M_n/n \rightarrow 0$ a $M_n^2/n \rightarrow 0$ v tomto poradí a oba odhady sú konzistentné.

1.3 Nelineárne modely časových radov

Pred tým ako sa začneme zaoberať testami linearity, potrebujeme poznať aj niektoré základné typy a vlastnosti nelineárnych modelov. Koncom 70-tych rokov sa začala zväčšovať potreba modelovať komplexnejšie vlastnosti náhodných postup-

ností, ktoré už modely so štruktúrou ARMA nedokázali pokryť. Prvou takou vlastnosťou, ktorú gaussovský ARMA model nedokáže zachytiť, je *časová nezvratnosť*. Náhodná postupnosť $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je *časovo zvratná*, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ a $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z}$ majú vektory $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$, $(X_{-t_1}, \dots, X_{-t_n})$ rovnaké mnohorozmerné pravdepodobnostné rozdelenie. Postupnosť, ktorá nie je časovo zvratná sa nazýva časovo nezvratná. Časovo nezvratná môže byť napríklad taká postupnosť, v ktorej sa nachádza asymetria medzi rastom a poklesom, t.j. rýchlejšie klesá ako stúpa alebo naopak. Ďalšou z vlastností, ktoré gaussovské ARMA modely nedokážu zachytiť, sú limitné cykly. Povieme, že náhodná postupnosť X_t má limitný cyklus, ak sa po vynechaní všetkých náhodných zložiek (biely šum položíme celý rovný nule) hodnoty postupnosti blížia k pravidelne sa opakujúcemu cyklu. Prvé dva typy nelineárnych modelov, ktoré boli sformulované, sú *po častiach lineárny* alebo *prahový model* a *bilineárny model*.

Prahový model (TAR z anglického threshold autoregressive) je rozšírením lineárneho AR(n) modelu. Najskôr uvedieme jeho najjednoduchšiu variantu s 2 režimami rádu 1:

$$\begin{aligned} X_t &= \phi X_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{ak } X_{t-1} > C \\ X_t &= \phi' X_{t-1} + \varepsilon'_t, & \text{ak } X_{t-1} \leq C, \end{aligned} \quad (1.28)$$

kde C je prahová hodnota, $\phi \neq \phi'$, ε_t je biely šum s nulovou strednou hodnotou a rozptylom σ^2 , zatiaľ čo ε'_t je biely šum s nulovou strednou hodnotou a rozptylom σ'^2 . Náhodná postupnosť X_t teda mení svoje správanie pri každom prekročení prahovej hodnoty C . Poznamenajme, že na slabú stacionaritu do druhého rádu modelu (1.28) je potrebné, aby platilo $\phi < 1$, $\phi' < 1$ a $\phi\phi' < 1$. Podobné modely sú často vhodné pre hydrologické dáta (napríklad pri zvýšenej úrovni zrážok sa prítoky riek správajú inak). Prahový model môže mať samozrejme aj viac režimov s autoregresiami vyššieho rádu. Všeobecne by sme ho mohli zapísať nasledovne:

$$X_t = \alpha^{(j)} + \phi_1^{(j)} X_{t-1} + \dots + \phi_{p_j}^{(j)} X_{t-p_j} + \varepsilon_t^{(j)}, \quad \text{pre } P_{j-1} \leq X_{t-d} < P_j, \quad j = 1, \dots, r,$$

kde d a r sú dané prirodzené čísla, prahy P_j sú reálne čísla splňujúce $-\infty = P_0 < P_1 < \dots < P_r = \infty$ a $\{\varepsilon_t^{(j)}\}$ sú navzájom nezávislé biele šumy s rozptylom σ_j^2 . Identifikácia a odhad sú obvykle robené aplikáciou informačných kritérií.

Bilineárny model by sme mohli vo svojej najjednoduchšej forme zapísať takto:

$$X_t = \beta X_{t-l} \varepsilon_{t-k} + \varepsilon_t, \quad (1.29)$$

kde β je parameter, $k, l \geq 1$ a ε_t je biely šum. Model (1.29) je striktné aj slabo stacionárny do 2. rádu, ak $\beta^2 \sigma^2 < 1$. Vlastnosti X_t závisia na tom, či $k > l$,

$k < l$ alebo $k = l$. V prvom prípade sa model nazýva subdiagonálny, v druhom superdiagonálny a v treťom diagonálny. V prípade $l > k$ sú všetky autokorelácie X_t nulové a teda postupnosť X_t by mohla byť mylne zamieňaná s bielym šumom, ak by sme sa pri vyšetrowaní závislosti obmedzovali len na korelačnú štruktúru. Podložme si práve vyslovené tvrdenia výpočtami. Keďže $l > k$, tak X_{t-l} nezávisí na ε_{t-k} a

$$EX_t = \beta EX_{t-l}\varepsilon_{t-k} + E\varepsilon_t = 0.$$

Pre $i \geq 1$ platí

$$\begin{aligned} EX_t X_{t-i} &= \beta^2 E(X_{t-l}\varepsilon_{t-k} X_{t-l-i}\varepsilon_{t-k-i}) + \beta E(X_{t-l}\varepsilon_{t-k}\varepsilon_{t-i}) \\ &+ \beta E(\varepsilon_t X_{t-l-i}\varepsilon_{t-k-i}) + E\varepsilon_t \varepsilon_{t-i} = 0, \end{aligned}$$

pretože v každej zátvorke je jedno ε_t s indexom vyšším ako všetky ostatné činitele. Ak však predpokladáme stacionaritu až do štvrtého rádu, veličiny X_t^2 už vyjdú korelované. Všeobecne by sme mohli bilinéarne modely zapísať nasledovne.

$$X_t = \alpha + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} + \sum_{m=1}^P \sum_{n=1}^Q \beta_{m,n} X_{t-m} \varepsilon_{t-n} + \varepsilon_t$$

To, či je model superdiagonálny, diagonálny alebo subdiagonálny sa rozlišuje podľa toho, kde má matica $(\beta_{m,n})$ nenulové prvky.

Posledný špeciálny typ nelinearity, ktorý spomenieme vychádza z prahového modelu. Jeho nevýhodou je, že zmena režimu prebieha pri prekročení prahu skokovite. Často však môže v skutočnosti táto zmena prebiehať postupne (spojite). Túto situáciu zachytáva takzvaný *autoregresný model so spojitým prechodom*, STAR (z anglického smooth transition autoregressive). Pre prechod medzi dvoma režimami by sme STAR model mohli zapísať nasledovne:

$$X_t = \phi_0 + \boldsymbol{\phi}' \mathbf{X}_{t-1} + (\theta_0 + \boldsymbol{\theta}' \mathbf{X}_{t-1}) F(\gamma(\mathbf{a}' \mathbf{X}_{t-1} - C)) + \varepsilon_t, \quad (1.30)$$

kde $\mathbf{X}_{t-1} = (X_{t-1}, \dots, X_{t-p})'$, $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_p)'$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)'$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)'$ a $\gamma > 0$. Funkcia F je prechodová funkcia, ktorá sa volí tak, aby mala približne tvar písmena S. Často sa za F dosádza distribučná funkcia normálneho alebo logistického rozdelenia. Špeciálnou voľbou vektoru \mathbf{a} tak, že bude mať jednotku na d -tej pozícii a inak všade nuly, docielime, aby prechod medzi režimami regulovala veličina X_{t-d} .

2. Testy linearity

2.1 Linearita vs. nelinearita všeobecne

Väčšina testov, predstavených v tejto kapitole predpokladá predošlé odhadnutie čo najlepšieho ARMA modelu a až potom následné testovanie, či štruktúra ARMA dobre zachytáva vzájomné závislosti veličín časového radu, a či nezostali nejaké nelineárne štruktúry nevysvetlené.

2.1.1 McLeodov-Liov test

Nech $\{X_t\}$ je náhodná postupnosť stacionárna do štvrtého rádu a X_1, \dots, X_n jej realizácia. Predpokladajme, že máme už aj preložený vhodný $ARMA(p, q)$ model s vypočítanými reziduami $\hat{\varepsilon}_t$ (to platí pre zvyšok tohoto odstavca). Tu by sme mohli testovať vhodnosť modelu aj klasickými Q-testami (vid' [6]), ktoré testujú adekvátnosť preloženého modelu, alebo inak to, či sú vypočítané reziduá bielym šumom. Prvý test používa Boxovu-Pierceovu štatistiku

$$Q_\varepsilon = n \sum_{k=1}^M (\hat{r}_\varepsilon(k))^2,$$

kde $\hat{r}_\varepsilon(k)$ je výberový korelačný koeficient spočítaný z vektorov $(\hat{\varepsilon}_1, \dots, \hat{\varepsilon}_{n-k})$, $(\hat{\varepsilon}_{k+1}, \dots, \hat{\varepsilon}_n)$. Štatistika Q_ε má za predpokladu, že postupnosť sa naozaj riadi modelom $ARMA(p, q)$ rozdelenie $\chi^2(M - p - q)$. Druhý, silnejší test, používa Ljungovu-Boxovu štatistiku

$$Q_\varepsilon^* = n(n+2) \sum_{k=1}^M \frac{1}{n-k} (\hat{r}_\varepsilon(k))^2,$$

ktorá má za predpokladu adekvátnosti modelu tiež rozdelenie $\chi^2(M - p - q)$. My vieme, že napríklad niektoré bilinéarne modely sa môžu správať ako biely šum. Motivovaní týmto faktom, McLeod a Li ([14]) popísali test, ktorý používa na odhalenie odchýlok od odhadnutej ARMA štruktúry štvorce vypočítaných rezidií. Odhad korelácií štvorcov rezidií s posunutím v čase o k definujeme ako

$$\hat{r}_{\varepsilon^2}(k) = \frac{\sum_{t=k+1}^n (\hat{\varepsilon}_t^2 - \hat{\sigma}^2)(\hat{\varepsilon}_{t-k}^2 - \hat{\sigma}^2)}{\sum_{t=1}^n (\hat{\varepsilon}_t^2 - \hat{\sigma}^2)^2},$$

kde

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{\varepsilon}_t^2.$$

McLeodov-Liov test sa zakladá na tvrdení nasledujúcej vety.

Veta 16. Ak je ARMA(p, q) model adekvátny, tak pre pevné $M \in \mathbb{N}$ má náhodný vektor

$$\sqrt{n}\hat{\mathbf{r}}_{\varepsilon^2} = \sqrt{n}(\hat{r}_{\varepsilon^2}(1), \dots, \hat{r}_{\varepsilon^2}(M))^T$$

pre $n \rightarrow \infty$, asymptoticky normálne rozdelenie s nulovou strednou hodnotou a jednotkovou variančnou maticou.

Dôkaz. Vid' [14]

□

Test sa potom robí pomocou štatistiky

$$Q_{\varepsilon^2}^* = n(n+2) \sum_{k=1}^M \frac{\hat{r}_{\varepsilon^2}^2(k)}{n-k},$$

ktorá má za predpokladu, že ARMA model je vhodný, asymptoticky rozdelenie $\chi^2(M)$. Hypotézu linearít zamietame vtedy, keď testová štatistika vyjde väčšia, ako zvolený kvantil spomínaného $\chi^2(M)$ rozdelenia (konkrétne v našom prípade 95%-ný kvantil).

2.1.2 Keenanov test

Tento test je založený na tzv. Volterrovom rozvoji (vid' [11],[20]) stacionárnych postupností do tvaru

$$X_t = \mu + \sum_{u=-\infty}^{\infty} c_u \varepsilon_{t-u} + \sum_{u,v=-\infty}^{\infty} c_{u,v} \varepsilon_{t-u} \varepsilon_{t-v} + \sum_{u,v,w=-\infty}^{\infty} c_{u,v,w} \varepsilon_{t-u} \varepsilon_{t-v} \varepsilon_{t-w} + \dots$$

kde ε_t sú silno stacionárne, rovnako rozdelené nezávislé náhodné veličiny s nulovou strednou hodnotou. Myšlienka testu je taká, že najskôr urobíme pre vhodné veľké pevné M regresiu X_t na $\{1, X_{t-1}, \dots, X_{t-M}\}$. Nech \hat{X}_t sú vypočítané hodnoty tejto regresie a $\hat{\varepsilon}_t$ nech sú odpovedajúce vypočítané reziduá. Ak model nie je lineárny a napríklad niektoré $c_{u,v}$ z Volterrovho rozvoja sú nenulové, tak $\hat{\varepsilon}_t$ by mali byť korelované s členmi typu $X_{t-u} \cdot X_{t-v}$. Veličiny \hat{X}_t^2 sú lineárnou kombináciou takýchto členov, a teda v druhom kroku vysvetlíme klasickou regresiou \hat{X}_t^2 pomocou regresorov $1, X_{t-1}, \dots, X_{t-M}$. Tým odstránime časť korelovanú práve s tými regresormi a ostanú nám vypočítané reziduá z 2. kroku, ktoré označme $\hat{\xi}_t$. Tie by mali byť korelované s $\hat{\varepsilon}_t$ v prípade nelinearity a nekorelované v prípade linearít. Ďalej označme

$$\hat{\eta} = \frac{\sum_{t=M+1}^n \hat{\varepsilon}_t \hat{\xi}_t}{(\sum_{t=M+1}^n \hat{\xi}_t^2)^{1/2}}.$$

Poznamenajme, že $\hat{\eta} \cdot (\sum_{t=M+1}^n \hat{\xi}_t)^{-1/2}$ by bol odhad parametru pri $\hat{\xi}_t$ v regresii $\hat{\varepsilon}_t$ na $\hat{\xi}_t$. Na základe štatistiky $\hat{\eta}$ bude založený aj samotný test, preto si teraz o nej vyslovme tvrdenie.

Veta 17. *Nech X_t je postupnosť stacionárna do 2. rádu riadiaca sa $AR(M)$ modelom s reprezentáciou*

$$X_t - \mu = \sum_{j=1}^M a_j (X_{t-j} - \mu) + \varepsilon_t,$$

kde ε_t sú nezávislé rovnako rozdelené s nulovou strednou hodnotou, rozptylom σ^2 a konečnými 4. momentmi. Potom $\hat{\eta}$ má asymptoticky normálne rozdelenie $N(0, \sigma^2)$.

Dôkaz. Vid' [11].

□

Prejdime teraz k samotnej testovej štatistike. Označme

$$F = \frac{\hat{\eta}^2(n - 2M - 2)}{\sum_{t=M+1}^n \hat{\varepsilon}_t^2 - \hat{\eta}^2}. \quad (2.1)$$

Za predpokladov z vety 17 má štatistika F asymptotické $\chi^2(1)$ -rozdelenie. Posledné tvrdenie je taktiež dokázané v [11]. Na základe tohoto tvrdenia sa urobí aj samotný asymptotický test linearity. Nulovú hypotézu zamietneme v prípade príliš vysokej testovej štatistiky F . Na hladine 5% by to bolo v prípade prekročenia 95%-ného kvantilu rozdelenia $\chi^2(1)$.

2.1.3 Tsayov test

Tsayov test je v podstate rozšírenie predošlého Keenanovho testu, ktorý popísal Tsay v [20]. V prvom kroku rovnako ako v predošlom prípade odhadujeme model

$$X_t = \mathbf{a}'\mathbf{X}_{t-1} + e_t,$$

kde $\mathbf{X}_{t-1} = (1, X_{t-1}, \dots, X_{t-M})$ a \mathbf{a} je vektor parametrov. V druhom kroku Keenanovho testu sa na indikáciu nelinearity používajú už sčítané hodnoty $X_{t-u} \cdot X_{t-v}$ do súčtu \hat{X}_t^2 . Týmto sčítovaním stratíme časť informácie o tom, s ktorým z kvadratických členov sú reziduá z prvého kroku korelované. Tsay navrhol v druhom kroku urobiť regresiu každej zložky vektoru $\mathbf{M}_{t-1} = (X_{t-i} \cdot X_{t-j}; i, j = 1, \dots, M, i \leq j)$ na $\{1, X_{t-1}, \dots, X_{t-M}\}$, teda odhadnúť teoretický model (po zložkách)

$$\mathbf{M}_{t-1} = \mathbf{B}'\mathbf{X}_{t-1} + \boldsymbol{\xi}_t.$$

Tvrdenie nulovej hypotézy potom prejde na nulovosť parametru \mathbf{c} v modeli

$$e_t = \mathbf{c}'\boldsymbol{\xi}_t + \varepsilon_t.$$

Teda za predpokladu, že vysvetlenie v prvom kroku bolo dostatočné, e_t nie sú závislé na kvadratických členoch a model je lineárny. Celá procedúra sa dá zjednodušiť, ak si uvedomíme, že

$$e_t = \mathbf{c}'\boldsymbol{\xi}_t + \varepsilon_t = \mathbf{c}'(\mathbf{M}_{t-1} - \mathbf{B}'\mathbf{X}_{t-1}) + \varepsilon_t$$

a po dosadení do 1. kroku dostaneme teoretický model

$$X_t = (\mathbf{a}' - \mathbf{c}'\mathbf{B}')\mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{c}'\mathbf{M}_{t-1} + \varepsilon_t,$$

kde môžeme klasickým F-testom používaným v regresii (viď [6] kapitola 3.6.4) testovať hypotézu nulovosti \mathbf{c} . F-štatistika bude mať v tomto prípade asymptoticky F rozdelenie so stupňami voľnosti $(M(M+1)/2, n - M - M(M+1)/2 - 1)$. Naopak nevýhodou Tsayovho testu by pri menšom počte pozorovaní mohol byť príliš veľký počet odhadovaných neznámych parametrov. Nulovú hypotézu budeme opäť zamietť, ak F -štatistika prekročí 95%-ný kvantil spomínaného F -rozdelenia.

2.1.4 Bispektrálny test

Bispektrálnym testom by sme mohli nazvať všetky testy, ktoré testujú lineariťu na základe hodnôt bispektra. Keďže v špeciálnom prípade gaussovskosti postupnosti je bispektrum nulové, zvykne sa pri popise bispektrálnych testov tento príklad špeciálne spomenúť vzhľadom na zjednodušenia, ktoré nulovosť prináša. Pri testovaní linearity sa zase používa konštantnosť podielu (1.14). Z definície bispektrálnej hustoty vidíme, že je v oboch argumentoch 2π -periodická. Bispektrum má však ešte ďalšie vlastnosti, vďaka ktorým sa nepotrebujeme pozerať na hodnoty v celom štvorci $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$. Nech $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je ako vo vete 4. Potom platí

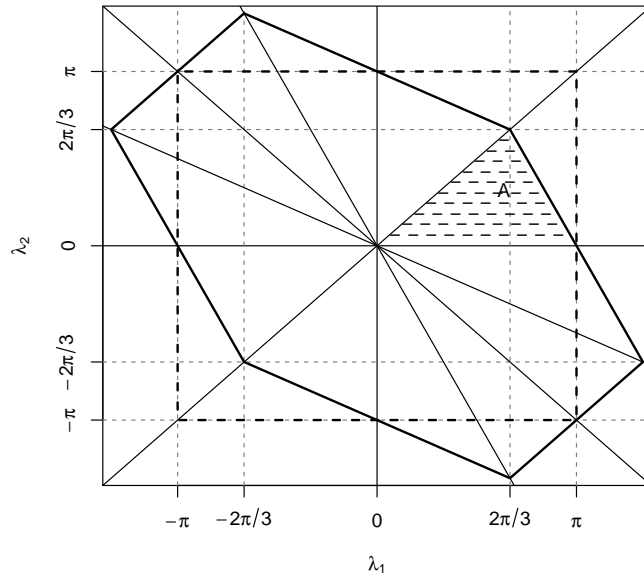
$$\begin{aligned} \mathbb{E}X_\tau X_{\tau+t_1} X_{\tau+t_2} &= c(t_1, t_2) = \\ \mathbb{E}X_\tau X_{\tau+t_2} X_{\tau+t_1} &= c(t_2, t_1) = \\ \mathbb{E}X_{\tau+t_1} X_\tau X_{\tau+t_2} &= c(-t_1, t_2 - t_1) = \\ \mathbb{E}X_{\tau+t_2} X_{\tau+t_1} X_\tau &= c(t_1 - t_2, -t_2). \end{aligned}$$

K vymenovaniu všetkých možností chýba ešte $c(-t_2, t_1 - t_2)$ a $c(t_2 - t_1, -t_1)$, no tie sú už kombináciou predošlých. Pre bispektrálnu hustotu teda platia ešte

s využitím $f(\lambda_1, \lambda_2) = \overline{f(-\lambda_1, -\lambda_2)}$ nasledujúce rovnosti.

$$\begin{aligned} f(\lambda_1, \lambda_2) &= f(\lambda_2, \lambda_1) &&= \overline{f(-\lambda_2, -\lambda_1)} \\ &= f(-\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2) &&= \overline{f(\lambda_1 + \lambda_2, -\lambda_2)} \\ &= f(\lambda_1, -\lambda_1 - \lambda_2) &&= \overline{f(-\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2)} \end{aligned}$$

Každá z nich určuje v rovine \mathbb{R}^2 jednu priamku. Konkrétne, v poradí po riadkoch to sú: $\lambda_2 = \lambda_1$, $\lambda_2 = -\lambda_1$, $\lambda_2 = -2\lambda_1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_2 = -1/2\lambda_1$, $\lambda_1 = 0$. Každá z týchto priamok rozdeľuje rovinu na 2 polroviny a zo znalosti hodnôt $f(\lambda_1, \lambda_2)$ v jednej z nich sme schopní podľa predošlých rovností zistiť hodnoty funkčných hodnôt v druhej. Týchto 6 priamok nám rozdelí rovinu na 12 častí a my z hodnôt v jednej z nich môžeme dostať hodnoty v celej rovine. Na obrázku 2.1 je vyznačený šesťuholník. Na základe 2π -periodickosti bispektra sú v tomto šesťuholníku určite všetky možné funkčné hodnoty.



Obrázek 2.1: hlavná doména bispektra - A

Ten je ďalej rozdelený spomínanými priamkami na 12 trojuholníkov a z vlastností, ktoré sme si o priamkach odvodili nám teda stačí poznať funkčné hodnoty len v jednom z nich. My sa zameriame na trojuholník označený písmenom $A = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq \lambda_2 \leq \min(\lambda_1, 2(\pi - \lambda_1))\}$, ktorý nazveme hlavná doména bispektra.

Majme X_1, \dots, X_n náhodné veličiny, ktoré pochádzajú z lineárnej náhodnej postupnosti stacionárnej do 6. rádu. Váhy $W(t)$, ktoré použijeme na odhad hustoty, budú tvoriť už spomínané Parzenovo okno (1.26). Na odhad bispektrálnej

hustoty použijeme dvojrozmerné okno $W(t_1, t_2) = W(t_1)W(t_2)W(t_1 - t_2)$. Takto definované dvojrozmerné okno zachováva všetky spomínané symetrie bispektra, pretože preň platia rovnaké symetrie ako pre autokumulantovú funkciu.

Nasledujúci test linearity je popísaný aj v článku [19]. Na tomto mieste si uvedieme v krátkosti jeho myšlienku. Detailnejšie sa budeme zaoberať analogickými testami, ktoré vznikli vylepšením tohto. Začneme tým, že si zvolíme hrubú mriežku P rovnomerne rozmiestnených bodov (λ_i, λ_j) v hlavnej doméne A , kde $\lambda_j = j\pi/K$, $j = 1, \dots, \lfloor 2K/3 \rfloor$ a $\lambda_i = i\pi/K$, $i = (j+1)\pi/K, \dots, \lfloor K - j/2 \rfloor \pi/K$, pričom $\lfloor x \rfloor$ onačuje najväčšie celé číslo ostro menšie ako x . Nech $L(j) = \lfloor K - j/2 \rfloor \pi/K$. Označme $\eta_{i,j} = f(\lambda_i, \lambda_j)$. Ďalej označme

$$\boldsymbol{\eta}'_j = (\eta_{j+1,j}, \dots, \eta_{L(j),j})$$

a vektor $\boldsymbol{\eta}$ definujeme ako

$$\boldsymbol{\eta}' = (\boldsymbol{\eta}'_1, \dots, \boldsymbol{\eta}'_{\lfloor 2K/3 \rfloor}).$$

Teraz už môžeme prvky $\boldsymbol{\eta}$ označiť takto

$$\boldsymbol{\eta}' = (\zeta_1, \dots, \zeta_P).$$

Pre testovanie gaussovskosti sa zameriame na hodnoty bispektra v týchto P bodoch, ktoré budeme chcieť odhadnúť. Pre tento účel v okolí každého bodu (λ_i, λ_j) skonštruujeme jemnú mriežku m bodov (pre odhad $\zeta_l = f(\lambda_i, \lambda_j)$). Nech

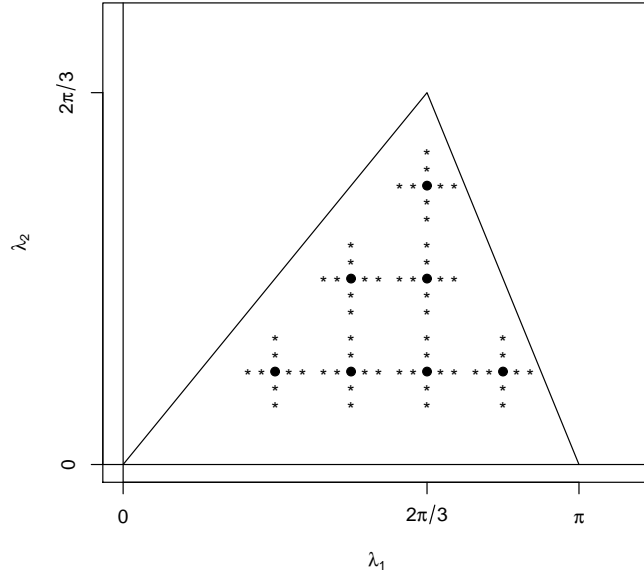
$$\begin{aligned} \lambda_{i_p} &= \lambda_i + \frac{pd\pi}{n}, & p &= -r, \dots, r \\ \lambda_{j_q} &= \lambda_j + \frac{qd\pi}{n}, & q &= -r, \dots, r \quad q \neq 0, \end{aligned}$$

kde d volíme tak, aby boli odhady hustôt približne nekorelované, teda tak, aby $d\pi/n$ bolo väčšie ako šírka spektrálneho okna. Pre každé ζ_l môžeme teda zostaviť $m = 4r + 1$ odhadov $(Z_{l,1}, \dots, Z_{l,m})'$ v nasledovných bodoch

$$(\lambda_{i-r}, \lambda_j), \dots, (\lambda_i, \lambda_j), \dots, (\lambda_{i+r}, \lambda_j), (\lambda_i, \lambda_{j-r}), \dots, (\lambda_i, \lambda_{j+r}),$$

ktoré su znázornené aj na obrázku 2.2 Pre testovanie gaussovskosti označme $\mathbf{Z}_k = (Z_{1,k}, \dots, Z_{P,k})'$. Odhady bispektrálnej hustoty sú asymptoticky normálne rozdelené (viď [22], alebo posledný odstavec z časti 1.2). Nech

$$\bar{\mathbf{Z}} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \mathbf{Z}_k \quad \mathbf{S}_{\mathbf{Z}} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (\mathbf{Z}_k - \bar{\mathbf{Z}})(\mathbf{Z}_k - \bar{\mathbf{Z}})'$$



Obrázek 2.2: mriežka bodov v hlavnej doméne pre $K = 6, r = 2$

a označme $T^2 = \bar{\mathbf{Z}}' \mathbf{S}_{\mathbf{Z}}^{-1} \bar{\mathbf{Z}}$. Za predpokladu, že proces je gaussovský (teda $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$) má $[2(m - P)/2P]T^2$ asymptoticky F - rozdelenie s $2P, 2(m - P)$ stupňami volnosti (viď [19]). Test hypotézy gaussovskosti prevedieme práve na základe tejto štatistiky.

Autori [19] podobným spôsobom testujú aj linearitu na základe odhadov podielu (1.14) v rovnakých bodoch. Teoretická hodnota (1.14) je za predpokladu linearity konštantná. Vzhľadom na pochybnosti o oprávnenosti odvolávania sa na tvrdenie v [4], na základe ktorého by mal byť odhad (1.14) asymptoticky normálne rozdelený nebudeme tento test zaraďovať do tejto práce. Konflikt vzniká s tvrdením z článku [22], ktoré je spomenuté aj v poslednom odstavci 1.2. Podľa neho je vyrovnaný odhad bispektrálnej hustoty konzistentný a komplexná veličina

$$\frac{\sqrt{n}}{M_n} \left[\hat{f}_w(\lambda_1, \lambda_2) - \mathbf{E} \hat{f}_w(\lambda_1, \lambda_2) \right]$$

má približne normálne rozdelenú reálnu aj imaginárnu časť. Ak odhad bispektrálnej hustoty zapíšeme ako $\hat{f}_w(\lambda_1, \lambda_2) = X + iY$ a $f(\lambda_1, \lambda_2) = a + ib$, tak približne platí

$$(X, Y) \sim N \left((a, b), \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} \right),$$

kde

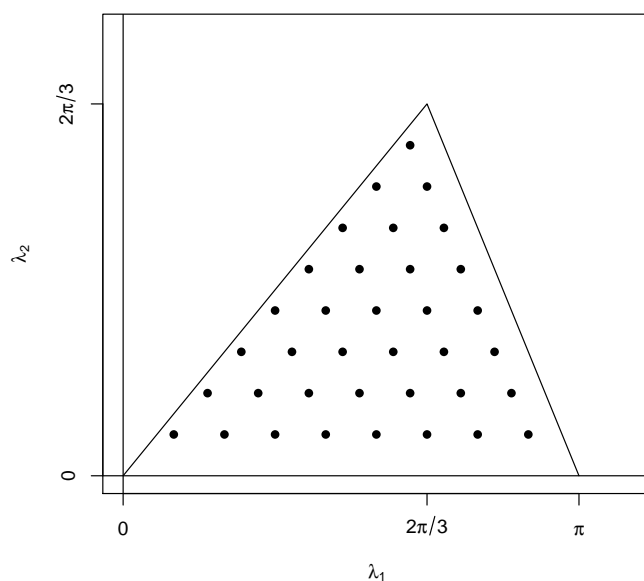
$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \frac{M_n^2}{n} \frac{v_2}{2\pi} f(\lambda_1) f(\lambda_2) f(\lambda_1 + \lambda_2). \quad (2.2)$$

Štatistika

$$\frac{|\hat{f}_w(\lambda_1, \lambda_2)|^2}{\sigma^2} = \left(\frac{X}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{Y}{\sigma}\right)^2 = 2 \frac{n}{M_n^2} \frac{2\pi}{v_2} \frac{|\hat{f}_w(\lambda_1, \lambda_2)|^2}{f(\lambda_1)f(\lambda_2)f(\lambda_1 + \lambda_2)} \quad (2.3)$$

má teda približne necentrálne rozdelenie $\chi^2(2, |f(\lambda_1, \lambda_2)|^2/\sigma^2)$. Ak v podiele (2.3) vymeníme teoretické hodnoty hustôt za konzistentné odhady $\hat{f}_w(\lambda)$, toto tvrdenie zostane nezmené. To je konflikt s tým, že odhad podielu (1.14) je približne normálne rozdelený.

Práve popísaný prístup k testovaniu pomocou hodnôt bispektra vylepšil Hinich v článku [10]. Autori Subba Rao a Gabr vlastne brali odhady rôznych hodnôt bispektra ako dáta a odhadovali kovariančnú štruktúru vektoru $\boldsymbol{\eta}$. Tá je pritom teoreticky asymptoticky známa. Ďalej môže byť spomenutý prístup citlivý na odľahlé pozorovania, preto použil Hinich pri teste linearít štatistiku založenú na rozdieloch tretieho a prvého kvartil, ktorá je robustná voči odľahlým pozorovaniám a asymptoticky normálne rozdelená. Vzhľadom na použitie až 2 asymptotických rozdelení (bispektra a medzikvartilového rozpätia) sa autori článku [3] rozhodli vyskúšať či by nebolo lepšie na aproximáciu rozdelenia testových štatistík použiť metódu bootstrap. Vo vnútri hlavnej domény bispektra si opäť zvolíme k rovnomerne rozmiestnených bodov $\boldsymbol{\lambda}_1, \dots, \boldsymbol{\lambda}_k$, kde $\boldsymbol{\lambda}_j = (\lambda_j^{(1)}, \lambda_j^{(2)})$. Môžeme to urobiť napríklad tak, že si zvolíme počet riadkov r , v ktorých body budú a rozmiestnime ich podľa toho, ako na obrázku 2.3.



Obrázek 2.3: rovnomerne rozmiestnené body do 8 riadkov

Označme hodnoty bispektra v bodoch nasledovne $f(\lambda_j^{(1)}, \lambda_j^{(2)}) = a_j + ib_j$. Po-

tom rovnakým postupom ako v predchádzajúcom odstavci podľa [3] a [22] má $\hat{f}(\lambda_j^{(1)}, \lambda_j^{(2)})$ tvar $X + iY$, kde približne platí $X \sim N(a_j, \sigma_j^2)$ a nezávisle $Y \sim N(b_j, \sigma_j^2)$. Rozptyl σ_j^2 je rovný (2.2), kde

$$v_2 = \int_{[-1,1]^2} w_2^2(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

čo je integrál druhej mocniny funkcie z ktorej je vytvorené dvojrozmerné časové Parzenove okno. Preto štatistika

$$T_j = \frac{|\hat{f}(\lambda_j^{(1)}, \lambda_j^{(1)})|^2}{\hat{\sigma}_j^2} = \frac{n}{M_n^2} \frac{4\pi}{v_2} \frac{|\hat{f}(\lambda_j^{(1)}, \lambda_j^{(1)})|^2}{\hat{f}(\lambda_j^{(1)})\hat{f}(\lambda_j^{(2)})\hat{f}(\lambda_j^{(1)} + \lambda_j^{(2)})}$$

bude mať približne necentrálne chí-kvadrát rozdelenie

$$T_j = \left(\frac{X_j}{\hat{\sigma}_j}\right)^2 + \left(\frac{Y_j}{\hat{\sigma}_j}\right)^2 \sim \chi^2(2, \alpha_j),$$

kde parameter necentrality $\alpha_j = (a_j^2 + b_j^2)/\sigma_j^2$. Za predpokladu gaussovskosti bude mať potom štatistika $T_G = \sum_{j=1}^k T_j$ približne centrálné rozdelenie $\chi^2(2k)$. Na základe T_G sa bude aj testovanie gaussovskosti robiť. Za predpokladu linearity je parameter necentrality $\alpha_j = \alpha_0$ konštantný, konkrétne

$$\alpha_0 = \frac{2n\gamma_3^2}{v_2 M_n^2 \sigma^6}.$$

Neznáme parametre γ_3 a σ^2 aproximujeme odhadmi $\hat{c}(0,0)$ a $\hat{R}(0)$. Ako testovú štatistiku pri testovaní linearity Hinich použil medzikvartilové rozpätie hodnôt T_j a porovnával ho s kvantilom jeho asymptotického rozdelenia, ktorého nájdeme v [3].

Vzhľadom na opakujúce sa približné výsledky je sľubná šanca, že pri aproximovaní testových štatistík metódou bootstrap by sa testy spresnili. Konkrétne budeme používať tzv. $AR(\infty)$ bootstrap. Názov je odvodený od toho, že procedúra predpokladá existenciu reprezentácie lineárneho procesu v tvare

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} a_j X_{t-j} + \varepsilon_t,$$

kde $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| < \infty$. Metóda si však žiada splnenie ďalších predpokladov. Nech navyše platí $\sum_{t=-\infty}^{\infty} t^2 |R(t)| < \infty$, spektrálna hustota $f(\lambda)$ je kladná a $\sum_{t_1, t_2 \in \mathbb{Z}} (1 + t_j^2) |c(t_1, t_2)| < \infty$ pre $j = 1, 2$. Zostavme si teraz vektor

$$V_n = (\hat{f}(\lambda_1^{(1)}), \dots, \hat{f}(\lambda_k^{(1)}), \hat{f}(\lambda_1^{(2)}), \dots, \hat{f}(\lambda_k^{(2)}), \dots, \hat{f}(\lambda_1^{(1)} + \lambda_1^{(2)}), \dots, \hat{f}(\lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)}), \hat{f}(\lambda_1^{(1)}, \lambda_1^{(2)}), \dots, \hat{f}(\lambda_k^{(1)}, \lambda_k^{(2)})),$$

z ktorého potom tvoríme testové štatistiky. Jeho rozdelenie si aproximujeme metódou bootstrap v 3 krokoch.

1. Preložíme našimi dátami $AR(p)$ model, pre vopred zvolené p , ktoré bude ešte špecifikované neskôr, teda

$$X_t = \sum_{j=1}^p \hat{a}_{j,p} X_{t-j} + \hat{u}_t, \quad t = p+1, \dots, n.$$

2. V druhom kroku budeme opakovane generovať nové pseudo-pozorovania X_1^*, \dots, X_n^* pomocou odhadnutého $AR(p)$ modelu s tým, že položíme $X_t^* = 0$ pre $t \leq 0$ a reziduá u_t^* budú nezávislé náhodné veličiny z rozdelenia s distribučnou funkciou F_n , ktorá môže byť

- (a) empirickou distribučnou funkciou $F_n^{(1)}$ centrovanej reziduí $\hat{u}_t - \bar{u}_n$, kde

$$\bar{u}_n = \frac{1}{n-p} \sum_{t=p+1}^n \hat{u}_t,$$

ak testujeme linearitu,

- (b) distribučnou funkciou $F_n^{(2)}$ rozdelenia $N(0, \hat{\sigma}_p^2)$, kde

$$\hat{\sigma}_p^2 = \frac{1}{n-p} \sum_{t=p+1}^n (\hat{u}_t - \bar{u}_n)^2,$$

ak testujeme gaussovskosť.

3. Zostavenie vektorov V_n^* z vygenerovaných veličín X_t^* .

Následne budeme porovnávať testové štatistiky s kvantilmi, ktoré dostaneme z nagenovaných pseudo-pozorovaní. Nulovú hypotézu linearoty zamietneme vtedy, ak medzikvartilové rozpätie hodnôt T_j prekročí 95% kvantil spočítaný z medzikvartilových rozpätí T_j^* vytvorených z bootstrap replikácii. Aby mala bootstrap metóda želané asymptotické vlastnosti, t.j., že aproximácia rozdelenia testových štatistík konverguje k skutočnému teoretickému rozdeleniu, musia byť splnené ďalšie technické predpoklady (tvrdenie s dôkazom sa nachádza v [3]).

- (i) Pre rád $p = p(n)$ preloženého $AR(p)$ modelu platí, že $p(n) \in [p_{\min}(n), p_{\max}(n)]$, kde $p_{\min}(n), p_{\max}(n)$ sú nenáhodné a spĺňajú

$$p_{\max}(n) \geq p_{\min}(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{\max}(n)^9 \log^3(n)}{n^2} = 0.$$

- (ii) Odhad AR parametrov spĺňajú

$$\max_{1 \leq j \leq p} |\hat{a}_{j,p} - a_{j,p}| = O\left(\sqrt{\log(n)/\sqrt{n}}\right)$$

rovnomerne v $p \leq p_n$, kde $p_n = o(\sqrt{n/\log(n)})$. ($a_{j,p}$ je koeficient pri X_{t-j} v projekcii veličiny X_t do priestoru generovaného veličinami X_{t-1}, \dots, X_{t-p})

- (iii) Postupnosť distribučných funkcií $F_n^{(i)}$, $i = 1, 2$ konverguje k distribučnej funkcii $F^{(i)}$, pričom $F^{(2)}$ je distribučná funkcia rozdelenia $N(0, \sigma^2)$, kde $\hat{\sigma}_p^2 \rightarrow \sigma^2$ v pravdepodobnosti. Navyac

$$\int u^r dF_n^{(i)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int u^r dF^{(i)}$$

pre $r = 1, \dots, 6$ a $\int u dF^{(1)} = 0$.

2.1.5 BDS test

Ďalší test je nazvaný podľa autorov Brock, Dechert, Scheinkman. Je doporučovaný ako účinný test nelinearity v kontexte modelovania finančných časových radov (viď [6]). Aplikuje sa na vypočítaný biely šum po preložení čo najvhodnejšieho lineárneho modelu. Nulovou hypotézou je, že tieto reziduá sú nezávislé, rovnako rozdelené náhodné veličiny (teda, že preložený model je adekvátny). Na začiatku sa zvolí pevné $\delta > 0$. Myšlienkou testu je, že za platnosti nulovej hypotézy je pravdepodobnosť, že rozdiel $|e_t - e_s|$, $s \neq t$ dvoch reziduí neprekročí δ je rovnaká pre všetky také dvojice. Označíme $c_m(\delta)$ pravdepodobnosť toho, že vzdialenosť v žiadnej z dvojíc $(e_s, e_t), (e_{s+1}, e_{t+1}), \dots, (e_{s+m-1}, e_{t+m-1})$ nepresiahne δ . Za predpokladu tvrdenia nulovej hypotézy platí

$$c_m(\delta) = [c_1(\delta)]^m.$$

Prakticky tieto hodnoty samozrejme odhadujeme. Označme

$$c_{m,n}(\delta) = \frac{2}{(n-m+1)(n-m)} \sum_{s=1}^{n-m+1} \sum_{t=s+1}^{n-m+1} \prod_{j=0}^{m-1} I_\delta(e_{s+j}, e_{t+j}),$$

kde

$$I_\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } |x - y| \leq \delta, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Hodnota $c_{m,n}(\delta)$ v podstate vyjadruje podiel takých m - členných skupín dvojíc $(e_s, e_t), (e_{s+1}, e_{t+1}), \dots, (e_{s+m-1}, e_{t+m-1})$, v ktorých ani v jednom prípade neprekročí rozdiel vo dvojici hranicu δ . Hypotézu potom testujeme na základe toho, ako veľmi sa rozdiel

$$b_{m,n} = c_{m,n}(\delta) - [c_{1,n-m+1}(\delta)]^m$$

odlišuje od nuly. Z člena $c_{1,n-m+1}(\delta)$ bolo odstránených $m - 1$ pozorovaní, aby bol jeho výpočet založený na rovnakom počte pozorovaní ako pri prvom člene. Podľa [6], za platnosti nulovej hypotézy má štatistika

$$\sqrt{n - m + 1} \frac{b_{m,n}(\delta)}{\sigma_{m,n}(\delta)}$$

asymptoticky normálne rozdelenie $N(0, 1)$, kde

$$\begin{aligned} \sigma_{m,n}^2(\delta) = & 4 \left(k_n(\delta)^m + 2 \sum_{j=1}^{m-1} k_n(\delta)^{m-j} c_{1,n}(\delta)^{2j} + (m-1)^2 c_{1,n}(\delta)^{2m} \right. \\ & \left. - m^2 k_n(\delta) c_{1,m}(\delta)^{2m-2} \right), \\ k_n(\delta) = & \frac{2}{n(n-1)(n-2)} \sum_{t=1}^n \sum_{s=t+1}^n \sum_{r=s+1}^n \left(I_\delta(e_t, e_s) I_\delta(e_s, e_r) + I_\delta(e_t, e_r) I_\delta(e_r, e_s) \right. \\ & \left. + I_\delta(e_s, e_t) I_\delta(e_t, e_r) \right). \end{aligned}$$

Na základe tohoto tvrdenia sa prevedie aj samotný test. Nulovú hypotézu teda zamietneme na hladine 5%, ak absolútna hodnota testovej štatistiky prekročí 97,5%-ný kvantil rozdelenia $N(0, 1)$.

2.2 Linearita vs. špecifický nelineárny model

2.2.1 Test pomerom vierohodností pre prahovú nelinearitu

Pre zjednodušenie situácie majme prahový model s 2 režimami definovaný, ako

$$X_t - \phi_0 - \phi_1 X_{t-1} \dots - \phi_p X_{t-p} - I(X_{t-d} \leq C) (\theta_0 + \theta_1 X_{t-1} + \dots + \theta_q X_{t-q}) = \varepsilon_t, \quad (2.4)$$

kde $I()$ je indikátor, ktorý má hodnotu jedna, ak je nerovnosť v zátvorke splnená, inak má hodnotu nula. Ak by sme poznali parametre d, C, q, p , mohli by sme na testovanie hypotézy $H_0: \theta_0 = \theta_1 = \dots = \theta_q = 0$ oproti alternatíve prahovej nelinearity (2.4) použiť test pomerom vierohodností. Teda, že za nulovej hypotézy platí

$$LR = -2(L_{H_0} - L_{H_1}) \sim \chi^2(q),$$

kde L_{H_1} je logaritmickej vierohodnosť odhadu (2.4) a L_{H_0} je logaritmickej vierohodnosť za platnosti H_0 . Označme $LR(C)$ testovú štatistiku tohto testu v závislosti na prahu C . Testová štatistika pre test hypotézy H_0 proti alternatíve prahovej nelinearity pri neznámom C má potom hodnotu

$$\lambda = \max_{C \in \mathcal{C}} LR(C),$$

kde \mathcal{C} je interval určený zvolenými kvantilmi vzorku X_1, \dots, X_n . Pravdepodobnostné rozdelenie štatistiky λ nemá za platnosti hypotézy H_0 uzavretú formu, no existujú jej odvodené tabuľkové hodnoty pre prípady rôznych hodnôt $p = q$ a rôzne množiny \mathcal{C} (viď [12]). Za hranice \mathcal{C} sa často volí 25% a 75% kvantil alebo 10% a 90% kvantil vzorku X_1, \dots, X_n .

2.2.2 Tsayov test usporiadanej autoregresie

Ďalší test linearity je opäť oproti alternatíve prahovej nelinearity. Priamo využíva fakt, že postupnosť sa riadi v rôznych režimoch rôznymi modelmi. Uvažujme opäť prahový model s 2 režimami ($t = p + 1, \dots, n$)

$$\begin{aligned} X_t &= \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t & \text{ak } X_{t-d} \leq C \\ &= \theta_0 + \theta_1 X_{t-1} + \dots + \theta_p X_{t-p} + \varepsilon_t & \text{ak } X_{t-d} > C. \end{aligned}$$

Myšlienka testu spočíva v tom, že si naše dátové vektory $(X_t, 1, X_{t-1}, \dots, X_{t-p})$ zoradíme podľa veľkosti X_{t-d} . Nech π_i je časový index i -tej najmenej hodnoty $\{X_h, \dots, X_{n-d}\}$, kde $h = \max(1, p + 1 - d)$. Existuje taký index s , že pre $i \leq s$ sú hodnoty $X_{\pi_i} \leq C$, teda X_{π_i+d} sú v jednom režime a pre $i > s$ je $X_{\pi_i} > C$, teda X_{π_i+d} sú všetky v druhom režime. Prahový model teda prejde na tvar

$$\begin{aligned} X_{\pi_i+d} &= \phi_0 + \phi_1 X_{\pi_i+d-1} + \dots + \phi_p X_{\pi_i+d-p} + \varepsilon_{\pi_i+d} & \text{ak } i \leq s \\ &= \theta_0 + \theta_1 X_{\pi_i+d-1} + \dots + \theta_p X_{\pi_i+d-p} + \varepsilon_{\pi_i+d} & \text{ak } i > s. \end{aligned}$$

V tomto tvare budeme postupne odhadovať model pomocou rekurentnej metódy najmenších štvorcov (viď [6], kapitola 4.7.1). Za predpokladu linerity sú rekurentné reziduá asymptoticky bielym šumom kolmým na regresory $(X_{t-1}, \dots, X_{t-p})$. V prípade zmeny modelu po indexe s by sme teda mali pozorovať vychýlenie od nulovej strednej hodnoty a zároveň závislosť na regresoroch. Na základe toho budeme robiť aj samotný test. Nech rekurentné odhady začínajú na prvých b pozorovaniach. Potom máme $n - d - h + 1 - b$ rekurentných rezidií $\hat{\varepsilon}_t$ a môžeme odhadnúť regresný model v tvare ($i = b + 1, \dots, n - d - h + 1$)

$$\hat{\varepsilon}_{\pi_i+d} = \omega_0 + \omega_1 X_{\pi_i+d-1} + \dots + \omega_p X_{\pi_i+d-p} + \varepsilon_{\pi_i+d}.$$

V tomto modeli potom testujeme linearitu pomocou testu nulovosti všetkých parametrov. Za tohoto predpokladu má F -štatistika

$$F = \frac{(\sum \hat{\varepsilon}_t^2 - \sum \varepsilon_t^2)/(p+1)}{\sum \hat{\varepsilon}_t^2/(n-d-b-p-h)}$$

F -rozdelenie s $(p+1), (n-d-b-p-h)$ stupňami voľnosti, kde sčítujeme cez všetky pozorovania. Hypotézu zamietneme na hladine 5%, ak F štatistika prekročí 95%-ný kvantil spomínaného F -rozdelenia.

2.2.3 Test pre STAR modely

Testy linearity oproti alternatívne modelu STAR využívajú aproximáciu prechodovej funkcie F pomocou polynómov. Pripomeňme ešte raz tvar modelu

$$X_t = \phi_0 + \boldsymbol{\phi}'\mathbf{X}_{t-1} + (\theta_0 + \boldsymbol{\theta}'\mathbf{X}_{t-1})F(\gamma(\mathbf{a}'\mathbf{X}_{t-1} - C)) + \varepsilon_t. \quad (2.5)$$

O funkcii F predpokladajme, že:

(i) je nepárna, rastúca a diferencovateľná do rádu $2s + 1$, pre nejaké $s \in \mathbb{N}_0$,

(ii) $F(0) = 0$ a k -ta derivácia v nule je nenulová pre nepárne $k \leq 2s + 1$.

Pri použití napríklad distribučnej funkcie normálneho rozdelenia posunutej tak, aby bola v nule nulová, sú splnené všetky tieto podmienky. Najjednoduchšou aproximáciou je lineárna. Nech je teda podmienka (i) splnená pre $s = 0$. Nahradíme $F(z)$ funkciou g_1z , kde $g_1 = F'(0)$. Po dosadení dostaneme

$$X_t = \phi_0 + \boldsymbol{\phi}'\mathbf{X}_{t-1} + \gamma g_1 \theta_0 (\mathbf{a}'\mathbf{X}_{t-1} - C) + \gamma g_1 \boldsymbol{\theta}'\mathbf{X}_{t-1} (\mathbf{a}'\mathbf{X}_{t-1} - C) + \eta_t.$$

Po roznásobení reparametrizácií dospejeme k modelu

$$X_t = \alpha_0 + \boldsymbol{\alpha}'\mathbf{X}_{t-1} + \sum_i^p \sum_j^p \pi_{i,j} X_{t-i} X_{t-j} + \eta_t,$$

kde môžeme testovať nulovosť $\pi_{i,j}$, $i, j = 1 \dots, p$. To je presne test linearity, ktorý sme si už spomínali pod názvom Tsayov test. Navyše proti alternatívne STAR modelu má nevýhodu, že parameter θ_0 je súčasťou parametrov $\alpha_0, \boldsymbol{\alpha}$ a nie je zahrnutý v $\pi_{i,j}$, $i, j = 1 \dots, p$. Takýto test nemusí mať dostatočnú silu proti modelom s veľkým θ_0 a malými $\boldsymbol{\theta}$. Za predpokladu, že

$$a_i = \begin{cases} 1 & i = d \\ 0 & i \neq d \end{cases} \quad (2.6)$$

dostaneme jednoduchší model

$$X_t = \alpha_0 + \boldsymbol{\alpha}'\mathbf{X}_{t-1} + \sum_{i=1}^p \pi_i X_{t-i} X_{t-d} + \eta_t.$$

Problém s možnou nedostatočnou silou testu s využitím aproximácie do 1. rádu vieme vyriešiť použitím vyšších rádo. Nech je teda podmienka (i) pre F splnená pre $s = 1$. Označme $g_3 = (1/6)F'''(0)$, potom

$$T_3(z) = g_1z + g_3z^3$$

je Taylorov polynom 3. stupňa funkcie $F(z)$ v nule. Dosadíme teda T_3 za F v prípade (2.6). Dostaneme

$$X_t = \phi_0 + \phi' \mathbf{X}_{t-1} + (\theta_0 + \theta' \mathbf{X}_{t-1}) [g_1 \gamma (X_{t-d} - C) + g_3 \gamma^3 (X_{t-d}^3 - 3X_{t-d}^2 C + 3X_{t-d} C^2 - C^3)] + \nu_t.$$

Po roznásobení, posčítovaní a reparametrizácii dostaneme model

$$X_t = \alpha_0 + \alpha' \mathbf{X}_{t-1} + \sum_{i=1}^p \xi_i X_{t-i} X_{t-d} + \sum_{i=1}^p \psi_i X_{t-i} X_{t-d}^2 + \sum_{i=1}^p \kappa_i X_{t-i} X_{t-d}^3 + \nu_t,$$

v ktorom vystupuje parameter θ_0 aj v parametroch ξ_d, ψ_d prislúchajúcich nelineárnym členom. Konkrétne

$$\xi_d = \theta_d \gamma g_1 + C^2 \gamma^3 g_3 \theta_d - 3C \gamma^3 \theta_0 \quad \psi_d = \gamma^3 g_3 \theta_0 - 3\gamma^3 g_3 C \theta_d.$$

Pozrime sa teraz na to, za akých okolností sú oba tieto parametre nulové. Z rovnosti pre ψ_d dostávame $\theta_0 = 3C \theta_d$. Po dosadení do rovnosti pre ξ_d za θ_0 máme

$$\xi_d = \theta_d \gamma 9(g_1 - 6C^2 \gamma^2 g_3).$$

Za predpokladu $g_1 g_3 < 0$ sú teda parametre ξ_d, ψ_d nulové práve vtedy, keď $\theta_d = \theta_0 = 0$. Podmienka $g_1 g_3 < 0$ platí opäť napr. pre distribučnú funkciu normálneho rozdelenia. Test linearity bude potom testom hypotézy $H_0 = \psi_i = \xi_i = \kappa_i = 0, i = 1, \dots, p$, ktorý bude mať silu aj proti alternatívam $\theta_0 \neq 0$.

Aproximácia taylorovým polynomom 3. rádu má však tú nevýhodu, že nám pribudlo dosť veľa neznámych parametrov. V prípade všeobecného vektoru \mathbf{a} by bol tento vzrast ešte výraznejší. Pôvodným cieľom bolo zlepšiť lineárnu aproximáciu tak, aby mal test silu aj oproti vyšším hodnotám θ_0 . Pre tieto účely nám teda stačí model vzniknutý za pomoci lineárnej aproximácie obohatiť členmi, ktoré túto silu zvyšujú. V našom prípade je to člen s parametrom ψ_d . Výsledný test bude teda založený na modeli

$$X_t = \alpha_0 + \alpha' \mathbf{X}_{t-1} + \sum_{i=1}^p \xi_i X_{t-i} X_{t-d} + \psi_d X_{t-d}^3 + \nu_t^*,$$

kde nulová hypotéza bude predpokladať nulovosť parametrov nelineárných členov. Všetky tri testy sú opäť v podstate klasické F -testy z regresie (viď [6]), v ktorých nulovú hypotézu zamietame pri prekročení zvoleného kvantilu F -rozdelenia testovou štatistikou. (F -rozdelenie má stune volnosti $m, n - q$, kde m je počet parametrov, ktorých nulovosť testujeme, n je počet pozorovaní a q je počet všetkých odhadovaných parametrov)

2.2.4 Ďalšie odkazy

Na záver kapitoly o testoch ešte uvedieme niektoré ďalšie užitočné zdroje. V článku [1] sa autori zamerali na linearitu inak definovanú, než je v tejto práci. Ich definícia je v literatúre menej používaná a vychádza z modelu

$$X_t = \phi(\mathbf{X}_{t-1}) + \varepsilon_t,$$

kde $\mathbf{X}_{t-1} = (X_{t-1}, \dots, X_{t-p})'$ a ε_t sú stacionárne martingalové diferencie. Linearitu potom definujú ako linearitu funkcie ϕ . Článok je pomerne rozsiahly a predpoklady testu vyžadujú pomerne zložité teoretické základy. Testovanie sa podobne ako mnoho iných začína preložením adekvátneho AR(p) modelu a vytvorením štatistiky z vypočítaných reziduí.

Keď sme pri alternatívnych definíciách linearity postupností, poznamenajme, že linearita sa dá definovať ešte iným spôsobom. Už sme si povedali dôvody, prečo nechápať lineárnu postupnosť ako kauzálny lineárny proces s bielym šumom s len nekorelovanými náhodnými veličinami. Predsa len môžeme tento biely šum použiť v kombinácii s práve uvedenou myšlienkou definície (v predchádzajúcom odstavci). Postupnosť by bola lineárna vtedy, ak by existovala jej ARMA reprezentácia ako v (1.8), ale veličiny ε_t by boli nekorelovaným bielym šumom. Za tejto definície by tiež platili niektoré základné tvrdenia o tvare autokovariančnej funkcie a spektrálnej hustoty (viď [16]). Ako sme už videli, mnohé tvrdenia o asymptotickom správaní rôznych odhadov vyžadujú predpoklad bieleho šumu s nezávislými veličinami tak, ako ho používame my. Bez týchto asymptotických výsledkov by neplatili ani asymptotické rozdelenia používaných testových štatistík.

V ďalšom článku ([9]) opäť autori používajú myšlienku regresie X_t na predošlé hodnoty a ich vyššie mocniny. Testovanie linearity potom spočíva v testovaní nulovosti parametrov odpovedajúcim nelineárnym členom. Procedúra je však upravená tak, že ako regresory sa použijú aj prvé diferencie X_t , z čoho potom vyplynie možnosť testovať naraz nulovú hypotézu, že pôvodná postupnosť je AR(p) proces, alebo že AR(p) proces je jej prvá diferencia.

Pár ďalších podobných myšlienok o testovaní linearity je rozobratých aj v knihe [12], z ktorej sme čerpali niektoré informácie aj do tejto práce. Ako príklad uveďme možnosť aplikácie procedúry bootstrap na aproximáciu rozdelenia testových štatistík niektorých testov, či testovanie voči alternatíve bilineárneho modelu. Druhé spomenuté sa prevedie tak, že po preložení vhodného ARMA modelu urobíme regresiu vypočítaných hodnôt bieleho šumu na regresory z ARMA modelu a navyše na regresory typu $X_{t-j}\hat{\varepsilon}_{t-i}$, kde $\hat{\varepsilon}_t$ sú hodnoty vypočítaného bieleho šumu. V regresnom modeli sa potom linearita testuje ako nulovosť parametrov

odpovedajúcim bilineárnym členom $X_{t-j}\hat{\varepsilon}_{t-i}$. Nevýhodou je, že prakticky nevieme, koľko bilineárnych členov do regresie zahrnúť.

3. Výsledky testov na simulovaných dátach

V tejto kapitole si sformulované testy prakticky vyskúšame na simulovaných dátach. Ako prvým sa budeme venovať testom oproti nelinearite všeobecne. Pre každý z modelov v tabuľke 3.1 bolo urobených 1000 testov linearity na dátach o dĺžke 200 a 500.

model	vzorec
1	$X_t = 0,7X_{t-1} + 0,5X_{t-2}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$
2	$X_t = 0,9X_{t-1} + \varepsilon_t$
3	$X_t = 0,9X_{t-1} - 0,5X_{t-2} + \varepsilon_t - 0,2\varepsilon_{t-1} + 0,2\varepsilon_{t-2}$
4	$X_t = 0,5X_{t-1} + I(X_{t-1} < 0)(-1,6X_{t-1}) + \varepsilon_t$
5	$X_t = 0,5X_{t-1} + I(X_{t-1} < 0)(-0,7X_{t-1}) + \varepsilon_t$
6	$X_t = 0,4X_{t-1} + 0,4X_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$
7	$X_t = 0,3\varepsilon_{t-1} + 0,2\varepsilon_{t-2} + 0,4\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2} + 0,25\varepsilon_{t-2}^2$
8	$X_t = -0,3X_{t-1} + (\Phi(X_{t-1}) - 0,5)(0,8X_{t-1}) + \varepsilon_t$
9	$X_t = -0,3X_{t-1} + (\Phi(X_{t-1}) - 0,5)(1 + 0,8X_{t-1}) + \varepsilon_t$
10	$X_t = -0,3X_{t-1} + (\Phi(X_{t-1}) - 0,5)(2 + 0,8X_{t-1}) + \varepsilon_t$
11	$X_t = \varepsilon_t - 0,8\varepsilon_{t-1}$

Tabuľka 3.1: použité simulované modely

Ako ε_t sme použili hodnoty simulovaného bieleho šumu s nezávislými veličinami s rozdelením $N(0,1)$. Model 1 je superdiagonálny bilineárny. Model číslo 2 je AR(1). Ďalej číslo 3 je ARMA(2,2) a modely 4 a 5 sú prahové autoregresie. Na posledné dva spomenuté sa oplatí pozrieť v inom tvare zápisu, aby bolo lepšie vidieť v čom sa líšia.

$$\begin{aligned} \text{Model 4} \quad X_t &= \begin{cases} 0,5X_{t-1} + \varepsilon_t & X_{t-1} \geq 0 \\ -1,1X_{t-1} + \varepsilon_t & X_{t-1} < 0 \end{cases} \\ \text{Model 5} \quad X_t &= \begin{cases} 0,5X_{t-1} + \varepsilon_t & X_{t-1} \geq 0 \\ -0,2X_{t-1} + \varepsilon_t & X_{t-1} < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

V prípade modelu 4 má postupnosť vždy po vstupe do režimu pod nulou tendenciu preskočiť naspäť do režimu nad nulou, a to pomerne ďaleko od prahu 0.

Prechod naspäť do spodného režimu teda bude v priemere trvať o dosť dlhšie. Je to spôsobené v absolútnej hodnote pomerne vysokým koeficientom $-1,1$. V modeli 5 je táto tendencia o veľa menšia, pretože v režime pod nulou má X_{t-1} koeficient len $-0,2$. Toto má za následok, že model 4 sa bude výraznejšie líšiť od lineárnej postupnosti. Pokračujme teraz v popise použitých modelov. Model 6 je diagonálny bilineárny. Pre model 7 nemáme špeciálne meno, no mohli by sme ho nazvať napríklad nelineárny kĺzavý priemer. Modely 8,9,10 sú autoregresie so spojitým prechodom, ktorých prechodová funkcia je distribučná funkcia normálneho rozdelenia, parameter γ je jedna a líšia sa len v absolútnom člene druhého režimu, ktorý je 0,1,2 v tomto poradí. Všetky 3 sú zahrnuté z dôvodu ilustrovania vlastností testov oproti alternatíve STAR modelu. Posledný jedenásty model je lineárny MA(1). Všetky vykonané testy boli robené na hladine 5%. Vo všetkých tabuľkách sú výsledky aj za lineárne modely z dôvodu kontroly chyby prvého druhu, ktorá by mala byť nízka, okolo 5%. To nám aj vo všetkých prípadoch približne vyšlo, a tak sa v ďalšom budeme zaujímať len výsledkami, keď bol pri testovaní skutočný model nelineárny (silou testu).

Početnosti zamietnutia lineariry v percentách týkajúcich sa všeobecných testov nájdeme v tabuľke 3.2. V prípade BDS testu sme zahrnuli prípady pre $m = 2, 3$ a $\delta = \hat{\sigma}$, kde $\hat{\sigma}$ je odhadnutý rozptyl vypočítaného bieleho šumu z preloženého ARMA modelu. Ljungov-Boxov a McLeodov-Liov test sme robili pre korelovanosť do oneskorenia $M=10$. Číslo 10 bolo zvolené aj preto, aby nenastávali problémy pri pravdepodobnostnom rozdelení Ljungovej-Boxovej štatistiky, ktoré je $\chi^2(M - p - q)$, kde p, q sú rády preloženého modelu ARMA. Nakoniec v prípade bispektrálneho testu robeného pomocou metódy bootstrap sme v oboch prípadoch vygenerovali za každý test 1000 bootstrap replikácií. Voľba parametrov u pozorovaní dĺžky 200 bola nasledovná. Body useknutia pre výpočet odhadu bispektrálnej a spektrálnej hustoty boli 5 a 25 (v tomto poradí). Počet bodov v hlavnej doméne bispektra, ktoré sme pri testovaní používali bol 21. Rád prekladaného autoregresného modelu p bol 15. Pri pozorovaniach dĺžky 500 boli body useknutia 9 a 81, počet použitých bodov v hlavnej doméne bol 36 a rád p bol 20. Pred samotným rozoberaním výsledkov ešte upozorníme, že výsledky u testov, ktoré vyžadujú na zostavenie štatistiky preloženie vhodného ARMA, prípadne AR modelu, sú poznačené tým, že sme museli toto preloženie zautomatizovať. Nutnosť vyplýva z opakovania veľkého množstva testovaní. Model sme vždy vybrali na základe minimalizácie spomínaných informačných kritérií. V praxi však nemusí vždy platiť, že model s najnižšou hodnotou kritéria je zároveň ten, čo sa na dáta najviac hodí.

n	model	Ljung -Box	McL- Li	Keenan	BDS $2, \hat{\sigma}$	BDS $3, \hat{\sigma}$	Tsay	Boots
200	1	6,0	70,1	47,9	70,7	83,5	83,0	55,1
	2	5,0	4,2	2,7	7,9	8,3	2,6	2,4
	3	4,3	5,2	5,6	8,6	9,5	4,4	1,8
	4	5,3	35,4	35,7	86,3	79,0	47,9	69,3
	5	5,2	6,9	90,2	18,6	16,5	66,8	15,2
	6	4,6	76,0	94,7	95,6	96,2	95,7	83,4
	7	4,8	38,2	35,5	27,7	50,1	56,7	3,1
	8	4,5	9,5	92,0	25,2	24,0	82,5	37,3
	10	2,9	11,1	91,4	17,8	17,7	52,9	15,8
	11	3,2	2,9	3,5	7,3	9,3	3,3	1,7
	500	1	12,9	98,4	85,0	95,4	99,3	95,7
2		5,4	5,7	4,2	5,0	5,5	5,1	1,5
3		4,0	5,5	5,9	5,9	6,5	6,3	1,7
4		6	76,9	53,4	99,6	99,4	60,4	96,9
5		3,0	8,1	99,7	25,0	21,7	93,4	57,6
6		6,3	99,9	97,9	100	100	99,7	97,5
7		5,6	83,7	58,4	49,6	87,8	79,1	50,3
8		4,3	15,8	99,7	45,7	41,7	94,4	90,1
10		3,9	17,5	99,7	31,5	29,6	87,1	51,2
11		4,3	6,2	4,1	5,1	5,7	5,1	1,6

Tabulka 3.2: Výsledky testov simulácii

Z výsledkov v tabuľke 3.2 vidíme, že Ljungov-Boxov test nekorelovanosti reziduí preloženého ARMA modelu, ktorý sa používa ako kontrola, či je preložený lineárny model vhodný, má v prípade, že sa postupnosť riadi nelineárnym modelom pomerne malú silu a to vo všetkých testovaných nelineárných prípadoch. Nebudeme ho preto ďalej ani s ostatnými testami porovnávať.

Naproti tomu vidno, že McLeodov-Liov test obstáva v sile pomerne dobre, hlavne keď je skutočný model bilineárneho typu. V prípade modelov prahového typu STAR a TAR ju trochu stráca. Za modelu 4, ktorého priebeh je "výraznejšie" nelineárny má pri vyššom počte pozorovaní ešte pomerne veľkú silu. V prípade "zjemnenia" skokov medzi režimami (model 5) a v prípade modelov STAR (8,10) sa už schopnosť detekcie nelinearity výraznejšie obmedzuje. Za skutočného modelu číslo 7 je situácia obdobná ako v prípade čísla 4.

Porovnajme si teraz Keenanov a Tsayov test. U bilineárnych modelov si v silie viedol lepšie test Tsayov, čo môže byť spôsobené spomínanou neagregáciou kvadratických členov. Podobná situácia je aj v prípade TAR modelu číslo 4, v ktorom sa režimy výraznejšie líšia (výrazné skoky zo spodného do vrchného režimu). Zaujímavé je, že opačné výsledky dostávame v prípade TAR modelu 5. Pri všetkých ostatných testoch je detekcia v tomto modeli podstatne slabšia ako v ostatných. Keenanov a Tsayov test ju odhalujú výrazne lepšie. Môže to byť spôsobené tým, že zjemnením výrazného preskakovania zo spodného režimu do vrchného sa v niektorých pozorovaniach závislosť začala podobať na kvadratickú (t.j. napr. hodnoty $0,5X_{t-1}$ za kladného X_{t-1} a $-0,2X_{t-1}$ za záporného X_{t-1} môžu byť blízko hodnotám násobku X_{t-1}^2 , vzhľadom na to, že celá rada je v priemere mierne nad nulou). Podobná situácia je aj v prípade modelov STAR, kde oba testy uspeli lepšie ako ostatné a Keenanov test je o čosi silnejší. Oproti ostatným testom si v prípade bilineárneho modelu 1 viedol Keenanov test horšie ako všetky ostatné, navyše v prípade modelu 4 si oba tieto testy vedú horšie ako ostatné.

BDS testy obstáli veľmi podobne ako McLeodov-Liov test. V prípade bilineárnych modelov si viedli dokonca lepšie, ako aj za postupnosti riadiacej sa modelom 4. V prípade modelov 5, 8, 10 trochu strácajú na sile, ale stále sú výraznejšie lepšie ako McLeodov-Liov. V prípade modelu 7 je zaujímavé, že zvýšenie parametru m prispelo k výraznému vzrastu sily testu.

Nakoniec, bispektrálny test pomocou metódy bootstrap sa oproti ostatným testom, s výnimkou Tsayovho a Keenanovho, osvedčil lepšie v modeloch 5, 8, 10 pri vyššom počte pozorovaní (500), kde ostatné testy výraznejšie zlyhávali. S výnimkou modelu 7 si vo všetkých ostatných testoch viedol pomerne rovnako, ako ostatné testy. V modeli 7 výraznejšie zaostal len pri menšom počte pozorovaní.

Nakoniec sa pozrime na výsledky trochu s nadhľadom. Vidno, že spomedzi testov sa vyčleňujú osobitne Keenanov a Tsayov test, ktoré boli schopné uspieť lepšie v modeloch, kde ostatné zlyhávali. Podstatou týchto testov je testovanie závislosti hodnôt časových radov na kvadratických členoch vytvorených z oneskorených hodnôt. Ak sa teda nelineárna závislosť na minulých hodnotách dá pomerne dobre aproximovať kvadratickými členmi, tieto testy majú silnú šancu uspieť. Naproti tomu testy McLeod-Liov a BDS si viedli lepšie v iných modeloch. V ich prípade sa snažíme detekovať závislosť v reziduách preloženého lineárneho modelu. Napríklad v modeli 5 tak mohlo dôjsť často k pomerne dobrému preloženiu lineárneho modelu a až skúmanie závislosti na kvadratických členoch odhalilo nelineárne závislosti. Možno niekde medzi bol bispektrálny test pomocou bootstrap metódy, ktorý síce používa reziduá na generovanie bootstrap replikácii, no potom

počíta hodnoty spektra a bispektra opäť z hodnôt vytvorenej časovej rady. Ten sa výrazne zlepšil pri zvýšení počtu pozorovaní z 200 na 500, čo by mohlo indikovať ešte ďalšie výrazné zlepšenia pri ďalšom zvyšovaní pozorovaní a aj bootstrap replikácii.

Prejdime teraz k výsledkom pre testovanie oproti alternatíve špecifického modelu nelinearity. V prípade prahovej nelinearity sme mali 2 testy. Test pomerom vierohodností (LRT) a test pomocou usporiadanej autoregresie (AAR). Pri teste pomerom vierohodností sme predpokladali, že prahová hodnota C sa nachádza medzi 10% a 90% kvantilom vzorku časovej rady. V oboch prípadoch sme taktiež predpokladali znalosť rádu p a parameter d . V prípade testu pomocou usporiadanej autoregresie sme na výpočet prvého rekurentného rezidua použili 20, resp. 50 prvých pozorovaní v prípade dĺžky postupnosti 200, resp. 500. Výsledky testov vidno v nasledujúcej tabuľke 3.3

n	model	LRT	AAR
200	4	99,7	99,8
	2	6	5,2
	5	59,3	70,6
500	4	100	100
	2	5,6	5
	5	97,3	98,9

Tabuľka 3.3: Výsledky testov simulácii

Vidíme, že u vyššieho počtu pozorovaní majú oba testy značnú silu. V prípade nižšieho počtu ich sila výraznejšie klesne len v prípade modelu 5, o ktorom sme si už povedali, že sa môže viac ponášať na lineárnu postupnosť ako model 4. O čosi lepšie je však na tom test pomocou usporiadanej autoregresie.

Nakoniec prejdime k testu proti alternatíve modelu STAR. Výsledky vidíme opäť v nasledujúcej tabuľke 3.4, kde "lin. aprox" znamená test pomocou aproximácie prvého rádu, "kub. aprox" znamená test pomocou aproximácie tretieho rádu a "lin+" znamená rozšírený test pomocou aproximácie prvého rádu tak, ako bol vysvetlený v predošlých častiach. Znovu je u väčšieho počtu pozorovaní vo všetkých prípadoch sila testov značne vysoká. Pri teste pomocou lineárnej aproximácie je ale vidieť jemný náznak znižovania sily so zvyšujúcim sa absolútnym členom v druhom režime. Tento trend je výraznejšie vidieť v prípade s menším počtom pozorovaní. Test pomocou kubickej aproximácie 3. rádu nemá

s výraznejším znižovaním sily problém, no u menšieho počtu pozorovaní má o čosi menšiu silu. Najlepšie z toho vychádza test na základe rozšírenej lineárnej aproximácie, ktorému neklesá sila so vzrastajúcim absolútnym členom a je silnejší než test založený na kubickej aproximácii.

n	model	lin. aprox	kub. approx	lin. +
200	8	92,2	84,9	87,5
	9	81,6	76,3	80,2
	10	60,2	76,2	80,2
	2	2,3	4,3	5,5
500	8	100	100	100
	9	99,6	99,4	99,8
	10	94,8	99,4	99,8
	2	3,7	4,0	5,4

Tabulka 3.4: Výsledky testov simulácií

4. Implementácia

Všetky simulácie boli robené v štatistickom softwari a jazyku R. Niektoré z testov boli priamo súčasťou istých knižníc. V knižnici s názvom `TSA` napríklad nájdeme testy Keenanov, Tsayov a test pomerom vierohodností (funkcie v poradí s názvami `Keenan.test()`, `Tsay.test()`, `tlrt.test()`). Ďalej v knižnici `tseries` sa nachádza BDS test (`bds.test()`) a v základnej knižnici `stats` nájdeme funkciu `Box.test()`, pomocou ktorej sa dá špeciálnym zvolením parametrov aplikovať Ljungov-Boxov test a McLeodov-Liov test. Posledné 3 spomínané testy však pred samotným volaním funkcie prevádzajúcej test vyžadujú osobitné preloženie ARMA modelu na dáta. Testy sa potom aplikujú na reziduá z preloženého modelu. Vzhľadom na potrebu vykonania veľkého množstva testov sa musel výber vhodného ARMA modelu automatizovať a to pomocou informačných kritérií. V týchto prípadoch bolo použité kritérium SBC. Ako sme už spomenuli, takýto postup nemusí vždy viesť k lineárnemu modelu, ktorý by sa na dáta najlepšie hodil.

Isté problémy nastali pri implementácii bispektrálneho testu pomocou metódy bootstrap. Samotné spočítanie spektra a bispektra je výpočetne náročnejšie kvôli počtu operácií, ktoré sa musia na výpočet vykonať. Navyše metóda bootstrap si vyžaduje generovanie početných replikácií a opätovné výpočty na nich. Ďalej software R nepatrí k tým rýchlejšim v oblasti početného opakovania iterácií. Všetky tieto dôvody spôsobili, že len s použitím R by sa čas potrebný na vykonanie všetkých výpočtov extrémne natiahol. Našťastie R ponúka možnosť využívať vo svojom prostredí rýchlosť jazyka C++. Skript z funkciami v jazyku C++ sa najskôr preloží do podoby, v ktorej ho potom budeme môcť nahráť do R. To sa vykoná spustením R `CMD SHLIB <nazov_skriptu.c>` v príkazovom riadku pod Linuxom (tam beží bez problémov). Pomocou príkazu `.C()` sa potom dajú volať funkcie naprogramované v C++. To si však ešte vyžaduje nahranie preloženého skriptu pomocou príkazu `dyn.load()`. Po prepísaní časovo najnáročnejších cyklov sa výpočet značne zrýchlil (rádovo približne 50-krát), čo umožnilo dostať výsledky simulácii v rozumnejšom čase.

Test pomocou usporiadanej autoregresie a test proti alternatíve STAR modelu sa museli robiť "ručne". Našťastie pri prvom spomínanom ponúka R v knižnici `strucchange` funkciu `recresid()` na výpočet rekurzívnych rezidií. Algoritmy implementovaných testov boli už popísané v predchádzajúcich častiach.

Záver

Linearita v časových radách môže mať viacero definícií. Tá, ktorú sme si vybrali v práci umožňuje dokázať o lineárnych postupnostiach mnoho tvrdení o asymptotických vlastnostiach rôznych odhadov, a tak vytvoriť priestor na jej testovanie z rozličných hľadísk. Videli sme, že prístupov, ako linearitu v náhodných postupnostiach testovať, je naozaj viacero. Na získanie dostatočného prehľadu bolo teda nutné preštudovať väčší objem článkov a odbornej literatúry na rôznu tematiku. Aj napriek istým výpočtovým problémom sa podarilo dospieť k výsledkom, ktoré umožnili pomerne rozsiahle porovnanie testov na širšej škále rôznych modelov. Na simulovaných dátach sme zistili, že v rôznych situáciach môžu niektoré testy zlyhávať a iné byť zas veľmi silné. Treba mať preto na pamäti, že pri testovaní je vhodné vyskúšať testov viac a byť si vedomý toho, čo vlastne testujú, ich rozdielov a možných slabých stránok. V prípade detekcie nelineárnych závislostí je v práci aj stručný prehľad základných nelineárnych modelov, ku ktorým by sa mohli uberať úvahy v ďalšom modelovaní, a taktiež testy pre tieto konkrétne alternatívy. Práca uvádza ucelený prierez problematikou testovania linearity, ktorá sa dodnes stále vyvíja. Toho dôkazom je napríklad aj čerpanie z článku [3] z roku 2010. Staršie postupy sa stále inovujú a zlepšujú no ich základ zostáva na myšlienkach, ktoré boli v práci popísané.

Seznam použité literatury

- [1] AN, H. ,CHENG, B. *A Kolmogorov-Smirnov type statistic with application to test for nonlinearity in time series*. International Statistical Review Vol. 59(1991), 287-307
- [2] ANDĚL, Jiří. *Statistická analýza časových řad*. SNTL, Praha 1976
- [3] BERG, A. ,PAPARODITIS, E. , POLITIS, D.N. *A bootstrap test for time series linearity*. Journal of Statistical Planning and Inference Vol. 140(2010), 3841-3857
- [4] BRILINGER, D.R. *An introduction to polyspectra*. The Annals of Mathematical Statistics Vol. 36(1965), 1351-1374
- [5] BROCKWELL, P.J. ,DAVIS, R.A. *Time Series: Theory and Methods*. Springer-Verlag, New York 1991
- [6] CIPRA, Tomáš. *Finanční ekonometrie*. Ekopress, Praha 4 2008
- [7] CHAN, K.S., TONG, H. *On likelihood ratio tests for threshold autoregression*. Journal of the Royal Statistical Society B Vol. 52(1990), 469-476
- [8] FULLER, Wayne A. *Introduction to Statistical Time Series*. 2. vydanie John Wiley & Sons, 1996.
- [9] HARVEY, D.I.,LEYBOURNE, S.J. *Testing for time series linearity*. Econometrics Journal Vol. 10(2007), 149-168
- [10] HINICH, M.J. *Testing for gaussianity and linearity of a stationary time series*. Journal of Time Series Analysis Vol. 3(1982), 169-176
- [11] KEENAN, D.M. *A Tukey nonadditivity-type test for time series nonlinearity*. Biometrika Vol. 72(1985),39-44
- [12] LI, Wai Keung. *Diagnostic Checks in Time Series*. Chapman & Hall/CRC 2004.
- [13] LUUKKONEN, R. ,SAIKKONEN, P. ,TERÄSVITRA, T. *Testing linearity against smooth transition autoregressive models*. Biometrika Vol. 75(1988),491-499
- [14] MCLEOD, A.I. ,LI, W.K. *Diagnostic checking ARMA series models using squared-residual autocorrelations*. Journal of Time Series Analysis Vol. 4(1983),269-273

- [15] PARZEN, E. *On consistent estimates of the spectrum of stationary time series*. The Annals of Mathematical Statistics Vol. 28(1957),329-348
- [16] PRÁŠKOVÁ, Zuzana. *Základy náhodných procesů II*. Karolinum, Praha 2004.
- [17] R DEVELOPMENT CORE TEAM: R: A language and environment for statistical computing. www.R-project.org, verzia 2.15.2
- [18] RUDIN, W. *Analýza v reálném a komplexním oboru*. Academia, Praha 1977.
- [19] SUBBA RAO, T. ,GABR, M. M. *A test for linearity of stationary time series*. Journal of Time Series Analysis Vol. 1(1980),145-158
- [20] TSAY, R.S. *Nonlinearity tests for time series*. Biometrika Vol. 73(1986),461-466
- [21] TSAY, R.S. *Testing and modeling threshold autoregressive processes*. Journal of the American Statistical Association Vol. 84(1989),231-240
- [22] VAN NESS, J.W. *Asymptotic normality of bispectral estimates*. The Annals of Mathematical Statistics Vol. 37(1966),1257-1272
- [23] WEI, William W.S. *Time Series Analysis*. Addison Wesley, 1994.

Príloha A - doplňujúce tvrdenia

Veta 18 (Lebesgue). *Nech $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ je priestor s mierou, $D \in \mathcal{F}$ a $f, f_j, j \in \mathbb{N}$ sú merateľné komplexné funkcie na D . Nech*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) = f(x)$$

pre všetky $x \in D$. Ak existuje integrovateľná funkcia g (majoranta) taká, že

$$|f_j(x)| \leq g(x), \quad j \in \mathbb{N}, x \in D.$$

Potom f je integrovateľná a

$$\int_D f \, d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_D f_j \, d\mu.$$

Dôkaz. Vid' [18], veta 1.37.

□

Príloha B - ukážky skriptov

V tejto časti si ukážeme ako presne boli niektoré pasáže praktickej časti naprogramované v R. Úplne celý kód by bol zbytočne príliš dlhý vzhľadom na opakujúce sa sekvencie príkazov, ktoré by sa líšili len zmenou názvu premennej predstavujúcej simulovanú postupnosť. V prípade každého modelu sme dáta pre všetkých 1000 testov naraz ukladali do jednej matice 200×1000 , resp. 500×1000 , kde každý stĺpec reprezentoval jednu realizáciu postupnosti o dĺžke 200, resp. 500. Na generovanie lineárnych postupností môžeme použiť procedúru `arima.sim()` tak, že si necháme vygenerovať dlhú postupnosť o 200 000, resp. 500 000 pozorovaniach a následne ňou po stĺpcoch zaplníme spomínanú maticu. Rovnaký postup môžeme použiť pri generovaní postupností typu TAR pomocou procedúry `tar.sim()` v balíku TSA. Konkrétne pre generovanie postupnosti za model 2 a 4 o 200 pozorovaniach (celý prezentovaný kód bude pre pozorovania dĺžky 200):

```
pom<-arima.sim(n=200000,model=list(order=c(1,0,0),ar=0.9))
ar1<-matrix(pomocna,200,1000)
pom<-tar.sim(n = 200000, Phi1=c(0,-1.1), Phi2=c(0,0.5), thd=0,
d=1, p=1, sigma1=1,sigma2=1)$y
tar1<-matrix(pomocna,200,1000)
```

Samozrejme R nemá simulačné procedúry na každý model, a tak si vždy môžeme vygenerovať postupnosť aj vlastnoručne napísaným kódom. Napríklad v prípade bilineárneho modelu 6 to môže vyzeráť nasledovne.

```
#nagenerujem maticu normálne rozdelených veličín bieleho šumu
e1<-matrix(rnorm(200000),200,1000)
#pripravím maticu s nulami
b11<-matrix(rep(0,200000),200,1000)
#nagenerujem postupnosti naraz po riadkoch
b11[1,]<-e1[1,]
for(i in 2:200){
b11[i,]<-0.4*b11[i-1,]+0.4*b11[i-1,]*e1[i-1,]+e1[i,]}
```

Ďalej pristúpime k samotnému testovaniu. Testy Ljungov-Boxov, Mcleodov-Liov a BDS vyžadujú pred samotnou aplikáciou preloženie vhodného ARMA modelu kvôli tomu, že sa aplikujú na vypočítané reziduá. Tieto si tiež budeme zapisovať do matice 200×1000 , resp. 200×1000 . Navyše si kvôli Ljungovej-Boxovej štatistike

budeme musieť zapísať do matice 1000×2 rády preložených modelov. Cyklus tvorenia matice vypočítaných reziduí pre model 6 vyzerá nasledovne.

```
###Pripravím vynulovanú maticu reziduí a rádov modelov
a1<-matrix(0,200,1000)
mod1<-NULL
for(k in 1:1000){
krit<-NULL
###nasledujúcim cyklom preložím 25 modelov rádu 0 až 4
for(i in 1:5){
for(j in 1:5){
  arma<-try(arima(bl1[,k],order=c(i-1,0,j-1)),silent=TRUE)
  if(class(arma)=="Arima"){
    krit<-rbind(krit,c(i-1,j-1,AIC(arma)))
  }}}
###vyberiem najlepší model
m<-krit[which.min(krit[,3]),]
mod1<-rbind(mod1,m)
a1[,k]<-arima(bl1[,k],order=c(m[1],0,m[2]))$residuals
}
```

Ak máme napočítané reziduá, môžeme sa pustiť do samotného testovania. Na konci budú premenné `ljung1`, `mcleod1`, `bds1` označovať početnosti zamietnutia hypotézy linearity z 1000 testovaní. K nim môžeme pridať aj testy Keenanov, Tsayov a test pomerom vierohodností, ktoré v R vieme aplikovať priamo na hodnoty postupností. Ich početnosti označme ako `keenan1`, `tsay1` a `ltr1`, pričom test pomerom vierohodností aplikujeme v tomto prípade na model 4 (na iné modely, ako lineárne a TAR by to nemalo zmysel.)

```
ljung1<-0
mcleod1<-0
bds1<-matrix(c(0,0),2,1)
keenan1<-0
tsay1<-0
for(i in 1:1000){
  if(Box.test(a1[,i], lag = 10, type = c("Ljung-Box"),
  fitdf = mod1[i,1]+mod1[i,2]))$p.value < 0.05){
    ljung1<-ljung1+1/10}
```

```

    if(Box.test(a1[,i]^2, lag = 10, type = c("Ljung-Box"),
fitddf = 0)$p.value<0.05){
        mcleod1<-mcleod1+1/10}
    bds1<-bds1+1/10*(bds.test(a1[,i],m=3)$p.value[,2]<0.05)
    if(Keenan.test(b11[,i])$p.value < 0.05){
        keenan1<-keenan1+1/10}
    if(Tsay.test(b11[,i])$p.value < 0.05){
        tsay1<-tsay1+1/10}
    if(tlrt(tar1[,i],1,a=0.1,b=0.9)$p.value < 0.05){
        lrt1<-lrt1+1/10}
}
ljung1
mcleod1
bds1
keenan1
tsay1
lrt1

```

Ďalej prejdime k bispektrálnemu testu pomocou metódy bootstrap. Tu sme museli časť skriptu napísať v jazyku C++, konkrétne funkcie na výpočet spektrálnej a bispektrálnej hustoty a funkcie na ich výpočet potrebné. Skript v C++ vyzeral nasledovne.

```

#include <math.h>
double pi=3.141592653589793238462643;
/*funkcia na výpočet autokovariancie v oneskorení k*/
/*d'alšie parametre sú v poradí časový rad, jeho dĺžka a priemer*/
double r(int k, double *x, int n, double xm)
{
    double sum;
    int i,l;
    sum=0.0;
    if(k<0){
        l=-k;}
    else{
        l=k;}
    for(i=0; i< (n- l) ;i++){

```

```

        sum+=(x[i]-xm)*(x[i+ 1]-xm);}
    return sum/n;
}

/*maximum 2 celych čísel*/
int maxi(int a, int b)
{
    if(a>b){
        return a;}
    else{
        return b;}
}

/*autokumulatová funkcia pre neskorenia k,l*/
double cum(int k, int l, double *x, int n, double xm)
{
    int i,kul,kal;
    double sum;
    sum=0.0;
    kul=maxi(maxi(k,l),0);
    kal=maxi(maxi(-k,-l),0);
    for(i=(0+ kal); i< (n - kul); i++){
        sum+=(x[i]- xm)*(x[i+ k]- xm)*(x[i+ l]- xm);}
    return sum/n;
}

/*funkcie spektrálnych okien*/
double w(double x)
{
    double a;
    if (x<0){a=-x;}
    else{a=x;}
    if(a<0.5){
        return (1-6*a*a + 6*pow(a,3.0));}
    else if(a<1.0){
        return (2*pow((1- a),3.0));}
    else{

```



```

        return 0.0;}
    }

double w2(double x,double y)
{
    return (w(x)*w(y)*w(x-y));
}

/*výpočet odhadu spektrálnej hustoty vo frekvencii l s bodom
useknutia M a výsledkom vo val*/
void f(double *l, int *M, double *x, int *n,
double *xm, double *val)
{
    int i;
    double sum,o,p;
    o=*M;
    p=*l;
    sum=r(0, x, *n, *xm);
    for(i = 1; i < o; i++){
        sum += 2 * w(i/o) * r(i, x, *n, *xm) * cos(p * i);}
    *val=sum/(2*pi);
}

/*výpočet odhadu bispektrálnej hustoty vo frekvenciách k,l
s bodom useknutia M a výsledkami vo val1,val2 pre reálnu
a imaginárnu časť*/
void f2(double *k, double *l, int *M, double *x, int *n,
double *xm, double *val1, double *val2)
{
    int i,j;
    double sum1, sum2,p,q,o;
    sum1=0.0;
    sum2=0.0;
    o=*M;
    p=*k;
    q=*l;
    for(i= (1 - o); i< o; i++){

```

```

for(j= (1- o); j < o; j++){
    sum1+=w2(i/o,j/o)*cum(i,j,x,*n,*xm)*cos(p*i+q*j);
    sum2+=- w2(i/o,j/o)*cum(i,j,x,*n,*xm)*sin(p*i+q*j);
}
}
*val1=sum1/(4*pi*pi);
*val2=sum2/(4*pi*pi);
}

```

S takto pripraveným skriptom sa po jeho preložení môžeme pustiť do testovania v R. Početnosť zamietnutých hypotéz bude na konci uložená v premennej boot1.

```

### Zadefinujeme si funkcie z C
f <- function (l,M,x){
.C("f",as.double(l),as.integer(M),as.double(x),
as.integer(length(x)),as.double(mean(x)),val=as.double(0))$val}

f2 <- function (k,l,M,x){
out<-C("f2",as.double(k),as.double(l),as.integer(M), as.double(x),
as.integer(length(x)),as.double(mean(x)),val1=as.double(0),
val2=as.double(0))
return(unlist(c(out[7],out[8])))}

## nahráme skompilovaný program v C
dyn.load("bootstrapc.so")

## uložíme si súradnice bodov, v ktorých budeme bispektrum počítat'
bx<-NULL
by<-NULL
for(i in 1:6){
bx<-c(bx,(1:(6-i+1))*(pi/7)+(i-1)*(2*pi/3)/7)
by<-c(by,rep((2*pi/3)/7*i,6-i+1))}

err<-NULL
boot1<-0

for(i in 1:1000){
mb<-try(arima(tar1[,i],order = c(15, 0, 0), include.mean=FALSE),

```

```

silent=TRUE)
if(class(mb)=="try-error"){
  err<-c(err,i)
}else{
Ta<-NULL
for(l in 1:21){
  bisp<-f2(bx[l],by[l],5,tar1[,i])
  Ta<-c(Ta,2*200*2*pi*sum(bisp^2)/25/0.16885/f(bx[l],25,
  tar1[,i])/f(by[l],25,tar1[,i])/f(bx[l]+by[l],25,tar1[,i]))}
T<-quantile(Ta,0.75,type=1)-quantile(Ta,0.25,type=1)
a<-mb$residuals[16:200]-mean(mb$residuals[16:200])
## nagerujem si reziduá a vytvorím replikácie radu
a2<-matrix(a[ceiling(185*runif(200000))],200,1000)
ar12<-matrix(rep(0,200000),200,1000)
ar12[1,]<-a2[1,]
for(k in 2:15){
  ar12[k,]<-t(mb$coef[1:(k-1)])%*%ar12[(k-1):1,]+a2[k,]}
for(k in 16:200){
  ar12[k,]<-t(mb$coef)%*%ar12[(k-1):(k-15),]+a2[k,]}
Tc<-NULL
for(g in 1:21){
  bisp<-apply(X=ar12,MARGIN=2,FUN=f2,k=bx[g],l=by[g],M=5)
  hust1<-apply(X=ar12,MARGIN=2,FUN=f,l=bx[g],M=25)
  hust2<-apply(X=ar12,MARGIN=2,FUN=f,l=by[g],M=25)
  hust3<-apply(X=ar12,MARGIN=2,FUN=f,l=(bx[g]+by[g]),M=25)
  Tc<-rbind(Tc,2*200*2*pi*(bisp[1,]^2+bisp[2,]^2)/25/0.16885/
  hust1/hust2/hust3)}
Tb<-apply(X=Tc,2,quantile,probs=0.75,type=1)-
apply(X=Tc,2,quantile,probs=0.25,type=1)
if(quantile(Tb,0.95)<T){boot1<-boot1+1/10}
}}

```

Ku kódu poznamenajme, že pri prekladaní AR modelu prišlo pri malom počte testov behom výpočtu k chybe (asi 1% prípadov, ktoré sa zaznamenali do premennej `err`). V takom prípade sme dogenerovali potrebný počet postupností, aby sme mali urobených 1000 testov ako v predošlých prípadoch. Nakoniec prejdime k testom usporiadanej autoregresie (pre `tar1`) a testom voči alternatívne postup-

nosti typu STAR (premenná s názvom `star1` bude označovať simulácie modelu 8). Ako prvý uveďme kus skriptu, ktorý testuje proti alternatíve TAR pomocou usporiadanej autoregresie. Početnosť zamietnutí bude uložená v premennej `aar1`.

```
aar1<-0
for(k in 1:1000){
ord<-order(tar1[1:199,k])
resid<-recresid(tar1[ord+1,k] tar1[(ord),k],start=20)
res2<-lm(resid~tar[(ord[20:199]),k])$residuals
stat<-((sum(resid^2)-sum(res2^2))/2)/(sum(res2^2)/177)
if(stat>qf(0.95,2,177)){aar1<-aar1+1/10}
}
```

Z testov proti alternatíve STAR uvedieme len najjednoduchší prípad lineárnej aproximácie. Ostatné prípady by boli rozdielne len v zaradení regresorov $I(\text{star1}[1:199,k]^3)$, či $I(\text{star1}[1:199,k]^4)$ do modelu `m1`.

```
tstar1<-0
for(k in 1:1000){
m1<-lm(star1[2:200,k] star1[1:199,k]+I(star1[1:199,k]^2))
m2<-lm(star1[2:200,k] star1[1:199,k])
if(anova(m1,m2)[2,6]<0.05){tstar1<-tstar1+1/10}
}
```

Príloha C - obsah priloženého CD

Priložené CD obsahuje okrem súboru s prácou v pdf formáte, aj všetky skripty použité pri jej tvorení.

V súbore `modely.R` sú kódy na nagenovanie matíc všetkých postupností riadacích sa modelmi 1 až 11. Ďalej, skript s názvom `testy.R` obsahuje kód k opakovaným aplikáciám všetkých testov na vygenerované postupnosti, s výnimkou bispektrálneho. Pre testovanie rôznych modelov treba v danom skripte vždy prepísať názov modelu. Kód k bispektálnemu testu je napísaný v súbore `bootstrap.R`. Používa však v sebe odkaz na `bootstrapsfunkce.so`. Tento súbor vznikol skompilovaním kódu v jazyku C++ zapísanom v skripte `bootstrapcfunkce.c`. Všetky obrázky týkajúce sa spektrálnych a časových okien sa vygenerujú pomocou skriptov `okna.R`. Obrázok šesťuholníka so symetriami bispektra vytvoríme spustením kódu v `symetrie_bispektra.R`. Príklad s prekladaním AR(1) modelu nájdeme v `skript_ar1_hustoty.R` spolu s ukázkou odhadu hustoty bieleho šumu. Nakoniec, obrázky bodov bispektra v hlavnej doméne, ktoré používame v bispektrálnom teste sú v skripte `trojuholniky_body_spektra.R`.