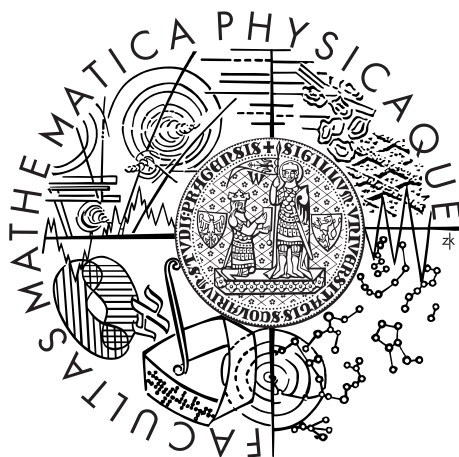


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## DIPLOMOVÁ PRÁCE



Miroslav Štufka

## Některé funkce ARMA procesů

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Jiří Anděl, DrSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická statistika  
a ekonometrie

Praha 2013

Rád bych na tomto místě vyjádřil poděkování především svému vedoucímu diplomové práce za cenné připomínky i ochotu se mi věnovat ve chvílích svého volna, svému strýci Pavlovi a sestře Šárce za pomoc s korekturami. V neposlední řadě bych chtěl poděkovat i svým rodičům, kteří mě vždy vedli ke vzdělání a studium na Matematicko-fyzikální fakultě UK mi umožnili.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 15. 9. 2012

Miroslav Štufka

**Název práce:** Některé funkce ARMA procesů

**Autor:** Miroslav Štufka

**E-mail autora:** mirek@stufka.com

**Katedra:** Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

**Vedoucí diplomové práce:** prof. RNDr. Jiří Anděl, DrSc.

**E-mail vedoucího:** jiri.andel@mff.cuni.cz

**Abstrakt:** Práce poskytuje ucelený přehled změn modelů lineárních časových řad ARMA vlivem některých funkcí. Nejprve je uvedena a v časové doméně dokázána nutná a postačující podmínka, aby se slabě stacionární čistě nedeterministický proces řídil modelem ARMA. Dále jsou postupně rozebrány jednotlivé transformace ARMA procesů. Nejprve součty nekorelovaných i obecných ARMA procesů, potom součiny nezávislých nebo závislých normálních ARMA procesů a nakonec agregace v čase, jmenovitě systematický odběr vzorků a časové agregace. Práce dále obsahuje shrnutí speciálních případů jednotlivých transformací v tabulkách a výsledky demonstruje na konkrétních příkladech. Kromě shrnutí teoretických výsledků práce přináší rozsáhlou číselnou simulaci zpracovanou ve statistickém programu R, kde systematicky rozebírá získané výsledky.

**Klíčová slova:** ARMA procesy, agregace

**Title:** Some functions of ARMA processes

**Author:** Miroslav Štufka

**Author's e-mail address:** mirek@stufka.com

**Department:** Department of Probability and Mathematical Statistics

**Supervisor:** prof. RNDr. Jiří Anděl, DrSc.

**Supervisor's e-mail address:** jiri.andel@mff.cuni.cz

**Abstract:** This study provides a comprehensive overview of changes in the autoregressive-moving-average model (ARMA) when applied to various functions. First, the necessary and sufficient condition for a weakly stationary stochastic process described by ARMA is given. Next, some particular transformations of ARMA processes are presented: first, non-correlated and generic sums of ARMA processes; next, products of independent and dependent Gaussian ARMA processes; and finally, time aggregations, namely, systematic sampling and temporal aggregations. Tables are included to clearly summarize special cases of particular transformations. Some of these cases are then demonstrated through concrete examples. In addition to theoretical results, extensive numerical simulation in statistical software R is also given, which systematically covers the obtained results.

**Keywords:** ARMA processes, aggregation

# Obsah

Úvod	3
<b>1 Zavedení pojmů a základních tvrzení</b>	<b>4</b>
1.1 Náhodné procesy	4
1.2 Hilbertův prostor vytvořený náhodným procesem	4
1.3 Bílý šum	5
1.4 Posloupnosti klouzavých součtů MA	5
1.5 Autoregresní posloupnosti AR	6
1.6 Posloupnosti ARMA	6
1.6.1 Autokovarianční funkce	7
1.7 Woldova dekompozice	8
1.7.1 Speciální případ pro posloupnost klouzavého součtu	9
1.8 Isserlisův rozklad	10
1.9 Nutná a postačující podmínka pro ARMA	10
<b>2 Součty</b>	<b>12</b>
2.1 Věta o součtu dvou nekorelovaných posloupností klouzavých součtů	12
2.2 Věta o součtu dvou nekorelovaných ARMA procesů	13
2.3 Věta o součtu dvou ARMA procesů	14
2.4 Shrnutí speciálních případů	15
2.5 Příklady	16
<b>3 Součiny</b>	<b>18</b>
3.1 Věta o součinu dvou nezávislých ARMA procesů	18
3.2 Odvození autokovarianční funkce součinu dvou ARMA procesů	19
3.3 Věta o součinu dvou normálních ARMA procesů	19
3.4 Shrnutí speciálních případů	20
3.5 Příklad	20
<b>4 Agregace v čase</b>	<b>22</b>
4.1 Věta o modelu agregovaného procesu	22
4.2 Limitní chování	25
4.3 Časové agregace	25
4.3.1 Posloupnosti klouzavých součtů MA	26
4.3.2 Autoregresní posloupnosti AR	27
4.3.3 Smíšené posloupnosti ARMA	28
4.4 Shrnutí speciálních případů	29
4.5 Příklady	30

<b>5</b>	<b>Číselné simulace</b>	<b>33</b>
5.1	Popis simulací . . . . .	33
5.2	Popis tabulek . . . . .	34
5.3	Analýza výsledků . . . . .	34
5.3.1	Součty . . . . .	34
5.3.2	Součiny . . . . .	42
5.3.3	Systematický odběr vzorků . . . . .	49
5.3.4	Časové agregace . . . . .	62
	<b>Závěr</b>	<b>73</b>
	<b>Seznam použité literatury</b>	<b>74</b>

# Úvod

V lidském životě pozorujeme, měříme, zaznamenáváme a generujeme nepřehledné množství informací, které narůstají přímo exponenciálně a veškerá komplexnost dává prostor náhodným procesům se uplatnit jako vhodné modely popisující realitu. Mnoho odvětví lidské činnosti si tak dnes už nelze bez časových řad vůbec představit a tlak na jejich interpretaci a efektivní zpracovávání roste každým dnem. Mezi velmi hojně užívané modely v praxi patří rodina procesů ARMA, zpopularizovaná Boxem a Jenkinsem již v 70. letech minulého století.

Pracujeme-li s modely časových řad, velmi často se setkáváme s nutností pracovat s jejich součty, součiny či časovými agregacemi a dalšími funkcemi. Cílem této diplomové práce je shrnout dostupné výsledky zmíněných transformací ARMA procesů a podat ucelený přehled této problematiky, ke které celkově chybí podrobná ucelená literatura. V neposlední řadě si práce klade za cíl stát se praktickým pomocníkem při hledání vhodného modelu v případě, kdy čtenář bude analyzovat některou z uvedených transformací.

Celá problematika je rozdělena do pěti kapitol. V první jsou definovány základní pojmy, položeny předpoklady, zavedeno značení a zformulována základní tvrzení používaná v důkazech klíčových vět.

Druhá kapitola se již zabývá součty časových řad, které patří mezi hojně se v praxi vyskytující transformace. Nejprve je uvedena věta o součtu dvou nekorelovaných posloupností klouzavých součtů, poté obecnější věta o součtu dvou nekorelovaných ARMA procesů a na závěr je zformulována a dokázána věta o součtu dvou ARMA procesů bez předpokladu nekorelovanosti. Tato kapitola je uzavřena shrnutím výsledků pro konkrétní příklady součtů nekorelovaných posloupností a demonstrováním získaných výsledků na příkladech.

Třetí kapitola pojednává o teorii součinů. Je v ní zformulována věta o součinu dvou nezávislých ARMA procesů a poté ne nutně nezávislých normálních ARMA procesů. Kapitola je rovněž uzavřena shrnutím speciálních případů a teorie je doplněna příkladem.

Čtvrtá kapitola se zabývá možná nejdůležitějšími transformacemi, s kterými se dnes v souvislosti s časovými řadami setkáváme, jimiž bezesporu jsou agregace v čase, jmenovitě systematický odběr vzorků a časové agregace. Nejprve je zformulována a dokázána věta, která pokrývá obě oblasti a poté jsou rozebrány speciální případy časových agregací pro modely MA, AR a ARMA. Kapitola je rovněž doplněna shrnutím výsledků v tabulce a dvěma spočtenými příklady.

Kromě shrnutí teoretických výsledků práce přináší rozsáhlou číselnou simulaci zpracovanou ve statistickém programu R, kde jsou prezentované výsledky systematicky odzkoušeny na simulovaných datech, což dodává prezentovanému obsahu novou perspektivu.

Součástí diplomové práce je přiložené CD, které obsahuje text práce ve formátu PDF, soubor se zdrojovým kódem simulace popsané v páté kapitole a datový soubor s výsledky ve formátu RData.

# 1. Zavedení pojmů a základních tvrzení

## 1.1 Náhodné procesy

**Definice.** Náhodný proces  $\{X_t, t \in T\}$  s konečnými druhými momenty se nazývá slabě stacionární, má-li konstantní střední hodnotu  $\mu_t = \mu$  pro všechna  $t \in T$  a je-li jeho autokovarianční funkce  $R(s, t)$  funkcí pouze rozdílu  $s - t$ .

To znamená, že autokovarianční funkci slabě stacionárního procesu můžeme definovat jako funkci jedné proměnné vztahem  $R(s - t) = R(s, t)$ ,  $s, t \in T$ .

V této práci se budeme zabývat reálnými centrovanými slabě stacionárními náhodnými procesy s diskrétním časem, proto pro nás  $T = \mathbb{Z}$ . V následujícím textu tedy pojmy náhodný proces, náhodná posloupnost či časová řada, nebude-li řečeno jinak, splývají. Rovněž budeme pro jednoduchost náhodné procesy zapisovat namísto  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  pouze  $\{X_t\}$ .

**Definice.** Vzájemnou kovarianční funkci náhodných procesů  $\{X_t\}$  a  $\{Y_t\}$  definujeme jako  $R_{XY}(s, t) = \mathbf{E}(X_s - \mathbf{E}X_s)(Y_t - \mathbf{E}Y_t)$ . Jsou-li náhodné procesy  $\{X_t\}$  a  $\{Y_t\}$  slabě stacionární a jejich vzájemná kovarianční funkce je jen funkcí rozdílu  $s - t$ , tedy  $R_{XY}(s - t) = R_{XY}(s, t)$ , nazýváme je vzájemně slabě stacionární.

**Definice** (Operátor posunutí). Pro libovolnou náhodnou posloupnost  $\{X_t\}$  definujeme operátor posunutí  $B$  předpisem

$$BX_t = X_{t-1}.$$

Pro posun délky  $k$  použijeme  $B$   $k$ -krát.

$$B^k X_t = B^{k-1}(BX_t) = X_{t-k}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Inverzní operátor  $k$   $B$  značíme  $F$ ,

$$F = B^{-1}.$$

## 1.2 Hilbertův prostor vytvořený náhodným procesem

Zavedme nyní Hilbertův prostor tvořený náhodným procesem, jenž je podrobně popsán v [1] na str. 130.

Nechť  $\{X_t, t \in T\}$  je nějaká množina náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a konečnými rozptyly. Jejím lineárním obalem rozumíme množinu  $M\{X_t\}$  náhodných veličin typu

$$\sum_{k=1}^n c_k X_{t_k}, \quad n \in \mathbb{N}, t_k \in T (k = 1, 2, \dots, n), c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$



Vezmeme-li v úvahu všechny posloupnosti prvků z tohoto lineárního obalu a přidáme k nim limity všech fundamentálních posloupností podle středu, vznikne uzávěr lineárního obalu  $H\{X_t\}$ . Jelikož je tento prostor úplný, pak při definici skalárního součinu  $\langle X, Y \rangle = EXY$ , pro  $X, Y \in H\{X_t\}$ , se jedná o Hilbertův prostor.

Dále označme  $H_t(X)$  podprostor Hilbertova prostoru  $H\{X_t\}$  tvořený uzávěrem lineárního obalu  $\{X_s, s \leq t\}$ .  $D_t(X)$  nechť značí ortogonální doplněk  $H_{t-1}(X)$  v  $H_t(X)$ .  $H_{t-1}(X)$  i  $D_t(X)$  jsou uzavřené podprostory  $H_t(X)$ .

Je-li  $S$  uzavřený podprostor  $H\{X_t\}$  a  $x \in H\{X_t\}$ , potom symbolem  $E^*(x|S)$  značíme projekci  $x$  na  $S$ .

### 1.3 Bílý šum

**Definice.** Řekneme, že náhodná posloupnost  $\{\varepsilon_t\}$  je bílý šum (WN), jsou-li jednotlivé členy mezi sebou nekorelované, mají nulovou střední hodnotu a kladný rozptyl  $\sigma^2 > 0$ . Autokovarianční funkce bílého šumu je rovna

$$R_\varepsilon(k) = \begin{cases} \sigma^2, & \text{když } k = 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \quad (1.1)$$

### 1.4 Posloupnosti klouzavých součtů MA

**Definice.** Řekneme, že náhodný proces  $\{X_t\}$  je posloupností klouzavých součtů řádu  $q$  (píšeme  $MA(q)$ ), jestliže

$$X_t = \varepsilon_t + c_1\varepsilon_{t-1} + \dots + c_q\varepsilon_{t-q}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

kde  $c_i, i = 1, \dots, q$  jsou reálné konstanty,  $c_q \neq 0$  a posloupnost  $\{\varepsilon_t\}$  je bílý šum s rozptylem  $\sigma^2 > 0$ .

Uvažujeme-li polynom

$$c(z) = 1 + c_1z + c_2z^2 + \dots + c_qz^q, \quad c_q \neq 0,$$

pak lze model  $MA(q)$  zapsat ve tvaru

$$X_t = c(B)\varepsilon_t. \quad (1.2)$$

Střední hodnota posloupnosti klouzavých součtů je rovna

$$EX_t = E\varepsilon_t + c_1E\varepsilon_{t-1} + \dots + c_qE\varepsilon_{t-q} = 0.$$

Autokovarianční funkce je rovna

$$R_X(k) = \begin{cases} (1 + c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_q^2) \sigma^2, & \text{když } k = 0, \\ (c_k + c_{k+1}c_1 + c_{k+2}c_2 + \dots + c_qc_{q-k}) \sigma^2, & \text{když } k = 1, 2, \dots, q, \\ 0, & \text{když } k > q. \end{cases} \quad (1.3)$$

## 1.5 Autoregresní posloupnosti AR

**Definice.** Náhodný proces  $\{X_t\}$  se nazývá autoregresní posloupností řádu  $p$  (píšeme  $AR(p)$ ), jestliže

$$X_t + a_1X_{t-1} + \cdots + a_pX_{t-p} = \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

kde  $a_i, i = 1, \dots, p$  jsou reálné konstanty,  $a_p \neq 0$  a posloupnost  $\{\varepsilon_t\}$  je bílý šum s rozptylem  $\sigma^2 > 0$ .

Uvažujme-li polynom

$$a(z) = 1 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_pz^p, \quad a_p \neq 0,$$

lze model  $AR(p)$  zapsat ve tvaru

$$a(B)X_t = \varepsilon_t. \tag{1.4}$$

Jelikož chceme, aby se jednalo o stacionární čistě náhodný proces, předpokládáme navíc, že kořeny polynomu  $a(z)$  leží vně jednotkového kruhu.

Střední hodnota je nulová  $EX_t = 0$ . Autokovarianční funkci lze dopočítat pomocí Yuleových-Walkerových rovnic, jak je uvedeno např. v [13] na str. 64.

## 1.6 Posloupnosti ARMA

**Definice.** Náhodný proces  $\{X_t\}$  se řídí modelem  $ARMA(p, q)$ , jestliže

$$X_t + a_1X_{t-1} + \cdots + a_pX_{t-p} = \varepsilon_t + c_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + c_q\varepsilon_{t-q}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

kde  $a_i, i = 1, \dots, p$ ,  $c_i, i = 1, \dots, q$ , jsou reálné konstanty,  $a_p \neq 0, c_q \neq 0$  a posloupnost  $\{\varepsilon_t\}$  je bílý šum s rozptylem  $\sigma^2 > 0$ .

Uvažujme-li polynomy

$$a(z) = 1 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_pz^p, \quad a_p \neq 0,$$

a

$$c(z) = 1 + c_1z + c_2z^2 + \cdots + c_qz^q, \quad c_q \neq 0,$$

pak lze model  $ARMA(p, q)$  zapsat ve tvaru

$$a(B)X_t = c(B)\varepsilon_t. \tag{1.5}$$

Jelikož chceme, aby se jednalo o stacionární čistě náhodný proces, předpokládáme navíc, že kořeny polynomu  $a(z)$  leží vně jednotkového kruhu.

Střední hodnota je nulová  $EX_t = 0$ .

### 1.6.1 Autokovarianční funkce

Podobným způsobem lze získat i autokovarianční funkci autoregresních posloupností. Tuto část výpočtu uvádíme, protože ji později využijeme v důkazu věty.

Vynásobíme-li obě strany (1.5) členem  $X_{t-k}$ , využijeme-li vyjádření  $X_t$  z Woldovy věty (1), která bude uvedena posléze, a přejdeme-li ke střední hodnotě, postupně dostaneme

$$\begin{aligned} a(B)X_t &= c(B)\varepsilon_t, \\ a(B)X_tX_{t-k} &= c(B)\varepsilon_tX_{t-k}, \\ a(B)X_tX_{t-k} &= c(B)\varepsilon_t \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-k-j}, \\ \mathbb{E}a(B)X_tX_{t-k} &= \mathbb{E}c(B)\varepsilon_t \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-k-j}, \\ a(B)\mathbb{E}X_tX_{t-k} &= \mathbb{E}(\varepsilon_t + c_1\varepsilon_{t-1} + c_2\varepsilon_{t-2} + \cdots + c_q\varepsilon_{t-q}) \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-k-j}, \\ a(B)R_X(k) &= \mathbb{E}(\varepsilon_t + c_1\varepsilon_{t-1} + c_2\varepsilon_{t-2} + \cdots + c_q\varepsilon_{t-q}) \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-k-j}. \end{aligned}$$

Z toho plyne, že

$$a(B)R_X(k) = 0, \quad k > q, \quad (1.6)$$

$$a(B)R_X(q) = \sigma^2 c_q \neq 0, \quad (1.7)$$

$$a(B)R_X(k) = \sigma^2 \sum_{k \leq j < q} c_j \psi_{j-k}, \quad 0 \leq k < q, \quad (1.8)$$

kde  $\sigma^2 > 0$  je rozptyl  $\varepsilon_t$ .

Výraz  $a(B)R_X(k)$  lze rozepsat jako

$$a(B)R_X(k) = R_X(k) + a_1 R_X(k-1) + a_2 R_X(k-2) + \cdots + a_p R_X(k-p).$$

Řešením výše uvedených rovnic získáme obecné řešení rovnice (1.6), které je stejné jako pro autoregresní posloupnost

$$R_X(k) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{r_i-1} \beta_{ij} k^j \alpha_i^k, \quad k > q-p, \quad (1.9)$$

kde  $\alpha_i^{-1}$ ,  $i = (1, \dots, m)$  jsou různé kořeny (1.6) s násobnostmi  $r_i$ .

Dopočtení konstant  $\beta_{ij}$  a prvních hodnot autokorelační funkce  $R_X(k)$  je popsáno např. v [6] na straně 91.

My přijmeme pro další práci zjednodušující předpoklad, že jsou všechny kořeny rovnice (1.6) různé. Autokovarianční funkce procesu  $\{X_t\}$  se poté pro  $k > q-p$  rovná

$$R_X(k) = \sum_{i=1}^p \beta_i \alpha_i^k, \quad k > q-p. \quad (1.10)$$

## 1.7 Woldova dekompozice

**Věta 1** (Woldova). *Libovolný slabě stacionární proces  $\{X_t\}$  s nulovou střední hodnotou může být zapsán ve tvaru*

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + \kappa_t, \quad (1.11)$$

kde  $\psi_0 = 1$  a  $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 \leq \infty$ ,  $\varepsilon_t$  značí bílý šum s rozptylem  $\sigma^2$ . V terminologii Hilbertových prostorů lze zapsat jako

$$\varepsilon_t \equiv X_t - E^*(X_t | H_{t-1}(X)). \quad (1.12)$$

Hodnota  $\kappa_t$  není korelována s  $\varepsilon_{t-j}$  pro všechna  $j$ , ačkoli lze  $\kappa_t$  predikovat libovolně přesně z lineární funkce předchozích hodnot procesu  $\{X_t\}$ .

$$\kappa_t = E^*(\kappa_t | H_{t-1}(X)).$$

*Důkaz.* Lze dohledat v [3]. □

$\kappa_t$  nazýváme lineárně deterministickou složkou  $X_t$ , zatímco  $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$  nazýváme lineárně nedeterministickou složkou. Je-li  $\kappa_t \equiv 0$ , celý proces  $\{X_t\}$  nazýváme čistě náhodným procesem.

Nebude-li řečeno jinak, v následujícím textu budeme pracovat vždy s čistě náhodnými procesy. Tedy procesy vyjádřitelnými ve tvaru  $MA(\infty)$

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}. \quad (1.13)$$

V takovém případě můžeme bílý šum  $\{\varepsilon_t\}$  vyjádřit jako

$$\varepsilon_t = E^*(X_t | D_t(X)). \quad (1.14)$$

Důležitým poznatkem je, že Woldova dekompozice poskytuje přesné vyjádření pro  $E^*(X_{t+s} | H_t(X))$

$$X_{t+s} = \sum_{j=0}^{s-1} \psi_j \varepsilon_{t+s-j} + \sum_{j=s}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t+s-j}.$$

Tedy

$$\sum_{j=0}^{s-1} \psi_j \varepsilon_{t+s-j}$$

je kolmé k  $H_t(X)$ , protože  $\varepsilon_{t+s-j}$  pro všechna  $j$  je v sumě prvkem  $D_{t+s-j}(X)$ , které je kolmé k  $H_{t+s-j-1}(X) \supset H_t(X)$ .

Suma

$$\sum_{j=s}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t+s-j}$$

je naopak prvkem  $H_t(X)$ , protože  $\varepsilon_{t+s-j}$  pro všechna  $j$  je v sumě prvkem  $H_{t+s-j}(X) \subset H_t(X)$ . Tím získáváme vztah

$$E^*(X_{t+s}|H_t(X)) = \sum_{j=s}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t+s-j}. \quad (1.15)$$

### 1.7.1 Speciální případ pro posloupnost klouzavého součtu

Je-li autokovarianční funkce náhodného procesu  $\{X_t\}$  identicky nulová od nějakého daného  $q$ , tedy  $s > q$  a

$$R(s) = \mathbb{E}X_{t+s}X_t = 0, \quad (1.16)$$

ukážeme, že takový proces musí jít vyjádřit jako posloupnost klouzavého součtu  $MA(q)$ . Z výše uvedeného je patrné, že  $X_{t+s}$  je kolmé k  $H_t(X)$  pro  $s > q$ , tedy

$$E^*(X_{t+s}|H_t(X)) = 0.$$

Tím získáváme ze vztahu (1.15) pro všechna  $s > q$  rovnost

$$\|E^*(X_{t+s}|H_t(X))\|^2 = \sigma^2 \sum_{j=s}^{\infty} |\psi_j|^2 = 0,$$

z čehož plyne, že  $\psi_j = 0$  pro všechna  $j \geq s > q$ . Pro takovou posloupnost poté můžeme Woldovu dekompozici zapsat jako

$$X_t = \sum_{j=0}^q \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \psi_0 = 1, \quad (1.17)$$

což je tvar  $MA(q)$  procesu.

Vezměme nyní  $MA(q)$  proces

$$X_t = \sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}, \quad \theta_0 = 1,$$

kde  $\{\varepsilon_t\}$  je posloupnost nekorelovaných náhodných veličin se střední hodnotou 0 a konstantním rozptylem  $\sigma^2$ . Autokovarianční funkce procesu řídicího se modelem klouzavých součtů  $MA(q)$ , jak již víme z (1.3), je pro  $s > q$  nulová, to znamená, že z (1.17) plyne, že její Woldova dekompozice je

$$X_t = \sum_{j=0}^q \psi_j a_{t-j}, \quad (1.18)$$

kde

$$a_t = E^*(X_t|D_t(X)). \quad (1.19)$$

Vyjádření procesu  $MA(q)$  pomocí (1.18) a (1.19) není tak jednoduché, jak by se mohlo na první pohled zdát, protože  $MA(q)$  procesy mají více různých vyjádření. Nezaměňujme tedy  $\psi_j$  za  $\theta_j$  a  $a_t$  za  $\varepsilon_t$ .

## 1.8 Isserlisův rozklad

Isserlisova věta je formule, která umožňuje spočítat momenty vyšších řádů u více-rozměrného normálního rozdělení.

**Tvrzení 1** (Isserlisovo). *Nechť  $(X_1, X_2, \dots, X_{2n})$  je náhodný vektor z mnohorozměrného normálního rozdělení s nulovou střední hodnotou, potom*

$$E(X_1, X_2, \dots, X_{2n}) = \sum \prod E(X_i, X_j),$$

kdy symbolem  $\sum \prod$  značíme sumaci přes všechny různé způsoby rozdělení množiny  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  do dvojic.

*Důkaz.* Lze nalézt v originální práci Isserlis [12]. □

**Příklad 1.1.** *Pro ilustraci uveďme příklad rozkladu u momentu čtvrtého řádu*

$$E(X_1 X_2 X_3 X_4) = E(X_1 X_2) E(X_3 X_4) + E(X_1 X_3) E(X_2 X_4) + E(X_1 X_4) E(X_2 X_3).$$

## 1.9 Nutná a postačující podmínka pro ARMA

Následující věta je hlavním přínosem článku [8]. Pomocí tohoto tvrzení, které uvádí nutnou a postačující podmínku, aby se slabě stacionární čistě náhodný proces řídil modelem ARMA, je možné dokázat některé další výsledky, které v této práci rozebíráme.

Nechť se náhodný proces  $\{X_t\}$  řídí modelem ARMA( $p, q$ ) včetně dodatečného předpokladu o kořenech polynomu  $a(z)$ . V takovém případě se jedná o stacionární čistě náhodný proces a za pomoci věty 1 víme, že existuje bílý šum  $\{\varepsilon_t\}$  a posloupnost  $(\psi_j)_{j=0}^\infty$ ,  $\psi_0 = 1$ , taková, že  $\sum_{j=0}^\infty \psi_j^2 < \infty$ , tudíž můžeme proces  $\{X_t\}$  zapsat jako

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}.$$

**Věta 2.** *Centrováný slabě stacionární čistě náhodný proces  $\{X_t\}$  se řídí modelem ARMA( $p, q$ ) právě tehdy, když existuje polynom  $A(z)$  stupně  $p$ , s kořeny vně jednotkového kruhu tak, že*

$$A(B)R_X(k) = 0, \quad k > q \tag{1.20}$$

$$A(B)R_X(q) \neq 0. \tag{1.21}$$

*Důkaz.* 1. První implikace je zřejmá ze vztahů (1.6) a (1.7).

2. Zbývá dokázat, že z existence polynomu  $A(z)$  stupně  $p$  s kořeny vně jednotkového kruhu a platnosti vztahů (1.20) a (1.21) je jasné, že proces  $\{X_t\}$  se řídí modelem ARMA( $p, q$ ).

Vztahy (1.20) a (1.21) můžeme upravit na

$$A(F)a(B)R_X(k) = R_{A(B)X}(k) = 0, \quad k > q,$$

$$A(F)a(B)R_X(q) = R_{A(B)X}(q) \neq 0.$$

Označíme-li nyní proces  $\{Y_t\}$  předpisem  $Y_t = A(B)X_t$ , platí

$$R_Y(k) = 0, \quad k > q \quad \text{a} \quad R_Y(q) \neq 0 \quad (1.22)$$

a my musíme dokázat, že se řídí modelem MA( $q$ ).

Protože proces  $\{Y_t\}$  je rovněž centrováný, slabě stacionární a čistě náhodný, můžeme jej, ve smyslu věty 1, rozepsat jako

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1.23)$$

kde  $\{\varepsilon_t\}$  je bílý šum s rozptylem  $\sigma^2$

Pro posloupnost  $(\psi_j)_{j=0}^{\infty}$ ,  $\psi_0 = 1$  platí  $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$  a

$$H_t(Y) = H_t(\varepsilon), \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (1.24)$$

Spočteme-li nyní  $E(Y_t \varepsilon_{t-k})$  za pomoci vyjádření (1.23), dostaneme

$$E(Y_t \varepsilon_{t-k}) = \psi_k \sigma^2, \quad k > 0. \quad (1.25)$$

Vezmeme-li nyní v úvahu (1.22), víme, že proces  $\{Y_t\}$  je ortogonální k  $H_{t-k}(Y)$ ,  $k > q$ . Tedy vzhledem k (1.24) je  $\{Y_t\}$  ortogonální k  $H_{t-k}(\varepsilon)$ ,  $k > q$ , z čehož vyplývá

$$E(Y_t \varepsilon_{t-k}) = 0, \quad k > q. \quad (1.26)$$

Porovnáním (1.25) a (1.26) dostáváme, že  $\psi_k = 0$ ,  $k > q$ .

Obrácením předešlého argumentu už je lehké ukázat, že pokud  $\psi_q = 0$ , pak  $R_Y(q) = 0$ , což je v rozporu s (1.22). Z toho plyne  $\psi_q \neq 0$ . V důsledku (1.24) kořeny polynomu

$$c(z) = \sum_{j=0}^q \psi_j z^j$$

neleží uvnitř jednotkového kruhu. Z toho oprávněně usuzujeme, že  $\{Y_t\}$  se řídí modelem MA( $q$ ), tedy  $\{X_t\}$  se řídí modelem ARMA( $p, q$ )

$$a(B)X_t = c(B)\varepsilon_t.$$

□

Polynom  $A(z)$  je tedy autoregresním polynomem  $a(z)$ .

## 2. Součty

První třídou funkcí, kterou se v této práci zabýváme jsou součty časových řad. Nejprve uvedeme větu o součtu dvou nekorelovaných posloupností klouzavých součtů, poté uvedeme obecnější větu o součtu dvou nekorelovaných ARMA procesů a na závěr zformulujeme a dokážeme větu o součtu dvou ARMA procesů bez předpokladu nekorelovanosti. Tato kapitola bude uzavřena shrnutím výsledků pro konkrétní příklady a uvedením několika příkladů.

### 2.1 Věta o součtu dvou nekorelovaných posloupností klouzavých součtů

Jedná se o větu, která tvrdí, že součet dvou na sobě nezávislých posloupností klouzavých součtů  $MA(q_1)$  a  $MA(q_2)$  je opět posloupností klouzavých součtů řádu  $q \leq \max(q_1, q_2)$ . Tato věta má značný praktický význam (např. se využívá v důkazech složitějších vět), a přesto její důkaz nebývá ve zdrojích (např. [4], str. 121) rozpracován. To by mohlo navodit dojem, že je důkaz triviální, což ovšem není pravda.

Zde uvedeme znění věty s důkazem za pomoci Hilbertových prostorů, jak je uvedeno v [2].

**Věta 3.** *Nechť  $\{X_{1t}\}$  a  $\{X_{2t}\}$  jsou nekorelované náhodné procesy řídicí se modely  $MA(q_1)$  a  $MA(q_2)$ , definované předpisem*

$$X_{it} = \sum_{j=0}^{q_i} \theta_{ij} \varepsilon_{it-j}, \quad \theta_{i0} = 1, \quad i = 1, 2, \quad (2.1)$$

kde pro  $i = 1, 2$  a všechna  $s$  a  $t$  (různá) platí

$$\begin{aligned} \text{var}(\varepsilon_{it}) &= \sigma_i^2, \\ \text{cov}(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{is}) &= 0, \\ \text{E}(\varepsilon_{it}) &= 0. \end{aligned}$$

Potom  $\{Z_t\}$ , definované jako  $Z_t = X_{1t} + X_{2t}$ , se řídí modelem  $MA(q^*)$ , kde

$$q^* \leq q = \max(q_1, q_2).$$

Jsou-li navíc  $\{X_{1t}\}$  a  $\{X_{2t}\}$  nezávislé, normálně rozdělené procesy, potom  $\{Z_t\}$  je také normální, a náhodné veličiny, jejichž je součtem v rámci interpretace  $MA(q^*)$  (dle věty 1), jsou rovněž normálně rozdělené.

**Poznámka.** Uvedenou větu můžeme symbolicky zapsat jako

$$MA(q_1) + MA(q_2) = MA(q^*),$$

kde

$$q^* \leq \max(q_1, q_2).$$



**Poznámka.** Vzhledem k tomu, že součtem dvou MA procesů je opět MA proces, můžeme znění věty jednoduše zobecnit na součet libovolného množství MA procesů ( $N$ ). Tuto skutečnost můžeme symbolicky zapsat jako

$$\sum_{i=1}^N MA(q_i) = MA(q^*),$$

kde

$$q^* \leq \max(q_i, i = 1, \dots, N).$$

*Důkaz.* Nejprve ukážeme, že  $\{Z_t\}$  je slabě stacionární s autokovarianční funkcí  $R(t)$  tak, že

$$R(t) = 0, \quad t > q = \max(q_1, q_2).$$

Zřejmě  $EZ_t = 0$  pro všechna  $t \in \mathbb{Z}$ . Spočtěme nyní autokovarianční funkci. Pro  $t \geq 0$  máme

$$\begin{aligned} \text{cov}(Z_{s+t}, Z_s) &= EZ_{s+t}, Z_s = E(X_{1s+t} + X_{2s+t})(X_{1s} + X_{2s}) \\ &= EX_{1s+t}X_{1s} + EX_{1s+t}X_{2s} + EX_{2s+t}X_{1s} + EX_{2s+t}X_{2s} \\ &= \sigma_1^2 \sum_{j=0}^{q_1} \sum_{k=0}^{q_1} \theta_{1j}\theta_{1k}\delta(t-j+k) + \sigma_2^2 \sum_{j=0}^{q_2} \sum_{k=0}^{q_2} \theta_{2j}\theta_{2k}\delta(t-j+k) \end{aligned}$$

a pro  $t \leq 0$  by byla situace analogická.

Vidíme, že  $\text{cov}(Z_{s+t}, Z_s)$  nezávisí na  $s$ , ale jen na  $t$ . Posloupnost  $\{Z_t\}$  je tedy slabě stacionární. Ze získaného tvaru je rovněž patrné, že je autokovarianční funkce skutečně nulová pro  $t > q = \max(q_1, q_2)$ . Z (1.17) tedy okamžitě plyne, že  $\{Z_t\}$  má dle Woldovy dekompozice  $MA(q)$  vyjádření

$$Z_t = \sum_{j=0}^q \psi_j a_{t-j}, \quad \psi_0 = 1,$$

kde

$$a_t = E^*(Z_t | D(t)).$$

Na závěr připomeňme, že nevyklučujeme možnost, že  $\psi_j = 0$  pro  $1 \leq j \leq q$ , tudíž má  $\{Z_t\}$  reprezentaci  $MA(q^*)$  pro nějaké  $q^*$ , kde  $0 \leq q^* \leq q$  a kde  $c_{q^*} \neq 0$ . Taková situace nastává třeba v příkladu 2.2 na konci kapitoly.  $\square$

## 2.2 Věta o součtu dvou nekorelovaných ARMA procesů

**Věta 4.** *Nechť  $\{X_t\}$  a  $\{Y_t\}$  jsou nekorelované náhodné procesy řídicí se modely  $ARMA(p, m)$  a  $ARMA(q, n)$ , definované za pomoci operátoru posunutí  $B$  jako*

$$a(B)X_t = c(B)\varepsilon_t \tag{2.2}$$

a

$$b(B)Y_t = d(B)\eta_t, \tag{2.3}$$

kde  $a, b, c, d$  jsou polynomy stupňů  $p, q, m, n$  a  $\{\varepsilon_t\}, \{\eta_t\}$  jsou 2 nekorelované posloupnosti bílého šumu.

Potom  $\{Z_t\}$ , definovaný jako  $Z_t = X_t + Y_t$ , se řídí modelem ARMA( $x, y$ ), kde

$$x \leq p + q \quad a \quad y \leq \max(p + n, q + m).$$

**Poznámka.** Uvedenou větu můžeme opět symbolicky zapsat jako

$$ARMA(p, m) + ARMA(q, n) = ARMA(x, y),$$

kde

$$x \leq p + q \quad a \quad y \leq \max(p + n, q + m).$$

**Poznámka.** Znění věty lze opět jednoduše zobecnit na součet  $N$  procesů řídicích se modely ARMA. Symbolicky tuto skutečnost zapíšeme jako

$$\sum_{i=1}^N ARMA(p_i, m_i) = ARMA(x, y),$$

kde

$$x \leq \sum_{i=1}^N p_i \quad a \quad y \leq \max(x - p_i + m_i, i = 1, \dots, N).$$

*Důkaz.* Vynásobíme-li vztah  $Z_t = X_t + Y_t$  polynomem  $a(B)b(B)$ , dostaneme

$$a(B)b(B)Z_t = b(B)a(B)X_t + a(B)b(B)Y_t.$$

Dosazením vztahů (2.2) a (2.3) do získaného dostáváme

$$a(B)b(B)Z_t = b(B)c(B)\varepsilon_t + a(B)d(B)\eta_t.$$

Výraz na pravé straně je součtem dvou posloupností MA, jedné řádu  $q + m$  a druhé řádu  $p + n$ . Z věty 3 plyne, že na pravé straně je posloupnost klouzavých součtů typu MA( $y$ ), kde

$$y \leq \max(p + n, q + m).$$

Vzhledem k tomu, že polynom  $a(B)b(B)$  na pravé straně není vyššího stupně než  $p + q$ , je věta dokázána.  $\square$

## 2.3 Věta o součtu dvou ARMA procesů

Předešlé věty pracovaly s předpokladem vzájemné nekorelovanosti obou sčítaných posloupností. Následující věta, která vychází z článku [8], uvádí nutnou a postačující podmínku pro součet dvou ARMA procesů, aby se stále řídil modelem ARMA včetně hodnot jeho parametrů. Jedná se tedy o přirozené rozšíření dříve uvedených tvrzení.

**Věta 5.** *Nechť  $\{X_t\}$  a  $\{Y_t\}$  se řídí modely  $ARMA(p_1, q_1)$  a  $ARMA(p_2, q_2)$ . Nutná a postačující podmínka, aby se proces  $\{Z_t\}$ , definovaný vztahem  $Z_t = X_t + Y_t$ , řídil modelem  $ARMA$  je, že musí existovat polynom  $a(z)$  s kořeny vně jednotkového kruhu takový, aby platilo*

$$a(B)(R_{XY}(k) + R_{YX}(k)) = 0, \quad k > q_3, \quad (2.4)$$

pro nějaké  $q_3$ .

Proces  $\{Z_t\}$  se poté řídí modelem  $ARMA(p, q)$ , kdy  $p \leq \sum_{j=1}^3 p_j$ ,  $q \leq p + \max(q_i - p_i, i = 1, 2, 3)$  a  $p_3$  je stupeň polynomu  $a(z)$ .

*Důkaz.* Nejdříve si vyjádříme autokovarianční funkci procesu  $\{Z_t\}$  jako

$$\begin{aligned} R_Z(k) &= R_{X+Y}(k) = \mathbf{E}(Z_t - \mathbf{E}Z_t)(Z_{t+k} - \mathbf{E}Z_{t+k}) = \mathbf{E}Z_t Z_{t+k} \\ &= \mathbf{E}(X_t + Y_t)(X_{t+k} + Y_{t+k}) \\ &= \mathbf{E}X_t X_{t+k} + \mathbf{E}X_t Y_{t+k} + \mathbf{E}Y_t X_{t+k} + \mathbf{E}Y_t Y_{t+k} \\ &= R_X(k) + R_{XY}(k) + R_{YX}(k) + R_Y(k). \end{aligned}$$

Nechť  $a_X(z)$  a  $a_Y(z)$  jsou autoregresní polynomy procesů  $\{X_t\}$  a  $\{Y_t\}$ . Vynásobíme-li nyní získanou rovnost polynomem  $a_X(B)a_Y(B)a(B)$ , dostaneme

$$\begin{aligned} a_X(B)a_Y(B)a(B)R_{X+Y}(k) &= a_Y(B)a(B)a_X(B)R_X(k) + \\ &+ a_X(B)a(B)a_Y(B)R_Y(k) + \\ &+ a_X(B)a_Y(B)a(B)(R_{XY}(k) + R_{YX}(k)), \end{aligned}$$

a protože z (1.6) plyne, že

$$a_X(B)R_X(k) = 0, \quad k > q_1$$

a

$$a_Y(B)R_Y(k) = 0, \quad k > q_2,$$

pak společně s předpokladem (2.4) platí

$$a_X(B)a_Y(B)a(B)R_{X+Y}(k) = 0, \quad k > \sum_{j=1}^3 p_j + \max(q_i - p_i, i = 1, 2, 3).$$

Nakonec už stačí jen použít větu 2 (Nutná a postačující podmínka pro  $ARMA$ ). Za polynom  $A(z)$  z věty 2 volíme součin  $a_X(z)a_Y(z)a(z)$ .  $\square$

**Poznámka.** *Pokud by procesy  $\{X_t\}$  a  $\{Y_t\}$  byly nekorelované, pak by  $p_3 = q_3 = 0$  a jednalo by se o větu 4 z předchozí kapitoly.*

## 2.4 Shrnutí speciálních případů

Tabulka 2.1 uvádí přehlednou sumarizaci jednotlivých speciálních případů, ke kterým může při sčítání nekorelovaných lineárních modelů časových řad dojít. Znění vět, na základě kterých je tabulka zkonstruována, je ve tvarech nerovností. Proto při sčítání jednotlivých modelů může dojít i k jednodušším případům než je uvedeno v tabulce, kde je uveden maximální model, který s největší pravděpodobností nastane. Jednodušší modely nastávají ve vyjímecných situacích. Některé z nich jsou ukázány na příkladech.

Nekorelované posloupnosti	Očekávaný (maximální) součet
MA( $q$ ) + WN	MA( $q$ )
MA( $q_1$ ) + MA( $q_2$ )	MA(max( $q_1, q_2$ ))
MA( $q$ ) + AR( $p$ )	ARMA( $p, p + q$ )
MA( $q_1$ ) + ARMA( $p_2, q_2$ )	ARMA( $p_2, \max(q_2, p_2 + q_1)$ )
AR( $p$ ) + WN	ARMA( $p, p$ )
AR( $p_1$ ) + AR( $p_2$ )	ARMA( $p_1 + p_2, \max(p_1, p_2)$ )
AR( $p_1$ ) + ARMA( $p_2, q_2$ )	ARMA( $p_1 + p_2, \max(p_1 + q_2, p_2)$ )
ARMA( $p, q$ ) + WN	ARMA( $p, \max(p, q)$ )
ARMA( $p_1, q_1$ ) + ARMA( $p_2, q_2$ )	ARMA( $p_1 + p_2, \max(p_1 + q_2, q_1 + p_2)$ )

Tabulka 2.1: Shrnutí speciálních případů pro součty nekorelovaných posloupností jednotlivých typů lineárních modelů.

## 2.5 Příklady

Věta 3 hovoří pouze o součtu nekorelovaných posloupností klouzavých součtů. Příklad 2.1 ukazuje situaci, která může nastat, není-li předpoklad dodržen.

**Příklad 2.1.** *Nechť  $\{X_t\}$  a  $\{Y_t\}$  se oba řídí modely MA(1). Bílý šum je ale u obou posloupností stejný. U posloupnosti  $\{Y_t\}$  je akorát časově posunut. To znamená, že jsou posloupnosti vzájemně korelované.*

*Nechť*

$$X_t = \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1}$$

*a*

$$Y_t = \varepsilon_{t-3} + d\varepsilon_{t-4},$$

*potom jejich součet  $\{Z_t\}$ , definovaný předpisem*

$$\begin{aligned} Z_t &= X_t + Y_t \\ &= \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1} + 0\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-3} + d\varepsilon_{t-4}, \end{aligned}$$

*se řídí modelem MA(4).*

Následující příklad naopak představuje situaci, kdy předpoklady dodrženy jsou a dochází ke snížení řádu součtu oproti předpokládané hodnotě. A to až na hodnotu  $q^* = 0$ , tedy se součet řídí modelem MA(0), což je bílý šum.

**Příklad 2.2.** *Nechť  $\{X_t\}$  a  $\{Y_t\}$  se oba řídí modely MA(1) definovanými takto*

$$X_t = \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1}$$

a

$$Y_t = \eta_t + d\eta_{t-1},$$

kdy  $\{\varepsilon_t\}$  a  $\{\eta_t\}$  spolu nejsou korelované, ale mají stejný rozptyl  $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\eta^2 = \sigma^2$  a nechť  $b = -d$ . V takovém případě pro jejich součet  $\{Z_t\}$ , definovaný předpisem

$$\begin{aligned} Z_t &= X_t + Y_t \\ &= \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1} + \eta_t - b\eta_{t-1} \end{aligned}$$

platí

$$\begin{aligned} R_Z(0) &= \mathbb{E}Z_t Z_t = 2(1 + b^2)\sigma^2 \\ R_Z(1) &= \mathbb{E}Z_t Z_{t-1} = b\sigma^2 - b\sigma^2 = 0 \\ R_Z(k) &= \mathbb{E}Z_t Z_{t-k} = 0, \quad k > 1. \end{aligned}$$

To znamená, že proces  $\{Z_t\}$  lze zapsat ve tvaru  $Z_t = \xi_t$ , kde  $\{\xi_t\}$  je bílý šum s rozptylem  $\sigma_\xi^2 = 2(1 + b^2)\sigma^2$ .

Protože MA procesy mohou mít více různých vyjádření, neexistuje jednoduchý popis podmínek, kdy k jevu z příkladu 2.2 dochází. Mimo jiné to dokazuje nutnost nerovností ve znění vět o řádech výsledných procesů.

### 3. Součiny

Druhou třídou funkcí ARMA procesů, kterou se v této práci zabýváme, jsou součiny. Následující přístup vychází převážně z článku [8], protože neexistují jiné zdroje zkoumající danou problematiku. Již dříve jsme uvedli a dokázali nutnou a postačující podmínku pro centrovaný slabě stacionární čistě náhodný proces, aby se řídil modelem ARMA( $p, q$ ). Z této věty jsou poté odvozeny vztahy pro součin dvou nezávislých a později ne nutně nezávislých normálních ARMA procesů.

#### 3.1 Věta o součinu dvou nezávislých ARMA procesů

**Věta 6.** *Nechť  $\{X_t\}$  a  $\{Y_t\}$  jsou nezávislé náhodné procesy řídicí se modely ARMA( $p_1, q_1$ ) a ARMA( $p_2, q_2$ ). Nechť proces  $\{Z_t\}$ , definovaný vztahem  $Z_t = X_t Y_t$ , je jejich součin. Potom  $\{Z_t\}$  se bude řídit modelem ARMA( $p, q$ ), kdy  $p \leq p_1 p_2$  a  $q \leq p + \max(q_1 - p_1, q_2 - p_2)$ .*

**Poznámka.** *Znění věty můžeme opět jednoduše rozšířit na součin  $N$  nezávislých ARMA procesů, což můžeme symbolicky zapsat jako*

$$\prod_{i=1}^N \text{ARMA}(p_i, q_i) = \text{ARMA}(p, q),$$

*kdy  $p \leq \prod_{i=1}^N p_i$  a  $q \leq p + \max(q_i - p_i, i = 1, \dots, N)$ .*

*Důkaz.* Rozepíšeme-li si autokovarianční funkci procesu  $\{Z_t\}$ , dostaneme

$$R_Z(k) = \mathbf{E}Z_t Z_{t+k} = \mathbf{E}X_t Y_t X_{t+k} Y_{t+k}$$

a z nezávislosti procesů  $\{X_t\}$  a  $\{Y_t\}$  plyne

$$\begin{aligned} R_Z(k) &= \mathbf{E}X_t X_{t+k} \mathbf{E}Y_t Y_{t+k} \\ &= R_X(k) R_Y(k). \end{aligned}$$

Za zjednodušujícího předpokladu, že autoregresní polynom nemají násobné kořeny, můžeme autokovarianční funkce procesů  $\{X_t\}$  a  $\{Y_t\}$  spočítat z (1.6) a vyjádřit jako  $R_X(k) = \sum_{i=1}^{p_1} \beta_{1i} \alpha_{1i}^k$ ,  $k > q_1 - p_1$  a  $R_Y(k) = \sum_{j=1}^{p_2} \beta_{2j} \alpha_{2j}^k$ ,  $k > q_2 - p_2$ . Tedy

$$R_Z(k) = \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{j=1}^{p_2} \beta_{1i} \beta_{2j} (\alpha_{1i} \alpha_{2j})^k, \quad k > \max(q_1 - p_1, q_2 - p_2).$$

Zadefinujeme-li polynom  $A(z)$  následovně

$$A(z) = \prod_{i=1}^{p_1} \prod_{j=1}^{p_2} (1 - \alpha_{1i} \alpha_{2j} z), \quad (3.1)$$

dostáváme

$$A(B)R_Z(k) = 0, \quad k > p_1 p_2 + \max(q_1 - p_1, q_2 - p_2).$$

Nakonec už stačí jen použít větu 2 (Nutná a postačující podmínka pro ARMA) a jsme hotovi.  $\square$

**Poznámka.** V důkazu jsme přijali zjednodušující předpoklad, že autoregresní polynomy nemají mnohonásobné kořeny, který zásadně zjednodušuje algebraická vyjádření. Bez tohoto předpokladu bychom mohli vyjádřit autokovarianční funkci procesu jako (1.9). Ideu důkazu toto zjednodušení nemění.

## 3.2 Odvození autokovarianční funkce součinu dvou ARMA procesů

Obecné odvození autokovarianční funkce součinu dvou necentrováných ARMA procesů lze nalézt v [15]. Zde uvedeme jen odvození se zjednodušujícím předpokladem nulových středních hodnot.

Nechť  $\{X_t\}$  a  $\{Y_t\}$  jsou stacionární náhodné procesy řídicí se modely ARMA s nulovými středními hodnotami  $\mu_X = \mu_Y = 0$ . Jejich součin je náhodný proces  $\{Z_t\}$ , definovaný jako  $Z_t = X_t + Y_t$ . Nejprve spočteme jeho střední hodnotu

$$\begin{aligned}\mu_Z &= \mathbf{E}(X_t Y_t) \\ &= \mathbf{E}((X_t - \mu_X) + \mu_X)((Y_t - \mu_Y) + \mu_Y) \\ &= R_{XY}(0) + \mu_X \mu_Y.\end{aligned}$$

V našem případě se zjednodušujícím předpokladem nulových středních hodnot je výsledek  $\mu_Z = R_{XY}(0)$ . Aby byla střední hodnota součinu nulová, musí být procesy  $\{X_t\}$  a  $\{Y_t\}$  nezávislé.

Autokovarianční funkce se potom rovná

$$\begin{aligned}R_Z(k) &= \mathbf{E}((Z_t - \mu_Z)(Z_{t-k} - \mu_Z)) \\ &= \mathbf{E}(X_t Y_t X_{t-k} Y_{t-k} - \mu_Z^2) \\ &= \mathbf{E}(X_t Y_t X_{t-k} Y_{t-k}) - R_{XY}^2(0).\end{aligned}$$

## 3.3 Věta o součinu dvou ne nutně nezávislých normálních ARMA procesů

**Věta 7.** *Nechť  $\{X_t\}$  a  $\{Y_t\}$  jsou ne nutně nezávislé normální náhodné procesy řídicí se modely  $ARMA(p_1, q_1)$  a  $ARMA(p_2, q_2)$ . Nechť proces  $\{Z_t\}$ , definovaný vztahem  $Z_t = X_t Y_t$ , je jejich součin. Nutná a postačující podmínka k tomu, aby se proces  $\{Z_t\}$  řídil modelem ARMA je, že musí existovat takový polynom  $d(z)$  s kořeny vně jednotkového kruhu, aby pro nějaké  $q_3$  platilo*

$$d(B)R_{XY}(k)R_{YX}(k) = 0, \quad k > q_3.$$

*Pokud bude stupeň polynomu  $d(z)$  roven  $p_3$ , potom se  $\{Z_t\}$  bude řídit modelem  $ARMA(p, q)$ , kdy  $p \leq p_1 p_2 + p_3$  a  $q \leq p + \max(q_i - p_i, i = 1, 2, 3)$ . Potom  $\{Z_t\}$  se bude řídit modelem  $ARMA(p, q)$ , kdy  $p \leq p_1 p_2$  a  $q \leq p + \max(q_1 - p_1, q_2 - p_2)$ .*

*Důkaz.* Vyjádříme-li autokovarianční funkci procesu  $\{Z_t\}$  a využijeme-li předpo-

kladu normality, můžeme aplikovat Isserlisovu větu (Tvzení 1) a dostaneme

$$\begin{aligned}
R_Z(k) &= \mathbf{E}(X_t Y_t X_{t-k} Y_{t-k}) - R_{XY}^2(0) \\
&= \mathbf{E}(X_t X_{t-k}) \mathbf{E}(Y_t Y_{t-k}) + \\
&\quad + \mathbf{E}(X_t Y_{t-k}) \mathbf{E}(Y_t X_{t-k}) + \mathbf{E}(X_t Y_t) \mathbf{E}(X_{t-k} Y_{t-k}) - R_{XY}^2(0) \\
&= R_X(k) R_Y(k) + R_{XY}(k) R_{YX}(k) + R_{XY}^2(0) - R_{XY}^2(0) \\
&= R_X(k) R_Y(k) + R_{XY}(k) R_{YX}(k)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Zavedeme-li definici polynomu  $A(z)$  stejně jako v (3.1)

$$A(z) = \prod_{i=1}^{p_1} \prod_{j=1}^{p_2} (1 - \alpha_{1i} \alpha_{2j} z),$$

a vynásobíme-li vztah (3.2) polynomem  $d(B)A(B)$ , z vlastností polynomu  $d(z)$  předpokládaných ve znění věty a z vlastností polynomu  $A(z)$  dostaneme

$$d(B)A(B)R_Z(k) = 0, \quad k > q',$$

kde  $q' = p_1 p_2 + p_3 + \max(q_i - p_i, i = 1, 2, 3)$ . Aplikujeme-li nyní větu 2 (Nutná a postačující podmínka pro ARMA), jsme hotovi. □

### 3.4 Shrnutí speciálních případů

Stejně jako v případě součtů, i nyní uvádíme tabulku 3.1, která je přehlednou sumarizací jednotlivých speciálních případů, ke kterým může při násobení nezávislých lineárních modelů časových řad dojít. Znění vět, na základě kterých je tabulka zkonstruována, je opět ve tvarech nerovností. Proto při násobení jednotlivých modelů může dojít i k jednodušším případům než je uvedeno v tabulce, kde je uveden teoretický maximální model, který může nastat. Jednodušší modely nastávají teoreticky ve vyjimečných situacích. Některé z nich jsou ukázány na příkladech.

### 3.5 Příklad

**Příklad 3.1.** *Nechť  $\{X_t\}$  se řídí modelem  $AR(2)$  a  $\{Y_t\}$  je bílý šum. Nechť jsou tyto procesy nezávislé. Autokovarianční funkce si označme  $R_X(k)$  a  $R_Y(k)$ . Autokovarianční funkci náhodného procesu  $\{Z_t\}$ , definovaného jako  $Z_t = X_t Y_t$ , označíme  $R_Z(k)$ , kde*

$$\begin{aligned}
R_Z(k) &= \mathbf{E}Z_t Z_{t-k} \\
&= \mathbf{E}X_t X_{t-k} Y_t Y_{t-k}.
\end{aligned}$$

*Z nezávislosti  $\{X_t\}$  a  $\{Y_t\}$  platí*

$$\begin{aligned}
R_Z(k) &= \mathbf{E}X_t X_{t-k} \mathbf{E}Y_t Y_{t-k} \\
&= R_X(k) R_Y(k).
\end{aligned}$$

*Jelikož  $\{Y_t\}$  je bílý šum,  $R_Y(k) = 0$  pro  $k > 0$ . To ovšem znamená, že i  $R_Z(k) = 0$  pro  $k > 0$ . A z toho plyne, že  $\{Z_t\}$  je rovněž bílý šum.*



Nezávislé posloupnosti	Očekávaný (maximální) součin
$MA(q) \times WN$	$MA(q)$
$MA(q_1) \times MA(q_2)$	$MA(\max(q_1, q_2))$
$MA(q) \times AR(p)$	$MA(q)$
$MA(q_1) \times ARMA(p_2, q_2)$	$MA(\max(q_1, q_2 - p_2))$
$AR(p) \times WN$	$WN$
$AR(p_1) \times AR(p_2)$	$ARMA(p_1p_2, p_1p_2 - \min(p_1, p_2))$
$AR(p_1) \times ARMA(p_2, q_2)$	$ARMA(p_1p_2, p_1p_2 - \min(p_1, p_2 - q_2))$
$ARMA(p, q) \times WN$	$MA(\max(q - p, 0))$ , (tj. pokud $q \leq p$ , $WN$ )
$ARMA(p_1, q_1) \times ARMA(p_2, q_2)$	$ARMA(p_1p_2, p_1p_2 + \max(q_1 - p_1, q_2 - p_2))$

Tabulka 3.1: Shrnutí speciálních případů pro součiny nezávislých posloupností jednotlivých typů lineárních modelů.

## 4. Agregace v čase

Mezi jedny z nejdůležitějších, tedy v praxi nejhojněji se vyskytujících, funkcí časových řad patří jejich agregace v čase. Ty můžeme rozdělit do dvou tříd.

- *Systematický odběr vzorků (anglicky Systematic Sampling)* – například předpokládáme-li, že nějaká časová posloupnost je generována každou jednotku (denně, měsíčně, ročně, ...), ale my ji pozorujeme až každých  $l > 1$  jednotek. Například naměřená teplota v Klementinu může být známá denně, ale my ji zaznamenáváme až s týdenní frekvencí ( $l = 7$ ).
- *Časové agregace (Anglicky Temporal Aggregation)* – v této situaci zaznamenáváme nějaký souhrnný údaj za dané časové období. Například produkce automobilů je známá měsíčně, ale zveřejňuje se až čtvrtletní agregovaná produkce.

Nejprve obě tyto situace popíšeme jednotným způsobem a uvedeme větu o modelu agregovaného procesu, jak ji uvádí Engel v [8], poté se ještě detailněji zaměříme na časové agregace, kde Stram a Wei v [14] získali přesnější výsledky.

### 4.1 Věta o modelu agregovaného procesu

Nechť  $\{X_t\}$  je náhodný proces. Definujeme-li náhodný proces  $\{Y_t\}$  vztahem

$$Y_t = \sum_{j=0}^{n-1} a_j X_{t+l+j}, \quad (4.1)$$

pak  $Y_t$  je lineární kombinací  $n$  proměnných procesu  $\{X_t\}$  z rozmezí od  $tl$  do  $tl+n-1$ , kde  $n, l$  jsou parametry agregace.  $n$  označuje rozsah agregace a  $l$  určuje posun či překryv. Příklady hodnot parametrů  $n, l$  při zvolení  $a_j = 1$  pro  $j = 0, \dots, n-1$  jsou vidět v tabulce 4.1.

Dříve než uvedeme znění věty, ukážeme, jak se chová operátor posunutí s agregovanou posloupností.

**Poznámka** (Poznámka k operátoru posunutí  $B$ ). *Pro přehlednější notaci budeme značit operátor posunutí u agregované posloupnosti jako  $\mathcal{B}$  a u původní stále  $B$ . Dle definice*

$$\mathcal{B}Y_t = Y_{t-1} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j X_{(t-1)l+j} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j X_{tl+j-l} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j B^l X_{tl+j}.$$

*To znamená, že operátor posunutí  $\mathcal{B}$  aplikovaný na agregovanou posloupnost  $\{Y_t\}$  odpovídá posunu způsobenému operátorem  $B^l$  na původní posloupnost  $\{X_t\}$ . Zde chápeme, že časová měřítka jsou u obou posloupností různá. Kupříkladu operátor posunutí na čtvrtletní časové řadě  $\mathcal{B}$  odpovídá operátoru  $B^3$  na původní měsíční.*

$n = 3$	$Y_1 = X_1 + X_2 + X_3$
$l = 1$	$Y_2 = X_2 + X_3 + X_4$
	$Y_3 = X_3 + X_4 + X_5$
$n = 4$	$Y_1 = X_4 + X_5 + X_6 + X_7$
$l = 4$	$Y_2 = X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11}$
	$Y_3 = X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15}$
$n = 3$	$Y_1 = X_{10} + X_{11} + X_{12}$
$l = 10$	$Y_2 = X_{20} + X_{21} + X_{22}$
	$Y_3 = X_{30} + X_{31} + X_{32}$
$n = 1$	$Y_1 = X_3$
$l = 3$	$Y_2 = X_6$
	$Y_3 = X_9$

Tabulka 4.1: Příklady hodnot parametrů agregace  $n$  a  $l$ .

**Věta 8.** *Nechť se náhodný proces  $\{X_t\}$  řídí modelem  $ARMA(p, q)$ . Nechť agregovaná posloupnost  $\{Y_t\}$  je definovaná jako v (4.1). Potom se proces  $\{Y_t\}$  řídí modelem  $ARMA(p_0, q_0)$ , kde*

$$p_0 \leq p \quad a \quad q_0 \leq \left\lfloor p + \frac{q - p + n - 1}{l} \right\rfloor, \quad (4.2)$$

kde  $\lfloor x \rfloor$  značí dolní celou část  $x$ .

*Důkaz.* Nejdříve ukážeme, že je proces  $\{Y_t\}$  centrováný. Protože  $\mathbf{E}X_k = 0$  pro všechna  $k$ , potom i

$$\mathbf{E}Y_t = \mathbf{E} \sum_{j=0}^{n-1} a_j X_{tl+j} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \mathbf{E}X_{tl+j} = 0.$$

Dále ověříme jeho slabou stacionaritu. Označíme-li si jeho autokovarianční funkci jako  $R_Y(s, t)$ , tak platí

$$\begin{aligned} R_Y(s, t) &= \mathbf{E}Y_s Y_t = \mathbf{E} \sum_{i=0}^{n-1} a_i X_{sl+i} \sum_{j=0}^{n-1} a_j X_{tl+j}, \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_i a_j \mathbf{E}X_{sl+i} X_{tl+j}, \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_i a_j R_X(l(s-t) + j - i). \end{aligned}$$

A protože vidíme, že závisí jen na rozdílu  $s - t$ , můžeme pro  $k = s - t$  psát

$$R_Y(k) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_i a_j R_X(kl + j - i). \quad (4.3)$$

Autokovarianční funkci procesu  $\{X_t\}$  můžeme pro  $k > q - p$ , se zjednodušujícím předpokladem různých kořenů  $\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_p^{-1}$  autoregresního polynomu  $a(z)$ , zapsat jako

$$R_X(k) = \sum_{m=1}^p \beta_m \alpha_m^k, \quad k > q - p.$$

Dosadíme-li toto vyjádření do (4.3), vznikne

$$R_Y(k) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_i a_j \sum_{m=1}^p \beta_m \alpha_m^{kl+j-i}, \quad kl + j - i > q - p. \quad (4.4)$$

Použitím operátoru posunutí na autokovarianční funkci  $R_Y(k)$  bychom dostali

$$\begin{aligned} \mathcal{B}R_Y(k) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_i a_j \mathcal{B}^l R_X(kl + j - i), \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_i a_j \sum_{m=1}^p \beta_m \alpha_m^{kl+j-i-l}, \quad kl + j - i - l > q - p. \end{aligned}$$

Položíme-li nyní polynom  $A(z)$ , stupně  $p$ , z věty 2 (Nutná a postačující podmínka pro ARMA) jako

$$A(z) = \prod_{i=1}^p (1 - \alpha_i^l z),$$

pak

$$\begin{aligned} A(\mathcal{B})R_Y(k) &= ((1 - \alpha_1^l \mathcal{B}) \dots (1 - \alpha_p^l \mathcal{B})) \\ &\quad \left( \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_i a_j \beta_1 \alpha_1^{kl+j-i} + \dots + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_i a_j \beta_p \alpha_p^{kl+j-i} \right), \\ &\quad (k - p)l + j - i > q - p. \end{aligned}$$

V první závorce na pravé straně rovnosti je součin  $p$  závorek a v druhé je rozepsaná funkce  $R_Y(k)$  jako součet  $p$  členů (dvojitých sum). Při roznásobování odpovídá každému členu z druhé závorky jeden činitel ze závorky první, který jej nuluje. Tedy pro každé  $1 \leq r \leq p$  platí

$$\begin{aligned} &(1 - \alpha_r^l \mathcal{B}) \left( \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_i a_j \beta_r \alpha_r^{kl+j-i} \right) = \\ &= \left( \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_i a_j \beta_r \alpha_r^{kl+j-i} \right) - \alpha_r^l \left( \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_i a_j \beta_r \alpha_r^{kl+j-i-l} \right) = 0. \end{aligned}$$

Podíváme-li se ještě na podmínku pro  $k$  ze součinu  $A(\mathcal{B})R_Y(k)$ , pak vidíme, že člen  $j - i$  nabývá hodnot z rozmezí od  $1 - n$  do  $n - 1$ . Proto píšeme

$$\begin{aligned} (k - p)l + 1 - n &> q - p, \\ (k - p)l &> q - p + n - 1, \\ k &> \left\lfloor p + \frac{q - p + n - 1}{l} \right\rfloor. \end{aligned}$$

$A(B)R_Y(k) = 0$ ,  $k > \lfloor p + \frac{q-p+n-1}{l} \rfloor$ , čímž jsou podmínky věty 2 splněny a důkaz je hotov. □

**Poznámka.** V článku [8], odkud byl náznak důkazu čerpán, je vzorec pro stupeň  $q_0$  uveden chybně.

**Poznámka.** Pro dvě třídy časových agregací uvedených na začátku kapitoly jsou hodnoty parametrů a vzorec po dosazení následující.

- Systematický odběr vzorků – jedná se o případ, kdy  $n = 1$ . Proces vzniklý tímto způsobem se poté řídí modelem  $ARMA(p_0, q_0)$ , kde  $p_0 \leq p$  a  $q_0 \leq \lfloor p + \frac{q-p}{l} \rfloor$ .
- Časové agregace – jedná se o případ, kdy  $n = l$ . Proces vzniklý tímto způsobem se poté řídí modelem  $ARMA(p_0, q_0)$ , kde  $p_0 \leq p$  a  $q_0 \leq \lfloor p + 1 + \frac{q-p-1}{n} \rfloor$ .

Toto rozdělení nepokrývá možnost, kdy dochází k překryvu částečných součtů, což ovšem není na škodu.

**Poznámka.** K nerovnosti ve stupni výsledného modelu u časové agregace dochází, pokud pro nějaké kořeny  $\delta_i, \delta_j$ ,  $i \neq j$  autoregresního polynomu  $a(z)$  platí  $\delta_i^n = \delta_j^n$  pro  $i \neq j$ , kdy  $n$  je stupeň agregace. Jsou-li všechny kořeny různé a k tomuto nedochází, platí rovnost. Viz dále.

## 4.2 Limitní chování

Za zmínku stojí se zaměřit na limitní chování časových agregací, necháme-li jít parametry  $l, n$  k nekonečnu. Viz [8].

- Platí-li věta 8 a je-li  $l$  dostatečně veliké, výsledný proces  $\{Y_t\}$  se bude řídit modelem  $ARMA(p_0, q_0)$ , kdy  $p_0 \leq p$  a  $q_0 \leq p - 1$  nebo  $q_0 \leq p$  podle toho, zda  $q - p + n - 1 < 0$  nebo naopak. Z vyjádření autokovarianční funkce  $R_Y(k)$  v (4.4) plyne, že při  $l \rightarrow \infty$ ,  $R_Y(k) \rightarrow 0$ ,  $k > 0$ . To znamená, že limitní proces bude bílý šum.
- Podobná situace nastane i v případě, že  $l = n$ . Při  $n$  dostatečně velkém se bude výsledný proces řídit modelem  $ARMA(p_0, q_0)$ , kdy  $p_0 \leq p$  a  $q_0 \leq p$  nebo  $q_0 \leq p + 1$  podle toho, zda  $q - p - 1 < 0$  nebo naopak. Tedy při  $n \rightarrow \infty$  i  $R_Y(k) \rightarrow 0$ ,  $k > 0$ , protože z vyjádření (4.4) je vidět, že exponenciála půjde k nule rychleji než zvětšující se sumy.

## 4.3 Časové agregace

Nechť  $\{X_t\}$  je původní náhodný proces generovaný každou jednotku. Nechť dále  $\{Y_T\}$  je pozorovaný proces – agregace, který je zaznamenaný každých  $n$  jednotek. Pro jednoduchost vypouštíme parametry  $a_0, \dots, a_{n-1}$ , které necháváme rovny jedné, čímž přijímáme lehčí parametrizaci.

$$Y_T = \sum_{t=n(T-1)+1}^{nT} X_t = (1 + B + \dots + B^{n-1}) X_{nT}, \quad (4.5)$$

kde  $T$  je časová jednotka v agregované posloupnosti a parametr  $n$  nazýváme stupněm agregace. Tedy například, pokud  $t$  reprezentuje měsíce,  $n = 3$ , potom  $\{Y_T\}$  jsou čtvrtletní součty původní či základní měsíční posloupnosti  $\{X_t\}$ .

Ze vztahu (4.3) plyne, že autokovarianční funkci  $R_Y(k)$  procesu  $\{Y_T\}$  můžeme vyjádřit pomocí autokovarianční funkce  $R_X(k)$  procesu  $\{X_t\}$  následovně

$$R_Y(k) = (1 + B + \dots + B^{n-1})^2 R_X(kn + n - 1).$$

To znamená, že  $R_Y(k)$  je lineární transformací autokovariančních funkcí  $R_X(j)$  pro  $j$  od  $kn - n + 1$  do  $kn + n - 1$ . Koefficienty najdeme roznásobením součinu  $(1 + B + \dots + B^{n-1})^2$ . Rozepíšeme-li transformaci do maticového zápisu, dostaneme

$$\begin{pmatrix} R_Y(0) \\ R_Y(1) \\ \vdots \\ R_Y(k) \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} R_X(1-n) \\ R_X(1-n+1) \\ \vdots \\ R_X(0) \\ \vdots \\ R_X(kn+n-1) \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Matice koeficientů  $\mathbf{A}$  se rovná

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0}_{kn} \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{C} & \mathbf{0}_{kn-n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0}_{kn} & & \mathbf{C} \end{pmatrix},$$

kde  $\mathbf{0}_n$  je  $1 \times n$  vektor nul a  $\mathbf{C}$  je  $1 \times 2n - 1$  vektor koeficientů  $C_i$  u členů  $B^i$  z rozvoje  $(1 + B + \dots + B^{n-1})^2$ .

Celý tento myšlenkový postup můžeme ještě zjednodušit, protože víme, že  $R_X(k) = R_X(-k)$ , pro všechna  $k$ . Z toho důvodu můžeme vypustit prvních  $n - 1$  řádků v matici s hodnotami autokovarianční funkce procesu  $\{X_t\}$  odpovídajících  $R_X(1 - n), \dots, R_X(-1)$ . Matici  $\mathbf{A}$  poté upravíme na matici  $\mathbf{A}_n$ , která je zleva o  $n - 1$  sloupců užší a jejichž koeficienty jsou přidány do odpovídajících zbylých sloupců matice  $\mathbf{A}$ . Tedy

$$\begin{pmatrix} R_Y(0) \\ R_Y(1) \\ \vdots \\ R_Y(k) \end{pmatrix} = \mathbf{A}_n \begin{pmatrix} R_X(0) \\ \vdots \\ R_X(kn + n - 1) \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Konstrukce matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{A}_n$  je snáze pochopitelná z příkladu (4.1).

### 4.3.1 Posloupnosti klouzavých součtů MA

Nechť se základní posloupnost  $\{X_t\}$  řídí modelem  $\text{MA}(q)$

$$X_t = c(B)\varepsilon_t = (1 + c_1B + \dots + c_qB^q)\varepsilon_t,$$

kde  $\{\varepsilon_t\}$  je bílý šum s rozptylem  $\sigma_\varepsilon^2 > 0$ . Náhodný proces  $\{Y_T\}$  je agregací stupně  $n$  definovaný v (4.5). Protože  $R_X(k) = 0$  pro  $|k| > q$ , pak  $R_Y(j) \equiv 0$ , pokud

$j > q^* = \lfloor 1 + (q - 1)/n \rfloor$ . Tedy jediné body, kde může být autokovarianční funkce procesu  $\{Y_T\}$  nenulová, jsou  $R_Y(0), R_Y(1), \dots, R_Y(q^*)$ . Z toho plyne, že agregace stupně  $n$   $\{Y_T\}$  se řídí modelem  $\text{MA}(q_0)$

$$Y_T = (1 + \theta_1 \mathcal{B} + \dots + \theta_{q_0} \mathcal{B}^{q_0}) \eta_T,$$

kde  $\{\eta_T\}$  je bílý šum se střední hodnotou 0 a rozptylem  $\sigma_\eta^2$ ,

$$q_0 \leq q^* = \left\lfloor 1 + \frac{q - 1}{n} \right\rfloor.$$

Parametry  $\theta_i, i = 1, \dots, q_0$  a  $\sigma_\eta^2$  jsou funkcemi parametrů  $c_i, i = 1, \dots, q$  a  $\sigma_\varepsilon^2$ . Dopočítány mohou být ze systému rovnic (4.7). Vzhledem k charakteru modelů klouzavých součtů je možné pracovat pouze s prvními  $(q^* + 1)$  řádky a  $(q + 1)$  sloupci matice koeficientů  $\mathbf{A}_n$ , kterou si označíme jako  $\mathbf{A}_n(q)$ . Máme tedy

$$\begin{pmatrix} R_Y(0) \\ R_Y(1) \\ \vdots \\ R_Y(q^*) \end{pmatrix} = \mathbf{A}_n(q) \begin{pmatrix} R_X(0) \\ R_X(1) \\ \vdots \\ R_X(q) \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

kdy konstrukce  $\mathbf{A}_n(q)$  je opět názorně vidět z příkladu (4.1).

### 4.3.2 Autoregresní posloupnosti AR

Nechť se základní posloupnost  $\{X_t\}$  řídí modelem  $\text{AR}(p)$

$$a(B)X_t = (1 + a_1 B + \dots + a_p B^p)X_t = \varepsilon_t,$$

kde  $\{\varepsilon_t\}$  je bílý šum s rozptylem  $\sigma_\varepsilon^2 > 0$ . Náhodný proces  $\{Y_T\}$  nechť je agregací stupně  $n$  definovaný v (4.5).

Ze znění věty 8 plyne, že  $\{Y_T\}$  se bude řídit smíšeným modelem  $\text{ARMA}(p_0, q_0)$ , kde  $p_0 \leq p$  a  $q_0 \leq \lfloor p + 1 - (p + 1)/n \rfloor$ . Stram a Wei v [14] přináší přesnější klasifikaci, s kterou dávají skutečné hodnoty parametrů vzniklého  $\text{ARMA}$  modelu.

**Věta 9.** *Nechť  $a(B) = (1 + a_1 B + \dots + a_p B^p)$  s různými kořeny  $\delta_i^{-1}, i = 1, \dots, p^*$  s násobnostmi  $s_i$ , tedy  $\sum_{i=1}^{p^*} s_i = p$ . Nechť  $n$  je stupeň agregace a nechť  $b$  značí počet různých hodnot  $\delta_i^n$  pro  $i = 1, \dots, p^*$ . Dále rozdělme čísla  $s_i, i = 1, \dots, p^*$ , do  $b$  disjunktních množin  $\mathcal{A}_i$  tak, aby  $s_k$  a  $s_j$  náleželo  $\mathcal{A}_i$  pouze tehdy, když  $\delta_k^n = \delta_j^n$ . Potom se agregace  $\{Y_T\}$  definovaná v (4.5) řídí modelem  $\text{ARMA}(P, Q_1)$*

$$\alpha(\mathcal{B})Y_T = (1 + \alpha_1 \mathcal{B} + \dots + \alpha_P \mathcal{B}^P) = (1 + \gamma_1 \mathcal{B} + \dots + \gamma_{Q_1} \mathcal{B}^{Q_1})\eta_T = \gamma(\mathcal{B})\eta_T,$$

kde

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^b \max \mathcal{A}_i, \\ \max \mathcal{A}_i &= \text{největší prvek } \mathcal{A}_i, \\ Q_1 &= \left\lfloor p + 1 - \frac{p + 1}{n} \right\rfloor - (p - P), \\ &= \left\lfloor P + 1 - \frac{p + 1}{n} \right\rfloor, \end{aligned} \quad (4.9)$$

kde  $\{\eta_T\}$  je bílý šum s rozptylem  $\sigma_\eta^2$  a  $\alpha_i, \gamma_i$  a  $\sigma_\eta^2$  jsou funkcemi parametrů  $a_i$  a  $\sigma_\varepsilon^2$ .

*Důkaz.* Lze dohledat v [14] na straně 288. □

### 4.3.3 Smíšené posloupnosti ARMA

Stejně jako v případě klouzavých součtů MA či autoregresních posloupností AR lze hodnoty parametrů ve výsledném modelu vzniklém časovou agregací smíšeného modelu ARMA omezit pomocí věty 8. My v této části nejprve uvedeme definici modelu ARMA bez skryté periodicity řádu  $n$  a poté uvedeme znění vět o hodnotách parametrů pro smíšené modely ARMA tak, jak je uvedeno v [16] – nejprve pro model ARMA bez skryté periodicity řádu  $n$  a pak zobecněné tvrzení. Zjistíme, že právě skrytá periodicitata způsobuje případné snížení parametrů výsledného modelu oproti větě 8.

**Definice.** O modelu  $ARMA(p, q)$  daného vztahem (1.5) řekneme, že je bez skryté periodicity řádu  $n$ , pokud  $\delta_i^{-1}, i = 1, \dots, p^*$  jsou kořeny autoregresního polynomu  $a(z)$  a  $\delta_i^n = \delta_j^n$  implikuje  $\delta_i = \delta_j$ .

**Věta 10.** Nechť se základní posloupnost  $\{X_t\}$  řídí modelem  $ARMA(p, q)$ , daným vztahem (1.5), kde  $\{\varepsilon_t\}$  je bílý šum s rozptylem  $\sigma_\varepsilon^2 > 0$ . Nechť mají oba polynomy  $a(z)$  i  $c(z)$  všechny kořeny vně jednotkového kruhu a žádné kořeny společné. Dále předpokládejme, že je model  $ARMA(p, q)$  bez skryté periodicity řádu  $n$ . Potom se agregace stupně  $n$ ,  $\{Y_T\}$ , definovaná v (4.5), řídí modelem  $ARMA(p, Q_2)$ , kde

$$Q_2 = \left\lfloor p + 1 + \frac{q - p - 1}{n} \right\rfloor.$$

*Důkaz.* Vyjádříme-li autoregresní polynom v součtovém tvaru, máme

$$a(B) = \prod_{j=1}^p (1 - \delta_j B).$$

Dále vynásobíme-li obě strany zápisu ARMA modelu  $a(B)X_t = c(B)\varepsilon_t$  výrazem

$$\prod_{j=1}^p \left( \frac{(1 - \delta_j^n B^n)(1 - B^n)}{(1 - \delta_j B)(1 - B)} \right),$$

dostaneme

$$\prod_{j=1}^p (1 - \delta_j^n B^n) (1 + B + \dots + B^{n-1}) X_t = \prod_{j=1}^p \left( \frac{(1 - \delta_j^n B^n)(1 - B^n)}{(1 - \delta_j B)(1 - B)} \right) c(B)\varepsilon_t,$$

kdy pravou stranu můžeme dále rozepsat jako

$$(1 + \delta_1 B + \dots + \delta_1^{n-1} B^{n-1}) \dots (1 + \delta_p B + \dots + \delta_p^{n-1} B^{n-1}) (1 + B + \dots + B^{n-1}) c(B)\varepsilon_t.$$

Označíme-li nyní levou stranu jako

$$Z_t = \prod_{j=1}^p (1 - \delta_j^n B^n) (1 + B + \dots + B^{n-1}) X_t,$$



Původní model	Agregovaný model
MA( $q$ )	MA( $\lfloor \frac{q}{l} \rfloor$ )
AR( $p$ )	ARMA( $p, \lfloor p - \frac{p}{l} \rfloor$ )
ARMA( $p, q$ )	ARMA( $p, \lfloor p + \frac{q-p}{l} \rfloor$ )

Tabulka 4.2: Shrnutí speciálních případů pro systematický odběr vzorků z posloupností řídicích se jednotlivými typy lineárních modelů. ( $l$  je rozestup odběru vzorků.)

můžeme říci, že se jedná o posloupnost klouzavých součtů. Jelikož posun nejvyššího řádu na pravé straně se rovná  $pn + n - p - 1 + q$ , z vlastností autokovarianční funkce posloupnosti klouzavých součtů plyne

$$E(Z_{nT}Z_{nT-nK}) = 0$$

pro  $K > Q_2$ . □

Agregovaný proces  $\{Y_T\}$  se tedy řídí modelem ARMA( $p, Q_2$ )

$$\prod_{j=1}^p (1 - \delta_j^B) Y_T = (1 + \gamma_1 B + \dots + \gamma_{Q_2} B^{Q_2}) \eta_T,$$

kde  $\{\eta_T\}$  je bílý šum s rozptylem  $\sigma_\eta^2$  a  $\gamma_i$  a  $\sigma_\eta^2$  jsou funkcemi parametrů  $a_i$ ,  $c_i$  a  $\sigma_\varepsilon^2$ . Za zmínku stojí, že autoregresní parametr zůstal oproti původní posloupnosti nezměněn a kořeny autoregresního polynomu agregované posloupnosti jsou  $n$ -té mocniny kořenů autoregresního polynomu původní posloupnosti.

**Věta 11.** *Nechť se základní posloupnost  $\{X_t\}$  řídí modelem ARMA( $p, q$ ), daným vztahem (1.5), kde  $\{\varepsilon_t\}$  je bílý šum s rozptylem  $\sigma_\varepsilon^2 > 0$ . Nechť mají oba polynomy  $a(z)$  i  $c(z)$  všechny kořeny vně jednotkového kruhu a žádné kořeny společné. Dále předpokládejme, že model ARMA( $p, q$ ) má skrytou periodicitu řádu  $n$ . Potom se agregace stupně  $n$ ,  $\{Y_T\}$ , definovaná v (4.5), řídí smíšeným modelem ARMA( $P, Q$ ), kde  $P$  je stejné jako u autoregresní posloupnosti (4.9) a*

$$Q \leq \left\lfloor p + 1 + \frac{q - p - 1}{n} \right\rfloor - (p - P).$$

*Důkaz.* Je kombinací předchozích důkazů. □

## 4.4 Shrnutí speciálních případů

Tabulky 4.2 a 4.3 sumarizují výsledky získané z předchozích vět o systematickém odběru vzorků a časové agregaci. Některá znění vět, na základě kterých jsou tabulky zkonstruovány, jsou ve tvaru nerovností, proto může dojít za jistých okolností ke snížení maximálních modelů uvedených v tabulkách na jednodušší varianty.

Původní model	Agregovaný model
MA( $q$ )	MA( $\lfloor 1 + \frac{q-1}{n} \rfloor$ )
AR( $p$ ) bez skryté periodicity	ARMA( $p, \lfloor p + 1 - \frac{p+1}{n} \rfloor$ )
AR( $p$ ) se skrytou periodicitou	ARMA( $P, \lfloor P + 1 - \frac{p+1}{n} \rfloor$ )
ARMA( $p, q$ ) bez skryté periodicity	ARMA( $p, \lfloor p + 1 + \frac{q-p-1}{n} \rfloor$ )
ARMA( $p, q$ ) se skrytou periodicitou	ARMA( $P, \lfloor P + 1 + \frac{q-p-1}{n} \rfloor$ )

Tabulka 4.3: Shrnutí speciálních případů pro časové agregace posloupností řídicích se jednotlivými typy lineárních modelů. ( $n$  je stupeň agregace.)

## 4.5 Příklady

**Příklad 4.1.** *Nechť se posloupnost  $\{X_t\}$  řídí modelem MA(2)*

$$X_t = c(B)\varepsilon_t = (1 + c_1B + c_2B^2)\varepsilon_t.$$

*Její autokovarianční funkce je tedy dle (1.3) rovna*

$$R_X(k) = \begin{cases} (1 + c_1^2 + c_2^2) \sigma_\varepsilon^2, & \text{když } k = 0, \\ (c_1 + c_1c_2) \sigma_\varepsilon^2, & \text{když } k = 1, \\ c_2\sigma_\varepsilon^2, & \text{když } k = 2, \\ 0, & \text{když } k > 2. \end{cases}$$

*Úkolem je zjistit, jakým modelem se řídí agregace stupně  $n = 3$ , tedy proces  $\{Y_T\}$ , definovaný jako*

$$Y_T = (1 + B + B^2) X_{3T}.$$

*Pro autokovarianční funkci  $R_Y(k)$  platí*

$$\begin{aligned} R_Y(k) &= (1 + B + B^2)^2 R_X(3k + 2), \\ &= (1 + 2B + 3B^2 + 2B^3 + B^4) R_X(3k + 2). \end{aligned}$$

*Dosažením do (4.6) dostaneme*

$$\begin{pmatrix} R_Y(0) \\ R_Y(1) \\ R_Y(2) \\ R_Y(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_X(-2) \\ R_X(-1) \\ R_X(0) \\ R_X(1) \\ \vdots \\ R_X(11) \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Dále zjednodušením (4.7) dostaneme

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} R_Y(0) \\ R_Y(1) \\ R_Y(2) \\ R_Y(3) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_X(0) \\ R_X(1) \\ R_X(2) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3R_X(0) + 4R_X(1) + 2R_X(2) \\ R_X(1) + 2R_X(2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Díky zjednodušení (4.8) můžeme psát dokonce jako

$$\begin{pmatrix} R_Y(0) \\ R_Y(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_X(0) \\ R_X(1) \\ R_X(2) \end{pmatrix}$$

Vidíme, že agregace stupně 3  $\{Y_T\}$  se řídí modelem MA(1). Půjde tedy zapsat ve tvaru

$$Y_T = (1 + \theta B)\eta_T.$$

Autokovarianční funkce  $R_Y(k)$  se rovná

$$R_Y(k) = \begin{cases} (1 + \theta^2) \sigma_\eta^2 = 3(1 + c_1^2 + c_2^2) \sigma_\varepsilon^2 + 4(c_1 + c_1c_2) \sigma_\varepsilon^2 + 2c_2\sigma_\varepsilon^2, & \text{když } k = 0, \\ \theta\sigma_\eta^2 = (c_1 + c_1c_2) \sigma_\varepsilon^2 + 2c_2\sigma_\varepsilon^2, & \text{když } k = 1, \\ 0, & \text{když } k > 1. \end{cases}$$

Hodnoty parametrů  $\theta$  a  $\sigma_\eta^2$  lze dopočítat ze vztahů

$$\frac{1 + \theta^2}{\theta} = \frac{3(1 + c_1^2 + c_2^2) + 4(c_1 + c_1c_2) + 2c_2}{(c_1 + c_1c_2) + 2c_2}$$

a

$$\sigma_\eta^2 = \frac{(c_1 + c_1c_2) \sigma_\varepsilon^2 + 2c_2\sigma_\varepsilon^2}{\theta}.$$

Nyní ještě ukážeme, že  $q^*$  je jen horním odhadem skutečné hodnoty  $q_0$ . Protože  $R_Y(1) = (c_1 + c_1c_2 + 2c_2) \sigma_\varepsilon^2$ , pak při platnosti rovnosti  $c_2 = \frac{c_1}{c_1 - 2}$  se  $R_Y(1) = 0$  a agregace  $\{Y_T\}$  je bílým šumem.

**Příklad 4.2.** Nechť se posloupnost  $\{X_t\}$  řídí modelem AR(2)

$$a(B)X_t = (1 + a_1B + a_2B^2)X_t = \varepsilon_t,$$

kde  $a_1 = (0,5)^{1/3}$ ,  $a_2 = (0,5)^{2/3}$  a  $\sigma_\varepsilon^2 = 1$ .

Úkolem je zjistit, jakým modelem se řídí agregace stupně  $n = 3$ , tedy proces  $\{Y_T\}$ , definovaný jako

$$Y_T = (1 + B + B^2) X_{3T}.$$

Z věty 8 plyne, po dosazení do (4.2), že agregace se bude řídit modelem  $ARMA(p_0, q_0)$ , kdy  $p_0 \leq 2$  a  $q_0 \leq 2$ . Chceme-li získat přesné hodnoty, využijeme věty 9.

Vyřešením kvadratické rovnice získáme kořeny

$$\delta_1^{-1} = 2^{1/3} \left( \cos \left( \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{2\pi}{3} \right) \right)$$

a

$$\delta_2^{-1} = 2^{1/3} \left( \cos \left( \frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{4\pi}{3} \right) \right).$$

Kořeny jsou různé, oba s násobností 1. Tedy  $p^* = 2$ ,  $s_1 = s_2 = 1$ . Třetí ( $n = 3$ ) mocniny převrácených hodnot kořenů se rovnají,  $\delta_1^3 = \delta_2^3 = \frac{1}{2}$ , z čehož plyne, že  $b = 1$  a  $\mathcal{A}_1 = \{1\}$ . Z věty 9 tedy dále plyne, že  $P_0 = 1$  a  $Q_0 = (1 + 1 - (2 + 1)/3) = 1$ . Agregace  $\{Y_T\}$  se tedy řídí modelem  $ARMA(1, 1)$ .

## 5. Číselné simulace

Cílem této kapitoly je demonstrovat představenou teorii o některých funkcích ARMA procesů na datech. K tomuto účelu bylo využito číselných simulací. K realizaci byl využit statistický software R (<http://www.r-project.org/>). Výsledky jsou shrnuty do 56 následujících tabulek. Na přiloženém CD je k dispozici zdrojový kód včetně spočtených dat ve formátu RData pro software R. Při současné výpočetní kapacitě běžného počítače by replikace výpočtů trvala v řádu hodin. Získání totožných výsledků lze docílit nastavením generátoru pseudonáhodných čísel na hodnotu 1018.

### 5.1 Popis simulací

V předchozích kapitolách byla představena teorie součtů, součinů a agregací v čase ARMA procesů, kde byly vždy na konci kapitoly shrnuty speciální případy pro posloupnosti klouzavých součtů nebo čistě autoregresní posloupnosti. Následující experimenty se snaží nasimulovat reálné situace, jak by mohlo k jednotlivých funkcím docházet. Každý z experimentů byl volen tak, aby vyzkoušel jednu speciální situaci a aby očekávaný výsledný model spadl do množiny modelů testovaných. Parametry byly voleny tak, aby bylo možno pozorovat, jak se modely chovají, jsou-li kořeny blízko jednotkového kruhu či naopak. Jednotlivé hodnoty parametrů se v různých modelech opakují a je tedy možno pozorovat změny oproti předchozím situacím.

Každý experiment byl zopakován 1000 krát pro dvě různé délky posloupností (120 a 900 pozorování). Následuje v krocích rozepsaný postup jednotlivého experimentu.

- V případě součtů a součinů byly vygenerovány 2 nezávislé náhodné posloupnosti s příslušnou délkou a stejným rozptylem. V případě časových agregací byla generována jen jedna řada.
- Nad vygenerovanou řadou či řadami byla provedena příslušná funkce.
- K takto vzniklé posloupnosti byly poté metodou maximální věrohodnosti (R příkaz *arima* s parametrem *method="ML"*, více o této metodě např. v [6]) odhadovány parametry za předpokladu, že se řídí nějakým lineárním modelem. Testovány byly modely: WN, MA(1), MA(2), MA(3), AR(1), AR(2), AR(3), ARMA(1, 1), ARMA(1, 2), ARMA(2, 1), ARMA(2, 2).
- Z těchto modelů byl vybrán ten s nejnižším AIC.
- Do výsledné tabulky pro každý experiment byly zaznamenány frekvence vyhodnocení modelu jako nejvhodnějšího pro obě délky posloupností. Následně byly do tabulky zaznamenány vypočítané koeficienty u každého odhadnutého modelu. Jednotlivé koeficienty jsou uvedeny jako průměry odhadnutých koeficientů pro více posloupností, kde byl onen model vybrán jako nejvhodnější. Nebyl-li nějaký model v experimentu zvolen jako nejvhodnější ani pro jeden z 1000 pokusů, nemohly být koeficienty spočteny. Taková situace je v tabulce popsána symboly NaN.

Víme, že v praxi je určování vhodného modelu sofistikovaná úloha, kdy se poměrně často přistupuje k analýze autokorelační a parciální autokorelační funkce a v neposlední řadě i k expertnímu odhadu na základě povahy dat. Toto jsme si nemohli u simulací dovolit, a proto jsme přistoupili ke kritériu, které lze aplikovat algoritmicky. Jako nejvhodnější model jsme volili ten s nejnižším Akaikeho informačním kritériem (AIC). Tento přístup má své nevýhody, ale určitou vypovídající hodnotu má. Jako možný postup při výběru vhodného modelu je doporučován např. Ciprou v [7] na straně 342 a dokonce je označován přívlastkem moderní.

## 5.2 Popis tabulek

Jedna tabulka představuje výsledky jednoho experimentu. V prvním sloupci jsou vypsány modely, které byly testovány jako možní kandidáti na nejvhodnější model pro výslednou posloupnost. Šedou barvou je označen teoretický maximální model, ke kterému mělo v daném experimentu dojít. V druhém sloupci jsou vypsány frekvence zvolení příslušného modelu jako nejvhodnějšího pro 120 pozorování, ve třetím pro délku 900 pozorování. To znamená, že součet čísel v každém z těchto sloupců činí 1. Šedou barvou jsou označeny nejvyšší frekvence. Čtvrtý až osmý sloupec v tabulce obsahuje hodnoty odhadnutých parametrů pro jednotlivé modely. V případě modelu MA(1) se jedná o parametr  $c_1$ , v případě MA(2) o parametry  $c_1, c_2$ , atd. Analogicky je postupováno u autoregresních posloupností. U smíšených modelů ARMA jsou uvedeny nejprve parametry u autoregresní části a poté u části klouzavých součtů. Tedy např. u modelu ARMA(2, 1) jsou parametry uvedeny v následujícím pořadí:  $a_1, a_2, c_1$ . Kromě bílého šumu jsou modely uvedeny vždy na dvou řádcích. Na prvním jsou vypsány informace pro výsledky pokusu s posloupností délky 120, na druhém s posloupností délky 900. Pod sebou jsou tedy vidět hodnoty parametrů tak, jak byly odhadnuty ve dvou různých situacích s různými délkami řad.

## 5.3 Analýza výsledků

Celkem bylo provedeno 56 experimentů – 10 týkajících se součtů, 10 týkajících se součinů, 20 týkajících se systematického odběru vzorků a 16 pro časové agregace. Následuje výčet jednotlivých experimentů.

### 5.3.1 Součty

Součtům bylo věnováno 10 experimentů – pro každý speciální případ z tabulky 2.1 alespoň jeden.

**Experiment 1: MA(2) + WN** Parametry modelu MA(2) byly voleny jako  $c_1 = -3, c_2 = 1$ . Dle teorie by se měl součet řídit modelem MA(2). Z tabulky 5.1 je vidět, že pro délku řady 120 pozorování tomu výsledky neodpovídají, ale při délce řady 900, kde očekáváme lepší výsledky, už byl model MA(2) vyhodnocen jako nejlepší téměř v 39% případů, což je vcelku uspokojivý výsledek, vezmeme-li v úvahu automatickou volbu nejlepšího modelu a povahu experimentu. Při volbě jiných parametrů by výsledky vyšly rovněž jiné.

**Experiment 2: MA(1) + MA(1)** Pro tento experiment jsme zvolili situaci z příkladu 2.2, kdy dojde ke snížení řádu oproti maximálnímu předpokládanému modelu vlivem volby koeficientů  $c_1 = -d_1$ . V našem experimentu jsme zvolili  $c_1 = 2$ . Součet by se tedy dle očekávání měl řídit modelem WN. Výsledky experimentu zachycuje tabulka 5.2. Při obou délkách posloupností výsledky odpovídají teorii a u delších řad s vyšší frekvencí, tedy přesvědčivěji. Tomuto výsledku nepochybně pomohlo, že AIC silně penalizuje složitější modely.

**Experiment 3: MA(1) + MA(3)** V tomto experimentu se jedná o typickou situaci při sčítání dvou posloupností klouzavých součtů. Volba parametrů byla následující:  $c_1 = 0,9$ ,  $d_1 = -\frac{2}{3}$ ,  $d_2 = \frac{1}{4}$ ,  $d_3 = -\frac{1}{6}$ . Z výsledků v tabulce 5.3 je patrné, že teoretický model MA(3) u délky řady 120 neobstál. U délky 900 obstál jen o málo oproti např. MA(2) či ARMA(2, 2). Částečně to může být vysvětleno charakterem kritéria volby nejlepšího modelu dle AIC, které modely s více parametry penalizuje silněji. Za zmínku stojí, že v našich experimentech netestujeme modely s více parametry, např. ARMA(3, 2) nebo jen MA(4), což by mohlo přesvědčivost volby modelu MA(3) ještě více oslabit. Navýšení počtu testovaných modelů by činilo experiment ještě více komplexní a některé omezující předpoklady přijaty být musely.

**Experiment 4: MA(1) + AR(1)** Volba parametrů:  $c_1 = 0,2$ ,  $a_1 = -0,3$ . Dle teorie by se měl součet řídit modelem ARMA(1, 2), což výsledky číselné simulace v tabulce 5.4 nepotvrzují. Při obou délkách řady byl jako nejlepší model zvolen model AR(1). Autoregresní část se tedy zachovala. Důvodem zanedbání části klouzavých součtů by mohla být nízká hodnota parametru  $c_1$  v kombinaci s kritériem volby nejlepšího modelu, který oceňuje málo parametrů.

**Experiment 5: AR(1) + WN** Dle teorie by se měl součet řídit modelem ARMA(1, 1). Volba parametru:  $a_1 = 0,6$ . Z tabulky výsledků 5.5 je vidět, že u řady délky 120 má model ARMA(1, 1) vyšší frekvenci než jiné modely, ale nejlépe vychází AR(1). U délky řady 900 už výsledky více odpovídají teorii.

**Experiment 6: AR(2) + WN** Případy, kdy sčítáme autoregresní posloupnost a bílý šum, jsou v praxi velmi hojné. Jedná se o situaci signálu a šumu. Proto jsme přidali ještě jeden experiment pro tento případ. Tentokrát jsme parametr  $a_1$  nechali nulový a parametr  $a_2$  položili roven  $\frac{1}{16}$ . Dle teorie by se součet měl řídit parametrem ARMA(2, 2). Výsledky v tabulce 5.6 sice favorizují bílý šum, ale správný model je hned na druhém místě s rozumným náskokem před zbytkem u obou délek řad. Při počtu parametrů a metodě výběru nejlepšího modelu je to obstojný výsledek. U řady délky 900 je frekvence správného modelu opět vyšší.

**Experiment 7: AR(1) + AR(1)** Hodnoty autoregresních koeficientů:  $a_1 = 0,4$  a  $b_1 = 0,8$ . Součet by se měl řídit dle teorie modelem ARMA(2, 1), což výsledky z tabulky 5.7 nepotvrdily. Alespoň posloupnosti klouzavých součtů mají frekvence nulové, zejména u řady délky 900.

**Experiment 8: AR(1) + ARMA(1, 1)** Hodnoty parametrů:  $a_1 = 0,45, b_1 = 0,55, d_1 = 0,7$ . Výsledek by se měl řídit modelem ARMA(2, 2), ale výsledky z tabulky 5.8 hovoří ve prospěch modelu AR(1). Toto může být způsobeno volbou koeficientů, kdy  $a_1$  se příliš neliší od  $b_1$ . Takovou hypotézu by bylo samozřejmě nutné otestovat.

**Experiment 9: ARMA(1, 1) + WN** Máme-li signál řídicí se modelem ARMA(1, 1), který je pozorován s šumem, teorie tvrdí, že výsledek se opět řídí modelem ARMA(1, 1), samozřejmě s jinými parametry. Pro tento experiment jsme zvolili parametry  $a_1 = -0,7, c_1 = 0,1$ . Výsledky v tabulce 5.9 prokazují, že u řady délky 900 se téměř 50% případů shoduje s teoretickým výsledkem. U kratších řad sice prvenství drží model AR(1), ale teoreticky správný výsledek ARMA(1, 1) je na místě druhém. Při nízké hodnotě parametru  $c_1$  se jedná o znamenitý výsledek.

**Experiment 10: ARMA(1, 1) + ARMA(1, 1)** V tomto experimentu jsme zvolili parametry u prvního ARMA modelu stejně jako v minulém případě, tedy  $a_1 = -0,7, c_1 = 0,1$ , a u druhého  $b_1 = 0,8, d_1 = -0,2$ . Dle teorie by se měl součet řídit smíšeným modelem ARMA(2, 2). Výsledky z tabulky 5.10 ovšem hovoří ve prospěch autoregresního modelu řádu dva. Nejspíše tato volba parametrů ruší efekt klouzavých součtů. Alespoň frekvence u řady délky 900 je u modelu ARMA(2, 2) vyšší než u kratší řady, tedy je teoreticky správnému výsledku blíže.

Model	Frekvence		Koeficienty			
WN	0	0				
MA(1)	0,388		-0,5824			
		0,016	-0,5735			
MA(2)	0,11		-0,6963	0,2130		
		0,386	-0,6366	0,1228		
MA(3)	0,036		-0,6717	0,1170	0,0711	
		0,037	-0,6301	0,1028	0,0258	
AR(1)	0,046		-0,5286			
		0	NaN			
AR(2)	0,161		-0,6377	-0,2788		
		0,044	-0,6074	-0,2345		
AR(3)	0,025		-0,6226	-0,3276	-0,1767	
		0,078	-0,6289	-0,2998	-0,1197	
ARMA(1, 1)	0,077		-0,2472	-0,4422		
		0,257	-0,2075	-0,4260		
ARMA(1, 2)	0,067		0,2154	-0,8762	0,2392	
		0,08	0,2853	-0,9106	0,2698	
ARMA(2, 1)	0,029		-0,5309	-0,1168	-0,0945	
		0,014	-0,3206	-0,1189	-0,3138	
ARMA(2, 2)	0,028		-0,0992	-0,3262	-0,5087	0,3033
		0,029	-0,4089	-0,1030	-0,2202	-0,0666

Tabulka 5.1: Experiment 1: MA(2) + WN



Model	Frekvence		Koeficienty			
WN	0,534	0,567				
MA(1)	0,055		-0,0041			
		0,055	0,0181			
MA(2)	0,025		0,0239	-0,1086		
		0,021	-0,0208	-0,0101		
MA(3)	0,01		0,0288	0,0150	-0,0009	
		0,013	0,0142	-0,0030	-0,0502	
AR(1)	0,051		0,0132			
		0,045	0,0041			
AR(2)	0,031		-0,0124	-0,0491		
		0,021	0,0020	-0,0288		
AR(3)	0,012		0,0114	-0,0855	-0,0263	
		0,008	-0,0068	-0,0328	0,0004	
ARMA(1, 1)	0,048		-0,0313	0,0394		
		0,052	0,0100	-0,0111		
ARMA(1, 2)	0,013		-0,1091	0,1213	0,0040	
		0,01	-0,1789	0,1936	0,0387	
ARMA(2, 1)	0,011		0,1128	-0,1292	-0,1150	
		0,013	-0,3313	-0,0274	0,3484	
ARMA(2, 2)	0,183		0,0316	-0,8428	-0,04302	0,9464
		0,171	0,0127	-0,8672	-0,0130	0,8788

Tabulka 5.2: Experiment 2: MA(1) + MA(1)

Model	Frekvence		Koeficienty			
WN	0,415	0,016				
MA(1)	0,021		0,0685			
		0	NaN			
MA(2)	0,076		0,0570	0,2435		
		0,171	0,0257	0,1240		
MA(3)	0,039		-0,0222	0,1552	-0,1826	
		0,192	0,0102	0,1167	-0,0768	
AR(1)	0,059		0,0495			
		0	NaN			
AR(2)	0,056		-0,0207	0,2083		
		0,13	-0,0018	0,1189		
AR(3)	0,011		0,0103	0,1338	-0,1502	
		0,102	0,0201	0,1008	-0,0881	
ARMA(1, 1)	0,05		-0,3405	0,2841		
		0,015	-0,2717	0,2518		
ARMA(1, 2)	0,018		-0,3453	0,3996	0,2155	
		0,071	-0,5327	0,5508	0,1263	
ARMA(2, 1)	0,023		0,0149	0,0769	0,0307	
		0,069	-0,5313	0,1225	0,5558	
ARMA(2, 2)	0,197		-0,1972	-0,7793	0,2291	0,9531
		0,164	-0,4829	-0,6355	0,4962	0,7212

Tabulka 5.3: Experiment 3: MA(1) + MA(3)

Model	Frekvence		Koeficienty			
WN	0,06	0				
MA(1)	0,273	0,266	0,2802			
MA(2)	0,038	0,016	0,2481	0,0729		
MA(3)	0,021	0,026	0,2580	0,0982	0,1874	
AR(1)	0,309	0,511	0,2525	0,1103	0,0328	
AR(2)	0,034	0,011	0,2479	0,0352		
AR(3)	0,018	0,018	0,2776	0,2525		
ARMA(1,1)	0,065	0,018	0,2271	-0,0006		
ARMA(1,2)	0,028	0,044	0,2797	-0,0066	0,0323	
ARMA(2,1)	0,028	0,05	0,2551	-0,0697	0,0320	
ARMA(2,2)	0,098	0,028	0,2445	-0,0318		
			0,0002	0,1994		
			0,4999	-0,2705		
			0,0679	0,1886	0,0438	
			0,0841	0,1785	0,0273	
			0,3368	-0,0151	-0,0492	
			0,3339	-0,0464	-0,0739	
			0,0807	-0,7740	0,0987	0,8788
			0,1567	-0,2043	0,0816	0,2203

Tabulka 5.4: Experiment 4: MA(1) + AR(1)

Model	Frekvence		Koeficienty			
WN	0,008	0				
MA(1)	0,061	0	-0,3233			
MA(2)	0,066	0,006	NaN			
MA(3)	0,038	0,045	-0,3316	0,2923		
AR(1)	0,407	0,029	-0,3210	0,1859		
AR(2)	0,108	0,244	-0,3490	0,2371	-0,2582	
AR(3)	0,026	0,053	-0,3239	0,2016	-0,1252	
ARMA(1,1)	0,143	0,436	-0,3727			
ARMA(1,2)	0,021	0,044	-0,3665			
ARMA(2,1)	0,028	0,053	-0,2871	0,2039		
ARMA(2,2)	0,057	0,042	-0,3212	0,1105		
			-0,3602	-0,0242	-0,1995	
			-0,3305	0,0610	-0,0731	
			-0,7854	0,5119		
			-0,6176	0,2951		
			-0,1780	-0,1983	0,1109	
			-0,7483	0,4121	-0,0903	
			0,1515	0,2439	-0,5406	
			-0,5225	0,0130	0,1899	
			-0,5302	-0,4950	0,2966	0,5935
			-0,1565	0,2762	-0,1624	-0,1327

Tabulka 5.5: Experiment 5: AR(1) + WN

Model	Frekvence		Koeficienty			
WN	0,502	0,434				
MA(1)	0,048		-0,0243			
		0,037	-0,0041			
MA(2)	0,039		-0,0374	-0,1209		
		0,039	0,0023	-0,0860		
MA(3)	0,019		-0,0218	-0,0284	0,0660	
		0,02	-0,0069	-0,0444	0,0140	
AR(1)	0,028		-0,0221			
		0,012	0,0112			
AR(2)	0,03		0,0188	-0,1853		
		0,062	0,0035	-0,0752		
AR(3)	0,015		0,0242	-0,1404	-0,0357	
		0,015	-0,0059	-0,0587	-0,0322	
ARMA(1,1)	0,06		0,0371	-0,0385		
		0,074	0,0414	-0,0387		
ARMA(1,2)	0,014		-0,3306	0,3181	-0,0755	
		0,02	0,2569	-0,2387	-0,0586	
ARMA(2,1)	0,013		0,2411	-0,1870	-0,2291	
		0,012	0,1268	-0,0527	-0,1274	
ARMA(2,2)	0,208		0,0464	-0,8185	-0,0451	0,8699
		0,247	0,0613	-0,8368	-0,0609	0,8319

Tabulka 5.6: Experiment 6: AR(2) + WN

Model	Frekvence		Koeficienty			
WN	0	0				
MA(1)	0		NaN			
		0	NaN			
MA(2)	0,006		-0,6196	0,3716		
		0	NaN	NaN		
MA(3)	0,031		-0,6617	0,4648	-0,3278	
		0	NaN	NaN	NaN	
AR(1)	0,593		-0,6607			
		0,178	-0,6765			
AR(2)	0,059		-0,5412	0,1725		
		0,077	-0,6155	0,0846		
AR(3)	0,032		-0,6133	-0,0634	-0,1945	
		0,066	-0,6346	0,0155	-0,0776	
ARMA(1,1)	0,107		-0,7980	0,2308		
		0,266	-0,7477	0,1294		
ARMA(1,2)	0,06		-0,8158	0,1888	-0,1486	
		0,122	-0,8054	0,1783	-0,1016	
ARMA(2,1)	0,054		-0,2157	0,3147	-0,4497	
		0,176	-1,1694	-0,2963	0,5453	
ARMA(2,2)	0,014		-0,6365	0,0302	0,0244	0,0738
		0,032	-0,2689	0,3708	-0,3552	-0,1214

Tabulka 5.7: Experiment 7: AR(1) + AR(1)

Model	Frekvence		Koeficienty			
WN	0,163	0				
MA(1)	0,159		-0,2476			
		0,024	-0,1835			
MA(2)	0,053		-0,2099	0,1629		
		0,092	-0,1780	0,1034		
MA(3)	0,031		-0,1836	0,1227	-0,1119	
		0,046	-0,1822	0,0840	-0,0644	
AR(1)	0,259		-0,2340			
		0,354	-0,1861			
AR(2)	0,039		-0,1668	0,1525		
		0,127	-0,1726	0,0768		
AR(3)	0,014		-0,2057	-0,0280	-0,2087	
		0,021	-0,1688	0,0212	-0,0414	
ARMA(1,1)	0,085		-0,4971	0,3398		
		0,192	-0,5591	0,3898		
ARMA(1,2)	0,019		0,3586	-0,5937	0,1953	
		0,025	-0,5457	0,3511	-0,0496	
ARMA(2,1)	0,024		-0,5665	-0,1313	0,3598	
		0,041	-0,0269	0,0688	-0,1547	
ARMA(2,2)	0,129		-0,2689	-0,7926	0,1618	0,9209
		0,041	-0,4941	-0,2567	0,3376	0,2537

Tabulka 5.8: Experiment 8: AR(1) + ARMA(1,1)

Model	Frekvence		Koeficienty			
WN	0	0				
MA(1)	0,009		0,3902			
		0	NaN			
MA(2)	0,032		0,4352	0,3245		
		0	NaN	NaN		
MA(3)	0,045		0,4333	0,3200	0,2764	
		0,002	0,4709	0,2999	0,1617	
AR(1)	0,373		0,4978			
		0,004	0,5129			
AR(2)	0,117		0,4127	0,1952		
		0,249	0,4458	0,1377		
AR(3)	0,039		0,4234	0,0288	0,1781	
		0,041	0,4601	0,0642	0,0777	
ARMA(1,1)	0,198		0,7876	-0,3924		
		0,498	0,7013	-0,2597		
ARMA(1,2)	0,032		0,6158	-0,1536	0,0429	
		0,037	0,7788	-0,3193	-0,0889	
ARMA(2,1)	0,048		0,1807	0,2477	0,2737	
		0,041	1,0544	-0,2090	-0,6043	
ARMA(2,2)	0,041		0,6653	-0,2052	-0,2923	0,2651
		0,043	0,4289	0,1963	0,0197	-0,0636

Tabulka 5.9: Experiment 9: ARMA(1,1) + WN

Model	Frekvence		Koefficienty			
WN	0	0				
MA(1)	0	0	NaN			
MA(2)	0,019	0	NaN	NaN		
MA(3)	0	0	NaN	NaN	NaN	
AR(1)	0	0	NaN	NaN	NaN	
AR(2)	0,636	0	NaN			
AR(3)	0,075	0,582	-0,1038	0,5720		
ARMA(1,1)	0,001	0,099	-0,1026	0,5941		
ARMA(1,2)	0,033	0	-0,1363	0,5866	0,0628	
ARMA(2,1)	0,049	0	-0,1333	0,6016	0,0481	
ARMA(2,2)	0,067	0,035	-0,8505	0,5582		
		0,183	NaN	NaN		
			-0,5003	0,3882	0,4989	
			NaN	NaN	NaN	
			-0,0154	0,5865	-0,1248	
			-0,0633	0,6068	-0,0604	
			-0,1166	0,4383	0,0005	0,2859
			-0,1209	0,5038	0,0054	0,1379

Tabulka 5.10: Experiment 10: ARMA(1,1) + ARMA(1,1)

### 5.3.2 Součiny

Následujících 10 experimentů bylo věnováno problematice součinů. Na rozdíl od součtů vychází výsledky o poznání hůře. Tím myslíme, že není dosahováno teoretických maximaláních modelů tak často jako u součtů, což činí teorii méně užitečnou. Tento jev může být způsoben i rolí rozptylu, s kterou tyto experimenty nepracují.

**Experiment 11: MA(2) × WN** Parametry jsme zvolili  $c_1 = -\frac{1}{6}, c_2 = -\frac{1}{3}$ . Dle teoretických výsledků by se měl součin řídit modelem MA(2). Výsledky naší simulace v tabulce 5.11 tomu neodpovídají a výsledný proces byl nejčastěji považován za bílý šum, případně smíšený model ARMA(2, 2).

**Experiment 12: MA(1) × MA(3)** V tomto experimentu jsme volili parametry stejně jako v experimentu 3, tedy  $c_1 = 0,9, d_1 = -\frac{2}{3}, d_2 = \frac{1}{4}, d_3 = -\frac{1}{6}$ . Z výsledků v tabulce 5.12 je vidět, že teoretický maximální model MA(3) není dosažen a výsledná posloupnost je dle kritéria nejnižšího AIC považována za model MA(1), a to u řady délky 900 dokonce s vyšší frekvencí.

**Experiment 13: MA(1) × AR(1)** Volba parametrů:  $c_1 = 0,2, a_1 = -0,3$ , stejně jako u experimentu 4, kdy jsme testovali chování součtu modelů MA(1) + AR(1). Dle teorie by se měl součin řídit modelem MA(1), což výsledky číselné simulace v tabulce 5.13 nepotvrzují. U obou délek řad je součin rozpoznáván jako bílý šum.

**Experiment 14: MA(1) × AR(2)** V tomto experimentu jsme opět zkoušeli, zda se součin posloupnosti klouzavých součtů a autoregresní posloupnosti bude řídit modelem MA, což tvrdí teorie. Simulovaná data, viz tabulka 5.14, tomu nenapovídají. Volba parametrů:  $c_1 = 0,2, a_1 = -\frac{1}{6}, a_2 = -\frac{1}{3}$ . U řad délky 120 byl nejlépe hodnocen model bílého šumu. U řad délky 900 má sice model MA(1) vyšší frekvenci, ale nejlépe byl hodnocen model ARMA(2, 2), který má z testovaných modelů parametrů nejvíce.

**Experiment 15: MA(1) × ARMA(2, 2)** Volba parametrů:  $c_1 = 0,4$  a  $b_1 = \frac{7}{6}, b_2 = \frac{5}{18}, d_1 = -\frac{1}{6}, d_2 = -\frac{1}{3}$ . Dle teorie by se měl výsledný součin řídit modelem MA(1). Z tabulky 5.15 je vidět, že simulovaná data teoretickému výsledku vcelku odpovídají. Opět u řady délky 900 s vyšší přesvědčivostí.

**Experiment 16: AR(3) × WN** Teorie týkající se součinů ARMA procesů tvrdí, že chybí-li jedné z násobených řad autoregresní část, bude chybět i výslednému součinu. V tomto případě by dokonce vzniklý součin měl být bílým šumem. Parametry autoregresní posloupnosti jsme zvolili jako  $a_1 = -\frac{2}{3}, a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = -\frac{1}{6}$ . Výsledky v tabulce 5.16 tomu nasvědčují, kdy pro obě délky řad vychází WN jako nejvhodnější model pro více než 45% případů, tentokrát pro kratší řady dokonce více. Vyšší frekvenci má u obou délek rovněž model ARMA(2, 2).

**Experiment 17: AR(1) × AR(2)** V tomto experimentu by se vzniklý součin dle teorie měl řídit modelem ARMA(2, 1). Volba parametrů:  $a_1 = -0,75, b_1 = 0, b_2 = \frac{1}{16}$ . Výsledky v tabulce 5.17 tomu ovšem neodpovídají. Opět je nejlépe hodnocen bílý šum a na druhém místě model ARMA(2, 2).

**Experiment 18: AR(1) × ARMA(1, 2)** Volba parametrů:  $a_1 = 0,75$  a  $b_1 = 0,3, d_1 = -\frac{1}{6}, d_2 = -\frac{1}{3}$ . Dle teorie by se měl výsledný proces řídit modelem ARMA(1, 2). Výsledky (viz tabulka 5.18) jsou nejasné a favorizují spíše modely MA(1) a MA(2). Opět se zdá, že je autoregresní část u výsledného modelu v simulaci opomenuta.

**Experiment 19: ARMA(1, 1) × ARMA(1, 1)** Volba parametrů:  $a_1 = -0,7, c_1 = 0,1$  a  $b_1 = -\frac{1}{6}, d_1 = -0,2$ . Teorie předpokládá v této situaci maximální model ARMA(1, 1). Simulovaná data opět favorizují spíše bílý šum a na druhém místě model ARMA(2, 2). Viz tabulka 5.19.

**Experiment 20: ARMA(1, 1) × ARMA(2, 1)** Neuspokojivé výsledky předchozích experimentů s autoregresí nás motivovaly zkusit předchozí experiment 19 zopakovat ještě s přidáním jednoho parametru k autoregresní části druhého procesu. Volba parametrů:  $a_1 = -0,7, c_1 = 0,1$  a  $b_1 = -\frac{1}{6}, b_2 = -\frac{1}{3}, d_1 = -0,2$ . Teorie předpokládá, že v této situaci bude maximální model pro součin model ARMA(2, 2). Výsledkem je u kratších řad opět bílý šum a u delších AR(2). Na druhém místě MA(2). Viz tabulka 5.20.

Model	Frekvence		Koeficienty			
WN	0,569	0,526				
MA(1)	0,039		0,0293			
		0,039	0,0031			
MA(2)	0,031		0,0279	-0,0047		
		0,03	0,0120	0,0037		
MA(3)	0,014		-0,0835	0,0474	0,0145	
		0,006	0,0261	0,0178	-0,0074	
AR(1)	0,043		0,0065			
		0,053	0,0008			
AR(2)	0,025		-0,0202	-0,0485		
		0,03	0,0013	0,0044		
AR(3)	0,015		0,0090	0,0078	0,1015	
		0,007	-0,0054	-0,0134	-0,0079	
ARMA(1, 1)	0,061		-0,0893	0,0902		
		0,058	0,0649	-0,0680		
ARMA(1, 2)	0,008		-0,4844	0,5658	-0,0045	
		0,015	-0,3718	0,3824	0,0101	
ARMA(2, 1)	0,013		0,3836	-0,0974	-0,3602	
		0,011	0,2701	-0,0231	-0,2586	
ARMA(2, 2)	0,165		-0,0384	-0,8060	0,0454	0,9152
		0,212	0,0710	-0,8659	-0,0709	0,8799

Tabulka 5.11: Experiment 11: MA(2) × WN

Model	Frekvence		Koeficienty				
WN	0,033	0					
MA(1)	0,422	0,596	-0,3304				
MA(2)	0,028	0,051	-0,2653	-0,1513			
MA(3)	0,021	0,03	-0,3041	-0,0328			
			-0,3179	0,0367	-0,0413		
AR(1)	0,191	0,03	-0,3097	0,0087	-0,0185		
			-0,2948				
AR(2)	0,046	0,03	-0,2936				
			-0,3215	-0,2238			
AR(3)	0,022	0,089	-0,3219	-0,1230			
			-0,2795	-0,1592	-0,0906		
ARMA(1,1)	0,073	0,027	-0,3150	-0,0890	-0,0579		
			0,4511	-0,7085			
ARMA(1,2)	0,031	0,039	0,1164	-0,4264			
			-0,2341	-0,0561	-0,0671		
ARMA(2,1)	0,026	0,059	-0,1324	-0,1866	-0,0292		
			-0,7391	-0,2289	0,4460		
ARMA(2,2)	0,09	0,039	-0,1316	-0,0138	-0,1742		
			0,1526	-0,7573	-0,3348	0,8682	
		0,024	0,3328	-0,1161	-0,6554	0,2056	

Tabulka 5.12: Experiment 12: MA(1)  $\times$  MA(3)

Model	Frekvence		Koeficienty				
WN	0,499	0,217					
MA(1)	0,083		0,1771				
		0,182	0,0828				
MA(2)	0,019		0,0145	-0,0267			
		0,024	0,0633	-0,0101			
MA(3)	0,025		0,0766	0,0089	0,0496		
		0,017	0,0713	-0,0063	0,0069		
AR(1)	0,074		0,1537				
		0,193	0,08096				
AR(2)	0,025		0,0419	-0,1215			
		0,036	0,0636	-0,0444			
AR(3)	0,012		0,0641	-0,0210	0,1360		
		0,009	0,0641	-0,0291	0,0238		
ARMA(1,1)	0,06		-0,1408	0,2230			
		0,089	0,0162	0,0395			
ARMA(1,2)	0,01		-0,4744	0,6026	0,1520		
		0,011	-0,1157	0,1755	0,0288		
ARMA(2,1)	0,013		-0,1626	-0,0381	0,1815		
		0,024	0,2073	-0,0392	-0,1233		
ARMA(2,2)	0,158		-0,1204	-0,7835	0,1698	0,8791	
		0,175	0,0500	-0,7950	-0,0220	0,8069	

Tabulka 5.13: Experiment 13: MA(1)  $\times$  AR(1)



Model	Frekvence		Koeficienty			
WN	0,519	0,27				
MA(1)	0,071		0,1285			
		0,158	0,0821			
MA(2)	0,039		0,0516	0,0094		
		0,039	0,0528	0,0037		
MA(3)	0,017		0,0867	0,0681	0,1167	
		0,014	0,0482	0,0076	-0,0072	
AR(1)	0,046		0,1512			
		0,133	0,0757			
AR(2)	0,022		0,0332	-0,0244		
		0,036	0,0503	-0,0229		
AR(3)	0,019		0,0316	-0,1252	-0,0239	
		0,015	0,0662	-0,0221	0,0317	
ARMA(1,1)	0,052		-0,0681	0,1066		
		0,075	-0,0387	0,0991		
ARMA(1,2)	0,019		0,2266	-0,1867	-0,0950	
		0,012	0,5785	-0,5265	-0,0472	
ARMA(2,1)	0,01		0,0623	-0,0612	-0,0344	
		0,024	0,4471	-0,0460	-0,3945	
ARMA(2,2)	0,167		0,0183	-0,8476	0,0247	0,9520
		0,2	0,1070	-0,8264	-0,0814	0,8414

Tabulka 5.14: Experiment 14: MA(1)  $\times$  AR(2)

Model	Frekvence		Koeficienty			
WN	0,025	0				
MA(1)	0,386		-0,3606			
		0,46	-0,3333			
MA(2)	0,054		-0,3143	-0,0850		
		0,058	-0,3342	-0,0199		
MA(3)	0,037		-0,3524	0,0909	-0,0757	
		0,041	-0,3446	0,0121	-0,0117	
AR(1)	0,167		-0,3485			
		0,056	-0,3115			
AR(2)	0,067		-0,3267	-0,2296		
		0,101	-0,3411	-0,1366		
AR(3)	0,034		-0,3232	-0,1541	-0,0822	
		0,062	-0,3180	-0,1088	-0,0677	
ARMA(1,1)	0,061		0,4301	-0,7072		
		0,055	0,1271	-0,4484		
ARMA(1,2)	0,04		-0,2329	-0,0844	-0,0967	
		0,064	-0,2372	-0,0968	-0,0757	
ARMA(2,1)	0,025		-0,5951	-0,1957	0,3110	
		0,042	-0,2036	-0,0459	-0,1220	
ARMA(2,2)	0,069		0,1546	-0,6449	-0,3767	0,7466
		0,025	0,4973	-0,2803	-0,8176	0,3747

Tabulka 5.15: Experiment 15: MA(1)  $\times$  ARMA(2,2)

Model	Frekvence		Koefficienty			
WN	0,49	0,459				
MA(1)	0,087		0,0091			
		0,059	-0,0069			
MA(2)	0,032		-0,0008	-0,0644		
		0,023	0,0078	-0,0222		
MA(3)	0,027		-0,0184	0,0130	-0,0267	
		0,011	-0,0119	-0,0116	-0,0255	
AR(1)	0,073		-0,0024			
		0,072	0,0065			
AR(2)	0,021		-0,0162	-0,1043		
		0,029	-0,0052	-0,0434		
AR(3)	0,012		0,0095	-0,0453	-0,0793	
		0,014	-0,0148	-0,0092	0,0100	
ARMA(1,1)	0,051		0,0532	-0,0555		
		0,062	-0,0094	0,0144		
ARMA(1,2)	0,023		0,1800	-0,1637	-0,0704	
		0,006	0,0625	-0,0565	0,0565	
ARMA(2,1)	0,01		-0,5683	-0,1058	0,5474	
		0,016	-0,0730	-0,0417	0,0915	
ARMA(2,2)	0,16		-0,0716	-0,8355	0,0721	0,9407
		0,23	0,0184	-0,8405	-0,0158	0,8500

Tabulka 5.16: Experiment 16: AR(3)  $\times$  WN

Model	Frekvence		Koefficienty			
WN	0,418	0,286				
MA(1)	0,089		-0,0010			
		0,073	0,0036			
MA(2)	0,045		0,0174	-0,1660		
		0,074	0	-0,0808		
MA(3)	0,025		0,0055	-0,0471	-0,0409	
		0,018	-0,0043	-0,0336	0,0031	
AR(1)	0,059		0,0294			
		0,047	0,0028			
AR(2)	0,036		-0,0300	-0,1798		
		0,094	0,0044	-0,0834		
AR(3)	0,028		0,0124	-0,1190	0,0595	
		0,033	0,0032	-0,0526	-0,0012	
ARMA(1,1)	0,053		-0,1019	0,1506		
		0,071	0,0954	-0,1035		
ARMA(1,2)	0,021		-0,0142	-0,0108	-0,1220	
		0,02	0,2671	-0,2649	-0,0769	
ARMA(2,1)	0,017		0,0807	-0,1615	-0,0410	
		0,026	0,0848	-0,0921	-0,0806	
ARMA(2,2)	0,177		0,0295	-0,7884	-0,0298	0,8551
		0,214	-0,0045	-0,8033	0,0027	0,7934

Tabulka 5.17: Experiment 17: AR(1)  $\times$  AR(2)

Model	Frekvence		Koeficienty			
WN	0,056	0				
MA(1)	0,306		0,3259			
		0,075	0,3061			
MA(2)	0,095		0,2377	-0,2227		
		0,28	0,2666	-0,1113		
MA(3)	0,022		0,3090	-0,0993	-0,0082	
		0,023	0,2771	-0,1318	-0,0589	
AR(1)	0,054		0,2941			
		0,001	0,2886			
AR(2)	0,122		0,2384	-0,2685		
		0,189	0,2681	-0,1726		
AR(3)	0,027		0,2673	-0,2140	0,1170	
		0,083	0,2760	-0,1944	0,0842	
ARMA(1,1)	0,098		-0,5402	0,7917		
		0,125	-0,3109	0,5764		
ARMA(1,2)	0,047		0,5288	-0,2845	-0,3047	
		0,096	0,5267	-0,2369	-0,2520	
ARMA(2,1)	0,028		0,4864	-0,2504	-0,2033	
		0,014	0,2039	-0,1501	0,0696	
ARMA(2,2)	0,099		-0,2930	-0,6670	0,5157	0,7233
		0,044	-0,5777	-0,2688	0,8374	0,3123

Tabulka 5.18: Experiment 18: AR(1)  $\times$  ARMA(1,2)

Model	Frekvence		Koeficienty			
WN	0,438	0,361				
MA(1)	0,082		-0,1213			
		0,103	-0,0670			
MA(2)	0,049		-0,0335	-0,0396		
		0,035	-0,0427	0,0207		
MA(3)	0,026		-0,0215	0,0182	-0,0186	
		0,02	0,0015	0,0287	0,0056	
AR(1)	0,074		-0,0435			
		0,099	-0,0608			
AR(2)	0,036		-0,0211	-0,0736		
		0,047	-0,0328	-0,0103		
AR(3)	0,014		-0,0231	-0,0166	-0,0326	
		0,023	-0,0387	-0,0212	-0,0077	
ARMA(1,1)	0,054		-0,0017	-0,0270		
		0,067	-0,0003	-0,0291		
ARMA(1,2)	0,019		0,2312	-0,2975	0,0813	
		0,02	-0,4179	0,3816	-0,0017	
ARMA(2,1)	0,013		-0,5384	-0,1519	0,4807	
		0,025	-0,0549	-0,0339	0,0285	
ARMA(2,2)	0,172		-0,0032	-0,8020	-0,0246	0,8998
		0,174	-0,0097	-0,8118	-0,0054	0,8238

Tabulka 5.19: Experiment 19: ARMA(1,1)  $\times$  ARMA(1,1)

Model	Frekvence		Koeficienty			
WN	0,255	0,001				
MA(1)	0,023		-0,0295			
		0	NaN			
MA(2)	0,125		-0,0155	0,2809		
		0,238	-0,0250	0,1692		
MA(3)	0,032		0,0247	0,2201	0,0605	
		0,047	0,0046	0,1601	0,0545	
AR(1)	0,095		-0,0903			
		0	NaN			
AR(2)	0,161		-0,0015	0,2399		
		0,402	-0,0060	0,1728		
AR(3)	0,015		0,0054	0,1339	0,0270	
		0,038	-0,0311	0,1807	0,0632	
ARMA(1,1)	0,065		0,1401	-0,1405		
		0,007	0,3572	-0,3280		
ARMA(1,2)	0,013		0,2973	-0,3748	0,3044	
		0,067	0,3527	-0,3637	0,1714	
ARMA(2,1)	0,024		0,2020	0,2828	-0,2743	
		0,098	0,2772	0,1785	-0,3044	
ARMA(2,2)	0,162		0,0847	-0,7215	-0,0959	0,9103
		0,05	0,2112	-0,0324	-0,2186	0,1722

Tabulka 5.20: Experiment 20: ARMA(1,1)  $\times$  ARMA(2,1)

### 5.3.3 Systematický odběr vzorků

Problematicke systematického odběru vzorků jsme věnovali 20 experimentů, které jsou rozděleny do pěti skupin po čtyřech experimentech. Tento přístup umožňuje detailnější porovnání mezi podobnými pokusy. Zaměřili jsme se na vyšetřování chování při systematickém odběru vzorků z procesů řídicích se modely MA(1), MA(3), AR(1), AR(2) a ARMA(1,1). Těm jsme měnili parametry a rozestupy odběru vzorků  $l$ . Parametry jsme volili kladné i záporné tak, aby kořeny příslušných polynomů byly blízko i dále jednotkovému kruhu. Rozestupy odběru vzorků  $l$  jsme volili 3 a 12, kdy  $l = 3$  reprezentuje kratší či častější odběr a hodnota  $l = 12$  delší prodlevu. Rovněž čísla 3 a 12 předpokládáme v praxi jako užitečná. Následuje výčet experimentů:

**Experimenty 21-24: MA(1)** Teorie tvrdí, že vzniklá posloupnost tímto druhem odběru vzorků je bílý šum, čemuž výsledky z tabulek 5.21 ( $c_1 = 0,9, l = 3$ ), 5.23 ( $c_1 = 0,9, l = 12$ ), 5.23 ( $c_1 = -\frac{1}{3}, l = 3$ ) a 5.24 ( $c_1 = -\frac{1}{3}, l = 12$ ) napovídají. Rovněž, dle očekávání, jsou výsledky přesvědčivější v experimentech s delším rozestupem  $l = 12$ . Naopak vyšší frekvence je u bílého šumu ve všech případech u kratších řad. To může být způsobeno tím, že odběrem vzorků se výsledná posloupnost zkrátila a v případě  $l = 12$  se jednalo dokonce jen o deset čísel.

**Experimenty 25-28: MA(3)** Řád klouzavých součtů 3 jsme zvolili záměrně, aby u rozestupu  $l = 3$  vycházel teoreticky model MA(1), kdežto u rozestupu  $l = 12$  už bílý šum.

**E. 25:**  $c_1 = -\frac{1}{6}, c_2 = \frac{1}{4}, c_3 = -\frac{2}{3}, l = 3$  Z tabulky 5.25 je znamenitě vidět, že model MA(1) byl u kratších řad vyhodnocen jako nejlepší v 52% případů a v případě délky 900 dokonce v 65%.

**E. 26:**  $c_1 = -\frac{1}{6}, c_2 = \frac{1}{4}, c_3 = -\frac{2}{3}, l = 12$  V krásném kontrastu s předchozím výsledkem je vidět, že při rozestupu  $l = 12$  (tabulka 5.26) se už systém vytratil a proces je vyhodnocen jako bílý šum.

**E. 27:**  $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = -\frac{1}{64}, l = 3$  Jen z řádu klouzavých průměrů 3, teorie říká, že by se vzniklá posloupnost měla řídit modelem MA(1). Výsledky experimentu v tabulce 5.27 ovšem vcelku jednoznačně poukazují na bílý šum. Tento výsledek ovšem není při této speciálně volbě parametrů  $c_1, c_2, c_3$  překvapivím a poukazuje na fakt, že i volba koeficientů hraje významnou roli ve výsledném modelu.

**E. 28:**  $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = -\frac{1}{64}, l = 12$  Z výše zmíněných důvodů se výsledná posloupnosti i v tomto případě chová jako bílý šum.

**Experimenty 29-32: AR(1)** Dle teorie by u obou rozestupů ve výsledné posloupnosti měla být zachována autoregrese a výsledný model by měl být AR(1).

**E. 29:**  $a_1 = 0,9, l = 3$  Výsledky simulace v tabulce 5.29 souhlasí s teorií. U řad délky 900 bylo k teoreticky správnému modelu přiřazeno dokonce více než 68% případů.

**E. 30:**  $a_1 = 0,9, l = 12$  Z tabulky 5.30 je vidět, že AR(1) model byl nejlépe hodnocen už jen u řad délky 900, a to už s nižší frekvencí než v minulém experimentu. U řad délky 120 byla vzniklá posloupnost nejčastěji vyhodnocena jako bílý šum, čemuž nejspíše opět pomohla i její délka 10.

**E. 31:**  $a_1 = -\frac{1}{3}, l = 3$  Při tomto experimentu byla výsledná posloupnost u obou délek řad nejčastěji vyhodnocena jako bílý šum, viz tabulka 5.31. Nejspíše kvůli vyšší vzdálenosti kořenu autoregresního polynomu od jednotkového kruhu.

**E. 32:**  $a_1 = -\frac{1}{3}, l = 12$  Stejně jako při experimentu 31 je z tabulky 5.32 patrné, že nejčastěji byla výsledná posloupnost rozpoznána jako bílý šum. Důvodem byla opět hodnota parametru doplněná kratší délkou výsledné řady.

**Experimenty 33-36: AR(2)** 33 ( $a_1 = -\frac{1}{6}, a_2 = -\frac{1}{3}, l = 3$ ): tabulka 5.33, 34 ( $a_1 = -\frac{1}{6}, a_2 = -\frac{1}{3}, l = 12$ ): tabulka 5.34, 35 ( $a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{16}, l = 3$ ): tabulka 5.35 a 36 ( $a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{16}, l = 12$ ): tabulka 5.36 Ve všech čtyřech experimentech by se měla dle teoretických výsledků výsledná posloupnost řídit modelem ARMA(2, 1). Z výsledků je patrné, že jediný experiment 33 vybočuje z řady a nehodnotí výsledné posloupnosti jako bílý šum. U delších posloupností (900) v experimentu 33 je vyhodnocen jako nejlepší model AR(1). Tento rozdíl oproti teoretickému výsledku může být způsoben volbou koeficientů, ale i kritériem výběru nejlepších modelů.

**Experimenty 37-40: ARMA(1, 1)** Ve všech čtyřech experimentech by se měla výsledná posloupnost dle teoretických výsledků řídit modelem ARMA(1, 1).

**E. 37:**  $a_1 = -0,7, c_1 = 0,1, l = 3$  Ač teorie hovoří pro smíšený model ARMA(1, 1), volba koeficientů a kritérium výběru favorizovalo jednoduchý autoregresní model AR(1) a na druhém místě jednoduchý model klouzavých součtů MA(1). Viz tabulka 5.37.

**E. 38:**  $a_1 = -0,7, c_1 = 0,1, l = 12$  V případě delšího rozestupu  $l = 12$  už byl jako nejvhodnější model vybírán nejčastěji bílý šum. Viz tabulka 5.38.

**E. 39:**  $a_1 = 0,5, c_1 = -0,8, l = 3$  U této volby koeficientů byly jako AR(1) nejčastěji hodnoceny už jen posloupnosti délky 900 (před odběrem vzorků). Viz tabulka 5.39.

**E. 40:**  $a_1 = 0,5, c_1 = -0,8, l = 12$  V případě delšího rozestupu  $l = 12$  už byl jako nejvhodnější model vybírán nejčastěji opět bílý šum. Viz tabulka 5.40.

Model	Frekvence		Koeficienty			
WN	0,616	0,523				
MA(1)	0,058		0,0436			
		0,049	-0,0192			
MA(2)	0,035		-0,0465	-0,0606		
		0,021	0,0113	-0,0204		
MA(3)	0,041		0,0263	0,1299	-0,0139	
		0,007	-0,0592	0,0254	-0,0295	
AR(1)	0,053		-0,0314			
		0,043	-0,0134			
AR(2)	0,024		-0,0234	-0,0611		
		0,018	0,0064	-0,0077		
AR(3)	0,008		-0,0202	-0,0788	-0,1072	
		0,011	0,0259	-0,0158	0,0053	
ARMA(1,1)	0,026		0,1223	-0,1336		
		0,058	-0,0772	0,0929		
ARMA(1,2)	0,012		-0,2230	0,2080	0,3171	
		0,015	0,0666	-0,0886	0,0380	
ARMA(2,1)	0,012		-0,2373	-0,1567	0,2718	
		0,01	-0,0257	-0,0737	0,0362	
ARMA(2,2)	0,086		-0,0486	-0,7459	0,0716	0,9344
		0,231	0,0158	-0,8484	-0,0167	0,8959

Tabulka 5.21: Experiment 21: MA(1),  $c_1 = 0,9$ ,  $l = 3$

Model	Frekvence		Koeficienty			
WN	0,641	0,571				
MA(1)	0,111		-0,0309			
		0,055	0,0224			
MA(2)	0,06		-0,0514	0,5404		
		0,021	-0,0394	-0,0464		
MA(3)	0,006		0,5391	0,1165	-0,0283	
		0,02	-0,0415	-0,0038	0,0157	
AR(1)	0,058		0,0553			
		0,054	-0,0203			
AR(2)	0,041		0,0369	-0,3833		
		0,015	-0,0198	0,0667		
AR(3)	0,025		0,1155	-0,0421	-0,1998	
		0,01	0,0717	0,0028	-0,0191	
ARMA(1,1)	0,004		0,1011	-0,4477		
		0,063	-0,0919	0,1162		
ARMA(1,2)	0,004		-0,4679	0,7824	0,9288	
		0,018	-0,1923	0,1617	-0,0838	
ARMA(2,1)	0,008		0,1129	-0,4528	-0,4936	
		0,011	0,1065	-0,1909	-0,0515	
ARMA(2,2)	0,01		-0,0061	-0,9368	0,1517	0,9999
		0,133	0,0355	-0,7489	-0,0389	0,9134

Tabulka 5.22: Experiment 22: MA(1),  $c_1 = 0,9$ ,  $l = 12$

Model	Frekvence		Koeficienty			
WN	0,609	0,488				
MA(1)	0,045		0,0526			
		0,039	-0,0124			
MA(2)	0,045		-0,0074	0,1260		
		0,021	0,0250	0,0219		
MA(3)	0,052		-0,0494	0,0755	0,0686	
		0,015	-0,0200	0,0460	0,0221	
AR(1)	0,048		0,0499			
		0,051	0,0100			
AR(2)	0,022		-0,0049	0,0203		
		0,012	0,0126	-0,0021		
AR(3)	0,007		0,0845	-0,1050	0,0386	
		0,012	-0,0001	0,0128	0,0304	
ARMA(1,1)	0,034		-0,0147	0,0665		
		0,07	0,0254	-0,0373		
ARMA(1,2)	0,019		-0,3541	0,4938	0,2472	
		0,014	0,3176	-0,3095	-0,0166	
ARMA(2,1)	0,008		-0,5100	-0,3599	0,4945	
		0,014	0,5168	-0,0665	-0,5119	
ARMA(2,2)	0,086		-0,1728	-0,7533	0,2083	0,9832
		0,24	0,0311	-0,8119	-0,0281	0,8558

Tabulka 5.23: Experiment 23: MA(1),  $c_1 = -\frac{1}{3}$ ,  $l = 3$

Model	Frekvence		Koeficienty			
WN	0,641	0,584				
MA(1)	0,133		-0,1103			
		0,054	-0,0543			
MA(2)	0,048		0,1081	0,3947		
		0,024	-0,0463	-0,0789		
MA(3)	0,007		0,1203	0,2486	-0,3874	
		0,013	0,0379	0,0362	-0,2396	
AR(1)	0,048		-0,1337			
		0,035	-0,0085			
AR(2)	0,041		0,0415	-0,3531		
		0,018	0,0468	-0,1152		
AR(3)	0,032		-0,0162	-0,2101	0,0304	
		0,009	0,0677	-0,0753	-0,0106	
ARMA(1,1)	0,007		0,4285	-0,4215		
		0,058	-0,1287	0,1028		
ARMA(1,2)	0,009		0,2066	0,0975	0,9999	
		0,016	0,1072	-0,0991	-0,0510	
ARMA(2,1)	0,011		-0,0932	-0,4634	-0,4269	
		0,013	0,0686	-0,2001	-0,0923	
ARMA(2,2)	0,007		0,0798	-0,4800	-0,3378	0,9959
		0,146	0,2093	-0,7672	-0,2348	0,9221

Tabulka 5.24: Experiment 24: MA(1),  $c_1 = -\frac{1}{3}$ ,  $l = 12$



Model	Frekvence		Koeficienty				
WN	0,007	0					
MA(1)	0,52	0,652	-0,6390				
MA(2)	0,051	0,054	-0,6197	-0,0841			
MA(3)	0,048	0,03	-0,5763	-0,0055			
			-0,6603	0,1054	-0,0769		
AR(1)	0,105	0	-0,5920	0,0450	-0,0447		
			-0,5103				
AR(2)	0,07	0	NaN				
			-0,5844	-0,4194			
AR(3)	0,023	0,02	-0,5806	-0,3008			
			-0,5156	-0,3873	-0,4257		
ARMA(1,1)	0,041	0,038	-0,5713	-0,3421	-0,2030		
			0,2033	-0,7978			
ARMA(1,2)	0,031	0,044	0,0289	-0,6197			
			0,3297	-1,1091	0,4348		
ARMA(2,1)	0,024	0,08	-0,2923	-0,2932	-0,1646		
			-1,0072	-0,5028	0,5550		
ARMA(2,2)	0,051	0,022	0,2074	0,1595	-0,7920		
			0,1374	-0,6229	-0,6986	0,7791	
		0,018	-0,1189	-0,0864	-0,4499	-0,0309	

Tabulka 5.25: Experiment 25: MA(3),  $c_1 = -\frac{1}{6}$ ,  $c_2 = \frac{1}{4}$ ,  $c_3 = -\frac{2}{3}$ ,  $l = 3$

Model	Frekvence		Koeficienty				
WN	0,638	0,572					
MA(1)	0,121	0,056	-0,0042				
			0,0215				
MA(2)	0,061	0,032	0,0597	0,7666			
			-0,0139	0,0220			
MA(3)	0,006	0,023	0,1635	-0,3083	-0,3333		
			0,0117	0,0558	-0,0496		
AR(1)	0,043	0,05	0,0136				
			0,0171				
AR(2)	0,047	0,015	0,0084	-0,5706			
			-0,0306	0,0085			
AR(3)	0,027	0,012	0,0110	-0,1460	-0,0347		
			0,0079	-0,0343	0,0039		
ARMA(1,1)	0,003	0,043	0,3343	-0,3547			
			-0,0849	0,1081			
ARMA(1,2)	0,013	0,005	-0,1672	0,0425	1		
			-0,5004	0,3836	-0,2802		
ARMA(2,1)	0,015	0,013	-0,1874	-0,7967	0,1801		
			-0,0803	-0,0127	0,0206		
ARMA(2,2)	0,008	0,144	-0,1047	-0,8914	0,3696	0,9999	
			-0,0699	-0,7904	0,0737	0,9373	

Tabulka 5.26: Experiment 26: MA(3),  $c_1 = -\frac{1}{6}$ ,  $c_2 = \frac{1}{4}$ ,  $c_3 = -\frac{2}{3}$ ,  $l = 12$

Model	Frekvence		Koefficienty			
WN	0,58	0,491				
MA(1)	0,058		-0,0797			
		0,048	-0,0791			
MA(2)	0,046		-0,0723	0,0676		
		0,021	-0,0312	-0,0299		
MA(3)	0,039		0,0026	0,2173	0,0678	
		0,021	-0,0175	0,0312	-0,0347	
AR(1)	0,053		-0,1039			
		0,045	-0,0445			
AR(2)	0,025		-0,0248	-0,1106		
		0,016	-0,0171	-0,0043		
AR(3)	0,009		-0,0893	0,0281	0,1767	
		0,01	-0,0787	-0,0400	-0,0319	
ARMA(1,1)	0,046		0,1769	-0,2698		
		0,07	-0,1625	0,1361		
ARMA(1,2)	0,014		0,1128	-0,0709	0,2074	
		0,008	0,2750	-0,2692	0,0241	
ARMA(2,1)	0,014		-0,4144	-0,2429	0,4211	
		0,01	-0,1631	-0,0285	0,1142	
ARMA(2,2)	0,089		-0,1703	-0,7617	0,1876	0,9868
		0,24	-0,0173	-0,8212	0,0110	0,8672

Tabulka 5.27: Experiment 27: MA(3),  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 0$ ,  $c_3 = -\frac{1}{64}$ ,  $l = 3$

Model	Frekvence		Koeficienty			
WN	0,634	0,579				
MA(1)	0,114		-0,0804			
		0,056	-0,0059			
MA(2)	0,062		0,1804	0,8122		
		0,028	-0,0413	-0,0358		
MA(3)	0,003		0,3489	-0,3489	-1	
		0,013	0,0747	-0,0163	0,0144	
AR(1)	0,061		0,0505			
		0,043	0,0234			
AR(2)	0,039		-0,0482	-0,3341		
		0,023	0,0004	-0,1116		
AR(3)	0,03		-0,0059	-0,2059	0,1767	
		0,011	0,0040	-0,0546	-0,1585	
ARMA(1,1)	0,006		-0,3257	0,2425		
		0,053	0,0155	-0,0251		
ARMA(1,2)	0,006		0,3175	-0,4294	0,9725	
		0,015	-0,3842	0,4737	0,1280	
ARMA(2,1)	0,008		0,0020	-0,5861	-0,2841	
		0,013	0,0196	-0,0700	-0,0629	
ARMA(2,2)	0,018		-0,0939	-0,9477	-0,0204	0,9987
		0,132	-0,1064	-0,7444	0,1080	0,9124

Tabulka 5.28: Experiment 28: MA(3),  $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = -\frac{1}{64}, l = 12$

Model	Frekvence		Koeficienty			
WN	0	0				
MA(1)	0,038		-0,6163			
		0	NaN			
MA(2)	0,058		-0,7895	0,6369		
		0	NaN	NaN		
MA(3)	0,061		-0,7589	0,6621	-0,5340	
		0,003	-0,7406	0,4138	-0,2293	
AR(1)	0,572		-0,6956			
		0,688	-0,7265			
AR(2)	0,04		-0,8498	-0,1415		
		0,054	-0,7063	0,01777		
AR(3)	0,028		-0,6914	-0,0596	-0,0682	
		0,031	-0,7216	-0,0208	-0,0327	
ARMA(1,1)	0,056		-0,6824	-0,0520		
		0,061	-0,7425	0,0277		
ARMA(1,2)	0,021		-0,2985	-0,5697	0,4145	
		0,02	-0,7294	0,0009	0,0186	
ARMA(2,1)	0,037		-0,6860	0,0269	-0,1183	
		0,064	-0,3367	0,2587	-0,4100	
ARMA(2,2)	0,032		-0,7770	-0,3631	0,1901	0,7470
		0,019	-0,7810	-0,0784	0,0611	0,1369

Tabulka 5.29: Experiment 29: AR(1),  $a_1 = 0,9, l = 3$

Model	Frekvence		Koeficienty			
WN	0,52	0,082				
MA(1)	0,175		0,6953			
		0,218	0,3410			
MA(2)	0,059		0,5371	0,8166		
		0,046	0,3080	0,2164		
MA(3)	0,008		1,0711	0,5541	0,0263	
		0,033	0,2984	0,1468	0,1540	
AR(1)	0,105		0,5227			
		0,333	0,3218			
AR(2)	0,037		0,2374	-0,3992		
		0,022	0,2511	0,0271		
AR(3)	0,032		0,2789	-0,3000	0,1954	
		0,018	0,2605	0,0205	-0,0400	
ARMA(1,1)	0,012		0,7957	-0,6021		
		0,051	0,0848	0,1672		
ARMA(1,2)	0,009		0,0776	0,0726	1	
		0,018	-0,1242	0,4440	0,0774	
ARMA(2,1)	0,008		0,2635	-0,4207	-0,2809	
		0,027	0,8232	-0,2377	-0,4809	
ARMA(2,2)	0,016		0,8447	-0,9564	-1,0745	0,9999
		0,127	0,2844	-0,7021	-0,0678	0,8538

Tabulka 5.30: Experiment 30: AR(1),  $a_1 = 0,9$ ,  $l = 12$

Model	Frekvence		Koeficienty			
WN	0,601	0,449				
MA(1)	0,049		-0,0667			
		0,067	-0,0795			
MA(2)	0,045		-0,0127	0,0123		
		0,02	-0,0508	-0,0012		
MA(3)	0,047		-0,0299	0,1441	0,1199	
		0,011	-0,0802	0,0331	-0,0315	
AR(1)	0,054		-0,1164			
		0,077	-0,1096			
AR(2)	0,029		-0,0383	-0,0554		
		0,024	-0,0426	0,0029		
AR(3)	0,008		-0,1288	-0,0570	-0,0727	
		0,011	-0,0503	-0,0022	-0,0185	
ARMA(1,1)	0,041		-0,1223	0,0933		
		0,056	0,0594	-0,1105		
ARMA(1,2)	0,015		-0,0182	-0,1304	0,0924	
		0,012	0,2706	-0,3144	0,0138	
ARMA(2,1)	0,002		-0,12935	-0,3203	0,0001	
		0,019	-0,1771	-0,0974	0,1402	
ARMA(2,2)	0,081		-0,0537	-0,7772	0,04533	0,9743
		0,233	0,0463	-0,8430	-0,0655	0,8844

Tabulka 5.31: Experiment 31: AR(1),  $a_1 = -\frac{1}{3}$ ,  $l = 3$

Model	Frekvence		Koeficienty			
WN	0,642	0,591				
MA(1)	0,118		-0,0547			
		0,058	-0,0227			
MA(2)	0,058		0,0995	0,6279		
		0,019	-0,0664	-0,0559		
MA(3)	0,003		-0,0007	-0,5931	-0,3464	
		0,032	0,0246	-0,0305	0,0084	
AR(1)	0,052		-0,0473			
		0,042	-0,0192			
AR(2)	0,037		-0,0752	-0,3556		
		0,015	-0,0550	-0,0288		
AR(3)	0,029		0,0790	-0,0956	-0,0842	
		0,008	-0,0139	0,0294	0,0130	
ARMA(1,1)	0,008		0,0702	-0,2424		
		0,046	-0,1609	0,1860		
ARMA(1,2)	0,007		-0,2255	0,6395	0,9553	
		0,015	-0,2270	0,1484	-0,0455	
ARMA(2,1)	0,016		0,0238	-0,6990	0,0019	
		0,012	0,1351	-0,1399	-0,1566	
ARMA(2,2)	0,008		-0,2332	-0,9346	0,3652	0,9997
		0,139	0,0065	-0,7608	-0,0047	0,9114

Tabulka 5.32: Experiment 32: AR(1),  $a_1 = -\frac{1}{3}$ ,  $l = 12$

Model	Frekvence		Koeficienty			
WN	0,493	0,082				
MA(1)	0,086		0,3581			
		0,107	0,1591			
MA(2)	0,044		0,2051	0,1968		
		0,079	0,1493	0,1403		
MA(3)	0,044		0,2059	0,2455	0,0339	
		0,024	0,1602	0,0666	0,0561	
AR(1)	0,111		0,3132			
		0,331	0,1602			
AR(2)	0,027		0,1910	0,1274		
		0,051	0,1267	0,1143		
AR(3)	0,012		0,0943	-0,1006	0,1039	
		0,014	0,1317	0,0252	-0,0079	
ARMA(1,1)	0,049		0,2411	-0,0707		
		0,085	0,5767	-0,4448		
ARMA(1,2)	0,016		-0,1393	0,3480	0,1995	
		0,022	-0,3430	0,5197	0,1225	
ARMA(2,1)	0,012		0,5275	-0,2004	-0,4572	
		0,027	-0,1831	0,0748	0,3466	
ARMA(2,2)	0,067		0,2952	-0,7340	-0,1848	0,9929
		0,152	0,2901	-0,7166	-0,2069	0,7637

Tabulka 5.33: Experiment 33: AR(2),  $a_1 = -\frac{1}{6}$ ,  $a_2 = -\frac{1}{3}$ ,  $l = 3$

Model	Frekvence		Koefficienty			
WN	0,641	0,546				
MA(1)	0,121		-0,0888			
		0,066	0,0378			
MA(2)	0,059		0,1451	0,6915		
		0,032	-0,0344	-0,0337		
MA(3)	0,008		-0,0755	0,0491	0,0001	
		0,025	0,0324	0,0491	-0,01829	
AR(1)	0,055		-0,1729			
		0,042	0,0242			
AR(2)	0,031		0,0491	-0,2466		
		0,014	0,0679	0,0467		
AR(3)	0,034		0,0635	-0,1408	-0,0940	
		0,006	-0,0748	-0,0332	-0,1128	
ARMA(1,1)	0,007		-0,1196	-0,1388		
		0,061	-0,1165	0,0950		
ARMA(1,2)	0,005		0,5160	-0,6204	0,9999	
		0,014	-0,2460	0,2419	0,0042	
ARMA(2,1)	0,011		-0,1647	-0,4517	0,5727	
		0,013	0,0662	-0,1445	-0,0795	
ARMA(2,2)	0,012		-0,3680	-0,9760	0,4997	0,9937
		0,157	0,0712	-0,7773	-0,0825	0,9246

Tabulka 5.34: Experiment 34: AR(2),  $a_1 = -\frac{1}{6}$ ,  $a_2 = -\frac{1}{3}$ ,  $l = 12$

Model	Frekvence		Koefficienty			
WN	0,614	0,496				
MA(1)	0,045		0,0174			
		0,044	0,0031			
MA(2)	0,038		0,0373	-0,1215		
		0,016	0,0087	-0,0067		
MA(3)	0,041		0,0551	0,0953	0,0943	
		0,013	0,0226	0,0451	-0,0756	
AR(1)	0,047		-0,0559			
		0,047	0,0029			
AR(2)	0,013		0,0236	-0,0032		
		0,023	0,0301	0,0395		
AR(3)	0,008		0,0435	-0,0979	-0,1905	
		0,015	0,0050	0,0439	-0,0049	
ARMA(1,1)	0,038		-0,1261	0,2170		
		0,052	-0,1219	0,1325		
ARMA(1,2)	0,01		0,3378	-0,4736	0,1935	
		0,014	0,2501	-0,2522	-0,0400	
ARMA(2,1)	0,01		-0,0320	-0,1990	-0,0280	
		0,017	0,0342	-0,0378	-0,0324	
ARMA(2,2)	0,096		0,1600	-0,7642	-0,1535	0,9861
		0,243	0,1114	-0,8456	-0,1136	0,8869

Tabulka 5.35: Experiment 35: AR(2),  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = \frac{1}{16}$ ,  $l = 3$

Model	Frekvence		Koeficienty			
WN	0,659	0,582				
MA(1)	0,111		-0,0290			
		0,053	-0,0345			
MA(2)	0,061		0,0917	0,4669		
		0,034	-0,0211	0,0350		
MA(3)	0,005		-0,1141	-0,7937	0,2000	
		0,019	-0,0277	0,0781	0,0254	
AR(1)	0,059		-0,0756			
		0,041	-0,0075			
AR(2)	0,033		0,0654	-0,3881		
		0,021	0,0635	-0,0444		
AR(3)	0,022		0,0079	-0,1898	0,0608	
		0,005	-0,0182	-0,0426	0,2069	
ARMA(1,1)	0,002		0,9998	-0,9795		
		0,051	0,0071	-0,0295		
ARMA(1,2)	0,012		0,0631	-0,1594	0,9999	
		0,013	0,1393	-0,0950	-0,1309	
ARMA(2,1)	0,007		0,0403	-0,6028	0,1722	
		0,009	-0,4787	-0,1351	0,4392	
ARMA(2,2)	0,013		-0,1685	-0,8251	0,1533	0,9878
		0,134	-0,1680	-0,7773	0,1745	0,9339

Tabulka 5.36: Experiment 36: AR(2),  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = \frac{1}{16}$ ,  $l = 12$

Model	Frekvence		Koeficienty			
WN	0,107	0				
MA(1)	0,204		0,4404			
		0,111	0,3535			
MA(2)	0,057		0,3976	0,3484		
		0,06	0,4084	0,1802		
MA(3)	0,065		0,4300	0,2550	0,2455	
		0,029	0,3829	0,1571	0,1382	
AR(1)	0,307		0,4158			
		0,578	0,3636			
AR(2)	0,018		0,3198	0,1563		
		0,029	0,3880	-0,0138		
AR(3)	0,019		0,3425	0,0406	-0,0679	
		0,017	0,3963	-0,0247	0,0070	
ARMA(1,1)	0,051		0,2081	0,1227		
		0,021	0,5124	-0,1745		
ARMA(1,2)	0,028		-0,5994	1,1581	0,5269	
		0,038	0,1771	0,1868	0,0227	
ARMA(2,1)	0,03		1,0779	-0,4211	-0,7920	
		0,06	0,2595	0,0071	0,1249	
ARMA(2,2)	0,084		0,3817	-0,6618	-0,0756	0,8916
		0,024	0,4932	-0,1970	-0,1548	0,1693

Tabulka 5.37: Experiment 37: ARMA(1,1),  $a_1 = -0,7$ ,  $c_1 = 0,1$ ,  $l = 3$

Model	Frekvence		Koefficienty			
WN	0,617	0,578				
MA(1)	0,129		-0,0240			
		0,053	0,04609			
MA(2)	0,059		0,0033	0,7830		
		0,03	0,0237	-0,0324		
MA(3)	0,006		0,2773	0,0120	0,6473	
		0,018	0,0195	-0,0045	-0,0073	
AR(1)	0,07		-0,0319			
		0,045	-0,0057			
AR(2)	0,038		-0,0390	-0,2864		
		0,026	0,0324	0,0300		
AR(3)	0,024		-0,1489	-0,1912	-0,1133	
		0,012	0,0257	-0,0699	0,1082	
ARMA(1,1)	0,01		0,5476	-0,3884		
		0,049	0,0883	-0,0573		
ARMA(1,2)	0,006		0,6451	-0,8468	0,7373	
		0,015	-0,0762	0,1037	-0,0588	
ARMA(2,1)	0,015		0,2906	-0,5808	-0,1768	
		0,008	-0,4635	-0,1615	0,4848	
ARMA(2,2)	0,014		-0,1634	-0,5861	0,2558	0,8590
		0,14	-0,0574	-0,7810	0,0762	0,9183

Tabulka 5.38: Experiment 38: ARMA(1,1),  $a_1 = -0,7$ ,  $c_1 = 0,1$ ,  $l = 12$

Model	Frekvence		Koefficienty			
WN	0,395	0,021				
MA(1)	0,155		-0,3621			
		0,28	-0,1988			
MA(2)	0,049		-0,2111	0,0743		
		0,031	-0,1967	0,0306		
MA(3)	0,047		-0,1729	0,1184	-0,0267	
		0,028	-0,1905	0,0797	-0,0766	
AR(1)	0,122		-0,3300			
		0,356	-0,1999			
AR(2)	0,023		-0,1650	-0,0862		
		0,026	-0,1934	0,0008		
AR(3)	0,011		-0,2496	-0,0080	0,1510	
		0,022	-0,1801	-0,0289	-0,0223	
ARMA(1,1)	0,046		0,0383	-0,2621		
		0,056	0,0044	-0,1677		
ARMA(1,2)	0,019		0,3925	-0,7303	0,2689	
		0,03	-0,1568	-0,0438	-0,0243	
ARMA(2,1)	0,013		-0,8541	-0,3407	0,7225	
		0,028	-0,4996	-0,0944	0,3096	
ARMA(2,2)	0,081		-0,0352	-0,6735	-0,1944	0,9362
		0,102	0,0149	-0,6254	-0,1451	0,6662

Tabulka 5.39: Experiment 39: ARMA(1,1),  $a_1 = 0,5$ ,  $c_1 = -0,8$ ,  $l = 3$



Model	Frekvence		Koefficienty			
WN	0,611	0,576				
MA(1)	0,132		-0,0065			
		0,061	-0,0118			
MA(2)	0,078		-0,0044	0,4982		
		0,023	0,0429	0,0172		
MA(3)	0,005		0,7192	0,4835	0,5062	
		0,023	-0,0833	0,0582	0,0500	
AR(1)	0,044		0,0014			
		0,05	0,0306			
AR(2)	0,036		-0,0938	-0,2899		
		0,019	-0,0136	-0,0230		
AR(3)	0,032		-0,0575	-0,2589	-0,0894	
		0,015	-0,0033	-0,0666	0,0586	
ARMA(1,1)	0,007		-0,1428	0,1381		
		0,05	-0,0957	0,1290		
ARMA(1,2)	0,011		-0,0988	0,2527	0,9999	
		0,012	0,1129	-0,1237	0,1952	
ARMA(2,1)	0,008		-0,0720	-0,3997	0,2658	
		0,011	0,2222	-0,1211	-0,1626	
ARMA(2,2)	0,011		0,2145	-0,8871	-0,7770	0,9974
		0,135	-0,0928	-0,8013	0,0813	0,9642

Tabulka 5.40: Experiment 40: ARMA(1,1),  $a_1 = 0,5$ ,  $c_1 = -0,8$ ,  $l = 12$

### 5.3.4 Časové agregace

Posledních 16 experimentů (41 až 56) bylo věnováno problematice časových agregací, které jsou rozděleny do pěti skupin po čtyřech (poslední dvě po dvou) experimentech. Zaměřili jsme se na vyšetřování chování modelů MA(1), MA(4), AR(2) a ARMA(1, 1). Těm jsme měnili parametry i stupeň agregace  $n$ . Parametry jsme volili kladné i záporné tak, aby kořeny příslušných polynomů byly blízko i dále jednotkovému kruhu. Stupně agregace  $n$  jsme volili 3 a 12, kdy  $n = 3$  reprezentuje kratší agregaci a  $n = 12$  delší, stejně jako u systematického odběru vzorků. Následuje výčet experimentů:

**Experimenty 41-44: MA(1)** Při agregaci stupně  $n = 3$  i 12 by se měly agregované procesy řídit modelem MA(1). Parametry jsme volili stejně jako u experimentů 21 až 24 u systematického odběru vzorků.

**E. 41:**  $c_1 = 0,9$ ,  $n = 3$  Z výsledků v tabulce 5.41 je vidět, že frekvence u teoreticky správného modelu MA(1) jsou sice vyšší, ale model bílého šumu byl zvoleným kritériem vyhodnocen jako nejlepší částěji. Vidíme, že u delších posloupností jsou výsledky simulace teoretickým výsledkům blíže.

**E. 42:**  $c_1 = 0,9$ ,  $n = 12$  V případě agregace stupně  $n = 12$ , viz tabulka 5.42, je bílý šum vyhodnocen jako nejlepší nejčastěji.

**E. 43:**  $c_1 = -\frac{1}{3}$ ,  $n = 3$  Z výsledků v tabulce 5.43 je znát, že frekvence u modelu MA(1) oproti bílému šumu více odpovídá teoretickému výsledku než v experimentu 41. Rovněž u delších posloupností je situace uspokojivější, ale o přesvědčivé výsledky se nejedná.

**E. 44:**  $c_1 = -\frac{1}{3}$ ,  $n = 12$  Je-li stupeň agregace  $n = 12$ , ani hodnota  $c_1 = -\frac{1}{3}$  nezmění vyhodnocení bílého šumu jako nejvhodnějšího modelu pro tuto agregaci. Viz tabulka 5.44.

**Experimenty 45-48: MA(4)** Vysokou volbou řádu  $q = 4$  u posloupností klouzavých součtů jsme chtěli navodit situaci, kdy teoretickým výsledkem při agregaci řádu  $n = 3$  bude model MA(2), kdežto při agregaci řádu  $n = 12$  již model MA(1). Z rozpisu jednotlivých experimentů je patrné, že těchto teoretických hodnot nebylo dosaženo, což se můžeme snažit vysvětlit volbou koeficientů, nevhodným kritériem výběru nejlepšího modelu nebo i délkou posloupností, která je nedostatečná, aby se projevila slabá závislost.

**E. 45:**  $c_1 = \frac{1}{6}$ ,  $c_2 = -\frac{5}{48}$ ,  $c_3 = \frac{1}{96}$ ,  $c_4 = -\frac{1}{96}$ ,  $n = 3$  Výsledky v tabulce 5.45 teoretickému výsledku neodpovídají, protože pro obě délky řad byl nejvhodnějším modelem vybrán bílý šum.

**E. 46:**  $c_1 = \frac{1}{6}$ ,  $c_2 = -\frac{5}{48}$ ,  $c_3 = \frac{1}{96}$ ,  $c_4 = -\frac{1}{96}$ ,  $n = 12$  Rovněž v tomto experimentu byl hodnocen nejlépe bílý šum (viz tabulka 5.46).

**E. 47:**  $c_1 = c_2 = c_3 = 0, c_4 = -\frac{1}{6}, n = 3$  V tomto experimentu by se měly výsledné agregace opět řídit modelem MA(2). Z výsledků (viz tabulka 5.47) u kratších řad je zřejmé, že byl vyhodnocen nejlepším modelem opět bílý šum. U delších řad model MA(1). Sice je rozdíl nepatrný, ale výsledky jsou přeci jen k teorii blíže než v experimentu 45. To může být způsobeno tím, že kořeny polynomu řádu 4 v tomto modelu jsou blíže jednotkovému kruhu než v experimentu 45.

**E. 48:**  $c_1 = c_2 = c_3 = 0, c_4 = -\frac{1}{6}, n = 12$  Při agregaci řádu  $n = 12$  je opět nejlépe hodnocen bílý šum. Viz tabulka 5.48.

**Experimenty 49-52: AR(2)** V těchto experimentech jsme se zaměřili na autoregresní posloupnosti. V experimentech 49 a 50 byly voleny koeficienty bez skryté periodicity. Tedy by se agregované posloupnosti měly dle teorie řídit modely ARMA(2, 2). Naopak v experimentech 51 a 52 jsou zvoleny koeficienty se skrytou periodicitou z příkladu 4.2. Jedná se tedy vlastně o ověření výsledku zmíněného příkladu na simulovaných datech.

**E. 49:**  $a_1 = -\frac{1}{6}, a_2 = -\frac{1}{3}, n = 3$  Skrytá periodicitu v koeficientech sice není, ale na výsledném modelu se to neprojeví (viz tabulka 5.49). Nejvyšší frekvence dosáhly modely AR(1) a na druhém místě MA(1).

**E. 50:**  $a_1 = -\frac{1}{6}, a_2 = -\frac{1}{3}, n = 12$  Při vyšším stupni agregace už vyhrává naplno bílý šum. Viz tabulka 5.50.

**E. 51:**  $a_1 = (0, 5)^{1/3}, a_2 = (0, 5)^{2/3}, n = 3$  Příjemným překvapením je tento výsledek (tabulka 5.51), který skutečně, alespoň u řad délky 900, hodnotí nejlépe teoreticky očekávaný model ARMA(1, 1). Je možné, že právě skrytá periodicitu umožnila zesílit efekt, který pomohl agregovanou posloupnost nepovažovat jen za bílý šum.

**E. 52:**  $a_1 = (0, 5)^{1/3}, a_2 = (0, 5)^{2/3}, n = 12$  Při agregaci vyššího stupně se už úspěch minulého experimentu neopakoval (viz tabulka 5.52). Nejlépe byl hodnocen bílý šum a lehce vyšší frekvenci než nízkou mají alespoň u delších řad modely AR(1) a MA(1).

**Experimenty 53-54: ARMA(1, 1)** V těchto dvou experimentech by se měly agregované posloupnosti teoreticky řídit modely ARMA(1, 1)

**E. 53:**  $a_1 = -0, 7, c_1 = 0, 1, n = 3$  Z tabulky 5.53 je patrné, že u kratších řad mají nejvyšší frekvence modely AR(1) a MA(1), kdyžto u delších už model smíšený ARMA(1, 1).

**E. 54:**  $a_1 = -0, 7, c_1 = 0, 1, n = 12$  Při agregaci vyššího řádu už teoretického výsledku dosaženo nebylo (viz tabulka 5.54). U obou délek řad opět nejlépe dopadl bílý šum.

**Experimenty 55-56: ARMA(2, 1)** V posledních dvou experimentech jsme se pokusili ověřit situaci, kdy byla agregována stacionární posloupnost řídicí se modelem ARMA(2, 1), ale její autoregresní část obsahovala skrytou periodicitu. Dle uvedené teorie by se měly výsledné procesy řídit modely ARMA(1, 1).

**E. 55:**  $a_1 = (0, 5)^{1/3}$ ,  $a_2 = (0, 5)^{2/3}$ ,  $c_1 = 0, 1$ ,  $n = 3$  Tabulka 5.55 ukazuje, že u kratších řad se závislosti projevily nedostatečně, a proto je výsledná posloupnost nejčastěji považována za bílý šum. U řad délky 900 již teoretického výsledku dosaženo bylo.

**E. 56:**  $a_1 = (0, 5)^{1/3}$ ,  $a_2 = (0, 5)^{2/3}$ ,  $c_1 = 0, 1$ ,  $n = 12$  Naopak tabulka 5.56 poukazuje na fakt, že při agregaci stupně 12 je nejlépe opět hodnocen bílý šum.

Model	Frekvence		Koeficienty			
WN	0, 538	0, 226				
MA(1)	0, 088		0, 3079			
		0, 21	0, 1395			
MA(2)	0, 041		0, 1820	0, 0292		
		0, 032	0, 1172	0, 0386		
MA(3)	0, 04		0, 1100	0, 1275	0, 0708	
		0, 012	0, 1205	0, 0193	-0, 0439	
AR(1)	0, 065		0, 2500			
		0, 194	0, 1351			
AR(2)	0, 024		0, 0868	-0, 1325		
		0, 025	0, 0823	-0, 0751		
AR(3)	0, 013		0, 1219	-0, 1195	-0, 1593	
		0, 013	0, 1245	-0, 0387	0, 0469	
ARMA(1, 1)	0, 037		-0, 2220	0, 4052		
		0, 067	-0, 0350	0, 1380		
ARMA(1, 2)	0, 015		-0, 0284	0, 1973	0, 1016	
		0, 014	-0, 0779	0, 2012	0, 0238	
ARMA(2, 1)	0, 015		0, 4451	-0, 1912	-0, 3516	
		0, 021	0, 2644	-0, 0531	-0, 1414	
ARMA(2, 2)	0, 087		0, 3322	-0, 8258	-0, 2412	0, 9843
		0, 152	0, 0492	-0, 8320	0, 0081	0, 8616

Tabulka 5.41: Experiment 41: MA(1),  $c_1 = 0, 9$ ,  $n = 3$

Model	Frekvence		Koefficienty			
WN	0,635	0,57				
MA(1)	0,127		-0,0135			
		0,051	0,0225			
MA(2)	0,071		-0,2640	0,7006		
		0,018	0,0272	-0,0621		
MA(3)	0,003		0,1990	-0,4366	0,3333	
		0,018	0,0001	0,0114	-0,1237	
AR(1)	0,061		0,1663			
		0,048	0,07150			
AR(2)	0,022		0,0979	-0,4036		
		0,018	0,0346	0,1454		
AR(3)	0,024		-0,1372	0,0299	0,0240	
		0,009	0,1469	-0,0793	-0,0824	
ARMA(1,1)	0,005		0,2432	-0,5922		
		0,049	0,0545	-0,0621		
ARMA(1,2)	0,006		0,3361	-0,6794	0,9999	
		0,014	0,0446	-0,0217	-0,0580	
ARMA(2,1)	0,013		-0,4463	-0,6453	0,5360	
		0,019	0,2195	-0,1805	-0,1435	
ARMA(2,2)	0,014		0,1774	-0,9445	-0,1542	0,9995
		0,158	0,0268	-0,7663	-0,0047	0,9201

Tabulka 5.42: Experiment 42: MA(1),  $c_1 = 0,9$ ,  $n = 12$

Model	Frekvence		Koefficienty			
WN	0,436	0,028				
MA(1)	0,107		-0,3448			
		0,328	-0,1851			
MA(2)	0,038		-0,1656	-0,0215		
		0,034	-0,1636	-0,0255		
MA(3)	0,045		-0,2707	0,0764	0,0092	
		0,024	-0,1714	0,0011	0,0041	
AR(1)	0,12		-0,3180			
		0,266	-0,1863			
AR(2)	0,021		-0,1709	-0,2254		
		0,025	-0,1736	-0,1037		
AR(3)	0,009		-0,2026	-0,2312	-0,0250	
		0,028	-0,1784	-0,0399	-0,0159	
ARMA(1,1)	0,059		-0,0588	-0,1898		
		0,061	0,2241	-0,3796		
ARMA(1,2)	0,02		0,2164	-0,5364	0,1347	
		0,032	-0,2066	0,0241	-0,0588	
ARMA(2,1)	0,017		-0,8192	-0,3784	0,6444	
		0,029	-0,3620	-0,0815	0,1729	
ARMA(2,2)	0,096		-0,3123	-0,8096	0,1538	0,9799
		0,111	0,1166	-0,6870	-0,2286	0,7194

Tabulka 5.43: Experiment 43: MA(1),  $c_1 = -\frac{1}{3}$ ,  $n = 3$

Model	Frekvence		Koeficienty			
WN	0,628	0,546				
MA(1)	0,133		-0,3264			
		0,057	-0,2028			
MA(2)	0,068		-0,1543	0,5643		
		0,026	-0,0849	-0,0397		
MA(3)	0,003		0,2283	0,0067	-0,4511	
		0,018	-0,0395	-0,01192	-0,1425	
AR(1)	0,05		-0,1907			
		0,05	-0,1896			
AR(2)	0,033		-0,1500	-0,4696		
		0,022	-0,0826	0,0408		
AR(3)	0,031		-0,1038	-0,1603	0,1787	
		0,007	-0,0856	-0,0386	0,1979	
ARMA(1,1)	0,007		-0,9642	0,6566		
		0,067	0,11039	-0,2283		
ARMA(1,2)	0,008		-0,2755	0,6157	0,9697	
		0,019	-0,2163	0,1696	0,0335	
ARMA(2,1)	0,013		-0,1221	-0,3533	-0,2110	
		0,012	0,0271	-0,0463	-0,1080	
ARMA(2,2)	0,008		0,0180	-0,9143	0,0278	0,4999
		0,147	0,0788	-0,7657	-0,1371	0,9418

Tabulka 5.44: Experiment 44: MA(1),  $c_1 = -\frac{1}{3}$ ,  $n = 12$

Model	Frekvence		Koeficienty			
WN	0,608	0,496				
MA(1)	0,06		-0,0338			
		0,053	-0,0238			
MA(2)	0,034		-0,0465	0,0891		
		0,02	-0,0363	-0,0353		
MA(3)	0,036		-0,0353	0,0585	0,0321	
		0,014	-0,0432	0,0321	-0,0291	
AR(1)	0,041		-0,0393			
		0,059	-0,0643			
AR(2)	0,028		-0,0074	-0,1168		
		0,016	-0,0077	-0,0487		
AR(3)	0,013		-0,0246	-0,0776	-0,1529	
		0,011	-0,0483	-0,0363	-0,0695	
ARMA(1,1)	0,042		-0,1701	0,2281		
		0,055	0,0539	-0,0813		
ARMA(1,2)	0,012		0,0188	-0,1050	0,2411	
		0,011	0,2287	-0,2295	-0,0818	
ARMA(2,1)	0,012		-0,0343	-0,0065	0,0020	
		0,015	-0,0390	-0,0667	0,03431	
ARMA(2,2)	0,072		-0,0302	-0,7506	0,0213	0,9753
		0,228	0,0214	-0,8530	-0,0323	0,8951

Tabulka 5.45: Experiment 45: MA(4),  $c_1 = \frac{1}{6}$ ,  $c_2 = -\frac{5}{48}$ ,  $c_3 = \frac{1}{96}$ ,  $c_4 = -\frac{1}{96}$ ,  $n = 3$

Model	Frekvence		Koefficienty			
WN	0,634	0,583				
MA(1)	0,136		-0,0706			
		0,055	-0,0763			
MA(2)	0,065		0,0161	0,4579		
		0,038	0,0063	-0,0062		
MA(3)	0,007		0,2286	-0,6933	-0,4286	
		0,02	0,0149	0,0681	-0,0371	
AR(1)	0,052		-0,1040			
		0,037	0,0097			
AR(2)	0,032		-0,0502	-0,4258		
		0,016	0,0140	-0,0007		
AR(3)	0,026		-0,0873	0,0686	0,3138	
		0,008	0,0521	0,0194	0,0006	
ARMA(1,1)	0,003		0,0784	0,8914		
		0,06	0,1580	-0,1956		
ARMA(1,2)	0,009		-0,0609	0,0745	0,9999	
		0,009	-0,1605	0,1339	0,01777	
ARMA(2,1)	0,014		-0,2281	-0,5882	0,2608	
		0,01	-0,0135	-0,1458	0,0251	
ARMA(2,2)	0,004		-0,2942	-0,8833	0,5620	0,9998
		0,146	-0,0551	-0,7366	0,0436	0,8870

Tabulka 5.46: Experiment 46: MA(4),  $c_1 = \frac{1}{6}$ ,  $c_2 = -\frac{5}{48}$ ,  $c_3 = \frac{1}{96}$ ,  $c_4 = -\frac{1}{96}$ ,  $n = 12$

Model	Frekvence		Koefficienty			
WN	0,525	0,11				
MA(1)	0,092		-0,3074			
		0,247	-0,1598			
MA(2)	0,045		-0,1243	-0,2414		
		0,082	-0,1023	-0,1376		
MA(3)	0,035		-0,1104	-0,0501	0,0300	
		0,016	-0,1190	-0,0575	0,0390	
AR(1)	0,048		-0,2984			
		0,076	-0,1511			
AR(2)	0,031		-0,1299	-0,3146		
		0,078	-0,1091	-0,1336		
AR(3)	0,019		-0,0991	-0,1675	-0,0928	
		0,023	-0,1396	-0,0853	-0,0957	
ARMA(1,1)	0,036		0,0148	-0,2061		
		0,123	0,5181	-0,6324		
ARMA(1,2)	0,017		0,1330	-0,3741	0,0968	
		0,022	-0,4247	0,2828	-0,1455	
ARMA(2,1)	0,012		-0,7369	-0,2645	0,6650	
		0,026	-0,6845	-0,1658	0,5799	
ARMA(2,2)	0,1		-0,0989	-0,7872	-0,0412	0,9282
		0,174	0,2938	-0,7339	-0,3751	0,7393

Tabulka 5.47: Experiment 47: MA(4),  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ ,  $c_4 = -\frac{1}{6}$ ,  $n = 3$

Model	Frekvence		Koeficienty			
WN	0,619	0,531				
MA(1)	0,141		-0,2664			
		0,069	-0,2411			
MA(2)	0,067		-0,1808	0,4264		
		0,032	-0,0582	-0,0423		
MA(3)	0,004		0,4621	-0,9480	-0,5134	
		0,024	-0,0688	0,0346	-0,0423	
AR(1)	0,065		-0,3072			
		0,06	-0,1887			
AR(2)	0,03		-0,0537	-0,5014		
		0,013	-0,0774	0,0447		
AR(3)	0,024		-0,0233	-0,0018	0,5039	
		0,009	-0,0001	-0,0099	0,0214	
ARMA(1,1)	0,008		-0,7401	0,7343		
		0,075	0,0892	-0,2137		
ARMA(1,2)	0,01		-0,4762	0,6174	0,9756	
		0,013	-0,3147	0,2155	-0,1059	
ARMA(2,1)	0,012		-0,3608	-0,4669	0,2761	
		0,01	-0,4235	-0,0884	0,3959	
ARMA(2,2)	0,004		-0,4383	-0,5161	0,9542	0,9999
		0,141	-0,0683	-0,7357	-0,0001	0,8884

Tabulka 5.48: Experiment 48: MA(4),  $c_1 = c_2 = c_3 = 0, c_4 = -\frac{1}{6}, n = 12$

Model	Frekvence		Koeficienty			
WN	0,09	0				
MA(1)	0,229		0,4646			
		0,127	0,3674			
MA(2)	0,05		0,4797	0,4134		
		0,094	0,4105	0,1784		
MA(3)	0,048		0,4130	0,3241	0,2089	
		0,028	0,3975	0,1340	0,0691	
AR(1)	0,312		0,4143			
		0,523	0,3815			
AR(2)	0,025		0,3857	-0,0376		
		0,041	0,4069	-0,0292		
AR(3)	0,017		0,4264	-0,0699	-0,0130	
		0,014	0,4023	-0,0590	-0,0274	
ARMA(1,1)	0,069		0,1703	0,1778		
		0,025	0,4219	-0,0026		
ARMA(1,2)	0,026		-0,3082	0,9153	0,5293	
		0,035	-0,0213	0,4037	0,1008	
ARMA(2,1)	0,021		0,8189	-0,2882	-0,5150	
		0,064	0,4734	-0,0681	-0,0806	
ARMA(2,2)	0,085		0,4437	-0,7131	-0,1537	0,9450
		0,028	0,3999	-0,4031	-0,0525	0,4130

Tabulka 5.49: Experiment 49: AR(2),  $a_1 = -\frac{1}{6}, a_2 = -\frac{1}{3}, n = 3$



Model	Frekvence		Koefficienty			
WN	0,6	0,424				
MA(1)	0,148		0,3270			
		0,114	0,2352			
MA(2)	0,074		0,2686	0,4810		
		0,036	0,1227	-0,0505		
MA(3)	0,002		-0,7441	-0,1688	0	
		0,025	0,1709	0,0086	-0,0706	
AR(1)	0,068		0,3511			
		0,108	0,2290			
AR(2)	0,04		0,0460	-0,4702		
		0,015	0,1139	-0,1424		
AR(3)	0,028		0,2101	-0,1347	-0,2049	
		0,014	0,1230	-0,0507	0,1073	
ARMA(1,1)	0,004		0,5000	-0,4919		
		0,067	-0,1077	0,2511		
ARMA(1,2)	0,007		-0,3490	0,5263	0,9991	
		0,022	-0,0255	0,1657	-0,0031	
ARMA(2,1)	0,007		0,0679	-0,5444	-0,1071	
		0,009	0,4707	-0,1661	-0,3092	
ARMA(2,2)	0,011		0,0541	-0,7690	0,5958	0,8180
		0,14	0,1595	-0,7807	-0,0662	0,9370

Tabulka 5.50: Experiment 50: AR(2),  $a_1 = -\frac{1}{6}$ ,  $a_2 = -\frac{1}{3}$ ,  $n = 12$

Model	Frekvence		Koefficienty			
WN	0,382	0,008				
MA(1)	0,155		-0,3577			
		0,179	-0,1977			
MA(2)	0,071		-0,1695	-0,3458		
		0,119	-0,1692	-0,1435		
MA(3)	0,058		-0,2278	-0,0220	-0,1747	
		0,04	-0,1589	-0,0519	-0,1488	
AR(1)	0,071		-0,3206			
		0,019	-0,2019			
AR(2)	0,031		-0,1358	-0,3390		
		0,048	-0,1714	-0,1699		
AR(3)	0,019		-0,1816	-0,2301	-0,2151	
		0,031	-0,1711	-0,1255	-0,1563	
ARMA(1,1)	0,069		0,3762	-0,7006		
		0,36	0,5748	-0,7495		
ARMA(1,2)	0,015		-0,0703	-0,0971	-0,1522	
		0,039	-0,0551	-0,1211	-0,1214	
ARMA(2,1)	0,011		-0,3708	-0,3920	0,3167	
		0,027	0,1631	-0,0507	-0,3533	
ARMA(2,2)	0,08		0,0106	-0,7714	-0,1366	0,9229
		0,085	0,3349	-0,2910	-0,4570	0,2474

Tabulka 5.51: Experiment 51: AR(2),  $a_1 = (0,5)^{1/3}$ ,  $a_2 = (0,5)^{2/3}$ ,  $n = 3$

Model	Frekvence		Koefficienty			
WN	0,599	0,254				
MA(1)	0,13		-0,6606			
		0,215	-0,2855			
MA(2)	0,068		-0,4910	0,5549		
		0,036	-0,2047	-0,1160		
MA(3)	0,004		-0,4440	-0,0794	0	
		0,022	-0,2188	0,0187	-0,0617	
AR(1)	0,074		-0,4032			
		0,145	-0,2678			
AR(2)	0,041		-0,2166	-0,4170		
		0,035	-0,1862	-0,2121		
AR(3)	0,036		-0,2975	-0,2780	0,1205	
		0,017	-0,1647	-0,0905	-0,1229	
ARMA(1,1)	0,006		-0,9119	0,6681		
		0,068	0,1775	-0,3971		
ARMA(1,2)	0,009		-0,4097	0,0836	1,	
		0,018	-0,3026	0,0465	-0,07247	
ARMA(2,1)	0,011		0,1571	-0,3648	0,0850	
		0,014	-0,9005	-0,3185	0,7079	
ARMA(2,2)	0,009		-0,0972	-0,9226	0,5575	1,0000
		0,136	-0,0136	-0,7659	-0,1629	0,9250

Tabulka 5.52: Experiment 52: AR(2),  $a_1 = (0,5)^{1/3}$ ,  $a_2 = (0,5)^{2/3}$ ,  $n = 12$

Model	Frekvence		Koefficienty			
WN	0,012	0				
MA(1)	0,305		0,5881			
		0,038	0,4919			
MA(2)	0,074		0,7240	0,4545		
		0,149	0,5744	0,1941		
MA(3)	0,042		0,6424	0,3763	0,1059	
		0,038	0,5922	0,2299	0,1527	
AR(1)	0,32		0,5222			
		0,169	0,5116			
AR(2)	0,046		0,6578	-0,3150		
		0,167	0,5834	-0,1560		
AR(3)	0,022		0,5594	-0,1645	0,1597	
		0,032	0,5622	-0,1381	0,0818	
ARMA(1,1)	0,03		0,4150	0,1649		
		0,232	0,3192	0,2708		
ARMA(1,2)	0,04		-0,5330	1,3588	0,7610	
		0,039	0,3503	0,1994	-0,0564	
ARMA(2,1)	0,033		1,1222	-0,4698	-0,6311	
		0,072	0,4515	-0,0347	0,1202	
ARMA(2,2)	0,057		0,6687	-0,6628	-0,2551	0,7764
		0,012	0,4746	-0,1224	0,0741	0,0523

Tabulka 5.53: Experiment 53: ARMA(1,1),  $a_1 = -0,7$ ,  $c_1 = 0,1$ ,  $n = 3$

Model	Frekvence		Koeficienty			
WN	0,595	0,367				
MA(1)	0,146		0,3876			
		0,161	0,2631			
MA(2)	0,059		0,2542	0,6174		
		0,022	0,1529	-0,0015		
MA(3)	0,006		0,9403	0,6270	0,6666	
		0,02	0,1876	0,0491	0,0264	
AR(1)	0,056		0,3252			
		0,127	0,2490			
AR(2)	0,037		0,0884	-0,5379		
		0,027	0,1658	-0,1154		
AR(3)	0,039		0,1311	-0,1144	0,0070	
		0,008	0,1807	-0,0374	-0,0599	
ARMA(1,1)	0,01		-0,0573	0,4140		
		0,061	-0,2422	0,4218		
ARMA(1,2)	0,008		0,1479	0,4608	0,9999	
		0,012	0,3486	-0,2419	-0,1085	
ARMA(2,1)	0,013		0,1976	-0,4457	-0,3933	
		0,012	0,4929	-0,1116	-0,2674	
ARMA(2,2)	0,01		-0,0359	-0,9714	0,1089	0,9996
		0,153	-0,0213	-0,7262	0,1632	0,8671

Tabulka 5.54: Experiment 54: ARMA(1, 1),  $a_1 = -0,7$ ,  $c_1 = 0,1$ ,  $n = 12$

Model	Frekvence		Koeficienty			
WN	0,437	0,036				
MA(1)	0,12		-0,3481			
		0,204	-0,1848			
MA(2)	0,074		-0,1405	-0,2876		
		0,117	-0,1417	-0,1472		
MA(3)	0,046		-0,1298	-0,0106	-0,2661	
		0,032	-0,1702	-0,0473	-0,1348	
AR(1)	0,072		-0,3164			
		0,044	-0,1694			
AR(2)	0,03		-0,1269	-0,3276		
		0,046	-0,1480	-0,1469		
AR(3)	0,014		-0,1949	-0,1993	-0,3960	
		0,039	-0,1394	-0,0807	-0,1428	
ARMA(1,1)	0,056		0,2625	-0,5258		
		0,299	0,6214	-0,7757		
ARMA(1,2)	0,013		-0,2069	0,1684	-0,0716	
		0,03	-0,1825	0,0488	-0,1272	
ARMA(2,1)	0,017		-0,6480	-0,3905	0,6128	
		0,019	-0,0507	-0,1404	-0,0567	
ARMA(2,2)	0,08		0,0465	-0,7519	-0,1611	0,8842
		0,094	0,6241	-0,4593	-0,7442	0,4604

Tabulka 5.55: Experiment 55: ARMA(2, 1),  $a_1 = (0,5)^{1/3}$ ,  $a_2 = (0,5)^{2/3}$ ,  $c_1 = 0,1$ ,  $n = 3$

Model	Frekvence		Koeficienty			
WN	0,574	0,321				
MA(1)	0,136		-0,4143			
		0,191	-0,2703			
MA(2)	0,052		-0,4523	0,4685		
		0,023	-0,1391	-0,1383		
MA(3)	0,005		-0,7062	0,1241	0,1748	
		0,022	-0,1931	0,0344	-0,0351	
AR(1)	0,07		-0,3433			
		0,149	-0,2563			
AR(2)	0,051		-0,1750	-0,4063		
		0,026	-0,1728	-0,2257		
AR(3)	0,046		-0,0931	-0,1474	-0,0486	
		0,013	-0,1645	-0,0506	-0,2376	
ARMA(1,1)	0,009		-0,5555	0,4870		
		0,056	0,2458	-0,4584		
ARMA(1,2)	0,008		-0,3913	0,4971	0,9999	
		0,018	-0,3156	0,1798	-0,0750	
ARMA(2,1)	0,015		-0,5255	-0,5973	0,2161	
		0,023	-0,7970	-0,2749	0,6505	
ARMA(2,2)	0,012		-0,6002	-0,9184	0,4499	0,9999
		0,125	0,0574	-0,8035	-0,1863	0,9630

Tabulka 5.56: Experiment 56: ARMA(2, 1),  $a_1 = (0, 5)^{1/3}$ ,  $a_2 = (0, 5)^{2/3}$ ,  $c_1 = 0, 1$ ,  $n = 12$

# Závěr

V této práci jsme podali ucelený obraz, týkající se změn modelů lineárních časových řad ARMA vlivem některých funkcí – součtů (kapitola 2), součinů (kapitola 3) a agregací v čase (kapitola 4), jmenovitě systematického odběru vzorků a časových agregací. Nejprve jsme shrnuli dostupné teoretické výsledky zmíněných transformací ARMA procesů – zformulovali a dokázali jsme věty popisující chování uvedených funkcí. Jednotlivé speciální případy jsme rozepsali do přehledných tabulek a uvedli příklady užití vět či důležitých případů.

Tuto teorii jsme v kapitole 5 podrobili rozsáhlé číselné simulaci v programu R. Provedli jsme 56 experimentů pro jednotlivé speciální případy modelů (AR, MA, ARMA s různými hodnotami parametrů) a pozorovali, jsou-li teoretické výsledky na datech dosahovány.

Simulace spočívala ve vygenerování 1000 náhodných posloupností (v případě binárních funkcí 2000) řídicích se vždy zkoumanými modely – celé zopakováno pro 2 různé délky posloupností (120 a 900 pozorování). Nad těmito posloupnostmi byly provedeny jednotlivé transformace a u vzniklých řad byl hledán nejlépe odpovídající model. Kritériem výběru bylo porovnávání hodnot AIC.

Výsledky získané v první části diplomové práce jsou sice korektní v teoretických situacích, ale jejich prvoplánová užitečnost v praxi klesá, dojde-li k analýze konkrétních dat, jak jsme se přesvědčili v naší simulaci. Rozhodně se nelze spolehnout na teoretický výsledek získaný z příslušné věty, který tvrdí, jak se bude agregace či jiná funkce chovat. Ke zjištění skutečného modelu se správnými parametry je nezbytné použít jiných běžných metod jako analýzy výběrové autokorelační a parciální autokorelační funkce nebo využití informačních kritérií. V praxi sice stále mohou být vysoké hodnoty počtu parametrů modelu ARMA( $p, q$ ) správné, ale i daleko nižší hodnoty mohou poskytovat dostatečně přesné výsledky, což je i hrubý závěr naší simulace. V mnoha případech teorie doporučovala modely složitější, ale modely jednodušší poskytovaly natolik uspokojivé výsledky, že byly přijaty místo nich na základě principu úspory parametrů.

Toto ovšem neznamená, že získané výsledky jsou bezcenné. V praxi se ukazuje, že například nalézt vhodný model pro konkrétní data bývá složitější pro model ARMA než pro čistě autoregresní model AR ([10], str. 248). Na druhou stranu, Box a Jenkins tvrdí, že pokud lze jedna data uspokojivě vysvětlit modelem AR( $p$ ) i ARMA( $p^*, q^*$ ), pak model ARMA bývá, co do počtu parametrů úspornější, tj.  $p^* + q^* < p$ .

Tím pádem vyvstává otázka, za jakých okolností mohou jednoduché modely MA či AR, které jsou v praxi, především finanční, mnohem snáze interpretovatelné, přecházet ve smíšené modely ARMA a naopak. A na právě tyto otázky je možné hledat ve zpracované teorii odpovědi.

Celá teorie nabízí vodítko, ale ne všemocné řešení.

# Seznam použité literatury

- [1] Anděl, J. (1976): Statistická analýza časových řad. SNTL - Nakladatelství technické literatury, Praha.
- [2] Ansley, C. F., Spivey W. A. and W. J. Wroblewski (1977): On the Structure of Moving Average Processes. *Journal of Econometrics* 6, 121-134.
- [3] Bierens, H. J. (2012): The Wold Decomposition. <http://econ.la.psu.edu/~hbierens/WOLD.PDF>.
- [4] Box, G. E. P. and G. M. Jenkins (1970): Time series analysis, forecasting and control. Holden Day, San Francisco.
- [5] Brockwell, P. J. and R. A. Davis (2001): Introduction to Time Series and Forecasting 2<sup>nd</sup> Edition. Springer-Verlag, New York.
- [6] Brockwell, P. J. and R. A. Davis (2009): Time Series: Theory and Methods 2<sup>nd</sup> Edition. Springer-Verlag, New York.
- [7] Cipra, T. (2008): Finanční ekonometrie. Ekopress, Praha.
- [8] Engel, E. M. R. A. (1984): A unified approach to the study of sums, products, time-aggregation and other functions of ARMA processes. *J. Time Ser. Anal.* 5, 159-171.
- [9] Granger, C. W. J. (1988): Aggregation of Time Series Variables: A Survey. Institute for Empirical Macroeconomics, Federal Reserve Bank of Minneapolis, Minneapolis.
- [10] Granger, C. W. J. and M. J. Morris (1976): Time Series Modeling and Interpretation. *J. of Royal Statistics Society A*, 139, Part 2, 246-257.
- [11] Hamilton, J. D. (1994): Time Series Analysis. Princeton University Press, Princeton.
- [12] Isserlis, L. (1918): On a Formula for the Product-Moment Coefficient of any Order of a Normal Frequency Distribution in any number of Variables. *Biometrika* 12, 134-139.
- [13] Prášková, Z. (2007): Základy náhodných procesů II. Karolinum, Praha.
- [14] Stram, D. O. and W. W. S. Wei (1986): Temporal aggregation in the ARIMA process. *Journal of Time Series Analysis* 7, No. 4, 279-292.
- [15] Wecker, W. E. (1978): A Note on the Time Series Which is a Product of Two Stationary Time Series. *Stoc. Proc. Appl.* 8, 153-157.
- [16] Wei, W. W. S. (2006): Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods 2<sup>nd</sup> Edition. Pearson Addison Wesley.
- [17] Weiss, A. A. (1984): Systematic Sampling and Temporal Aggregation in Time Series Models. *Journal of Econometrics* 26, 271-281.