

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Bc. Hynek Hilbert

Kvantifikace vícerozměrných rizik

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Hlubinka Daniel, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie

Praha 2013

Na tomto místě bych chtěl nejdříve poděkovat své rodině, která mě během celého mého studia podporovala. Konkrétně mým rodičům, Zdeňku Hilbertovi a Jaroslavě Hilbertové, a mé sestře, Lucii Pochylé, za jejich trpělivost, laskavost a finanční a morální podporu.

Dále bych rád poděkoval všem, kteří mi při psaní této práce pomáhali. Především děkuji svému vedoucímu, doc. RNDr. Danielovi Hlubinkovi, Ph.D., za čas, který mi obětoval a za ochotu a otcovský přístup, se kterým se mi vždy věnoval.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Hynek Hilbert

Název práce: Kvantifikace vícerozměrných rizik

Autor: Hynek Hilbert

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Hlubinka Daniel, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Předložená práce se věnuje vícerozměrné teorii extrémních hodnot. Hlavně přesahům přes lineární a v menší míře také přes eliptické prahy. Jedná se o alternativu k teorii souřadnicových extrémů. Za extrémní hodnoty považujeme ty, které patří do vzdálených oblastí, a vyšetřujeme konvergenci jejich rozdělení k limitním rozdělením. Oblastmi jsou buď poloprostory, nebo elipsoidy. Pro poloprostory rozlišujeme dva případy: buď předpokládáme, že je podkladové rozdělení směrově homogenní a poloprostory necháme divergovat jakýmkoliv směrem, nebo předpokládáme, že se podkladové rozdělení formuje jedním směrem, kterým pak poloprostory divergují. V prvním případě rozlišujeme tři tvary limitních rozdělení. Do sféry přitažlivosti patří unimodální rozdělení a jejich zobecnění na rotund-exponenciální množiny. V druhém případě je limitních rozdělení velmi mnoho a obecný tvar neexistuje. Stejně tak sféry přitažlivosti nemají obecnou strukturu. Podobné je to u eliptických přesahů, kde vyšetřujeme konvergenci náhodných vektorů žijících na doplňcích expandujících elipsoidů. Ve všech případech jsou limitní rozdělení určena afinními transformacemi a rozdělením spektrální míry.

Klíčová slova: teorie vícerozměrných extrémních hodnot, přesahová míra, lineární prahy, eliptické prahy, afinní transformace

Title: Quantification of multivariate risk

Author: Hynek Hilbert

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Hlubinka Daniel, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: In the present work we study multivariate extreme value theory. Our main focus is on exceedances over linear thresholds. Smaller part is de-

voted to exceedances over elliptical thresholds. We consider extreme values as those which belong to remote regions and investigate convergence of their distribution to the limit distribution. The regions are either halfspaces or ellipsoids. Working with halfspaces we distinguish between two setups: we either assume that the distribution of extreme values is directionally homogeneous and we let the halfspaces diverge in any direction, or we assume that there are some irregularities in the sample cloud which show us the fixed direction we should let the halfspaces drift out. In the first case there are three limit laws. The domains of attraction contain unimodal and rotund-exponential distributions. In the second case there exist a lot of limit laws without general form. The domains of attraction also fail to have common structure. The similar situation occurs for the exceedances over elliptical thresholds. The task here is to investigate convergence of the random vectors living in the complements of ellipsoids. For all, the limit distributions are determined by affine transformations and distribution of spectral measure.

Keywords: multivariate extreme value theory, excess measure, linear thresholds, elliptic thresholds, affine transformation

Obsah

Úvod	2
1 Teorie extrémních hodnot	5
1.1 Maxima	5
1.2 Přesahy	9
2 Poissonovy bodové procesy	13
3 Teorie vícerozměrných extrémních hodnot	18
4 Limitní rozdělení vysokého rizika	24
4.1 Limitní rozdělení vysokého rizika	24
4.2 Vícerozměrné zobecněné Paretovo rozdělení	37
4.3 Symetrie	40
4.4 Sféra přitažlivosti normálně-exponenciálního limitního rizikového rozdělení	46
4.5 Sféra přitažlivosti Euklidova-Paretova limitního rizikového rozdělení	52
4.6 Sféra přitažlivosti mocninného parabolického limitního rizikového rozdělení	53
4.7 Afinní transformace	54
5 Přesahy přes horizontální prahy	58
5.1 Přesahy přes horizontální prahy	58
5.2 Přesahové míry	64
5.3 Přesahové míry v \mathbb{R}^2	66
5.4 Sféry přitažlivosti	72
6 Přesahy přes eliptické prahy	73

Úvod

Pro všechny investory vlastníci nějaké finanční portfolio, je důležité znát rizikovost svého portfolia. Rizikovost udává, jak je hodnota portfolia citlivá na změny cen podkladových aktiv. Existuje mnoho rizikových měr. Nej-používanější je asi hodnota v riziku neboli VaR. VaR na hladině α udává, že s pravděpodobností $1 - \alpha$ neklesne hodnota portfolia o více než je hodnota VaR. Pokud zvolíme $\alpha = 0,05$ nebo $0,01$, můžeme VaR odhadnout z historických dat. Čím menší ale α bude, tím méně pozorování máme k dispozici. Pro $\alpha = 0,05$ klesne hodnota portfolia o více než VaR v pěti případech ze sta. Při $\alpha = 0,001$ už jen v jednom z tisíce. Teď si představme, že chceme znát rozdělení hodnot, které překročí VaR pro velmi malé α . Na odhad distribuční funkce máme jedno či dvě pozorování. Empirickou distribuční funkci použít nemůžeme. Pro tyto případy přichází na scénu teorie extrémních hodnot neboli anglicky „extreme value theory“. Je to statistická metoda pro odhad chvostů rozdělení. Teorie extrémních hodnot vlastně rozdělení extrapoluje do oblastí, o kterých nic nevíme, protože pozorování, které se dají nazvat extrémními, máme většinou velmi málo. Dělá to však s využitím všech dostupných informací. Existuje mnoho případů, kdy byla teorie extrémních hodnot s úspěchem použita a nejedná se jen o svět financí. Uveďme například odhad výšky hrází v Nizozemsku, kdy tamní vláda požadovala, aby se moře přes hráze přelilo v průměru jednou za 10 tisíc let.

Základy teorie extrémních hodnot můžeme najít již před druhou světovou válkou. Skutečný rozvoj však nastal až v posledních desetiletích s nástupem počítačů. V posledních letech se o teorii extrémních hodnot hovoří hlavně v souvislosti s finanční krizí. V nynější době přísných regulací bankovního trhu se potřeba po stress-testování a modelování extrémních situací rapidně zvýšila.

Základním kamenem teorie extrémních hodnot je definovat, co je vlastně

extrém. V jednorozměrném případě (jako je například VaR nebo výška hrází) je situace jednoduchá. Extrém je velká hodnota (například ztráta). Přejdem do více rozměrů se však situace komplikuje. Předpokládejme, že máme portfolio, které tvoří tři různé cenné papíry. Hodnota jednoho z nich prudce klesne, zatímco u zbylých dvou se nepatrně zvýší. Je toto extrém? Kdy můžeme říci, že nastala extrémní situace? Existuje několik forem teorie vícerozměrných extrémních hodnot a každá považuje za extrémní pozorování něco jiného. Mezi dnes již klasické patří teorie souřadnicových extrémů nebo teorie přesahů. Profesor Embrechts a doktor Balkema ve své knize „High Risk Scenarios“ [3] z roku 2007 představili nový, geometrický pohled na věc. Za extrémní pozorování se považují ty, které překročí nějakou hranici. Tvar této hranice je závislý na tvaru rozdělení nebo spíše hustoty. Autoři se omezují na případ přesahů přes lineární hranice - poloprostory a přesahů přes eliptické hranice - elipsoidy. Výhodou takové teorie je, že nezávisí na souřadnicích, které si tím pádem můžeme libovolně volit.

Zatím bohužel scházejí konkrétní statistické postupy, jak tuto metodu v praxi použít a odhadnout potřebné parametry. Vše se drží spíše v teoretické rovině. Na druhou stranu již existuje několik článků, které se alespoň pro speciální případy konkrétním odhadům a praktickým příkladům věnují. Lze uvést třeba Abdous [1], Fougères [7] nebo Fougères [8], kde se autoři zaměřují na dvourozměrné případy.

Účelem této diplomové práce je ukázat, vysvětlit a ilustrovat metody uvedené v knize Balkema [3] (viz výše), která je napsána dosti složitým matematickým jazykem. Práce je rozdělena následovně. První kapitola se věnuje jednorozměrným extrémům. Druhá uvádí základní definice a věty o Poissonových bodových procesech. Třetí kapitola se zabývá vícerozměrnými souřadnicovými extrémami. První tři kapitoly slouží jen pro připomenutí a definici nezbytných pojmů. Jádro práce tvoří další tři kapitoly. Kapitola 4 se věnuje přesahům přes lineární prahy v případě, že podkladové rozdělení je směrově homogenní. Jedná se o rozdělení, jejichž úrovně množiny jsou konvexní. Kapitola 5 se pak zabývá přesahy přes horizontální prahy. To je případ, kdy se extrémní hodnoty nacházejí v jednom směru a vyšetřujeme chování náhodného vektoru za podmínky, že leží v poloprostorech, které tímto směrem divergují, Poslední kapitola 6 se pak věnuje přesahům přes eliptické prahy.

Kapitola 1

Teorie extrémních hodnot

V této kapitole uvedeme základní pojmy z jednorozměrné teorie extrémních hodnot (anglicky „Extreme Value Theory“). Kapitola je rozdělena na dvě podkapitoly, jedna se věnuje maximům a druhá přesahům.

1.1 Maxima

Nechť máme náhodné veličiny $Z; Z_1, Z_2, \dots$, které jsou nezávislé, stejně rozdělené, nedegenerované s distribuční funkcí F .

Označme funkci přežití jako

$$\bar{F} = 1 - F = 1 - F(z) = P(Z > z)$$

a výběrové maximum jako

$$M_1 = Z_1, M_n = \max(Z_1, \dots, Z_n).$$

Snadno se odvodí, že

$$P(M_n \leq z) = P(Z_1 < z, \dots, Z_n < z) = F^n(z), z \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Označme $z_\infty = \sup \{z \in \mathbb{R} : F(z) < 1\}$ jako *pravý koncový bod* rozdělení s distribuční funkcí F . U rozdělení s konečným nosičem je tedy tento bod konečný, u rozdělení s neomezeným nosičem je $z_\infty = \infty$.

Podobně jako u centrální limitní věty nás zajímá, zda existuje nedegenerovaná limitní náhodná veličina W tak, že vhodně znormované maxima konvergují v distribuci k W :

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{d} W, n \rightarrow \infty, c_n > 0 \text{ a } d_n \in \mathbb{R}.$$

Pokud označíme $u_n = u_n(z) = c_n z + d_n$ a Q bude distribuční funkce limitní náhodné veličiny W , můžeme vyjádření výše přepsat jako

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n \leq c_n z + d_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n \leq u_n(z)) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(u_n(z)) = Q(z). \quad (1.1)$$

Nyní označme $B_n := \sum_{i=1}^n I_{\{Z_i > u_n\}}$. Jelikož máme náhodný výběr, má B_n binomické rozdělení $Bi(n, \bar{F}(u_n))$. Následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:

1. $B_n \xrightarrow{d} B_\infty \sim Pois(\lambda), \lambda > 0;$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} n\bar{F}(u_n) = \lambda \in (0, \infty).$

S počtem pozorování jdoucím do nekonečna má B_n Poissonovo rozdělení s parametrem λ . Jako důsledek dostaneme, že pro $n \rightarrow \infty$

$$P(M_n \leq u_n) = P(B_n = 0) \rightarrow P(B_\infty) = e^{-\lambda}.$$

Z (1.1) se odvodí, že $\lambda = -\log G(z)$. B_n lze interpretovat jako počet přesahů přes mez u_n . Tyto úvahy ukazují spojení mezi teorií extrémních hodnot a bodovými procesy, respektive Poissonovým bodovým procesem s intenzitou λ . Podobná analogie existuje i u vícerozměrných souřadnicových extrémů.

Normovací konstanty c_n a d_n jsou pozitivní afinní transformace. Jak uvidíme v kapitole 3, tyto transformace tvoří grupu pozitivních afinních transformací.

Centrální limitní věta říká, že vhodně transformovaný součet nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin konverguje v distribuci k normálnímu rozdělení. Je to proto, že normální rozdělení je jistým způsobem stabilní: součet normálně rozdělených veličin, má opět normální rozdělení. Tento součet můžeme transformovat, aby měl libovolnou střední hodnotu a rozptyl. Jeho rozdělení je přitom pořád normální. Pro jiná než normální rozdělení takové transformace neexistují. Jediné limitní rozdělení je proto normální.

V případě maxim je situace podobná. Limitní rozdělení budou právě ta, jež splňují podmínku stability. Nechť W_1, W_2, \dots jsou nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny. Pak jejich rozdělení je stabilní, právě když

$$\max(W_1, \dots, W_n) \stackrel{d}{=} c_n W_1 + d_n, \quad (1.2)$$

pro příslušné normovací konstanty $c_n > 0$ a $d_n \in \mathbb{R}$.

Náhodné veličiny, které splňují tuto stabilitu pro posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin, se nazývají *maximálně stabilní*. Narozdíl od CLV existují pro maxima tři limitní maximálně stabilní rozdělení. Jejich výčet uvádí následující věta 1.1.

Věta 1.1. (Fisherova-Tipettova věta, Embrechts [6], str. 121)

Nechť je Z_n posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin. Jestliže existují posloupnosti normovacích konstant $c_n > 0$ a $d_n \in \mathbb{R}$ a existuje nedegenerovaná limitní náhodná veličina W , že

$$c_n^{-1}(M_n - d_n) \xrightarrow{d} W, \quad (1.3)$$

pak rozdělení W patří mezi jeden typ rozdělení s následujícími distribučními funkcemi:

- (1) *Fréchetovo rozdělení:* $\Phi_\alpha(w) = \begin{cases} 0 & , w \leq 0 \\ \exp\{-w^{-\alpha}\} & , w > 0 \end{cases}$ *pro $\alpha > 0$,*
- (2) *Gumbelovo rozdělení:* $\Lambda(w) = \exp\{-e^{-w}\}$, $w \in \mathbb{R}$,
- (3) *Weibullovo rozdělení:* $\Psi_\alpha(w) = \begin{cases} \exp\{-(-w)^{-\alpha}\} & , w \leq 0 \\ 1 & , w > 0 \end{cases}$ *pro $\alpha < 0$.*

Uvedená limitní rozdělení se nazývají *rozdělení extrémních hodnot* (anglicky „extreme value distributions“ (EVD)).

Ke každému z těchto limitních rozdělení konvergují maxima jiných typů rozdělení. Pro Fréchetovo rozdělení jsou to maxima náhodných veličin, jež mají těžké chvosty. Maxima náhodných veličin s lehkými chvosty konvergují ke Gumbelovu rozdělení a maxima náhodných veličin s omezeným nosičem konvergují k Weibullovu rozdělení. Narozdíl od CLV však tato konvergence neplatí pro všechna rozdělení. Například Poissonovo nebo geometrické rozdělení k žádnému EVD nekonvergují. Na druhou stranu většina rozdělení se spojitou distribuční funkcí používaných v matematických modelech k jednomu z limitních rozdělení konverguje. Dostáváme se k následující definici.

Definice 1.2. (Sféra přitažlivosti maxim, Embrechts [6], str. 128)

Řekneme, že náhodná veličina Z s distribuční funkcí F patří do sféry přitažlivosti maxim (anglicky „maximum domain of attraction“ (MDA)) limitní náhodné veličiny

W s distribuční funkcí Q , právě když existují číselné posloupnosti $c_n > 0$ a $d_n \in \mathbb{R}$ tak, že

$$c_n^{-1}(M_n - d_n) \xrightarrow{d} W,$$

píšeme $Z \in MDA(W)$ nebo $F \in MDA(Q)$.

Do MDA tedy patří takové náhodné veličiny, jejichž maxima v distribuci konvergují k některému z EVD. Pro každé rozdělení extrémích hodnot je MDA charakterizována. Víme, které typy rozdělení konvergují k EVD (a ke kterým EVD konvergují) a které ne. Podmínky kladené na distribuční funkci F , aby konvergovala k EVD, se nazývají Von Misesovy podmínky, viz například Embrechts [6], kapitola 3.

Dalšími důležitými pojmy jsou pomalu a pravidelně se měnící funkce, které popisují sféry přitažlivosti EVD.

Definice 1.3. (Pravidelně se měnící funkce v Karamataově smyslu, Embrechts [6], str. 564)

- a) *Positionní, Lebesgueově měřitelná funkce L na $(0, \infty)$ je pomalu se měnící v nekonečnu (anglicky „slowly varying“), píšeme $L \in R_0$, právě když $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{L(tz)}{L(z)} = 1$, $t > 0$.*
- b) *Positionní, Lebesgueově měřitelná funkce h na $(0, \infty)$ je pravidelně se měnící v nekonečnu (anglicky „regularly varying“) s indexem $\alpha \in \mathbb{R}$, píšeme $h \in R_\alpha$, právě když $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{h(tz)}{h(z)} = t^\alpha$, $t > 0$.*

Nyní můžeme popsat, které distribuční funkce patří do kterých sfér přitažlivosti.

- Sféra přitažlivosti Fréchetova rozdělení obsahuje distribuční funkce s $z_\infty = \infty$ a $\bar{F}(z) = z^{-\alpha}L(z)$, $\alpha > 0$ a $L \in R_0$.
- Sféra přitažlivosti Weibullova rozdělení obsahuje distribuční funkce s $z_\infty < \infty$ a $\bar{F}(z_\infty - z^{-1}) = z^\alpha L(z)$, $\alpha < 0$ a $L \in R_0$.
- Sféra přitažlivosti Gumbelova rozdělení obsahuje distribuční funkce s $x_\infty \leq \infty$ a

$$\bar{F}(z) = c(z) \exp \left\{ - \int_{z_0}^z \frac{g(t)}{a(t)} dt \right\}, \quad z_0 < z < z_\infty,$$

kde $c(z) \rightarrow c > 0$, $g(z) \rightarrow 1$, $a'(z) \rightarrow 0$ pro $z \rightarrow z_\infty$.

Do sféry přitažlivosti Fréchetova limitního rozdělení patří rozdělení s těžkými chvosty, například Cauchyho, Paretovo či loggama. Do MDA Weibullova rozdělení patří rozdělení s $z_\infty < \infty$, například rovnoměrné či beta rozdělení. Do sféry přitažlivosti Gumbelova rozdělení patří rozdělení s lehkými chvosty, například normální, exponenciální nebo gama.

Všechna tři limitní rozdělení lze zapsat pomocí jedné formule. Můžeme tak definovat zobecněné rozdělení extrémních hodnot (anglicky „generalized extreme value distribution“ (GEV)).

Definice 1.4. (Zobecněné rozdělení extrémních hodnot, Embrechts [6], str. 152)

Definujme distribuční funkci Q_τ jako

$$Q_\tau(w) = \begin{cases} \exp\{-(1 + \tau w)^{-1/\tau}\} & , \text{ pro } \tau \neq 0 \\ \exp\{-e^{-w}\} & , \text{ pro } \tau = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

kde $1 + \tau w > 0$. Pokud

- $\tau = \alpha^{-1} > 0$, pak Q_τ odpovídá Fréchetovu rozdělení s distr. funkcí Φ_α ,
- $\tau = \alpha^{-1} = 0$, pak Q_τ odpovídá Gumbelovu rozdělení s distr. funkcí Λ ,
- $\tau = \alpha^{-1} < 0$, pak Q_τ odpovídá Weibullovu rozdělení s distr. funkcí Ψ_α .

Parametr τ v definici 1.4 charakterizuje chování chvostů rozdělení s distribuční funkcí F . Je-li $F \in MDA(Q_\tau)$, pak pro $\tau > 0$ má F těžké konce. Pro $\tau < 0$ má F konečný pravý koncový bod a pro $\tau = 0$ má F lehké chvosty.

1.2 Přesahy

Alternativou k hledání limitního rozdělení pro maxima je stanovit si nějakou vysokou hranici a za extrémní hodnoty považovat všechny ty, které ji překročí. Následně zjistit limitní rozdělení těchto hodnot, když hranici posunujeme výš a výš do nekonečna.

Definice 1.5. (Přesahová distribuční funkce, Embrechts [6], str. 160)

Nechť Z je náhodná veličina s distribuční funkcí F a pravým koncovým bodem z_∞ . Pro pevné $u < z_\infty$ definujme přesahovou distribuční funkce $F_u(z)$ jako:

$$F_u(z) = P(Z \leq z + u \mid Z > u), \quad z \geq 0.$$

Je to přesah distribuční funkce Z nad hraniční bod u .

Přesahová distribuční funkce (anglicky „excess distribution function“) vlastně udává rozdělení přebytku Z nad u , když už Z překročí hranici u . Má uplatnění v mnoha oblastech, například v pojišťovnictví se F_u obvykle nazývá „excess-of-loss distribution function“. V demografii je F_u známá jako reziduální životní funkce. .

Nyní zadefinujeme zobecněné Paretovo rozdělení (anglicky „generalised Pareto distribution“ (GPD)). Vztah GPD a přesahové distribuční funkce uvidíme za chvíli.

Definice 1.6. (Zobecněné Paretovo rozdělení, Embrechts [6], str. 162)
Definujme distribuční funkci G_τ jako

$$G_\tau(w) = \begin{cases} 1 - (1 + \tau w)^{-1/\tau} & , \text{ když } \tau \neq 0, \\ 1 - e^{-w} & , \text{ když } \tau = 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

$$\text{kde } \begin{cases} w \geq 0 & , \text{ když } \tau \geq 0, \\ 0 \leq w \leq -1/\tau & , \text{ když } \tau < 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

G_τ je nazývána standardním zobecněným Paretovým rozdělením.

Limitní rozdělení GPD je tedy definováno na intervalu $[0, \infty)$. Jak uvidíme dále, pokud vezmeme polopřímku $H_u = [u, \infty)$ takovou, že $P(Z \in H_u) \rightarrow 0_+$, $u \rightarrow z_\infty$, tak je funkce přežití GPD limitním rozdělením vhodně normalizované podmíněné náhodné veličny $Z^{H_u} = Z|Z \in H_u$.

Mírnou úpravou získáme obecnější tvar $G_{\tau,\beta}$ tak, že z v definici 1.6 zaměníme za z/β , pro $\beta > 0$. G_0 je limita G_τ pro $\tau \rightarrow 0$. Je to standardní exponenciální rozdělení.

To využijeme v následující větě.

Věta 1.7. (Pickandsova-Balkemova-de Haanova věta, Chavez-Demoulin [5], str. 16)

Nechť Z_1, Z_2, \dots jsou i.i.d. náhodné veličiny s distribuční funkcí F . Pak platí následující:

$F \in MDA(Q_\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, právě když

$$\lim_{n \rightarrow z_\infty} \sup_{0 < z < z_\infty - u} |F_u(z) - G_{\tau,\beta(u)}(z)| = 0$$

pro nějakou měřitelnou funkci $\beta(\cdot)$.

Pokud distribuční funkce F patří do sféry přitažlivosti některého limitního rozdělení extrémních hodnot, její přesahová funkce pro vysoké prahy u , blízké koncovému bodu z_∞ , se chová jako distribuční funkce zobecněného Paretova rozdělení. Pro vysoké u můžeme F_u modelovat pomocí GPD.

Větu 1.7 můžeme přepsat pro funkci přežití přesahové distribuční funkce

$$\bar{F}_u(z) = P(Z > z + u | Z > u) = \frac{1 - F(z + u)}{1 - F(u)}, \quad z > 0,$$

jako

$$\lim_{n \rightarrow z_\infty} \sup_{0 < z < z_\infty - u} |\bar{F}_u(z) - \bar{G}_{\tau, \beta(u)}(z)| = 0.$$

Nyní zavedeme sféru přitažlivosti přesahů.

Definice 1.8. (Sféra přitažlivost přesahů, Balkema [3], str. 101)

Říkáme, že F patří do sféry přitažlivosti přesahů distribuční funkce G na $[0, \infty)$, píšeme $F \in \mathcal{D}^+(G)$, pokud F splňuje

$$\frac{1 - F(z + u)}{1 - F(u)} \rightarrow 1 - G(z), \quad z \rightarrow z_\infty.$$

Z Pickandsovy-Balkemovy-de Haanovy věty 1.7 vidíme, že limitní rozdělení přesahů G je zobecněné Pareto rozdělení G_τ . Můžeme tedy značit $\mathcal{D}^+(G_\tau) = \mathcal{D}^+(\tau)$.

Sféry přitažlivosti maxim a přesahů si odpovídají. Pokud distribuční funkce F patří do MDA Gumbelova rozdělení, $F \in MDA(Q_0)$, její přesahová distribuční funkce konverguje k G_0 a proto F patří do $\mathcal{D}^+(0)$. Pokud distribuční funkce F patří do MDA Fréchetova rozdělení, $F \in MDA(Q_\tau)$, $\tau > 0$, její přesahová distribuční funkce konverguje k G_τ , a proto F patří do $\mathcal{D}^+(\tau)$, $\tau > 0$. Podobně sféra přitažlivosti přesahů pro $\tau < 0$ odpovídá MDA Weibullova rozdělení. Funkce G_τ má konečný pravý koncový bod pro $\tau < 0$. Sféry přitažlivosti pro tato dvě poslední rozdělení jsou dány podmínkami na funkci přežití distribuční funkce F . Požaduje se, aby se \bar{F} pravidelně měnila.

Následující věta charakterizuje sféru přitažlivosti přesahů $\mathcal{D}^+(0)$ exponenciálního limitního rozdělení, která má volnější strukturu.

Věta 1.9. (Balkema [3], str. 101)

Distribuční funkce F patří do $\mathcal{D}^+(0)$, a tím pádem i do MDA Gumbelova rozdělení Λ , právě když

$$1 - F(z) \rightarrow e^{\psi(z)}, \text{ pro } z \rightarrow z_\infty,$$

kde ψ je dvakrát diferencovatelná funkce na levém okolí z_∞ splňující

$$\psi'(z) > 0, \psi(z) \rightarrow \infty, (1/\psi')'(z) \rightarrow 0, z \rightarrow z_\infty. \quad (1.7)$$

V dalších kapitolách budeme uvažovat náhodnou veličinu Y , která bude reprezentovat ztrátu portfolia v nějakém pevně zvoleném budoucím čase. Hodnota portfolia bude $-Y$. Budeme předpokládat, že Y patří do $\mathcal{D}^+(0)$. To, jestli náhodná veličina, patří do sféry přitažlivosti, záleží na chování konce neboli chvostu jejího rozdělení či hustoty. Tedy na něčem, o čem většinou máme jen velmi kusé informace, jestli nějaké vůbec máme. Extrémních pozorování není mnoho, takže vlastně nemůžeme nikdy říci, jestli rozdělení, z něhož máme jen konečné výběry, bude mít svůj chvost v požadované formě. Na druhou stranu teorie extrémních hodnot byla v praxi mnohokrát použita a dobře odhadla extrémní chování. Autoři článku Balkema [2] uvádějí dva důvody, proč by toto limitní chování mělo platit.

- 1) Finační trh je komplexní ekonomický systém, který se chová tak složitě a nepředvídatelně, že ho jako celek nelze postihnout nějakým matematickým modelem. Náhodné veličiny, které z takového trhu pocházejí, však většinou mají rozdělení s hustotami, které mají spojitý konec. Jejich chvosty se tedy nemůžou chovat nijak divoce a dramaticky měnit předchozí trend.
- 2) Vezměme $P(Y \geq u) = \alpha$. I když požadujeme, aby limitní rozdělení existovalo pro $\alpha \rightarrow 0_+$, ve skutečnosti nás extrémně malé hodnoty α , řekněme $\alpha < 10^{-99}$, nezajímají. Nemají totiž žádné reálné použití a vysvětlení. Extrémními událostmi s tak malými pravděpodobnostmi výskytu je nemožné se zabývat.

Kapitola 2

Poissonovy bodové procesy

V této kapitole uvedeme základní definice a vlastnosti bodových procesů, zvláště pak Poissonových bodových procesů.

Na náhodné vektory \mathbf{Z}_i (respektive náhodné veličiny Z_i) se můžeme dívat jako na náhodné body prostoru \mathbb{R}^d (respektive \mathbb{R}). Bodový proces N je pak rozdělením těchto náhodných vektorů v daném prostoru. Máme-li náhodné body \mathbf{Z}_i a množinu $A \subset \mathbb{R}^d$, náhodná veličina $N(A)$ udává počet $\mathbf{Z}_i \in A$. Nejdůležitější jsou ty bodové procesy, pro které má $N(A)$ Poissonovo rozdělení: počet náhodných bodů v množině A se řídí Poissonovým rozdělením. Rozšíření, kdy parametr λ v Poissonově rozdělení nahradíme mírou ρ , propojuje teorii extrémních hodnot s bodovými procesy. Bodové procesy se totiž vyskytují jako slabé limity výběrových bodových procesů popisujících chování výběrových mraků. To znamená, že

$$(N_n(A_1), \dots, N_n(A_m)) \xrightarrow{d} (N(A_1), \dots, N(A_m)),$$

pro jakékoliv množiny $A_i \subset \mathbb{R}^d$, $i = 1, \dots, m$.

Obecně se místo d -rozměrného euklidovského prostoru \mathbb{R}^d používá v teorii bodových procesů obecnější *stavový prostor* (anglicky „state space“). Pro naše účely je však tento pojem nadbytečný. Více o stavovém prostoru lze najít například v sekci 4.2 knihy Balkema [3].

Jak již bylo řečeno $N(A) = N(A, \omega)$ je náhodná veličina udávající počet bodů v množině A . Dále $N(\cdot, \omega)$ je míra, která nabývá hodnot $1, 2, 3, \dots$. Tedy něco jako čítací míra. Bodový proces N je jednoduchý, když se žádné jeho

body neopakují.

Rozdělení bodového procesu N je určeno rozdělením konečně rozměrných vektorů

$$(N(A_1), \dots, N(A_m)) \text{ pro } m \geq 1.$$

Množiny A_1, \dots, A_m jsou podmnožiny \mathbb{R}^d .

Definujeme Diracovu míru $\epsilon_{\mathbf{z}}$ pro $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d$ tak, že

$$\epsilon_{\mathbf{z}} = \begin{cases} 1 & , \mathbf{z} \in A, \\ 0 & , \mathbf{z} \notin A, \end{cases} \quad A \subset \mathbb{R}^d.$$

Bodový proces pak můžeme zapsat jako $N = \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_{\mathbf{z}_i}$ pro posloupnost náhodných vektorů $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \dots \in \mathbb{R}^d$. Pro $\omega \in \Omega$ je

$$N(A, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_{\mathbf{z}_i(\omega)}(A), \quad A \subset \mathbb{R}^d.$$

Jedním z bodových procesů, který má uplatnění v teorii extrémních hodnot, je *bodový proces přesahů* (anglicky „point process of exceedances“). V jednorozměrném případě ho pro interval I , posloupnost náhodných veličin Z_1, Z_2, \dots a hranici u můžeme zapsat jako:

$$N_n(I) = \sum_{i=1}^n \epsilon_{n^{-1}i}(I) \mathbb{1}_{\{Z_i > u\}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Pokud $I = (0, 1]$, počítá $N_n(I)$ počet přesahů sekvence náhodných veličin Z_1, \dots, Z_n přes práh u :

$$N_n((0, 1]) = \#\{i : 0 < n^{-1}i \leq 1 \text{ a } Z_i > u\} = \#\{i \leq n : Z_i > u\}.$$

Z toho je zřejmé napojení na teorii extrémních hodnot, protože:

$$\begin{aligned} P(N_n((0, 1]) = 0) &= P(\#\{i \leq n : Z_i > u\} = 0) = \\ &= P(\text{žádný z bodů } Z_i \text{ nepřekročí } u) = P(\max(Z_1, \dots, Z_n) \leq u) = P(M_n \leq u). \end{aligned}$$

Bodové procesy je možné vnímat jako kolekci čítacích veličin, které nabývají hodnot $1, 2, 3, \dots$. Vezměme v úvahu jednoduchou náhodnou čítací veličinu

$$B_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{Z_i \in A_n\}}, \quad A_n \subset \mathbb{R},$$

Z_i jsou nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny. Pak B_n má binomické rozdělení: udává počet úspěchů $\{Z_i \in A_n\}$ mezi Z_1, \dots, Z_n pokusy při pravděpodobnosti úspěchu $p_n = P(Z_1 \in A_n)$. Pokud roste počet pozorování n do ∞ a $np_n \rightarrow \lambda$, pak $B_n \xrightarrow{d} Poi(\lambda)$. Tím se dostáváme k definici Poissonova bodového procesu. Nejprve však musíme definovat Radonovu míru.

Definice 2.1. *Míra na otevřené podmnožině \mathbb{R}^d je Radonova míra, právě když je konečná pro kompaktní podmnožiny dané otevřené množiny.*

Definice 2.2. (Poissonův bodový proces, Embrechts [6], str. 227)

Nechť ρ je Radonova míra na \mathbb{R}^d , bodový proces N je Poissonovým procesem se střední mírou ρ , právě když

$$(a) \text{ pro } \forall A \subset \mathbb{R}^d \quad P(N(A) = k) = \begin{cases} e^{-\rho(A)} \frac{(\rho(A))^k}{k!} & , \text{ když } \rho(A) < \infty, \\ 0 & , \text{ když } \rho(A) = \infty, \end{cases}$$

(b) *pro $\forall m \geq 1$ a A_1, \dots, A_m po dvou disjunktní množiny z \mathbb{R}^d konečné míry $\rho(A_i)$, $i = 1, \dots, m$, jsou $N(A_1), \dots, N(A_m)$ nezávislé náhodné veličiny.*

Radonova míra ρ se nazývá *střední míra*, protože $EN(A) = \rho(A)$. Je to střední hodnota Poissonova procesu. Často tato míra bývá čítací, jelikož uvádí počet bodů, které patří do nějaké množiny A . Protože je Poissonovo rozdělení určeno svou střední hodnotou, určuje ρ Poissonův bodový proces.

Příklad 2.3. (Homogenní Poissonův bodový proces)

Homogenní Poissonův proces $(N(t))_{t \geq 0}$ na prostoru \mathbb{R} s intenzitou λ splňuje následující podmínky:

- i) $N(0) = 0$, začíná v nule,
- ii) má nezávislé a stacionární přírůstky,
- iii) $\forall t \geq 0$ má $N(t)$ Poissonovo rozdělení s parametrem λt .

Protože $(N(t))_{t \geq 0}$ je neklesající proces, definujeme:

$$N((s, t]) = N(t) - N(s), \quad 0 \leq s < t < \infty.$$

S touto konstrukcí je pak homogenní Poissonův proces $(N(t))_{t \geq 0}$ Poissonovým bodovým procesem na $[0, \infty)$ se střední mírou ρ :

$$N(t) = N((0, t]), \quad \rho((0, t]) = \lambda|(0, t]| = \lambda t, \text{ kde } |\cdot| \text{ je Lebesgueova míra.}$$

Pro $0 \leq s < t < \infty$ je pak

$$\begin{aligned} N((s, t]) &= N((0, t]) - N((0, s]), \\ \rho((s, t]) &= \rho((0, t]) - \rho((0, s]) = \lambda|(0, t]| - \lambda|(0, s]| = \lambda(t - s). \end{aligned}$$

□

Jestliže je střední míra ρ absolutně spojitá vzhledem k Lebesgueově míře, to znamená, že existuje funkce $f \geq 0$ tak, že

$$\rho(A) = \int_A f(\mathbf{z}) d\mathbf{z}, \quad A \subset \mathbb{R}^d,$$

pak je f nazývána intenzitou procesu N . Je-li $\int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = 1$, pak je f hustota míry ρ .

Nechť ρ je střední míra Poissonova bodového procesu N a g je Borelovská funkce taková, že $\int |g| d\rho$ je konečný. Pak

$$\mathbb{E} \int g dN = \int g d\rho; \quad \text{var} \int g dN = \int g^2 d\rho \leq \infty.$$

Následující věta říká, že pokud transformujeme Poissonův bodový proces pomocí měřitelného zobrazení, zůstane Poissonovým bodovým procesem.

Věta 2.4. (Embrechts [6], str. 230)

Nechť N je Poissonův bodový proces se střední mírou ρ na \mathbb{R}^d . Nechť jsou body N transformovány měřitelným zobrazením $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$. Pak $T(N)$ je Poissonův bodový proces se střední mírou $\rho(T^{-1})$, $\rho((T^{-1})(\cdot)) = \rho\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : T(\mathbf{x}) \in \cdot\}$.

Než přistoupíme k definici vágní konvergence Radonových měř, uvedeme pro připomenutí definici konvergence v distribuci neboli slabou konvergenci.

Definice 2.5. (Slabá konvergence)

Nechť $\mathbf{Z}; \mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \dots$ jsou náhodné vektory z \mathbb{R}^d s rozděleními $\pi_0; \pi_1, \pi_2, \dots$. Říkáme, že \mathbf{Z}_n konvergují v distribuci k \mathbf{Z} , právě když pro všechny spojitě omezené funkce φ z \mathbb{R}^d do \mathbb{R} platí:

$$\int \varphi d\pi_n \rightarrow \int \varphi d\pi_0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Konvergenci v distribuci značíme: $\mathbf{Z}_n \xrightarrow{d} \mathbf{Z}$ nebo říkáme, že $\pi_n \rightarrow \pi_0$ slabě.

Ekvivalentně lze místo spojitě a omezené funkce φ , uvažovat spojitou funkci φ s kompaktním nosičem.

Definice 2.6. (Vágní konvergence)

Nechť $\rho_0; \rho_1, \rho_2, \dots$ jsou Radonovy míry na prostoru \mathbb{R}^d . Řekneme, že ρ_n jdou k ρ_0 vágně, právě když pro všechny spojitě nezáporné funkce $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ s kompaktním nosičem platí:

$$\int \varphi d\rho_n \rightarrow \int \varphi d\rho_0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Vágní konvergence je slabší než konvergence v distribuci, jelikož u slabé konvergence nepožadujeme, aby funkce φ byla nezáporná.

Kapitola 3

Teorie vícerozměrných extrémních hodnot

V této kapitole přejdeme od jednorozměrných k vícerozměrným extrémům. Teorie vícerozměrných extrémních hodnot se těší velkému zájmu vědců i praktiků. Jedná se například o případ, kdy máme v portfoliu více cenných papírů a zajímá nás, jaké je rozdělení náhodného vektoru složeného z cen nebo logaritmů cen těchto cenných papírů, když jedna nebo více jeho složek dosahuje extrémních hodnot.

Narozdíl od jednorozměrného případu není u vícerozměrných extrémů zřejmé, co je to extrém. Existuje několik reprezentací, z nichž každá považuje za extrém něco jiného. V této kapitole se budeme zabývat *souřadnicovými extrémy* (anglicky „coordinatewise extremes“). Je to analogie jednorozměrných maxim.

Jiná interpretace je analogií excesů přes vysoké meze. V každém rozměru si stanovíme hranici. Jakékoliv pozorování přesahující některou z těchto hranic považujeme za extrémní. Například na obrázku 3.1 má ve dvou-rozměrném případě horizontální hranice hodnotu 3 a vertikální hranice hodnotu 2,5. Nejvíce informací nám samozřejmě dávají ty pozorování, které překračují všechny hranice.

Pro souřadnicové extrémy uvažujme náhodný výběr z d -rozměrného rozdělení o velikosti n . O náhodném výběru z vícerozměrného rozdělení se někdy hovoří jako o výběrovém mraku. Máme vektory $\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_n$ z \mathbb{R}^d , kde

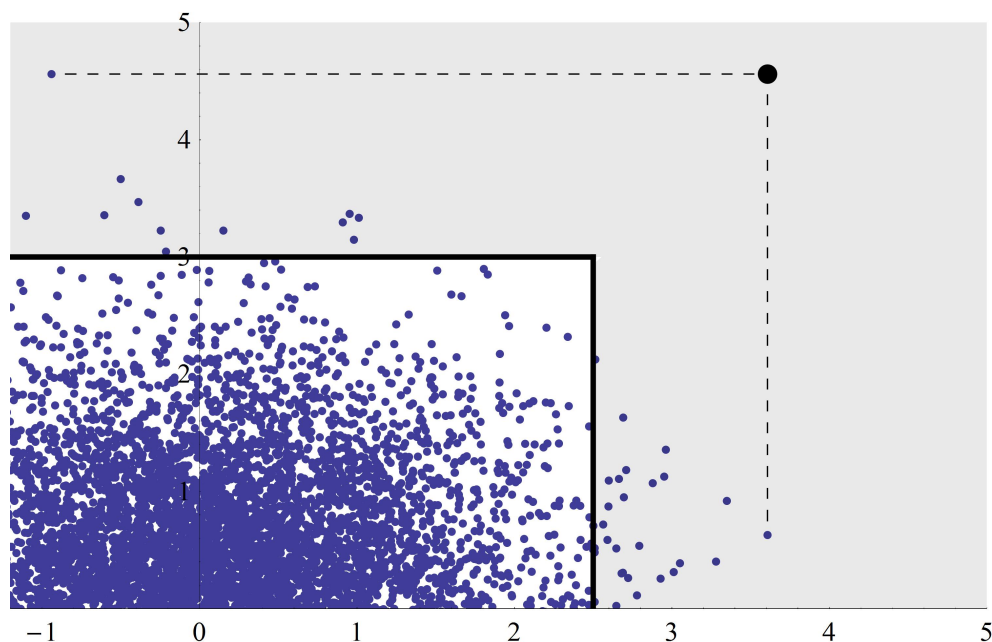
$\mathbf{Z}_i = (Z_{ij})_{j=1,\dots,d}$, $i = 1, \dots, n$. Označme maximum v každé složce jako

$$M_j^n = \max \{Z_{1j}, \dots, Z_{nj}\}, j = 1, \dots, d.$$

V každé souřadnici tedy vybereme tu největší složku vektorů z výběru. Vektor těchto složek bude tvořit vícerozměrný extrém

$$\mathbf{M}^n = (M_1^n, \dots, M_d^n)'$$

Realizace tohoto maximálního vektoru $\mathbf{m} = \mathbf{M}^n(\omega)$ nemusí samozřejmě být, a většinou také není, bod původního náhodného výběru. To také ostatně můžeme vidět na obrázku 3.1, který ukazuje rozdíl mezi souřadnicovými extrémy a přesahy. Souřadnicové maximum má hodnotu $[3, 6; 4, 6]$, je složeno ze dvou bodů náhodného výběru.



Obrázek 3.1: Část náhodného výběru 10 000 bodů z dvourozměrného normálního rozdělení, černý puntík zobrazuje souřadnicový extrém, černé přímky pak hranice přesahů

Stejně jako v jednorozměrném případě normalizujeme vektor \mathbf{M}^n pomocí afinních transformací. Předpokládáme, že jsou tyto transformace pozitivní

a působí po složkách (anglicky se nazývají „coordinatewise affine transformations“ (CATs)). Mají tedy tento tvar:

$$\gamma(\mathbf{z}) = (a_1 z_1 + b_1, \dots, a_d z_d + b_d)', \quad a_j > 0, \quad b_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, d.$$

S operací skládání zobrazení tvoří tyto transformace grupu transformací γ^t tak, že $\gamma^{t+s} = \gamma^t \circ \gamma^s$, $\gamma^1 = \gamma$. Pro libovolné t mají afinní transformace v každé složce tvar:

$$\gamma^t(z_j) = \begin{cases} z_j + tb & , a = 1 \\ a^t(z_j - c) + c & , a \neq 1, c = b/(1 - a). \end{cases}$$

V prvním případě se jedná o translaci, ve druhém o změnu měřítka se středem v bodě c . Tyto jednorozměrné transformace tvoří grupu pozitivních afinních transformací, kterou budeme značit \mathcal{A}^+ .

Celkově máme vektor

$$\gamma^t(\mathbf{z}) = (\gamma_1^t(z_1), \dots, \gamma_d^t(z_d))', \quad t \in (R), \quad \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d)'.$$

Chceme, aby afinní transformace normalizovali vektor \mathbf{M}^n tak, aby konvergoval k nedegenerovanému náhodnému vektoru \mathbf{W} .

Definice 3.1. (Sféra přitažlivosti, Balkema [3], str. 113)

Náhodný vektor \mathbf{Z} s distribuční funkcí F patří do sféry přitažlivosti limitního vektoru \mathbf{W} s distribuční funkcí Q , jestliže \mathbf{W} je nedegenerovaný a existují složkové afinní transformace γ^n tak, že

$$(\gamma^n)^{-1}(\mathbf{M}^n) = ((\gamma_1^n)^{-1}(M_1^n), \dots, (\gamma_d^n)^{-1}(M_d^n))' \xrightarrow{d} \mathbf{W} = (W_1, \dots, W_d)', \quad n \rightarrow \infty;$$

$$F^n(\gamma^n(\mathbf{w})) \rightarrow Q(\mathbf{w}).$$

Píšeme $F \in \mathcal{D}^\vee(Q)$ nebo $\mathbf{Z} \in \mathcal{D}^\vee(\mathbf{W})$.

Pokud \mathbf{Z} patří do $\mathcal{D}^\vee(Q)$, konvergují v distribuci komponenty normalizovaného souřadnicového maxima k jednorozměrnému limitnímu rozdělení:

$$(\gamma_j^n)^{-1}(M_j^n) \xrightarrow{d} W_j, \quad n \rightarrow \infty.$$

W_j má rozdělení extrémních hodnot (viz. 1.1) a $F_j \in MDA(Q_{\tau_j})$.

Stejně jako v jednorozměrném případě musí vektor \mathbf{W} splňovat podmínku stability, aby mohl být limitním vektorem. Jedině ke stabilním nedegenerovaným vektorům můžou maxima konvergovat. Nechť je nyní \mathbf{M}^n vektor maxim nezávislých, stejně rozdělených náhodných vektorů $\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_n$ s distribuční funkcí Q . Požadujeme tedy, aby

$$(\gamma^n)^{-1}(\mathbf{M}^n) \stackrel{d}{=} \mathbf{W}_1.$$

Jelikož platí

$$\begin{aligned} P(\mathbf{M}^n < \mathbf{w}) &= P(M_1^n < w_1, \dots, M_d^n < w_d) = \\ &= P(W_{11} < w_1, \dots, W_{1d} < w_d) \cdot \dots \cdot P(W_{n1} < w_1, \dots, W_{nd} < w_d) = Q^n(\mathbf{w}), \end{aligned}$$

má podmínka stability tvar:

$$Q^n(\gamma^n(\mathbf{w})) = Q(\mathbf{w}). \quad (3.1)$$

Všechny mocniny Q^n jsou stejného typu vzhledem k souřadnicovým afinním transformacím.

Předpokládejme, že limitní distribuční funkce Q je pozitivní na $(0, \infty)^d$ a splňuje podmínku stability. Mocniny Q^n pro všechny $n > 0$ jsou také distribuční funkce. Definujme funkci

$$R(\mathbf{w}) = -\log Q(\mathbf{w}), \quad Q(\mathbf{w}) = e^{-R(\mathbf{w})} \text{ na } (0, \infty)^d.$$

Pro libovolné $\epsilon > 0$ je $Q^\epsilon - 1$ funkce, která má v (∞, \dots, ∞) hodnotu 0. Funkce $\frac{Q^\epsilon - 1}{\epsilon}$ je vícerozměrná obdoba funkce přežití míry s mohutností $1/\epsilon$ na $[0, \infty)^d$. Jelikož platí následující:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{Q^\epsilon - 1}{\epsilon} = \log Q(\mathbf{w}) = -R(\mathbf{w}),$$

je funkce R vícerozměrná obdoba funkce přežití míry ρ na $[0, \infty)^d \setminus \{0\}$, definovaná jako

$$\rho([0, \infty)^d \setminus [0, \mathbf{w})) = R(\mathbf{w}) = -\log Q(\mathbf{w}).$$

Definice 3.2. *Míře ρ se říká exponentová míra (anglicky „exponent measure“).*

Exponentová míra ρ na $(0, \infty)^d$ je konečná pro všechny kompaktní podmnožiny $[0, \infty)^d \setminus [0, \mathbf{w}]$ pro jakékoliv $\mathbf{w} \in (0, \infty)^d$. Je to tedy Radonova

míra (viz 2.1).

Jak ukazují autoři knihy Balkema [3] v kapitolách 7.1 a 7.2, lze pomocí max-Lévyho procesu odvodit, že Q splňuje podmínku stability, právě když existují složkové afinní transformace tak, že pro exponentovou míru ρ platí

$$\gamma^t(\rho) = e^t \rho, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Toto je důležitý výsledek, který bude mít velký význam v dalších kapitolách. Právě takovou vlastnost totiž budeme požadovat po přesahových mírách, aby byly limitními mírami přesahů přes horizontální a eliptické prahy.

Předpokládejme, že F patří do sféry přitažlivosti limitního rozdělení s distribuční funkcí Q .

$$F^n(\gamma^n(\mathbf{w})) \rightarrow Q(\mathbf{w}), \quad Q(\mathbf{w}) = e^{-R(\mathbf{w})}.$$

Protože $-\log F(\gamma^n(\mathbf{w}))$ je asymptoticky rovno $1 - F(\gamma^n(\mathbf{w}))$ pro $\mathbf{w} > 0$ a

$$\log F^n(\gamma^n(\mathbf{w})) = n \log F(\gamma^n(\mathbf{w})),$$

kde $\gamma^n(\mathbf{w}) = \mathbf{z}$, tak pro velké n platí:

$$-n \log F(\gamma^n(\mathbf{w})) = n(1 - F(\gamma^n(\mathbf{w}))).$$

Označme $n(1 - F(\gamma^n(\mathbf{w}))) = R_n(\mathbf{w})$. Pak $R_n(\mathbf{w}) \rightarrow R(\mathbf{w})$ pro $\mathbf{w} \in (0, \infty)^d$. Funkce $R_n(\mathbf{w})$ je opět vícerozměrná obdoba funkce přežití míry $\rho_n = n\pi_n$, kde π_n je funkce přežití normalizovaného vektorem $(\gamma^n)^{-1}(\mathbf{Z})$. Dále ρ_n je střední míra bodového procesu daného normalizovaným náhodným výběrem:

$$N_n = \{(\gamma^n)^{-1}(\mathbf{Z}_1), \dots, (\gamma^n)^{-1}(\mathbf{Z}_n)\}, \quad R_n(\mathbf{w}) = \rho_n([0, \mathbf{w}]^c).$$

Bodová konvergence $F^n(\gamma^n(\mathbf{w})) \rightarrow Q(\mathbf{w})$ implikuje bodovou konvergenci $R_n(\mathbf{w}) \rightarrow R$ na $(0, \infty)^d$ a vágní konvergenci $\rho_n \rightarrow \rho$ pro $n \rightarrow \infty$. Tyto úvahy shrnuje následující věta.

Věta 3.3. (de Haanova-Resnickova věta, Balkema [3], str. 113)

Nechť má náhodný vektor \mathbf{Z} z $[0, \infty)^d$ rozdělení π a distribuční funkci F a γ^n jsou souřadnicové afinní transformace. Nechť Q je limitní vektor na $[0, \infty)^d$ s exponentovou mírou ρ na $(0, \infty)^d$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

$$F^n(\gamma^n(\mathbf{w})) \xrightarrow{d} Q(\mathbf{w}),$$

$$\rho_n = n(\gamma^n)^{-1}(\pi) \rightarrow \rho \text{ vágně na } (0, \infty)^d.$$

Pro ρ_n lze dokázat slabou konvergenci $\rho_n \rightarrow \rho$ na $(0, \infty)^d \setminus [0, w]$ pro $\forall w \in \mathbb{R}^d$. Výběrový mrak N_n pak konverguje v distribuci k Poissonovu bodovému procesu N_0 na $(0, \infty)^d$. Poissonův bodový proces N_0 dává asymptotický popis krajů výběrového mraku při velkých výběrech. Navíc složkové maximum \mathbf{M}^n normalizovaného výběru N_n konverguje v distribuci ke složkovému maximu \mathbf{W} procesu N pro $n \rightarrow \infty$.

Víme již tedy, co musí splňovat limitní vektor \mathbf{W} , ale pořád nevíme, jak ho odvodit. Rozdělení jakéhokoliv limitního vektoru je určeno:

1. d marginálními rozděleními,
2. závislostní strukturou.

Tyto podmínky mohou být určeny nezávisle na sobě. Marginální rozdělení známe - jsou to jednorozměrná limitní rozdělení. Tyto marginální rozdělení potřebujeme spojit vzájemnou strukturou, která určí druhy závislostí mezi jednotlivými marginálami, a spojí tak marginální distribuční funkce do sdružené distribuční funkce vektoru \mathbf{W} . Jelikož mají rozdělení extrémních hodnot spojitě distribuční funkce, můžeme tuto strukturu určit pomocí kopuly.

Definice 3.4. (Kopula)

Nechť je $\mathbf{W} = (W_1, \dots, W_d)$ náhodný vektor se sdruženou distribuční funkcí Q a s marginálními distribučními funkcemi Q_i , $W_i \sim Q_i$, $i = 1, \dots, d$. Distribuční funkce C s rovnoměrně rozdělenými marginálními distribučními funkcemi na $[0, 1]$ se nazývá kopula, právě když

$$Q = C(Q_1, \dots, Q_d).$$

Sklarova věta zaručí existenci a jednoznačnost kopuly.

Věta 3.5. (Sklarova věta)

Nechť Q je d -rozměrná distribuční funkce s marginálními distribučními funkcemi Q_1, \dots, Q_d . Pak existuje právě jedna kopula C s rovnoměrně rozdělenými marginálami taková, že

$$Q(w_1, \dots, w_d) = C(Q_1(w_1), \dots, Q_d(w_d)).$$

V praxi se používají různé kopuly podle toho, jaký druh závislosti máme v datech nebo který chceme podchytit. Oblíbené jsou Gaussovská kopula, Gumbelova kopula či Galambosova kopula.

Kapitola 4

Limitní rozdělení vysokého rizika

Tato a dvě příští kapitoly tvoří jádro, hlavní část práce. Nynější kapitola zpracovává látku z Kapitoly III knihy Balkema [3]. Značení z knihy bylo zachováno v co největší možné míře. V angličtině se rozdělení vysokého rizika nazývá „high risk scenario“.

Kapitola je rozdělena na sedm podkapitol. V první sekci uvádíme motivaci, základní definice a důležité věty. Druhá podkapitola popisuje vícerozměrné zobecněné Paretovo rozdělení. Třetí sekce se zabývá symetriemi limitních rizikových rozdělení. Další tři podkapitoly se věnují sférám přitažlivosti limitních rizikových rozdělení. Poslední sekce uvádí základní informace o afinních transformacích.

4.1 Limitní rozdělení vysokého rizika

Motivaci pro následující postup najdeme v teorii rizika. Nejprve předpokládejme, že máme portfolio, které tvoří d cenných papírů (například akcií či obligací). Trh, ze kterého pocházejí cenné papíry našeho portfolio, se vyvíjí náhodně dle nějakého náhodného procesu. Běžně se používá například vícerozměrný Brownův proces s danou střední hodnotou a regulární kovarianční maticí. Současnou pozici portfolio $\mathbf{z}_0 \in \mathbb{R}^d$ známe. Je to vektor cen nebo logaritmu cen jednotlivých složek portfolio. Zajímá nás jeho budoucí pozice, budoucí ceny, třeba za deset obchodních dní. Budoucí pozice portfolio je náhodný vektor, označme ho $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_d)' \in \mathbb{R}^d$, kde Z_i , $i = 1, \dots, d$,

jsou náhodné veličiny. Jsou to opět ceny či logaritmy cen jednotlivých komponent portfolia. Rozdělení takového náhodného vektoru bude rozprostřeno okolo bodu \mathbf{z}_0 . Počet cenných papírů v portfoliu se může značně lišit, od deseti pro malého investora až k několika stům.

Předpokládejme, že hodnota portfolia je lineární kombinací jeho složek.

$$V(\theta) = \theta' \mathbf{Z} = \sum_{i=1}^d \theta_i Z_i, \quad (\theta_1, \dots, \theta_d)' \text{ je vektor vah.}$$

Váhy velmi často reprezentují množství cenného papíru v portfoliu. Jejich znaménka se liší podle toho, jestli jsme u daného cenného papíru v krátké nebo dlouhé pozici. Jsme-li v dlouhé pozici, spekulujeme na růst ceny podkladového aktiva, které jsme koupili. Hodnota portfolia se zvýší, když stoupne jeho cena a naopak. Příslušná váha má kladné znaménko. Jsme-li v krátké pozici, spekulujeme na pokles ceny podkladového aktiva. Prodáme cenný papír a očekáváme, že jej v budoucnu koupíme nazpět za nižší cenu. V této situaci se hodnota portfolia zvýší, když se cena daného cenného papíru sníží a naopak. Příslušná váha má záporné znaménko.

V teorii extrémních hodnot nás zajímá, co se stane, když nastane extrémní událost: trh výrazně klesne, hodnota portfolia se o hodně zmenší (bude mít menší hodnotu než q):

$$\{V(\theta) \leq q\}.$$

Pravděpodobnost takového poklesu je velmi malá, protože je to výjimečná událost. Výraz $\{V(\theta) \leq q\}$ můžeme interpretovat geometricky:

vektor $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_d)'$ patří do poloprostoru určeného směrem $(\theta_1, \dots, \theta_d)'$ a reálným číslem q , což je vzdálenost nadroviny určené tímto směrem od středu soustavy souřadnic.

Například v operačním riziku často řešíme následující úlohu.

Příklad 4.1. Máme vektor ztrát $\mathbf{L} = (L_1, \dots, L_d)'$ za určité období. Celková ztráta je dána součtem $L_1 + \dots + L_d$. Zajímá nás rozdělení vektoru \mathbf{L} za podmínky, že celková ztráta $L_1 + \dots + L_d$ je vysoká. Součet $L_1 + \dots + L_d = \mathbf{1}' \mathbf{L}$, kde $\mathbf{1}$ je d -rozměrný vektor jedniček, určuje poloprostor ve směru $(1, \dots, 1)'$. To znamená, že chceme odhadnout rozdělení vektoru \mathbf{L} za podmínky, že \mathbf{L} patří do poloprostoru $H = \{\mathbf{1}' \mathbf{L} \geq q\}$ určeného směrem $\mathbf{1}$ a vzdáleností q , kde q je dostatečně velké.

□

Názorně si můžeme situaci představit ve dvourozměrném případě.

Příklad 4.2. *Nechť naše portfolio tvoří dva cenné papíry, například dluhopisy. U obou jsme v dlouhé pozici. Náhodný vektor $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2)' \in \mathbb{R}^2$ je minus změna ceny těchto dluhopisů oproti výchozí hodnotě $\mathbf{z}_0 = (z_1, z_2)'$. Čím větší nabývá Z_1 nebo Z_2 hodnoty, tím je menší hodnota portfolia. Rizikový region proto bude tvořit hlavně první kvadrant, protože symbolizuje pokles hodnoty v obou složkách. Mějme dva poloprostory H1 a H2 jako na obrázku 4.1. Pozorování, které bude patřit alespoň do jednoho z těchto poloprostorů, budeme považovat za extrémní. Poloprostory jsou dané nerovnicemi:*

$$\frac{x}{5} + y \geq 1,5 \text{ a } x + y \geq 2.$$

Pro H1 je $\theta = (\frac{1}{5}, 1)'$ a $q = 1,5$. Pro H2 je $\theta = (1, 1)'$ a $q = 2$.

U poloprostoru H1 je váha prvního dluhopisu menší než váha druhého dluhopisu. To může například znamenat, že prvního dluhopisu máme v portfoliu pětkrát méně než druhého. Pokles jeho ceny proto neovlivní tolik celkovou hodnotu portfolia jako stejný pokles ceny u druhého dluhopisu. Na změnu ceny druhé složky je hodnota portfolia mnohem citlivější. Do tohoto poloprostoru patří body, pro které klesne hodnota portfolia $V(\theta)$ o více než 1,5.

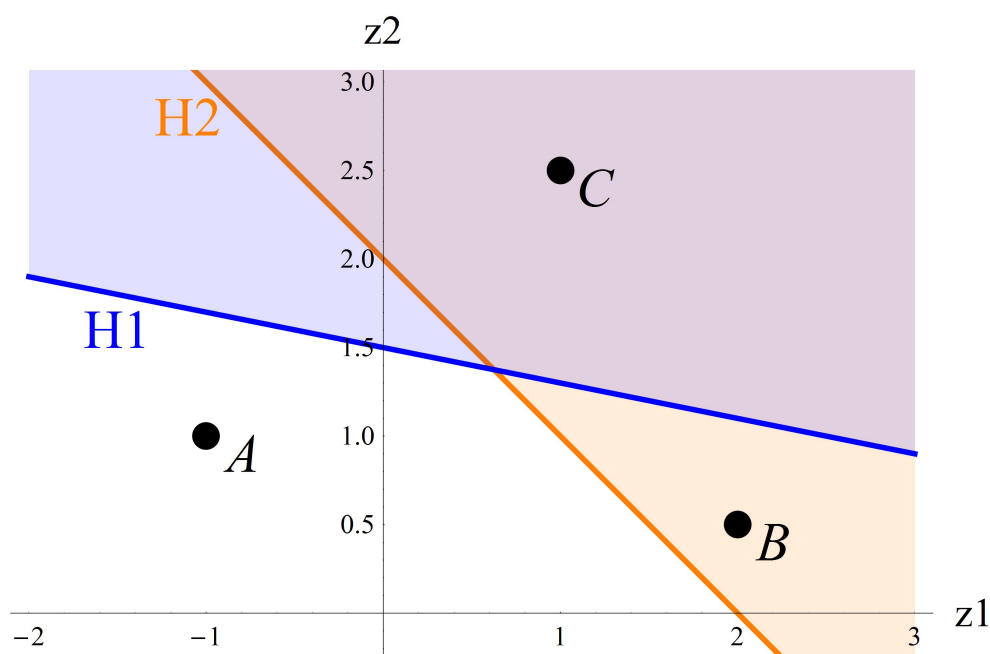
U poloprostoru H2 jsou obě váhy stejné. Obou dluhopisů je v portfoliu stejné množství. Hodnota portfolia reaguje symetricky na změnu ceny jednotlivých složek. Do tohoto poloprostoru patří body, pro které klesne hodnota portfolia $V(\theta)$ o více než 2.

Pozorování A na obrázku 4.1 má souřadnice $[-1; 1]$. To znamená, že cena prvního dluhopisu se o jedna zvýšila a cena druhého se o jedna snížila oproti výchozí hodnotě. Toto pozorování nepatří ani do jednoho z poloprostorů, a proto to není extrém. Pokles hodnoty portfolia není dostatečně velký, abychom ho považovali za extrémní.

Pozorování B má souřadnice $[2; 0, 5]$. Leží v poloprostoru H2. Pokud máme v portfoliu stejné množství obou dluhopisů, je B extrém. Zároveň však tento bod neleží v poloprostoru H1. Hodnota portfolia klesne pro tento bod při vahách $(\frac{1}{5}, 1)'$ o $\frac{9}{10}$. To je méně než 1,5, a proto toto pozorování nepředstavuje extrém.

Pozorování C má souřadnice $[1; 2, 5]$. Patří do obou poloprostorů. Při obou volbách vah je toto pozorování extrémní. Pokles hodnoty portfolia je v obou případech dostatečně velký $(2, 7; 3, 5)$, abychom řekli, že nastala extrémní situace.

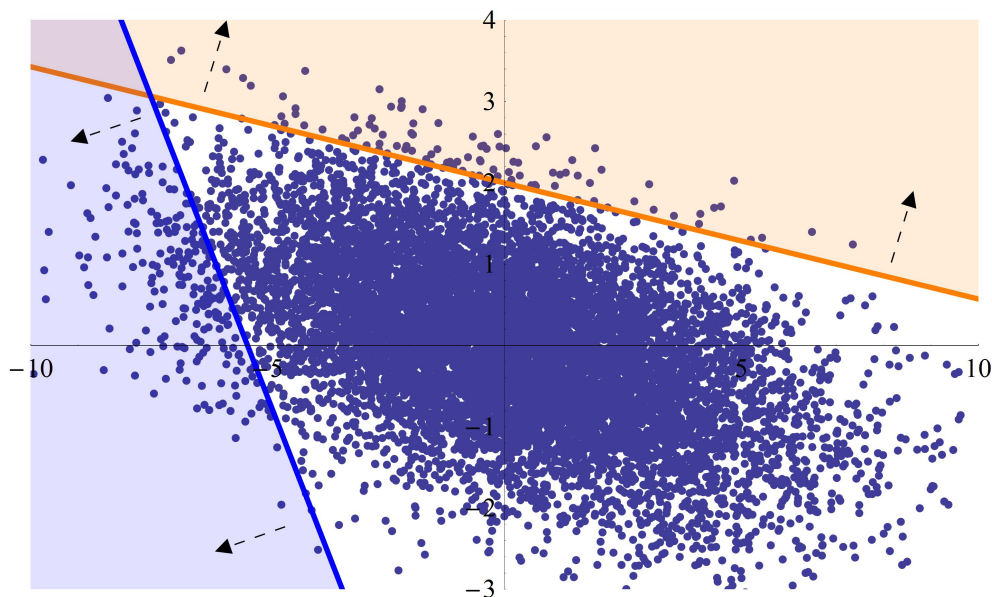
□



Obrázek 4.1: Poloprostory a extrémní pozorování v \mathbb{R}^2

Obecně předpokládejme, že máme náhodný vektor \mathbf{Z} a poloprostor H . Chceme zjistit, k jakým limitním rozdělením konverguje podmíněný vektor $\mathbf{Z} \mid \mathbf{Z} \in H$, když $P(\mathbf{Z} \in H) = \alpha$, $\alpha > 0$ se blíží nule. Představme si, že máme náhodný výběr o n prvcích z rozdělení π náhodného vektoru \mathbf{Z} . Jak můžeme vidět na obrázku 4.2, realizace takového náhodné výběru graficky tvoří bodový mrak. Budeme ho nazývat výběrový mrak. Zajímá nás limitní rozdělení vektoru \mathbf{Z} , když \mathbf{Z} leží v poloprostoru $H_n = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d : \theta' \mathbf{z} \geq q_n\}$ a $P(\mathbf{Z} \in H_n) \rightarrow 0_+$, $n \rightarrow \infty$. S rostoucím počtem pozorování posunujeme poloprostor H_n , aby počet pozorování, které do něho patří, šel k nule. Říkáme, že H_n diverguje.

V této kapitole se budeme zabývat případem, kdy poloprostor H může divergovat jakýmkoliv směrem. Nemáme žádnou konkrétní představu o tom, kde by se měly extrémny vyskytovat. Váhy portfolia určující směr poloprostoru jsou libovolné. V příští kapitole se naopak budeme zabývat případem, kdy máme váhy portfolia pevně stanovené a zajímá nás tedy jeden konkrétní směr. V tomto směru chceme vyšetřit, jak vypadají chvosty rozdělení. Je to například situace z příkladu o operačním riziku 4.1. Zde



Obrázek 4.2: Náhodný výběr 10 000 bodů z dvourozměrného normálního rozdělení a dva poloprostory, šipečky naznačují směr jejich divergence

vyšetřujeme divergenci ve směru vektoru $(1, \dots, 1)'$.

Ať již máme konkrétní směr či ne, určíme v obou případech společný předpoklad: budeme uvažovat nejjednodušší případ - přesahy přes lineární hranice. Proto používáme poloprostory. Pokud bychom měli v portfoliu deriváty cenných papírů jako opce nebo futures, nebude hodnota portfolia lineární funkcí jeho složek a vyšetřování konvergence bude podstatně složitější.

Jelikož v této kapitole nerozlišujeme směr, jakým poloprostor H diverguje, musí být výběrový mrak silně směrově homogenní. Můžeme si představit například rozdělení s lehkými chvosty jako sféricky symetrické rozdělení nebo normální či eliptické rozdělení, jejichž úroňové křivky jsou elipsy. Obecně splňují tuto podmínku unimodální rozdělení, tj. rozdělení, jejichž úroňové množiny jsou konvexní. U takovýchto rozdělení nevykazuje výběrový mrak žádné nepravidelnosti. Nenajdeme zde žádný konkrétní směr, ve kterém by body divergovaly, tedy se tam vyskytovaly extrémy. Výběrový mrak se skládá z černé centrální části, kolem které je rozprostřen prstenec izolovaných bodů, jejichž počet klesá s rostoucí vzdáleností od

středu centrální části. Takové výběrové mraky se anglicky nazývají „bland“, tedy něco jako jemné, uhlazené.

Pro takové rozdělení existuje mnoho poloprostorů H takových, že $P(\mathbf{Z} \in H) = \alpha$. Ale každý takový poloprostor je jedinečný v tom smyslu, že pro každý směr θ existuje právě jedno q tak, že $P(\mathbf{Z} \in H) = \alpha$, $H = \{\mathbf{z} : \theta' \mathbf{z} \geq q\}$. Ukážeme, že pro takové rozdělení existují limitní rozdělení.

Tato teorie je podobná vícerozměrné teorii přesahů z kapitoly 3, kde volíme pro každou souřadnici samostatnou hranici u_i , po jejímž překročení hovoříme o extrémech. Extrémy pak jsou všechny body, které leží mimo kvádr pokrývající centrální část výběrového mraku, jak je to naznačeno na obrázku 3.1. V teorii přesahů přes lineární prahy povolujeme lineární kombinace jednotlivých souřadnic, takže se neomezujeme jen na vícerozměrné kvádry, ale obecněji na poloprostory.

Pokud máme ve výchozím portfoliu cenné papíry, jejichž cena je funkcí některých jiných cenných papírů v portfoliu obsažených (například deriváty, jejichž podkladové aktivum je rovněž v portfoliu), vykazuje výběrový mrak takového portfolia nepravidelnosti a tuto teorii na něj nelze použít.

Shrňme naši situaci:

- vyšetřujeme asymptotické rozdělení přesahů přes hranice, které jsou lineárními poloprostory,
- výběrový mrak nevykazuje žádné nepravidelnosti, úrovně množiny se chovají hezky (jsou konvexní),
- je jedno v jaké směru poloprostory divergují.

Uvažujeme tedy nejjednodušší případ přesahů přes lineární hranice (anglicky „exceedances over linear thresholds“) za téměř dokonalých podmínek, kdy má hustota konvexní úrovně množiny. Limitní rozdělení takovýchto rozdělení nazveme vícerozměrným zobecněným Paretovým rozdělením. Toto rozdělení žije na poloprostoru

$$H_+ = \mathbb{R}^h \times [0, \infty), \quad h = d - 1.$$

Je to analogie jednorozměrného GPD, které je definováno na polopřímce $[0, \infty)$.

Abychom mohli porovnat podmíněné rozdělení vektorů \mathbf{Z}^{H_n} (\mathbf{Z} žije na H_n), normalizujeme \mathbf{Z}^{H_n} pomocí afinních transformací γ^n . Od složkách afinních transformací se liší tím, že nepůsobí na jednotlivé komponenty, ale na celý vektor. Normalizace γ^n zobrazují základní poloprostor H_+ na H_n . Afinní transformace má následující tvar:

$$\mathbf{w} \mapsto \mathbf{z} = \gamma(\mathbf{w}) = A\mathbf{w} + a,$$

kde $a \in \mathbb{R}^d$ je vektor posunutí a A je regulární matice dimenze d . Ke každé afinní transformaci existuje její inverze, takže spolu s operací skládání zobrazení tvoří množina afinních transformací na prostoru \mathbb{R}^d grupu, označme ji $\mathcal{A}(d)$. Více lze najít v poslední sekci této kapitoly, která se afinním transformacím věnuje podrobněji.

Proč nás zajímají zrovna afinní zobrazení, je zřejmé z následujících úvah. Transformace musí poloprostor H_n otočit tak, aby měl stejný směr jako H_+ , tedy směr vertikální osy (vektor kolmý na hranici poloprostoru H_n byl rovnoběžný s vertikálou). Po otočení má H_n tvar $\{z_d \geq q\}$. Posunutím po vertikální ose dolů se dostaneme na H_+ . Otočení vykoná lineární část a posunutí translační část afinního zobrazení. Je výhodné zvolit nové souřadnice a psát vektor \mathbf{Z} jako:

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{X}, Y)', \quad \mathbf{X} \in \mathbb{R}^h, \quad Y \in \mathbb{R}, \quad d = h + 1.$$

Náhodná veličina Y , reprezentující vertikální souřadnici, je minus hodnota portfolia, tedy $-\theta' \mathbf{Z}$. Čím větší bude Y , tím více bude hodnota portfolia klesat. Riziko a extrémy se proto budou nacházet ve velkých hodnotách Y . Náhodný vektor \mathbf{X} reprezentuje horizontální složku. V těchto nových souřadnicích se na něj můžeme dívat jako na šum. Nová vertikální složka Y nemusí mít při zobrazení v původních souřadnicích s běžně chápaným vertikálním směrem, směrem nahoru a dolů, nic společného. V tomto geometrickém pojetí máme výhodu, že si můžeme volit souřadnice libovolně. Pokud tedy nově určíme osu Y jako diagonálu původního prostoru, pak bude naše vertikála symbolizovat směr šikmo.

V jednorozměrném případě má podmíněná náhodná veličina Y s podmínkou $Y \geq s$, pro dostatečně vysoké s ($P(Y \geq s) \rightarrow 0_+$, $s \rightarrow \infty$) asymptoticky zobecněné Paretovo rozdělení na $[0, \infty)$.

Nyní definujeme, jak vypadá extrémní rozdělení.

Definice 4.3. *Nechť máme náhodný vektor $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^d$. Pro každý uzavřený poloprostor H v \mathbb{R}^d takový, že $P(\mathbf{Z} \in H) > 0$, je extrémní vektor \mathbf{Z}^H definovaný jako vektor \mathbf{Z} , který podmíněně leží v H : $\mathbf{Z}|\mathbf{Z} \in H$. Má-li vektor \mathbf{Z} rozdělení π , pak \mathbf{Z}^H má extrémní rozdělení π^H :*

$$d\pi^H(\mathbf{z}) = \frac{\mathbb{1}_H(\mathbf{z})d\pi(\mathbf{z})}{\pi(H)}. \quad (4.1)$$

Rovnice (4.1) znamená, že pro množinu $A \subset \mathbb{R}^d$ a $A \cap H \neq \emptyset$,

$$\pi^H(A) = \frac{\int_A \mathbb{1}_H(\mathbf{z})d\pi(\mathbf{z})}{\pi(H)}.$$

Jak již bylo napsáno dříve, omezujeme se na rozdělení, která jsou v jistém smyslu symetrické, jejich hustoty vypadají pěkně: jsou unimodální.

Definice 4.4. (Unimodalita)

Pravděpodobnostní rozdělení na \mathbb{R}^d je unimodální, právě když má unimodální hustotu. Funkce (hustota) $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ je unimodální, právě když množiny $\{f > c\}$ pro $c > 0$ jsou konvexní. Množiny $\{f > c\}$ se nazývají úrovnňové množiny funkce f . Křivky $\{f = c\}$ se nazývají úrovnňové křivky.

Běžně se užívá jiná definice unimodality: unimodální hustota je ta, která má jen jeden vrchol. Příkladem, kdy se tyto dvě definice rozcházejí, je Cauchyho rozdělení. Toto rozdělení má jen jeden vrchol, který se však v jistých směrech svažuje velmi pomalu a tvoří tak navazující hřebeny, kde hustota klesá pomalu, zatímco v ostatních směrech je pokles mnohem rychlejší. Úrovnňové množiny mají proto tvar kříže, nejsou konvexní. Eliptická nebo třeba dvojité exponenciální rozdělení jsou unimodální v obou případech.

Stejně jako u složkových vícerozměrných extrémů potřebujeme u limitních vektorů nějakou formu stability. Teď má tento tvar:

Pro poloprostory H a J s malou pravděpodobností $\mathbf{Z} \in H$ a $\mathbf{Z} \in J$, které se relativně hodně překrývají, je rozdělení π^H extrémního vektoru \mathbf{Z}^H a π^J extrémního vektoru \mathbf{Z}^J přibližně stejného typu (tvaru).

Rozdělení π^J a π^H jsou stejného typu právě, když existuje afinní transformace γ taková, že $\gamma(\pi^J) = \pi^H$. Tato stabilita znamená, že když máme vzdálený poloprostor H a základní poloprostor H_+ , které se navzájem hodně překrývají, lze extrémní rozdělení π^H na H převést pomocí afinní transformace na

vícerozměrné zobecněné Paretovo rozdělení na H_+ .

Afinní zobrazení γ zobrazí základní poloprostor H_+ na vzdálený poloprostor H . Ve skutečnosti se díváme na posloupnost uzavřených poloprostorů $H_n = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d \mid y \geq c_n\}$ tak, aby při růstu počtu pozorování do nekonečna šla pravděpodobnost $P(\mathbf{Z} \in H_n) \rightarrow 0_+$ a poloprostory H_n tak obsahovaly jen extrém, jejichž rozdělení chceme znát.

Nechť máme náhodné vektory \mathbf{Z}^{H_n} , $\mathbf{Z}^{H_n} = \mathbf{Z} \mid \mathbf{Z} \in H_n$, které normalizujeme pomocí afinních transformací $(\gamma^n)^{-1}$: \mathbf{Z}^{H_n} přenášíme na základní poloprostor H_+ . Dostaneme tak vektory $\mathbf{W}_n = (\gamma^n)^{-1}(\mathbf{Z}^{H_n})$. Pak vyšetřujeme konvergenci v distribuci \mathbf{W}_n na H_+ k nede degenerovanému limitnímu rozdělení \mathbf{W} , $\mathbf{W}_n \xrightarrow{d} \mathbf{W}$.

Uvažujeme, že $\pi(H_n)$ jde k nule, ať již H_n diverguje v jakémkoliv směru. Podmínka $P(\mathbf{Z} \in H_n) \rightarrow 0_+$ je k ničemu, když například vektor \mathbf{Z} žije na krychli v prostoru \mathbb{R}^3 a hustota na hranicích této krychle je pozitivní. Pak sice $P(\mathbf{Z} \in H_n)$ klesá, blížíme-li se s H_n k hranici krychle, ale nemůžeme ji udělat libovolně malou. Proto potřebujeme podmínku regularity. Ta má následující tvar:

$$\pi(H) > 0 \Rightarrow \pi(\partial H) < \pi(H). \quad (4.2)$$

Chceme, aby se pravděpodobnost nekoncentrovala na hranici H . Nyní můžeme definovat sféru přitažlivosti pro limitní vektor \mathbf{W} .

Definice 4.5. (Sféra přitažlivosti)

Nechť \mathbf{Z} je náhodný vektor s rozdělením π na \mathbb{R}^d , \mathbf{W} je náhodný vektor s rozdělením $\pi_{\mathbf{W}}$ na základním poloprostoru $H_+ \subset \mathbb{R}^d$. \mathbf{W} je limitní rizikový vektor (anglicky „high risk limit vector“) a $\pi_{\mathbf{W}}$ je limitní rizikové rozdělení, právě když $\pi_{\mathbf{W}}$ je nede degenerované, π splňuje podmínku regularity a existují afinní transformace (normalizace) γ^n zobrazující H_+ na H_n tak, že

$$\mathbf{W}_n = (\gamma^n)^{-1}(\mathbf{Z}^{H_n}) \xrightarrow{d} \mathbf{W}, \quad \pi(H) \rightarrow 0_+, \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.3)$$

Pak \mathbf{Z} patří do sféry přitažlivosti vektoru \mathbf{W} , píšeme $\mathbf{Z} \in \mathcal{D}(\mathbf{W})$ nebo $\pi \in \mathcal{D}(\pi_{\mathbf{W}})$.

Teorie limitních rizikových vektorů je lokální a geometrická. Lokální je proto, že určujeme chování rozdělení na okraji jeho výběrového mraku. Nezáleží na tom, jak vypadá jeho střední část. Geometrická je proto, že není ovlivněna volbou souřadnic. To je podstatou následující věty.

Věta 4.6. (Geometrická invariance)

Předpokládejme, že \mathbf{Z} patří do sféry přitažlivosti limitního rizikového vektoru \mathbf{W} ($\mathbf{Z} \in \mathcal{D}(\mathbf{W})$) s normalizacemi $(\gamma^H)^{-1}$. Necht existují afinní transformace α a β . Pak $\beta(\mathbf{Z})$ leží ve sféře přitažlivosti limitního rizikového vektoru $\alpha(\mathbf{W})$ s normalizacemi $(\varphi^{\beta(H)})^{-1}$, které zobrazují $\beta(H)$ na $\alpha(H_+)$, kde

$$\varphi^{\beta(H)} = \beta \circ \gamma^H \circ \alpha^{-1}. \quad (4.4)$$

Situaci ve větě vystihuje následující diagram. Je z něho dobře patrné, že pro normalizace $\varphi^{\beta(H)}$ platí rovnost (4.4).

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}, H & \xrightarrow{\beta} & \beta(\mathbf{Z}), \beta(H) \\ \downarrow \Gamma_{(H)}^{-1} & & \downarrow \Gamma_{(\beta(H))}^{-1} \\ \mathbf{W}, H_+ & \xrightarrow{\alpha} & \alpha(\mathbf{W}), \alpha(H_+) \end{array}$$

Afinní transformace mění souřadnice: lineární část změní měřítko a vektor posunutí polohu středu. Věta 4.6 nám říká, že na měřítko a poloze nezáleží. Náhodný vektor \mathbf{Z} si můžeme upravit změnou parametrů měřítka a polohy tak, aby jeho rozdělení bylo v základním, standardizovaném tvaru. To uděláme pomocí afinní transformace a takto upravený vektor je stále ve sféře přitažlivosti limitního rizikového rozdělení.

To je velká výhoda. Například u normálního rozdělení určuje polohu střední hodnota a měřítko varianční matice. Díky této větě můžeme normální rozdělení transformovat, aby mělo nulovou střední hodnotu a jednotkovou varianční matici, a omezit se na vyšetřování konvergence v jednodušším, standardním tvaru. Nemusíme se proto primárně zabývat asymptotickou nezávislostí. Limitní vícerozměrné GPD můžeme rozdělit pouze na základě parametru τ určujícího tvar rozdělení. Parametry určující měřítko (anglicky „scale parameter“) a polohu (anglicky „location parameter“) nehrají roli.

Jak již bylo zmíněno, v této limitní teorii záleží na tom, jak se rozdělení chová na hranici svého nosiče. Asymptotické chování rizikového vektoru \mathbf{Z}^{H_n} pro $P(\mathbf{Z} \in H) \rightarrow 0_+$ nezávisí na tvaru rozdělení \mathbf{Z} na kompaktních podmnožinách vnitřku jeho nosiče. Pokud jsou dvě rozdělení asymptoticky

totožné a jedno patří do sféry přitažlivosti nějakého limitního rizikového rozdělení, pak tam patří i druhé a to se stejnými normalizacemi. Jelikož může být nosič rozdělení omezený, měli bychom přesně definovat divergenci poloprostorů a asymptotickou rovnost rozdělení ve více rozměrech.

Definice 4.7. (Divergence a asymptotická rovnost)

Nechť je O otevřená množina v euklidovském prostoru \mathbb{R}^d . Řekneme, že posloupnost bodů \mathbf{z}_n z O diverguje v O , právě když každá kompaktní podmnožina O obsahuje pouze konečně mnoho bodů této posloupnosti. Píšeme $\mathbf{z}_n \rightarrow \partial$.

Stejně značení budeme používat i pro poloprostory H_n . $H_n \rightarrow \partial$, právě když všechny H_n protínají O , ale každá kompaktní podmnožina $K \subset O$ má neprázdný průnik s H_n pouze pro konečně mnoho n .

Dvě nezáporné funkce f a g definované na O jsou asymptoticky rovné na O , právě když pro každé $\epsilon > 0$ existuje kompaktní podmnožina $K \subset O$ taková, že

$$e^{-\epsilon} f(\mathbf{z}) \leq g(\mathbf{z}) \leq e^{\epsilon} f(\mathbf{z}), \mathbf{z} \in O \setminus K.$$

Píšeme $f(\mathbf{z}) \sim g(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \rightarrow \partial$.

Asymptotická rovnost tedy platí právě, když $\frac{g(\mathbf{z}_n)}{f(\mathbf{z}_n)} \rightarrow 1$ pro divergující posloupnost (\mathbf{z}_n) .

Věta 4.8. (Asymptotická invariance)

Nechť máme pravděpodobnostní míry (rozdělení) π_0 a π_1 na \mathbb{R}^d , $d\pi_i = f_i d\mu$, $i = 0, 1$. Nechť O je vnitřek konvexního nosiče míry μ a $\mu(\mathbb{R}^d \setminus O) = 0$. Předpokládejme, že $f_1(\mathbf{z}) \sim c f_0(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \rightarrow \partial$ v O , kde $c > 0$ je konstanta. Jestliže π_0 patří do sféry přitažlivosti rozdělení π_w limitního vektoru \mathbf{W} , pak i $\pi_1 \in \mathcal{D}(\pi_w)$ a to se stejnými normalizacemi.

Jak již bylo zmíněno, do sféry přitažlivosti patří s rozdělením i rozdělení, které jsou s ním asymptoticky rovné, a to s těmi samými normalizacemi.

U vícerozměrných rozdělení známe častěji jejich hustotu než distribuční funkci. Pokud má \mathbf{Z} rozdělení π a hustotu f , pak \mathbf{Z}^{H_n} má hustotu

$$f_{H_n}(\mathbf{z}) = \frac{f(\mathbf{z}) \mathbb{1}_{H_n}(\mathbf{z})}{\pi(H_n)} \quad (4.5)$$

a normalizovaný vektor $\mathbf{W}_n = (\gamma^n)^{-1}(\mathbf{Z}^{H_n})$ má z věty o transformaci náhodného vektoru 4.22 hustotu

$$g_{H_n}(\mathbf{w}) = \frac{f(\gamma^n(\mathbf{w})) |\det \gamma^n| \mathbb{1}_{H_n^+}(\mathbf{w})}{\pi(H_n)}.$$

Je však zřejmé, že tyto hustoty nám neřikají nic o asymptotickém chování vektoru \mathbf{Z}^{H_n} .

K ověření konvergence (4.3), je dostačující určit, zda hustota g_{H_n} vektoru \mathbf{W}_n konverguje bodově k hustotě g vektoru \mathbf{W} na $\{g > 0\}$, kde g je hustota na H_+ :

$$g_{H_n}(\mathbf{w}) \rightarrow g(\mathbf{w}), P(\mathbf{Z} \in H_n) \rightarrow 0_+, n \rightarrow \infty. \quad (4.6)$$

K tomu ale potřebujeme určit hodnotu $\pi(H_n)$. To zahrnuje d -násobné integrování. Proto je jednodušší ověřit:

$$h_{H_n}(\mathbf{w}) = \frac{f(\gamma^n(\mathbf{w}))}{f(\gamma^n(\mathbf{w}_0))} \rightarrow h(\mathbf{w}), H \rightarrow \partial, \quad (4.7)$$

skoro všude na H_+ , h je nezáporná funkce na H_+ . Můžeme předpokládat, že $g \propto h$, neboť h_{H_n} se liší od g_{H_n} jenom o konstantu a platí konvergence (4.6). V (4.7) ale konvergence skoro všude nestačí k zajištění

$$\mathbf{W}_n = (\gamma^n)^{-1}(\mathbf{Z}^{H_n}) \xrightarrow{d} \mathbf{W}.$$

Potřebujeme silnější podmínku.

Tvrzení 4.9. (Podmínky konvergence)

$\mathbf{Z} \in \mathcal{D}(\mathbf{W}) \Leftrightarrow g_{H_n} \rightarrow g$ skoro všude na H_+ pro $\pi(H_n) \rightarrow 0_+ \Leftrightarrow h_{H_n} \rightarrow h$ v $L^1(H_+)$ pro $\pi(H_n) \rightarrow 0_+$.

Vezměme nyní hustotu normalizovaného vektoru

$$\begin{aligned} g_{H_n}(\mathbf{w}) &= \frac{|\det \gamma^n| f(\gamma^n(\mathbf{w}))}{\pi(H_n)} \frac{f(\gamma^n(\mathbf{w}))}{f(\gamma^n(\mathbf{w}_0))} \frac{f(\gamma^n(\mathbf{w}_0))}{1} = \\ &= \frac{|\det \gamma^n| f(\gamma^n(\mathbf{w}_0))}{\pi(H_n)} h_{H_n}(\mathbf{w}) \rightarrow g(\mathbf{w}), n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Za \mathbf{w} zvolme \mathbf{w}_0 . Jelikož $h_{H_n}(\mathbf{w}_0) = 1$, tak

$$g_{H_n}(\mathbf{w}_0) = \frac{|\det \gamma^n| f(\gamma^n(\mathbf{w}_0))}{\pi(H_n)} \rightarrow g(\mathbf{w}_0),$$

když H_n diverguje, $g(\mathbf{w}_0) > 0$ a g je hustota limitního rizikového vektoru \mathbf{W} .

Asymptoticky proto platí, že

$$\pi(H_n) \sim \frac{|\det \gamma^n| f(\gamma^n(\mathbf{w}_0))}{g(\mathbf{w}_0)}$$

pro $n \rightarrow \infty$ a posloupnost divergujících poloprostorů H_n . Máme tak odhad $\pi(H_n)$ bez integrace.

Pokud platí podmínky věty 4.9, nemůže mít hustota f ostré vrcholy v O . Můžeme proto předpokládat, že f je spojitá funkce s konvexními úrovnovými množinami $\{f > c\}$ pro $c > 0$. Jak již víme, rozdělení s takovými hustotami se nazývají *unimodální*. Nosič f , $O = \{f > 0\}$, je konvexní a otevřený. Z toho vyplývá, že i funkce h_{H_n} a h mají konvexní úrovnové množiny. Mocniny h^t a f^t jsou proto integrovatelné pro všechny $t \geq 1$ a $h_{H_n}^t \rightarrow h^t$ v $L^1(H_+)$. Z toho plyne, že $g_t = h^t/C_0(t)$ je hustota limitního rizikového vektoru a hustota $f_t = f^t/C_1(t)$ leží v její sféře přitažlivosti. Tím se dostáváme k následující větě.

Věta 4.10. (Mocniné rodiny rozdělení (anglicky „Power Families“))

Předpokládejme, že \mathbf{Z} má rozdělení π s omezenou unimodální hustotou f . Necht existuje spojitá integrovatelná funkce h na H_+ , afinní transformace $\gamma^n : H_+ \mapsto H_n$ a bod \mathbf{w}_0 z H_+ takový, že konvergence (4.7) platí stejnoměrně na omezených podmnožinách poloprostoru H_+ . Jestliže $\mathbf{Z} \in \mathcal{D}(\mathbf{W})$, pak \mathbf{W} má hustotu g proporcionální k h ($g \propto h$), a pro všechny $t \geq 1$ je $g_t \propto h^t$ hustota limitního rizikového vektoru, jehož sféra přitažlivosti obsahuje hustoty $f_t \propto f^t$. Normalizace nezávisí na t .

Třídu limitních rizikových rozdělení tedy můžeme rozšířit o mocninná rozdělení:

$$g_t(\mathbf{w}) = g^t(\mathbf{w})/C_0(t), \quad g \geq 1,$$

kde g je unimodální funkce na H_+ . Pro hustotu f standardního vícerozměrného normálního rozdělení a limitní hustotu g standardního normálně-exponenciálního rozdělení nepřináší věta 4.10 žádná nová limitní riziková rozdělení. Normální a normálně-exponenciální rozdělení na H_+ jsou totiž invariantní vůči pozitivním mocninným transformacím: má-li vektor $(X, Y)'$ hustotu g , pak $(X/\sqrt{t}, Y/t)'$ má hustotu proporcionální k g^t . Hustoty f^t a g^t jsou po normalizaci opět hustotami normálního nebo normálně-exponenciálního rozdělení.

V příští sekci zavedeme rodinu mocninných Euklidových-Paretových

rozdělení a rodinu mocninných parabolických rozdělání. Hustoty g_t těchto rozdělání konvergují pro $t \rightarrow \infty$ k hustotě normálně-exponenciálního rozdělání.

4.2 Vícerozměrné zobecněné Paretovo rozdělání

Nyní uvedeme rozdělání limitních rizikových vektorů, které se nazývá vícerozměrné zobecněné Paretovo rozdělání (anglicky „multivariate generalized Pareto distribution“). Podobně jako jednorozměrné GPD, má i jeho vícerozměrná verze tři tvary: pro rozdělání s těžkými chvosty, s lehkými chvosty a s omezeným nosičem.

Limitní rizikový vektor budeme opět značit

$$\mathbf{W} = (\mathbf{U}, V)', \quad \mathbf{U} \in \mathbb{R}^h, \quad V \in \mathbb{R}, \quad d = h + 1.$$

Vícerozměrná GPD žijí na základním poloprostoru $H_+ = \mathbb{R}^h \times [0, \infty)$.

Exponenciální rozdělání ($\tau = 0$) v jednorozměrném standardním GPD v definici 1.6 je centrální rozdělání, které je mostem mezi Paretoovým rozděláním s těžkými chvosty ($\tau > 0$) a mocninnými rozděláními ($\tau < 0$) s konečným pravým koncovým bodem w_∞ . Podobná situace je i ve vícerozměrném světě. Vertikální složka V limitního rizikového vektoru $\mathbf{W} = (\mathbf{U}, V)'$ má jednorozměrné standardní GPD. Jeho parametr τ použijeme pro klasifikaci vícerozměrných limitních rozdělání. V jednorozměrném standardním GPD patří $\tau \in \mathbb{R}$. Pro vícerozměrné GPD je parametr $\tau \in [-2/h, \infty)$.

Definice 4.11. (Vícerozměrné standardní zobecněné Paretovo rozdělání)

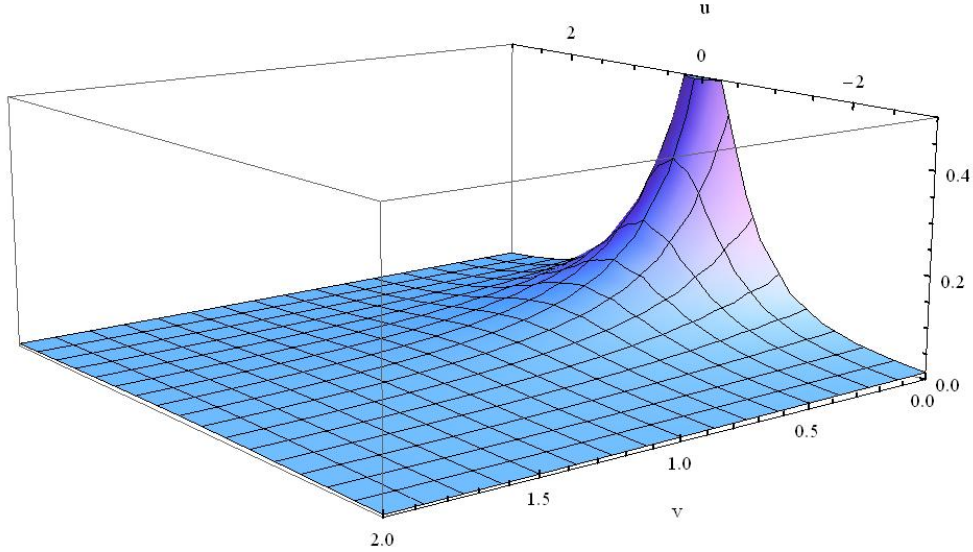
Vícerozměrné standardní GPD rozdělání π_τ má hustotu $g_\tau(\mathbf{u}, v)$:

$$g_\tau(\mathbf{u}, v) = \begin{cases} ((1 + \tau v)^2 + \tau \mathbf{u}^T \mathbf{u})^{-1/(2\tau) - d/2} / C_\tau & , \tau > 0 \\ e^{-(v + \mathbf{u}^T \mathbf{u}/2)} / (2\pi)^{h/2} & , \tau = 0 \\ (1 + \tau v + \tau \mathbf{u}^T \mathbf{u}/2)_+^{-1/\tau - 1 - h/2} / C_\tau & , -2/h < \tau < 0, \end{cases} \quad (4.8)$$

kde konstanty C_τ jsou

$$C_\tau = \begin{cases} (\pi/|\tau|)^{h/2} \Gamma((1 + 1/|\tau|)/2) / \Gamma((1 + h + 1/|\tau|)/2) & , \tau > 0 \\ (2\pi/|\tau|)^{h/2} \Gamma(1/|\tau| - h/2) / \Gamma(1/|\tau|) & , -2/h < \tau < 0. \end{cases}$$

Hustota dvourozměrného limitního zobecněného Paretova rozdělení g_τ je pro $\tau = 2 > 0$ zobrazena na obrázku 4.3, pro $\tau = 0$ na obrázku 4.4 a pro $\tau = -1/2 < 0$ na obrázku 4.5. Všechny tři obrázky mají stejný rozsah os, aby byly navzájem dobře vidět rozdíly ve tvaru jednotlivých hustot.



Obrázek 4.3: Hustota g_τ , $\tau > 0$ dvourozměrného GPD s volbou $\tau = 2$

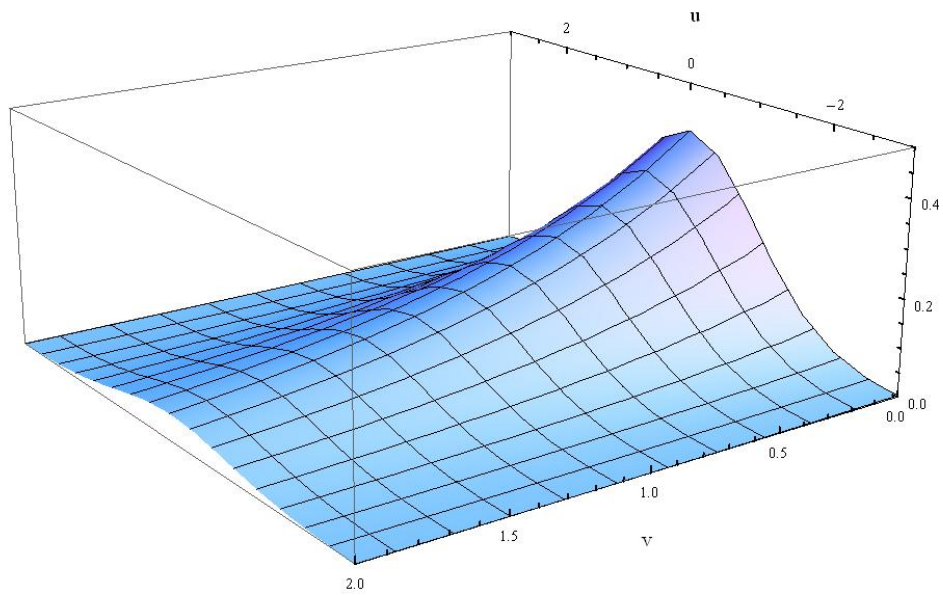
Pro $\tau = -2/h$ je pravděpodobnostní míra $\pi_{-2/h}$ singulární; žije na části paraboloidu

$$\{2v = h - \mathbf{u}^T \mathbf{u}\} \cap \{v \geq 0\} \subset \mathbb{R}^d. \quad (4.9)$$

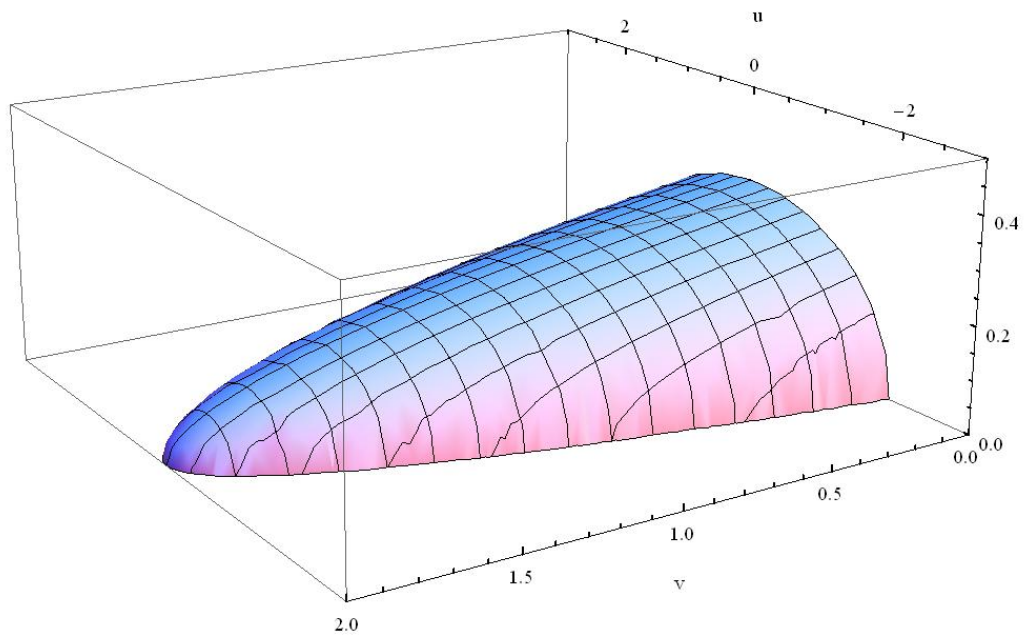
Jak taková část paraboloidu v trojrozměrném prostoru (u_1, u_2, v) vypadá, se můžeme podívat na obrázku 4.6. Ze stejného obrázku je zřejmé, že pokud bychom se na tento paraboloid dívali shora a promítli ho do horizontální roviny $\{v = 0\}$, dostaneme rovnoměrné rozdělení na kruhu $\{\mathbf{u}^T \mathbf{u} < h\}$. Limitní rizikový vektor pak bude $\mathbf{W} = (\mathbf{U}, V)'$, kde \mathbf{U} je rovnoměrně rozdělené na kruhu o průměru h v \mathbb{R}^h a vertikální složka V je funkcí horizontální: $V = (h - \mathbf{U}^T \mathbf{U})/2$.

Pro každé $\tau \geq -2/h$ má vertikální veličina V standardní jednorozměrné GPD s parametrem τ a horizontální vektor \mathbf{U} má sféricky symetrickou hustotu. Vícerozměrné GPD má střední hodnotu pro $\tau \leq 1$ a rozptyl pro $\tau \leq 1/2$:

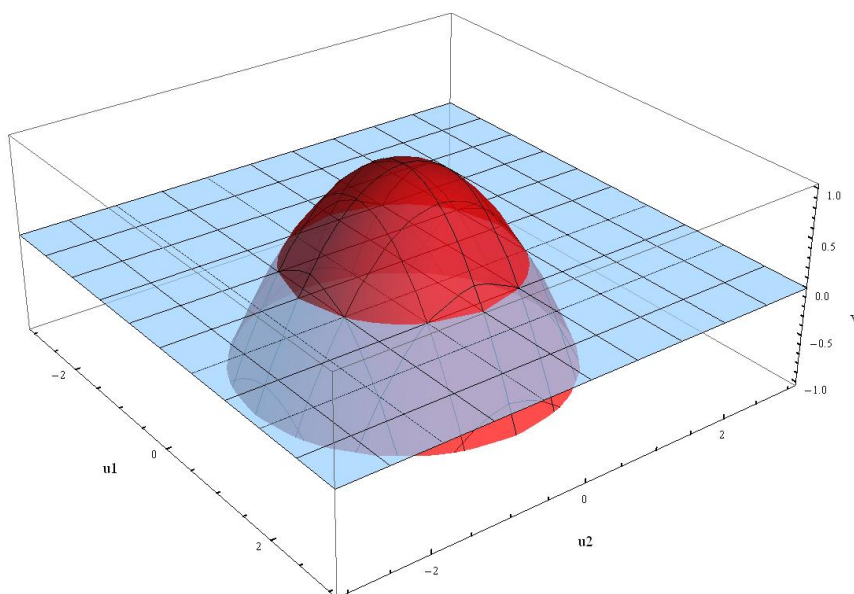
$$E(\mathbf{U}, V) = \frac{1}{1-\tau}(\mathbf{0}, 1), \quad \text{var}(\mathbf{U}, V) = \frac{1}{1-\tau} \text{diag} \left(\mathbf{1}, \frac{1}{(1-\tau)(1-2\tau)} \right).$$



Obrázek 4.4: Hustota g_0 dvourozměrného GPD



Obrázek 4.5: Hustota g_τ , $\tau < 0$ dvourozměrného GPD s volbou $\tau = -1/2$



Obrázek 4.6: Část paraboloidu daného rovnicí (4.9), modrá rovina zobrazuje useknutí červeného paraboloidu v $v = 0$

Pro $\tau > 0$ je g_τ proporcionální hustotě Euklidova-Paretova rozdělení a pro $\tau \in (-2/h, 0)$ je g_τ hustota proporcionální hustotě mocninného parabolického rozdělení. Toto mocninné parabolické rozdělení je vlastně rovnoměrné rozdělení na části paraboloidu $Q_+ = \{(\mathbf{u}, v) : 0 \leq v \leq 1 - \mathbf{u}^T \mathbf{u}\} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. Ostatní dvě limitní rizikové rozdělení žijí na H_+ .

4.3 Symetrie

Vraťme se k otázce, proč by vícerozměrné zobecněné Paretovo rozdělení ve tvaru (4.8) mělo být limitním rizikovým rozdělením. Po jednorozměrných a vícerozměrných souřadnicových limitních rozděleních jsme jako formu stability požadovali, aby všechny mocniny jejich distribuční funkce byly stejného typu vzhledem k pozitivním afinním transformacím (viz (1.2)), respektive ke složkovým afinním transformacím (viz (3.1)).

U limitních rizikových rozděleních jsme uvedli na začátku kapitoly 4, jakou stabilitu požadujeme pro tyto modely. Nyní se pokusíme vysvětlit,

proč je zrovna v tomto tvaru.

Budeme uvažovat, že limitní rizikový vektor má normálně-exponenciální rozdělení. Označme ρ_0 Radonovu míru, která má hustotu

$$e^{-\mathbf{u}^T \mathbf{u}/2} e^{-v} / (2\pi)^{h/2}$$

na celém prostoru \mathbb{R}^d . Tato míra je nekonečná v tom smyslu, že $\rho_0(\mathbb{R}^d) = \infty$. Míra ρ_0 má hustotu standardního normálně-exponenciálního rozdělení, ale na celém \mathbb{R}^d . Rozšiřuje tedy toto rozdělení na celý prostor.

Nechť \mathbf{Z} má rozdělení π a patří do sféry přitažlivosti normálně-exponenciálního rozdělení (platí konvergence (4.3)), $\mathbf{Z} \in \mathcal{D}(0)$. Rozdělení \mathbf{Z}^H proto bude pro vzdálené poloprostory H , když zvolíme vhodné souřadnice (to znamená, že extrémní vektor \mathbf{Z}^H znormalizujeme pomocí afinních transformací) přibližně normálně-exponenciální. Nechť je H_0 takový vzdálený poloprostor, pro který je $\pi(H_0)$ malé. Zvolme afinní transformaci a vhodné souřadnice, aby $H_0 = H_+$. Pak je $\pi^{H_0} \approx \pi_0$, kde π_0 je normálně-exponenciální rozdělení limitního rizikového vektoru. Existuje množina poloprostorů H_1 , které jsou blízké k H_0 v tom smyslu, že H_1 a H_0 mají přibližně stejnou míru a relativně hodně se překrývají.

Vezměme jeden takový poloprostor a pro jednoduchost uvažujme $\pi(H_1) = \pi(H_0)$. Podmínka stability říká, že extrémní rozdělení na těchto poloprostorech budou stejného typu (afinními transformacemi lze jedno převést na druhé):

$$\pi^{H_1} \approx \gamma(\pi_0), \text{ kde } \gamma : H_0 \mapsto H_1.$$

Tedy $\pi_0 \approx \gamma(\pi_0)$ na průniku $H_1 \cap H_0$, jelikož se π^{H_1} a π^{H_0} rovnají tam, kde se tyto poloprostory překrývají. Limitně získáváme rovnost $\rho_0 = \gamma(\rho_0)$ pro mnoho afinních transformací γ . Toto platí díky tomu, že konvergence k limitním rizikovým vektorům musí platit na všech poloprostorech H , bez ohledu na jejich směr. Stačí, že $P(\mathbf{Z} \in H) \rightarrow 0_+$.

Ty afinní transformace, pro které platí $\rho_0 = \gamma(\rho_0)$, můžeme použít pro normalizaci extrémního vektoru \mathbf{Z}^H , neboť nezmění míru ρ_0 . Jinými slovy, limitní rizikový vektor s normálně-exponenciálním rozdělením je stabilní vůči těmto transformacím. To je to, co od limitního rozdělení chceme, aby mohlo být limitní. Transformace, vůči kterým je limitní rozdělení stabilní, tvoří symetrickou grupu.

Nechť H je uzavřený poloprostor tvaru:

$$H = \{y \geq \phi(\mathbf{x})\}, \text{ kde } \phi(x) = c_0 + c_1x_1 + \dots + c_hx_h \in \mathbb{R}. \quad (4.10)$$

Poloprostor H obsahuje všechny body $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, y)$ ležící nad přímkou (afinní funkcí) $y = \phi(\mathbf{x})$. Míra H , $\rho_0(H) = e^{-\phi(\mathbf{x})}$, je konečná a

$$d\rho_H = \mathbb{1}_H d\rho_0 / \rho_0(H)$$

je pravděpodobnostní míra na poloprostoru H . Existují afinní transformace $\gamma_H : H_+ \mapsto H$ zobrazující základní poloprostor H_+ na H tak, že ρ_H je obraz standardního normálně-exponenciálního rozdělení π_H na H_+ :

$$\gamma_H(\pi_0) = \rho_H.$$

Tedy, pokud míru ρ_0 na \mathbb{R}^d zúžíme na poloprostor H , podělíme velikostí tohoto poloprostoru $\rho_0(H)$, abychom dostali pravděpodobnostní míru ρ_H , $\rho_H(H) = 1$, a pak ρ_H posuneme a změním měřítko (tzn. přeneseme ji pomocí afinních transformací na H_+), je tato transformovaná míra normálně-exponenciální. Přitom Radonova míra ρ_0 má tu vlastnost, že toto zúžení a přenesení můžeme udělat pro každý poloprostor H konečné míry a výsledná pravděpodobnostní míra bude vždy normálně-exponenciální.

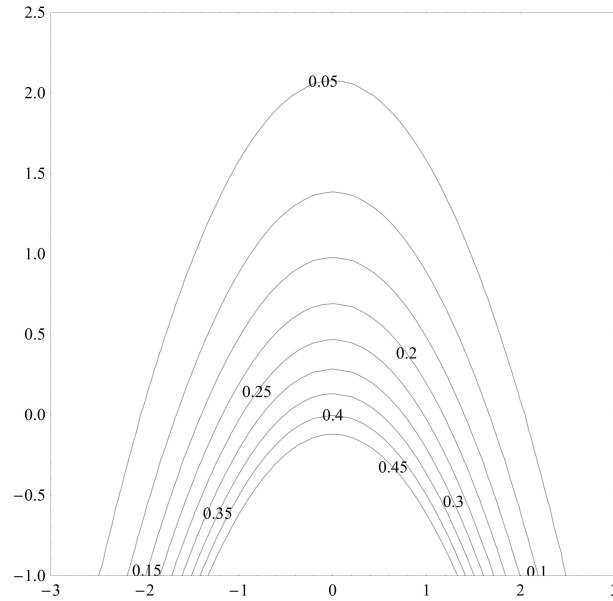
Jako \mathcal{S} označme symetrickou grupu míry ρ_0 . Je to množina všech afinních transformací γ takových, že $\gamma(\rho_0) = c_\gamma \rho_0$, kde c_γ je pozitivní konstanta. Grupa je to proto, že jde o afinní transformace (ty mají své inverze a operaci skládání zobrazení). Je to podgrupa grupy d -rozměrných afinních transformací $\mathcal{A}(d)$. Jak je patrné z obrázku 4.4, patří do \mathcal{S} podgrupa všech rotací kolem vertikální osy, neboť normálně rozdělená horizontální složka je sféricky symetrická a je nezávislá na vertikální složce ($\gamma(\rho_0) = \rho_0$, tedy $c_\gamma = 1$). Dále do \mathcal{S} patří translace podél vertikální osy $\gamma^t(v) = v + t$, neboť hustota $\gamma^t(\rho_0)$ je dle věty o transformaci náhodné vektoru 4.22:

$$g_0((\gamma^t)^{-1}(\mathbf{u}, v)) |\det(\gamma^t)^{-1}| = g(\mathbf{u}) e^{-(v-t)} 1 = g(\mathbf{u}) e^{-v} e^t, \quad c_\gamma = e^t$$

a $\gamma^t(\rho_0) = e^t \rho_0$.

Navrch je zde ještě jedna symetrie. Úrovňové množiny hustoty g_0 jsou paraboloidy, ve dvourozměrném prostoru pak paraboly, jak můžeme vidět na obrázku 4.7. Afinní transformace tvaru:

$$\gamma(\mathbf{u}, v) = (\mathbf{u} + \mathbf{b}, v - \mathbf{b}^T \mathbf{u} - \|\mathbf{b}\|^2/2), \quad (\mathbf{u}, v) \in \mathbb{R}^h \times \mathbb{R}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^h \quad (4.11)$$



Obrázek 4.7: Úrovňové křivky hustoty $g_0(x, y)$ pro $x \in (-3, 3)$ a $y \in (-1, 3)$

mohou zobrazit vrchol paraboloidu na jakýkoliv další bod tohoto paraboloidu. Například střed soustavy souřadnic $(\mathbf{0}, 0)$ přenesou na paraboloid

$$\mathbf{u} = -\mathbf{b}, v = -\mathbf{u}^T \mathbf{u} / 2.$$

Hustotu g_0 míry ρ_0 transformují na sebe sama:

$$\begin{aligned} g_0(\gamma^{-1}(\mathbf{u}, v)) |\det \gamma^{-1}| &= g_0(\mathbf{u} - \mathbf{b}, v + \mathbf{b}^T \mathbf{u} - \|\mathbf{b}\|^2 / 2) 1 = \\ &= e^{-v - \mathbf{b}^T \mathbf{u} + \|\mathbf{b}\|^2 / 2 - \|\mathbf{u}\|^2 / 2 + 2\mathbf{u}^T \mathbf{b} / 2 - \|\mathbf{b}\|^2 / 2} / (2\pi)^{h/2} = \\ &= e^{-\mathbf{u}^T \mathbf{u} / 2} e^{-v} / (2\pi)^{h/2} = g_0(\mathbf{u}, v), \end{aligned}$$

a $\gamma^t(\rho_0) = \rho_0$. Míra ρ_0 je tedy vzhledem k těmto transformacím invariantní.

Poloprostory H tvaru (4.10) tvoří d -rozměrný prostor. Symetrická grupa S míry ρ_0 může zobrazit jakýkoliv poloprostor z tohoto prostoru na jakýkoliv jiný (grupa S je transitivní). Tyto úvahy shrneme do tvrzení.

Tvrzení 4.12. Pro každý poloprostor H konečné míry $\rho_0(H) < \infty$ existuje afinní transformace $\gamma_H : H_+ \mapsto H$ taková, že transformuje normálně-exponenciální

rozdělení π_0 na H_+ na pravděpodobnostní míru (rozdělení) ρ_H na H . Tato transformace je symetrie míry ρ_0 : $\gamma_H(\rho_0) = c_H \rho_0$, kde $c_H = \rho_0(H)$. Obráceně pro každou symetrii γ_H míry ρ_0 platí, že $\gamma_H(\pi_0)$ je pravděpodobnostní míra tvaru $d\rho_H = \mathbb{1}_H d\rho_0 / \rho_0(H)$ na $H = \gamma_H(H_+)$.

Shrnuto: ať zvolíme jakýkoliv vzdálený poloprostor H , můžeme ho pomocí afinních transformací ze symetrické grupy \mathcal{S} zobrazit na základní poloprostor H_+ a míra se změní maximálně o konstantu. Normálně-exponenciální limitní rozdělení je vůči těmto symetriím stabilní. Afinní transformace z \mathcal{S} a transformace vzniklé jejich složením jsou právě ty transformace, které můžeme použít k normalizaci extrémních vektorů Z^H . I ostatní limitní rizikové vektory mají podobné symetrické grupy.

Symetrické grupy vždy přísluší Radonovým mírám, které rozšiřují příslušné limitní rizikové rozdělení.

- Míra ρ_0 na \mathbb{R}^d rozšiřuje normálně-exponenciální rozdělení.
- Míra ρ_τ , $\tau \in (-2/h, 0)$ na paraboloidu $Q = \{v + \mathbf{u}^T \mathbf{u} < 0\}$ s hustotou $-(v + \mathbf{u}^T \mathbf{u})^{-1/\tau-1-h/2}$ rozšiřuje mocinné parabolické rozdělení.
- Míra ρ_τ , $\tau > 0$ na $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ s hustotou $1 / \|\mathbf{w}\|^{1/\tau+d}$ rozšiřuje Euklidovo-Paretovo rozdělení.

Transformace, které generují jednotlivé symetrické grupy:

- Symetrické grupa normálně-exponenciálního rozdělení je generována rotacemi kolem vertikální osy, translacemi podél vertikální osy a parabolickými translacemi (4.11).
- Symetrické grupa mocinného parabolického rozdělení je generována rotacemi kolem vertikální osy, parabolickými translacemi (4.11) a lineárními zobrazeními $(\mathbf{u}, v) \rightarrow (c\mathbf{u}, c^2v)$, $c > 0$.
- Symetrická grupa Euklidova-Paretova rozdělení je generována skalárními zobrazeními $\mathbf{w} \rightarrow c\mathbf{w}$, $c > 0$ a ortogonálními transformacemi na \mathbb{R}^d .

Na závěr uvedeme příklad ukazující, že limitní rizikový vektor s normálně-exponenciálním rozdělením nepatří do své sféry přitažlivosti.

Příklad 4.13. Necht $\mathbf{W} = (\mathbf{X}, Y)'$ je vektor s normálně-exponenciálním rozdělením na poloprostoru H_+ a hustotou

$$g(\mathbf{x}, y) = e^{-\mathbf{x}^T \mathbf{x}/2} e^{-y}.$$

Je to limitní rizikový vektor pro rozdělení s lehkými chvosty, například pro vícerozměrné normální rozdělení. Jako divergující poloprostory vezměme $H_n = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^d : y \leq 1/n\}$. Platí tedy předpoklad $P(\mathbf{W} \in H_n) \rightarrow 0_+$ pro $n \rightarrow \infty$.

Náhodná veličina Y_n , což je Y za podmínky, že Y leží v poloprostoru H_n , má tuto dle (4.5) hustotu:

$$f_n(y) = e^{-y} \mathbb{1}_{[0, 1/n]}(y) \frac{1}{\int_0^{1/n} e^{-t} dt}.$$

Afinní transformace $\gamma^n(v) = nv$ zobrazí prostor H_+ na H_n . Inverzní transformace má tvar: $(\gamma^n)^{-1}(y) = y/n$ a transformuje Y_n na normalizovanou veličinu V_n , $V_n = Y_n/n$. Vektor \mathbf{X} γ^n neovlivní. S použitím věty o transformaci náhodných veličin 4.22 má V_n hustotu:

$$g_n(v) = f_n((\gamma^n)^{-1}(v)) \frac{\partial (\gamma^n)^{-1}(v)}{\partial v} = f_n(v/n) \frac{1}{n};$$

$$g_n(v) = e^{-v/n} \mathbb{1}_{[0, 1]}(v) (1 - e^{-1/n})^{-1} \frac{1}{n}.$$

Jelikož

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-v/n} \frac{1}{n}}{1 - e^{-1/n}} = 1$$

platí, že $g_n(v) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h(v) = \mathbb{1}_{[0, 1]}(v)$. Pro n jdoucí do nekonečna, konverguje V_n k rovnoměrnému rozdělení na intervalu $[0, 1]$.

Celý normalizovaný vektor

$$\mathbf{W}^{H_n} = (\gamma^n)^{-1}((\mathbf{X}, Y_n)') = (\mathbf{X}, V_n)'$$

konverguje v distribuci k limitnímu rizikovému vektoru $\mathbf{W} = (\mathbf{U}, T)'$, kde \mathbf{U} je h -rozměrný normálně rozdělený vektor a T je rovnoměrně rozdělená náhodná veličina na intervalu $[0, 1]$ nezávislá na \mathbf{U} .

W^{H_n} tedy nekonverguje k normálně exponenciálnímu limitnímu rizikovému rozdělení, nepatří do jeho sféry přitažlivosti. Pokud bychom se podívaly na výběrový mrak z normálně exponenciálního rozdělení, je zřejmé, že toto rozdělení nemůže být ve své sféře přitažlivosti. Nesplňuje totiž podmínku směrové homogenity, protože je definováno na poloprostoru H_+ , má hustotu ve směru vertikální osy uříznuté a tím pádem nesymetrické.

□

4.4 Sféra přitažlivosti normálně-exponenciálního limitního rizikového rozdělení

V této sekci prozkoumáme sféru přitažlivosti $\mathcal{D}(0)$ normálně-exponenciálního limitního rozdělení π_0 .

Do $\mathcal{D}(0)$ patří sféricky symetrické rozdělení s lehkými chvosty. To je jasné z požadavků na rozdělení vektoru \mathbf{Z} (směrová homogenita jeho výběrového mraku). Sféricky symetrická rozdělení jsou například vícerozměrná normální rozdělení nebo obecněji eliptická rozdělení. My tuto třídu rozdělení rozšíříme. Konvergenci eliptických rozdělení k normálně-exponenciálnímu limitnímu rozdělení poprvé dokázal pro dvourozměrný případ Berman [4], pro vícerozměrný případ Hashovra [9].

Začneme s třídou sférických Weibullových rozdělení s hustotou:

$$e^{-\|\mathbf{z}\|^c} / C_c, \quad c > 0,$$

kteřou rozšíříme na třídu rotund-exponenciálních rozdělení. Označme ji \mathcal{RE} . Rozdělení z této třídy nemusejí být eliptická, ale mají konvexní centrální část výběrového mraku obklopenou rychle klesajícím prstencem izolovaných bodů. Hustoty z \mathcal{RE} jsou definovány dvěma parametry. Rotundovou množinou D , která popisuje tvar centrální části výběrového mraku, a klesající funkcí $-\psi$, která popisuje rychlost klesání prstence izolovaných bodů (chvosty rozdělení).

Funkci e^{-r^c} ve Weibullově hustotě nahradíme obecnější funkcí $e^{-\psi}$, která splňuje Von Misesovy podmínky (1.7). Euklidovskou normu $\|\cdot\|$ na jednotkové kouli nahradíme normovou funkcí n_D na rotundové množině D .

Dostáváme tak rotund-exponenciální hustotu

$$f(\mathbf{z}) = e^{-\psi(n_D(\mathbf{z}))} / C.$$

Nejprve definujme rotundovou množinu a jí příslušnou normovou funkci (anglicky se nazývá „gauge function“). Každá konvexní, omezená, otevřená množina D na \mathbb{R}^d , která obsahuje počátek soustavy souřadnic, jednoznačně určuje funkci

$$n_D : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty),$$

která splňuje:

- 1) $n_D(t\mathbf{z}) = tn_D(\mathbf{z})$, $t > 0$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d$, (je 1-homogenní),
- 2) $D = \{n_D < 1\}$.

Definice 4.14. (Rotundová množina a normová funkce)

Nechť $D \subset \mathbb{R}^d$ je konvexní, omezená, otevřená množina obsahující počátek soustavy souřadnic. Funkce n_D definovaná výše je normovou funkcí množiny D . Pak D se nazývá rotundová množina, právě když n_D je dvakrát diferencovatelná na okolí počátku a matice

$$n_D^* = \frac{\partial^2 n_D(\mathbf{z})}{\partial^2 \mathbf{z}} + \left(\frac{\partial n_D(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right) \left(\frac{\partial n_D(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \right)'$$

je pozitivně definitní pro všechny $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$.

První člen na pravé straně rovnosti v definici je matice $d \times d$ druhých parciálních derivací podle \mathbf{z} ; druhý člen je součin vektorů prvních parciálních derivací podle \mathbf{z} . Dohromady tvoří matici o rozměru $d \times d$.

Rotundové množiny mají tvar vajíčka. Normovou funkci $n_D(\mathbf{z})$ můžeme považovat za normu vektoru \mathbf{z} . Von Misesovy podmínky (1.7) na funkci ψ zajišťují, že jsou úrovněvé křivky rozdělení \mathcal{Z} ekvidistantní. Všechny úrovněvé množiny jsou skalárními násobky rotundové množiny $D: tD$, $t > 0$. Jsou tedy všechny konvexní a tyto rozdělení mají unimodální hustoty. Rotundové množiny nezávisí na souřadnicích. Ty si můžeme volit libovolně, jak se nám to hodí. Více o rotundových množinách lze najít v sekci 9.2 knížky Balkema [3].

Pro rotund-exponenciální rozdělení platí následující dvě věty: věta o konvergenci k limitnímu rizikovému rozdělení a věta o konvergenci výběrových mraků.

Věta 4.15. *Nechť \mathbf{Z} má rozdělení π a rotund-exponenciální hustotu*

$$f(\mathbf{z}) = e^{-\psi(n_D(\mathbf{z}))} / C,$$

kde ψ je rostoucí neomezená funkce splňující Von Misesovy podmínky: je dvakrát diferencovatelná na $[0, t_\infty)$ s $t_\infty \in (0, \infty]$ tak, že ψ' je pozitivní a platí konvergence $(1/\psi')'(\mathbf{z}) \rightarrow 0$, $\mathbf{z} \rightarrow t_\infty$. Funkce n_D je normová funkce rotundové množiny D . Jestliže je t_∞ konečné, předpokládá se, že f je nula mimo množinu $t_\infty D$. Pak \mathbf{Z} patří do sféry přitažlivosti normálně-exponenciálního limitního rozdělení $\mathcal{D}(0)$: existují afinní transformace γ^n zobrazující základní poloprostor H_+ na H tak, že

$$\mathbf{W}_n = (\gamma^n)^{-1}(\mathbf{Z}^{H_n}) \xrightarrow{d} \mathbf{W}, P(\mathbf{Z} \in H) \rightarrow 0_+, n \rightarrow \infty.$$

Navíc všechny momenty normalizovaného vektoru $\mathbf{W}_n = (\mathbf{U}_n, V_n)$ konvergují:

$$\begin{aligned} E\mathbf{W}_n &\rightarrow (\mathbf{0}, 1)', \quad \text{cov}(\mathbf{W}_n) \rightarrow I, \\ EV_n^r &\rightarrow \Gamma(r+1), \quad E\|\mathbf{U}_n\|^r \rightarrow 2^{(h+r)/2} \Gamma((h+r)/2) / \Gamma(h/2). \end{aligned}$$

Věta 4.16. *Nechť platí předpoklady předcházející věty 4.15 a H_n je takový poloprostor, že*

$$nP(\mathbf{Z} \in H_n) \rightarrow c_0 > 0, n \rightarrow \infty.$$

Nechť ρ_0 je Radonova míra s hustotou

$$ce^{-\mathbf{u}^T \mathbf{u}/2} e^{-v}, \quad c = c_0 / (2\pi)^{h/2}.$$

Nechť $\pi_n = (\gamma^n)^{-1}(\pi)$ je rozdělení normalizovaného vektoru $(\gamma^n)^{-1}(\mathbf{Z})$. Pak pro všechny $m \geq 1$ platí

$$n\pi_n \rightarrow \rho_0 \text{ slabě na } \mathbb{R}^d \setminus C_m, \quad C_m = \{v < -m(1 + \|\mathbf{u}\|)\}.$$

Věta 4.16 popisuje lokální asymptotické chování výběrových mraků na jejich hranici. Míra $n\pi_n$ je střední míra bodového procesu, která konverguje ke střední míře ρ_0 limitního Poissonova bodového procesu. Například výběrový bodový proces (výběrový mrak) z jednorozměrného standardního normálního rozdělení, vhodně normalizovaného, konverguje k Poissonovu bodovému procesu se střední mírou (intenzitou) e^{-v} na \mathbb{R} , když jde rozsah

náhodného výběru do nekonečna. Vícerozměrný případ je podobný. Pro výběr ze standardního vícerozměrného normálního rozdělení je limitní proces bodový Poissonův proces se střední mírou $\rho_0 = e^{\mathbf{u}^T \mathbf{u}} e^{-v}$ na $\mathbb{R}^h \times \mathbb{R}$.

Zavedení rotund-exponenciálních rozdělení je užitečné z toho důvodu, že výběrové mraky mají často unimodální rozdělení, ale nemají eliptický tvar.

Normalizace γ^n jsou v tomto případě explicitně dány. Nechť H_n je tečný poloprostor k nosiči $t_n D$ v bodě p_{H_n} ,

$$\begin{aligned} \gamma^n &= A_p \circ \gamma^{t_n}, \quad \gamma^{t_n}(\mathbf{u}, v) = (b_{t_n} \mathbf{u}, t_n + a_{t_n} v), \quad p = p_{H_n}/t_n, \\ a_{t_n} &= 1/\psi'(t_n), \quad b_{t_n} = \sqrt{t_n a_{t_n}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Transformace A_p jsou počáteční transformace rotundové množiny D pro bod p , viz sekce 9.3 v knize Balkema [3].

Do sféry přitažlivosti $\mathcal{D}(0)$ patří kromě rotund-exponenciálních i rozdělení, které se od rozdělení z \mathcal{RE} mírně liší. Označme hustotu rotund-exponenciálního rozdělení

$$f_0(\mathbf{z}) = e^{-\psi(n_D(\mathbf{z}))}/C_0.$$

Z věty 4.15 víme, že normalizovaný extrémní vektor konverguje v distribuci k limitnímu normálně-exponenciálnímu vektoru \mathbf{W} . Z tvrzení 4.9 dostáváme, že je to ekvivalentní konvergenci

$$\frac{f_0(\gamma^n(\mathbf{w}))}{f_0(\gamma^n(\mathbf{0}))} \rightarrow e^{-\mathbf{u}^T \mathbf{u}} e^{-v} v \mathbf{L}^1(H_+), \quad (4.13)$$

normalizace γ^n mají tvar (4.12). Označme $O = \{f_0 > 0\}$ a nechť f je hustota pozitivní na O , která splňuje (4.13) se stejnými normalizacemi. Pak f můžeme psát jako $f = L f_0$, kde L je plochá funkce. Je to vícerozměrná varianta pomalu se měnící funkce, viz definice 1.3.

Definice 4.17. (Plochá funkce)
Spojité pozitivní funkce L na \mathbb{R}^d splňující

$$\frac{L(\mathbf{z} + \mathbf{w})}{L(\mathbf{z})} \rightarrow 1, \quad \|\mathbf{z}\| \rightarrow \infty, \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^d,$$

se nazývá plochá (anglicky „flat function“).

Ploché funkce na O jsou ty, které jsou daleko v O lokálně konstantní. Jako příklad můžeme uvést $L(\mathbf{z}) = \mathbf{z}$, $L(\mathbf{z}) = e^{\mathbf{z}}$.

Hustoty $f = Lf_0$ se daleko v O , v nekonečnu, od f_0 liší jen o málo, o konstantu. Zajímají nás podmínky, za kterých tyto hustoty patří do $\mathcal{D}(0)$.

Věta 4.18. *Nechť má vektor $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^d$ hustotu $f_0(\mathbf{z}) = e^{-n_D(\mathbf{z})^2/2}/C$, kde n_D je normová funkce rotundové množiny D . Nechť normovací afinní zobrazení γ^n mají tvar (4.12) a L je plochá funkce. Pak je hustota $f = Lf_0$ integrovatelná a platí pro ni konvergence (4.13) v $L^1(H_+)$. Náhodný vektor s hustotou f/C_L patří do sféry přitažlivosti normálně-exponenciálního limitního rizikového rozdělení $\mathcal{D}(0)$ se stejnými normalizacemi γ^n a normalizované hustoty konvergují v L^1 .*

Zato, že funkce $f = Lf_0$ je pouze asymptoticky rotund-exponenciální, jsme pro zajištění konvergence zaplatili tím, že v definici f_0 má dříve obecná funkce ψ tvar $\psi(n_D(\mathbf{z})) = n_D(\mathbf{z})^2/2$. Jak uvidíme ve dvourozměrném případě níže, idea plochých funkcí je ta, že výběrové mraky funkcí $f = Lf_0$ mohou mít nějaké nepravidelnosti, které ale směrem ke kraji mraku postupně vymizí (s tím, jak se plochá funkce L postupně mění v konstantu). První úrovně množiny nemusí být konvexní, ale postupně se jimi stávají, jak můžeme vidět na obrázku 4.8.

V článku Fougères [8] uvedli autoři dvourozměrnou verzi této věty, kterou se teď budeme zabývat. Nejprve uvedme tvrzení o sféře přitažlivosti Gumbelova rozdělení, které se bude později hodit.

Tvrzení 4.19. (Embrechts [6], str. 158)

Náhodná veličina Z s distribuční funkcí F patří do sféry přitažlivosti maxim Gumbelova rozdělení (viz. definice 1.2 a věta 1.1), právě když

$$\lim_{z \rightarrow z_\infty} \frac{\bar{F}(z + z\eta(l))}{\bar{F}(z)} = e^{-l},$$

kde η je pomocná funkce (anglicky „auxiliary function“). Pomocná funkce splňuje: $\eta(z) = o(z)$ pro $z_\infty = \infty$ a $\eta(z) = o(z_\infty - z)$, pro $z_\infty < \infty$.

Pro připomenutí, do MDA Gumbelova rozdělení, stejně jako do $\mathcal{D}(0)$, patří rozdělení s lehkými chvosty. Proto se zde také používá. Následují potřebné předpoklady.

Předpoklady: Necht' náhodný vektor $\mathbf{Z} = (X, Y)' \in \mathbb{R}^2$ má hustotu

$$f(x, y) = f_0(x, y)L(x, y) = e^{-p(n(x, y))}L(x, y),$$

kde L je plochá funkce a pro $p(r)$ a $n(x, y)$ platí:

$$p(r) = \int_0^r \frac{1}{\eta(s)} ds,$$

$\eta(s)$ je absolutně spojitá funkce s $\lim_{x \rightarrow \infty} \eta'(x) = 0$ a $n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ splňuje $n(rx, sy) = rsn(x, y)$, konstanty $r, s > 0$; n^2 je dvakrát diferencovatelná a n má pozitivně definitní matici druhých parciálních derivací (Hessian). Funkce n je dvourozměrná verze normové funkce.

Věta 4.20. Při splnění předpokladů výše, patří X a Y do sféry přitažlivosti Gumbelova limitního rozdělení s pomocnou funkcí η a jsou asymptoticky nezávislé. Existují reálná čísla ι a σ , že

$$\lim_{q \rightarrow \infty} P(X \leq \iota q + \sigma \sqrt{q\eta(q)}x; Y \leq q + \eta(q)y | Y > q) = \Phi(x)(1 - e^{-y}),$$

kde Φ je distribuční funkce standardního normálního rozdělení.

Pracujeme zde s poloprostorem $H^q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq q\}$. Normalizace zobrazují základní prostor H_+ na H^q a mají tvar:

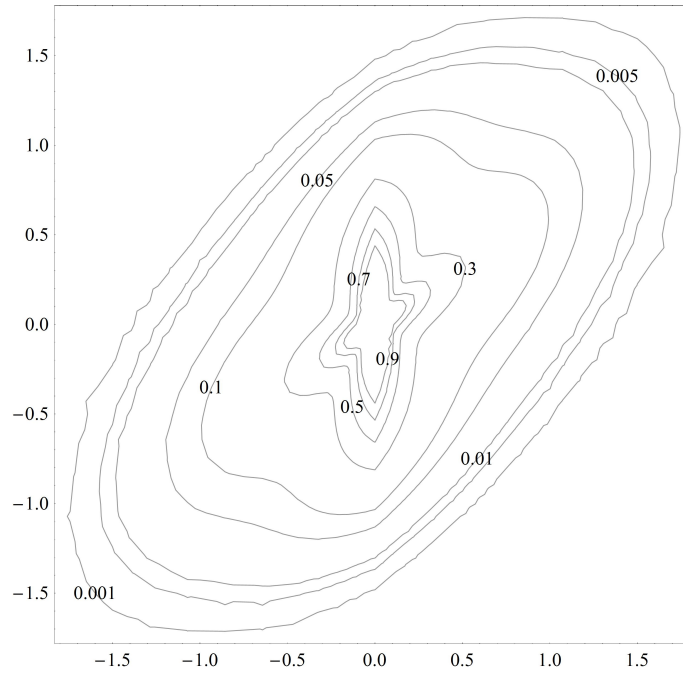
$$\gamma^q(x, y) = (\iota q + \sigma \sqrt{q\eta(q)}x; q + \eta(q)y).$$

Jak může vypadat rozdělení splňující předpoklady této věty ukážeme v následujícím příkladě, který je převzatý z článku Fougères [8].

Příklad 4.21. Necht' h je hustota na \mathbb{R} a g je hustota na $[-\pi/2, \pi/2]$. Funkce f definovaná jako

$$f(x, y) = \frac{h(y^2 + (x - \iota y)^2 / (1 - \iota^2))}{\sqrt{y^2 + (x - \iota y)^2 / (1 - \iota^2)}} g(\arctan((x - \iota y) / (y\sqrt{1 - \iota^2})))$$

je dvourozměrná hustota na \mathbb{R}^2 . Pokud zvolíme $\iota = 0.6$, $h(t) = e^{-t^2/2} / \sqrt{2\pi}$ a $g(t) = c(1 + (t^2 - (\pi/4)^2)^2)$, c dopočítáme tak, aby g byla hustota a f rovněž přinášíme vhodnou konstantou, aby se na \mathbb{R}^2 vyintegrovala na 1. Pak f splňuje předpoklady věty 4.20. Obrázek 4.8 zobrazuje úroňové křivky hustoty f . Jsou asymptoticky eliptické, nepravidelnosti způsobující nekonvexnost úroňových množin postupně vymizí. Naše teorie je lokální, takže i přes tuto nekonvexnost, konvergence platí. □



Obrázek 4.8: Úrovňové křivky hustoty $f(x, y)$ z příkladu 4.21

4.5 Sféra přitažlivosti Euklidova-Paretova limitního rizikového rozdělení

V této sekci prozkoumáme sféru přitažlivosti $\mathcal{D}(\tau)$, $\tau > 0$, Euklidova-Paretova limitního rozdělení π_τ . Až do konce sekce budeme automaticky uvažovat $\tau > 0$ bez dalšího upozornění.

$\mathcal{D}(\tau)$ obsahuje sféricky symetrické hustoty $f(\mathbf{z}) = f_1(\|\mathbf{z}\|)$, kde f_1 je pravidelně se měnící funkce s exponentem $-(\tau + d)$ (viz 1.3). Rozdělení z $\mathcal{D}(\tau)$ mají těžké chvosty. Jako příklad můžeme uvést vícerozměrné sférické Studentovo rozdělení.

Kromě toho, že podmiňujeme vektor \mathbf{Z} , aby ležel ve vzdáleném polo-prostoru H , existuje i jiný model. V něm vyšetřujeme konvergenci

$$\mathbf{Z}^s / s \xrightarrow{d} \mathbf{W}, \quad s \rightarrow \infty \text{ na } (sB)^c,$$

kde \mathbf{Z}^s je vektor \mathbf{Z} za podmínky, že leží mimo kouli $sB \subset \mathbb{R}^d$, B je jednot-

ková koule. Tento model pracuje s polárními souřadnicemi. Limitní vektor \mathbf{W} můžeme psát jako $\mathbf{W} = \Theta R$, $R = \|\mathbf{W}\| \geq 1$ udává poloměr a Θ je náhodná veličina jednotkové sféry udávající směr. Více lze najít například v Mikosch [10].

4.6 Sféra přitažlivosti mocninného parabolického limitního rizikového rozdělení

V této sekci prozkoumáme sféru přitažlivosti $\mathcal{D}(\tau)$, $\tau \in (-2/h, 0)$, mocninného parabolického limitního rozdělení π_τ . Opět budeme až do konce sekce automaticky uvažovat $\tau \in (-2/h, 0)$ bez dalšího upozornění.

$\mathcal{D}(\tau)$ obsahuje sféricky symetrické hustoty, které mají omezený nosič. Poloprostory H již tedy nemůžou divergovat do nekonečna, ale musí se blížit k nějaké konečné hranici.

Nechť D je rotundová množina v \mathbb{R}^d . Je-li \mathbf{Z} rovnoměrně rozdělený na D , pak pro každý poloprostor H protínající D má extrémní vektor \mathbf{Z}^H rovnoměrné rozdělení na $D \cap H$. Křivost hranice množiny D je spojitá funkce, takže když půjde mohutnost $|D \cap H|$ k nule (a tím pádem i $P(\mathbf{Z}^H \in |D \cap H|) \rightarrow 0$), bude křivost hranice $D \cap H$ konstantní (hranici můžeme lokálně považovat za přímku). Extrémní vektor \mathbf{Z}^H vhodně normalizovaný afinními transformacemi bude konvergovat v distribuci k limitnímu rizikovému vektoru \mathbf{W} , který je rovnoměrně rozdělen na části paraboloidu $Q_+ = Q \cap H_+$, kde Q je paraboloid

$$Q = \{(\mathbf{u}, v) : v \leq 1 - \mathbf{u}^T \mathbf{u}\} \subset \mathbb{R}^h \times \mathbb{R}.$$

Do $\mathcal{D}(\tau)$ tedy patří rovnoměrně rozdělené náhodné vektory na rotundových množinách.

Nechť máme náhodný výběr $\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_n$ z rovnoměrného rozdělení na rotundové množině D . Normalizovaný výběr (výběrový mrak) $N_n = ((\gamma^n)^{-1}(\mathbf{Z}_1), \dots, (\gamma^n)^{-1}(\mathbf{Z}_n))$ konverguje vágně ke standardnímu Poissonovu bodovému procesu na otevřeném paraboloidu Q . Normalizace γ^n jsou afinní transformace zobrazující H_+ na H_n tak, že $(\gamma^n)^{-1}(D) \rightarrow Q$ pro $|D \cap H_n| \sim |Q_+|/n$. Tento Poissonův bodový proces tedy popisuje lokální chování výběrového mraku na jeho hranici, když je n dostatečně velké (máme

velký výběr, velký výběrový mrak).

Hustota f , která je spojitá na uzávěru D a pozitivní na hranici D , patří rovněž do $\mathcal{D}(\tau)$. Nechť s je funkce splňující:

$$s = s(\mathbf{z}) = (1 - n_D(\mathbf{z}))_+.$$

Pak náhodný vektor \mathbf{Z} na D s hustotou $f(\mathbf{z}) \propto s(\mathbf{z})^{c-1}$, $c > 0$ je konstanta, patří do sféry přitažlivosti mocninného parabolického limitního rozdělení na Q_+ . Hustota f tedy nemusí být jen konstantní, aby patřila do $\mathcal{D}(\tau)$.

Pro $\tau = -2/h$ je limitní rozdělení singulární. Do jeho sféry přitažlivosti patří rozdělení, která žijí na ∂D , hranici rotundové množiny. Například pro jednotkový kruh je to rovnoměrné rozdělení na jednotkové kružnici.

4.7 Afinity transformace

Afinní transformace γ má následující tvar:

$$\gamma : \mathbf{w} \mapsto \mathbf{z}, \mathbf{z} = \gamma(\mathbf{w}) = A\mathbf{w} + a, a \in \mathbb{R}^d, A \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \det(A) \neq 0,$$

matice A je čtvercová matice plné hodnosti, tedy regulární, a proto existuje její inverzní matice a můžeme určit inverzní afinní transformaci:

$$\gamma^{-1} : \mathbf{z} \mapsto \mathbf{w}, \mathbf{w} = \gamma^{-1}(\mathbf{z}) = A^{-1}(\mathbf{z} - a).$$

S operací skládání zobrazení: $\gamma^t \circ \gamma^s = \gamma^{t+s}$, $s, t > 0$; $\gamma^1 = \gamma$, tvoří afinní transformace γ^t grupu d -rozměrných afinních transformací $\mathcal{A}(d)$. Zobrazení se skládají následovně:

$$\gamma^2(\mathbf{w}) = \gamma(\gamma(\mathbf{w})) = \gamma(A\mathbf{w} + a) = A(A\mathbf{w} + a) + a = A^2\mathbf{w} + Aa + a^2.$$

Afinní zobrazení se skládá ze dvou částí: matice A reprezentuje lineární část, vektor a pak posunutí neboli translaci. Pokud je $a = 0$, mluvíme o lineárním zobrazení. Afinní transformace se obvykle zapisují maticově v homogenních souřadnicích. To znamená, že vytvoříme virtuální souřadnici, která bude reprezentovat vektor posunutí a . Dostaneme matici o rozměrech $(d+1) \times (d+1)$:

$$\gamma(\mathbf{w}) = A\mathbf{w} + a; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{z} \end{pmatrix}.$$

První řádek zvětšené čtvercové matice odpovídá virtuální souřadnici. Pokud je vektor posunutí nulový a máme tím pádem lineární zobrazení, stačí k jeho reprezentaci standardní matice o rozměrech $d \times d$. Virtuální souřadnici nepotřebujeme.

Afinní zobrazení se dá výhodně rozepsat do řady jako exponenciála:

$$\gamma^t = e^{tC} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Ct)^k}{k!}.$$

Matici C se říká generátor zobrazení. Je to čtvercová matice plné hodnosti s rozměry $(d+1) \times (d+1)$ v případě afinního zobrazení a $d \times d$ v případě lineárního zobrazení. Každé afinní zobrazení generuje právě jedna matice C . Generátor C bývá lehčí na zápis než matice reprezentující γ^t .

Rozlišujeme několik základních typů afinních zobrazení (v závorce uvádíme anglické názvy): translaci či posunutí (translation), zrcadlení (reflection), změnu měřítka (scaling), zkosení (shear), projekce (projection) a otáčení (rotation). Další transformace vznikají jejich skládáním.

Pro představu uvedeme matice a generátory některých typů v \mathbb{R}^2 :

- **translace:** $\gamma^t(w_1, w_2) = (w_1; w_2+t)$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}$, matice A je jednotková

a vektor posunutí a má tvar $(0, t)'$. Generátor C je: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Sčítání

takových matic je jednoduché, jelikož po několika málo umocněních dostaneme matici se samými nulami. U generátoru C výše se tak stane už při umocnění na druhou. Z nekonečné sumy nám tedy zůstanou jen dva sčítance:

$$\gamma^t = e^{tC} = I + tC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- **změna měřítka:** $\gamma^t(w_1, w_2) = (e^{\lambda t}w_1; e^{\mu t}w_2)$, $\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}$, matice A se shoduje s maticí reprezentující toto zobrazení, vektor posunutí je nu-

lový. Generátor C má tvar: $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. Zde je již součet trochu složitější, ale pořád se dá vcelku rozumně vyřešit. Generátor C umocněný na k -tou má tento tvar: $\begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & \mu^k \end{pmatrix}$. Součet je následující:

$$\begin{aligned} \gamma^t = e^{tC} &= I + tC + t^2C^2 + \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t\lambda & 0 \\ 0 & t\mu \end{pmatrix} + \dots = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} (t\lambda)^k & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} (t\mu)^k \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

λ a μ jsou parametry. Jsou-li oba kladné, jedná se o expanzi; jsou-li oba záporné, jde o kontrakci.

- **rotace:** $\gamma^t(w_1, w_2) = (w_1 \cos \lambda t + w_2 \sin \lambda t; -w_1 \sin \lambda t + w_2 \cos \lambda t)$,
 $\begin{pmatrix} \cos \lambda t & \sin \lambda t \\ -\sin \lambda t & \cos \lambda t \end{pmatrix}$, matice A se shoduje s maticí reprezentující toto

zobrazení, vektor posunutí je nulový. Generátor C má tvar: $\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$.

Součet je složitý, násobením generátoru dostaneme v jednotlivých buňkách nekonečné řady, které se sečtou na kosiny a siny. Tato transformace je ortogonální, neboť $A^T A = I$.

Vezměme vektor \mathbf{Z} a afinní transformaci γ , pak $\mathbf{W} = \gamma^{-1}(\mathbf{Z}) = A^{-1}(\mathbf{Z} - a)$ je normalizovaný vektor. Konvergence $\gamma^n(\mathbf{w}) = A_n \mathbf{w} + a_n \rightarrow \gamma = A \mathbf{w} + a$ znamená, že $A_n \rightarrow A$ a $a_n \rightarrow a$.

Předpokládejme, že $(\gamma^n)^{-1}(\mathbf{Z}_n) \xrightarrow{d} \mathbf{W}$, když jde počet pozorování $n \rightarrow \infty$, \mathbf{W} je nedegenerovaný vektor. Normalizace γ^n nejsou jednoznačné. Mohou být nahrazeny normalizacemi δ^n , které jsou asymptoticky rovny γ^n :

$$\delta^n \sim \gamma^n \Leftrightarrow (\gamma^n)^{-1} \delta^n \rightarrow id,$$

kde id je identické zobrazení.

Často budeme používat následující větu o transformaci náhodného vektoru.

Věta 4.22. (Transformace náhodného vektoru)

Nechť vektor \mathbf{W} má hustotu g . Nechť γ je regulární a prosté zobrazení, $\gamma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ a $\mathbf{z} = \gamma(\mathbf{w})$. Pak \mathbf{Z} má hustotu

$$f(\mathbf{z}) = g(\gamma^{-1}(\mathbf{z})) | D_{\gamma^{-1}}(\mathbf{z}) |,$$

kde $D_{\gamma^{-1}}$ je Jacobiho matice inverzního zobrazení, je to matice parciálních derivací o velikosti $d \times d$.

Pokud je γ afinní zobrazení (to je regulární a prosté), má věta následující znění:

$$\mathbf{Z} = \gamma(\mathbf{W}) = A\mathbf{w} + a, \quad \mathbf{W} = \gamma^{-1}(\mathbf{Z}) = A^{-1}(\mathbf{Z} - a),$$

Náhodný vektor \mathbf{Z} pak má hustotu

$$f(\mathbf{z}) = \frac{1}{|\det A|} g(A^{-1}(\mathbf{z} - a)).$$

Jacobiho matice afinního zobrazení je přímo matice A . Častěji budeme používat obrácenou verzi, kdy známe hustotu \mathbf{Z} a chceme zjistit hustotu \mathbf{W} :

$$g(\mathbf{w}) = |\det A| f(A\mathbf{w} + a).$$

Kapitola 5

Přesahy přes horizontální prahy

Tato kapitola zpracovává látku z Kapitoly IV knihy Balkema [3]. Značení z knihy bylo zachováno v co možná největší míře.

Kapitola je rozdělena na čtyři podkapitoly. V první vymežíme zadání a řešený problém, definujeme základní pojmy a uvedeme důležité věty. Druhá podkapitola popisuje vlastnosti přesahových měř. Třetí sekce se věnuje konkrétním tvarům přesahových měř ve dvourozměrném prostoru. Čtvrtá sekce se zabývá sférami přitažlivosti.

5.1 Přesahy přes horizontální prahy

Narozdíl od předchozí kapitoly nenecháme poloprostor H divergovat jakýmkoliv směrem, nýbrž jen jedním, konkrétním. Tím pádem nemusíme klást takové podmínky na rozdělení vektoru \mathbf{Z} . Stejně jako v minulé kapitole zvolíme nové souřadnice a rozdělíme \mathbf{Z} na horizontální a vertikální část:

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{X}, Y)', \mathbf{X} \in \mathbb{R}^h, Y \in \mathbb{R}.$$

Náhodná veličina Y je opět minus hodnota portfolia a náhodný vektor \mathbf{X} můžeme považovat za šum.

Narozdíl od kapitoly 4, kde jsme požadovali, aby rozdělení náhodného vektoru \mathbf{Z} bylo směrově symetrické, je teorie v této kapitole založená na

předpokladu, že má výběrový mrak nepravidelnosti, které nám ukáží, kde leží extrémny daného rozdělení. Pod nepravidelnostmi výběrového mraku si můžeme představit shluky bodů, které se formují v jedné části mraku a počet těchto bodů klesá s rostoucí vzdáleností od středu jen pozvolna.

Nepravidelnosti reprezentují riziko. Pokud se shluk bodů line jedním směrem, znamená to, že tímto směrem je šance na velké hodnoty \mathbf{Z} . Pokud je hustota \mathbf{Z} rozprostřena okolo současné pozice (hodnoty) portfolia, tak velké hodnoty \mathbf{Z} znamenají výraznou odchylku od nynější hodnoty a tím pádem značné riziko, že budoucí hodnota portfolia klesne. V nových souřadnicích bude riziko skryto ve velkých hodnotách Y . Konvergenci extrémních vektorů tudíž budeme vyšetřovat ve vertikálním směru.

Zajímají nás horizontální poloprostory

$$H^t = \{y \geq t\} = \mathbb{R}^h \times [t, \infty)$$

a asymptotické chování podmíněného vektoru \mathbf{Z} za podmínky, že \mathbf{Z} leží v H^t :

$$\mathbf{Z}^{H^t} = \mathbf{Z}^t = \mathbf{Z} | \mathbf{Z} \in H^t \text{ pro } t \rightarrow t_\infty.$$

Nechť existují afinní transformace γ^t :

$$(\gamma^t)^{-1}(\mathbf{Z}^t) \xrightarrow{d} \mathbf{W}, P(Y \geq t) \rightarrow 0_+,$$

kde $\mathbf{W} = (\mathbf{U}, V)' \in \mathbb{R}^h \times \mathbb{R}$ je nedegenerovaný limitní rizikový vektor, který žije na základním horizontálním poloprostoru $J_0 = \{v \geq j_0\}$. To je například H_+ . Normalizace γ^t zobrazují J_0 na H^t , horizontální poloprostory na horizontální poloprostory.

Jelikož uvažujeme divergenci poloprostorů jen v jednom směru, může mít rozdělení \mathbf{Z} volnější strukturu. Na druhou stranu limitní rizikové rozdělení nebudou mít tak jednoduchou strukturu jako v předchozí kapitole a bude jich mnohem více. Pojem limitního rizikového rozdělení zobecníme na přesahovou míru (anglicky „excess measure“). Začneme s definicí afinních transformací.

Definice 5.1. *Afinní transformace γ^t dané maticí $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & A & q \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$;*

$$\gamma(\mathbf{x}, y) = (p + A\mathbf{x} + qy, ay + b) \in \mathbb{R}^d,$$

tvorí grupu \mathcal{A}^h afinních transformací zobrazujících horizontální poloprostory na horizontální poloprostory. Vertikální složku tvoří pozitivní afinní transformace

$$\tilde{\gamma}(y) = ay + b, \quad a > 0, \quad b \in \mathbb{R},$$

z grupy pozitivních afinních transformací \mathcal{A}^+ .

Definice 5.2. Radonova míra ρ na \mathbb{R}^d (viz 2.1) je přesahová míra, právě když splňuje

$$\gamma^t(\rho) = e^t \rho, \quad t \in \mathbb{R}; \quad \gamma \in \mathcal{A}^h, \quad (5.1)$$

a existuje základní poloprostor J_0 takový, že $\rho(J_0) = 1$.

Zatímco v minulé kapitole jsme pro Radonovy míry rozšiřující limitní rozdělení hledali transformace ze symetrické grupy takové, že $\gamma(\rho) = c_\gamma \rho$, nyní se omezujeme na konkrétní tvar konstant c_γ : $c_\gamma = e^t$.

Pro množinu $A \subset \mathbb{R}^d$ má identita (5.1) tvar:

$$\gamma^t(\rho)(A) = \rho((\gamma^t)^{-1}(A)) = e^t \rho(A).$$

Má-li přesahová míra hustotu g , pak má (5.1) dle věty o transformaci náhodného vektoru 4.22 pro hustoty tvar:

$$g((\gamma^t)^{-1}(\mathbf{w})) / |\det A|^t = e^t g(\mathbf{w}), \quad \mathbf{w} \in J_0,$$

kde $\gamma^t(\mathbf{w}) = A^t \mathbf{w} + b(t)$.

Rovnost (5.1) znamená, že míra ρ klesá ve vertikální složce jako e^{-t} . Tím, jak se dostáváme ke vzdálenějším podmnožinám J_0 (na vzdálenější poloprostory H^t), je míra množin e^t menší. Pro představu je asi místo (5.1) výhodnější zápis:

$$(\gamma^t)^{-1}(\rho) = e^{-t} \rho, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.2)$$

$$(\gamma^t)^{-1}(\rho)(A) = \rho((\gamma^t)(A)) = e^{-t} \rho(A), \quad A \subset \mathbb{R}^d.$$

Je proto důležité, aby H^t byly podmnožiny základního poloprostoru J_0 a afinní transformace zobrazovaly horizontální poloprostory na horizontální poloprostory. Rovnost (5.1) je tedy podmínkou stability. Transformace γ^t tvoří symetrickou grupu míry ρ , neboť je ρ stabilní vůči γ^t v tom smyslu, že se při transformaci mění jen o e^t .

Tvar ρ je na všech poloprostorech $H^t \subset J_0$ stejný. Míra ρ je jen zmenšená o konstantu. Míra H^t je e^t menší než míra J_0 . Vzdálenější poloprostory mají menší a menší pravděpodobnost, že $\mathbf{Z} \in H^t$, přičemž volíme $P(\mathbf{Z} \in H^t) = e^{-t}$. Tato volba je výhodná a vede k dobrým výsledkům.

Vertikální složka $\tilde{\rho}$ míry ρ má symetrickou grupu, kterou tvoří pozitivní afinní transformace $\tilde{\gamma}^t$ z \mathcal{A}^+ . Platí-li

$$(\gamma^t)^{-1}(\mathbf{Z}^t) \xrightarrow{d} \mathbf{W}$$

a $\mathbf{Z} = (\mathbf{X}, Y)'$, $\mathbf{W} = (\mathbf{U}, V)'$ na H_+ s $\gamma^t(H_+) = H^t$, pak

$$(\tilde{\gamma}^t)^{-1}(Y^{[t, \infty)}) \xrightarrow{d} V, \quad (5.3)$$

kde V má GPD na $[0, \infty)$. Vertikální složka $Y^{[t, \infty)}$ extrémního vektoru \mathbf{Z}^t konverguje v distribuci s vhodnými normalizacemi z \mathcal{A}^+ k zobecněnému Paretovu rozdělení na $[0, \infty)$.

Nyní můžeme definovat sféru přitažlivosti.

Definice 5.3. Vektor $\mathbf{Z} = (\mathbf{X}, Y)' \in \mathbb{R}^{h+1}$ s rozdělením π patří do sféry přitažlivosti limitního rizikového vektoru $\mathbf{W} = (\mathbf{U}, V)' \in \mathbb{R}^{h+1}$ s rozdělením π_w , právě když

- $(\gamma^t)^{-1}(\mathbf{Z}^t) \xrightarrow{d} \mathbf{W}$, $P(Y \geq t) \rightarrow 0_+$,
- normalizace γ^t zobrazují základní horizontální poloprostor $J_0 = \mathbb{R}^h \times [j_0, \infty)$ na H^t ,
- rozdělení π_w vektoru \mathbf{W} je nedegenerované.

Píšeme $\mathbf{Z} \in \mathcal{D}^h(\mathbf{W})$ nebo $\pi \in \mathcal{D}^h(\pi_w)$.

Díky 5.3 můžeme na Y použít jednorozměrnou teorii extrémních hodnot. Podobně jako v sekci 4.1 použijeme parametr τ ze zobecněného Paretova rozdělení veličiny V ke klasifikaci vícerozměrných limitních rozdělení. Vertikální složka $\tilde{\rho}$ přesahové míry ρ je přesahová míra, která rozšiřuje rozdělení V . Žije na intervalu, který je orbitou bodu j_0 při zobrazení $\tilde{\gamma}^t \in \mathcal{A}^+$:

$$(j_*, j^*) = \{\tilde{\gamma}^t(j_0) | t \in \mathbb{R}\}. \quad (5.4)$$

Je-li $\tilde{\gamma}$ translace $v \mapsto v + b$, pak (j_*, j^*) je celý prostor \mathbb{R} . Je-li transformace $\tilde{\gamma}$ expanze $v \mapsto a(v-c)+c$, $a > 1$, pak (j_*, j^*) je interval (c, ∞) . Je-li $\tilde{\gamma}$ kontrakce

$v \mapsto a(v - c) + c$, $0 < a < 1$, pak (j_*, j^*) je interval $(-\infty, c)$. Jednorozměrná míra $\tilde{\rho}$ také splňuje podmínku stability

$$\tilde{\gamma}^t(\tilde{\rho}) = e^t \tilde{\rho}.$$

Vezmeme-li základní interval $[j_0, \infty)$ takový, že je $\tilde{\rho}[j_0, \infty) = 1$, pak

$$\tilde{\rho}[\tilde{\gamma}^t(j_0), \infty) = e^{-t}.$$

V jednorozměrném světě existují jenom tři druhy přesahových měř:

$$\tilde{\rho}[v, \infty) = \begin{cases} e^{-v} & , v \in \mathbb{R}; \\ v^{-1/|\tau|} & , v > 0; \\ |v|^{1/|\tau|} & , v < 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Každá tato přesahová míra je zároveň střední mírou Poissonova bodového procesu \tilde{N} , který je limitním procesem normalizovaného výběru z rozdělení vertikální souřadnice.

Nyní přejdeme k dvěma důležitým větám: větě o rozšíření a větě o reprezentaci. Začneme definicí měnivosti.

Definice 5.4. *Nechť $\beta(t)$ a γ jsou afinní transformace z \mathcal{A}^h , $t \in [0, \infty)$. Pak $\beta(t)$ se mění jako γ^t , právě když*

$$\beta(s_n)^{-1} \beta(s_n + t_n) \rightarrow \gamma^t, \quad s_n \rightarrow \infty, \quad t_n \rightarrow t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Jiná interpretace měnivosti říká, že $\beta(t)$ se mění pravidelně v nekonečnu s indexem C , kde C je generátor grupy γ^t afinních transformací pro horizontální přesahy. Použití vícerozměrné pravidelné měnivosti v nekonečnu je výhodné, protože pro funkce obecně udává podmínky na chování jejich chvostů. Přitom tyto podmínky nejsou omezující. Bez pravidelné měnivosti bychom museli pro každou funkci stanovit podmínky na chování jejího pravého konce zvlášť.

Věta o rozšíření říká, že pro rozdělení $\pi \in \mathcal{D}^h(\pi_w)$ náhodného vektoru \mathbf{Z} s normalizacemi γ^t konvergují míry

$$\rho_t = \frac{(\gamma^t)^{-1}(\pi)}{\pi(H^t)} \quad (5.6)$$

slabě k přesahové míře ρ , která rozšiřuje limitní rizikové rozdělení π_w , na všech poloprostorech $\mathbb{R} \times [v, \infty)$, kde je ρ konečná. Míry ρ_t jsou vlastně pravděpodobnostní míry podmíněného vektoru Z^t normalizované na prostor J_0 . Pro množinu $A \subset J_0$ totiž platí ($\gamma^t : J_0 \mapsto H^t$):

$$\rho_t(A) = \frac{(\gamma^t)^{-1}(\pi)(A)}{\pi(H^t)} = \frac{\pi(\gamma^t(A))}{\pi(H^t)} = \frac{P(\mathbf{Z} \in \gamma^t(A))}{P(\mathbf{Z} \in H^t)},$$

$$\rho_t(J_0) = \frac{(\gamma^t)^{-1}(\pi)(J_0)}{\pi(H^t)} = 1.$$

Protože předpokládáme (5.1), respektive (5.2) a $\rho(J_0) = 1$, je míra prostoru H^t rovna e^{-t} :

$$\rho(H^t) = \rho(\gamma^t(J_0)) = (\gamma^t)^{-1}(\rho)(J_0) = e^{-t}\rho(J_0) = e^{-t}.$$

Proto v následující větě v limitním vztahu násobíme normalizované rozdělení vektoru \mathbf{Z} číslem e^t , respektive $1/e^{-t}$.

Věta 5.5. (Věta o rozšíření)

Nechť $\pi \in \mathcal{D}^h(\pi_w)$, přesahová míra ρ rozšiřuje limitní rozdělení π_w a splňuje $\gamma^t(\rho) = e^t\rho$ pro afinní transformace $\gamma^t \in \mathcal{A}^h$, $t \in \mathbb{R}$. Pak existuje spojitě zobrazení $\beta : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{A}^h$, které se mění jako γ^t , takové, že

$$e^t\beta(t)^{-1}(\pi) \rightarrow \rho \text{ slabě na } \mathbb{R} \times [v, \infty), t \rightarrow \infty, v > j_*,$$

kde (j_*, j^*) (orbita bodu j_0 viz (5.4)) je nosič vertikální složky $\tilde{\rho}$ přesahové míry ρ .

Důležitost této věty spočívá v tom, že zobrazení $\beta(t)$ je spojitě. Horizontální poloprostory H^t můžeme spojitě posunovat po vertikální ose. Nestane se, že by byl v zobrazení $\beta(t) : J_0 \mapsto H^t$ skok. Každému t při projekci na vertikální osu odpovídá právě jedno v . Zobrazení z $[0, \infty)$ na $[j_0, v_\infty)$

$$t \mapsto v(t) = \beta(t)(j_0), t \geq 0,$$

je vzájemně jednoznačné a $v(0) = \beta(0)(j_0) = j_0$. Slabá konvergence znamená konvergenci v distribuci. Protože tato konvergence platí na všech poloprostorech $\mathbb{R}^h \times [v, \infty)$, můžeme za v vybrat bod j_0 a dostaneme tak konvergenci na základním poloprostoru J_0 .

Věta 5.6 o reprezentaci říká, že přesahové míry mají součinovou strukturu. Definujme zobrazení Φ :

$$\Phi : (\mathbf{u}, t) \mapsto \gamma^t(\mathbf{u}, j_0), \quad \Phi : \mathbb{R}^{h+1} \mapsto \mathbb{R}^h \times (j_*, j^*),$$

kde $(j_*, j^*) = \{\tilde{\gamma}^t(j_0) | t \in \mathbb{R}\}$ je orbita bodu j_0 a základní poloprostor má tvar $J_0 = \mathbb{R}^h \times [j_0, \infty)$. Zobrazení Φ je vzájemně jednoznačné. Horizontálnímu bodu $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^h$ a číslu t přiřadí obraz bodu \mathbf{u} při afinní transformaci γ^t . Vertikální bod je jen obrazem základního bodu j_0 při dané transformaci. Přesahová míra je tedy transformací součinové míry

$$\rho^* \times T, \quad \rho = \Phi(\rho^* \times T),$$

kde T má standardní exponenciální rozdělení $T(dt) = e^{-t} dt$ a ρ^* je míra horizontální složky, když $v(0) = j_0$. Míra ρ^* na prostoru \mathbb{R}^h se nazývá *spektrální míra*.

Pro přesahovou míru ρ platí:

$$\rho = \Phi(\rho^*, T) = \gamma^T(\rho^*, j_0).$$

Přesahová míra vypadá tak, že ve vertikální složce klesá exponenciálně a rozdělení horizontální složky je pro každé $v(t) = \tilde{\gamma}^t(j_0)$ transformací základní spektrální míry. Vertikální složka je rozdělena exponenciálně, protože předpokládáme (5.1).

Věta 5.6. (Věta o reprezentaci)

Nechť $\mathbf{W} = (\mathbf{U}, V)$ je limitní rizikový vektor s rozdělením π_w . Přesahová míra ρ rozšiřuje π_w a platí pro ni $\gamma^t(\rho) = e^t \rho$, kde γ^t jsou afinní transformace z grupy \mathcal{A}^h . Pak existuje náhodný vektor $\mathbf{U}^ \in \mathbb{R}^h$ a nezávislá náhodná veličina T se standardním exponenciálním rozdělením tak, že \mathbf{W} je rozdělený jako $\gamma^T(\mathbf{U}^*, 0)$.*

Náhodný vektor \mathbf{U}^* odpovídá spektrální míře ρ^* . Za podmínky $V = v(t)$ je vektor $(\mathbf{U}, v(t))'$ rozdělen jako $\gamma^t(\mathbf{U}^*, j_0)$. Přitom podmíněné rozdělení závisí na v spojitě. Všechny tyto podmíněné rozdělení jsou tedy stejného tvaru: jedno na druhé lze převést pomocí afinní transformace.

5.2 Přesahové míry

Tato sekce shrnuje vlastnosti přesahových měř pro horizontální přesahy.

Základní předpoklad je, aby přesahová míra splňovala $\gamma^t(\rho) = e^t \rho$, kde grupa afinních transformací $\gamma^t = e^{tC}$ patří do \mathcal{A}^h . Stejná rovnost pak platí i pro vertikální složku $\tilde{\rho}$: $\tilde{\gamma}^t(\tilde{\rho}) = e^t \tilde{\rho}$, kde $\tilde{\gamma}^t$ jsou pozitivní afinní transformace. Ty mají jen dva tvary:

- expanze či kontrakce $v \mapsto e^{\tau t}$, když $\tau > 0$ nebo $\tau < 0$,
- translace $v \mapsto v + t$, když $\tau = 0$.

Parametr τ je parametr jednorozměrného GPD. Když je $\tau = 0$, tak potřebnou exponenciálu v rovnosti $\tilde{\gamma}^t(\tilde{\rho}) = e^t \tilde{\rho}$ dodá GPD, jelikož má hustotu e^{-v} . Je-li $\tau \neq 0$, neobsahuje hustota GPD exponenciálu, a proto ji musí dodat normalizace $\tilde{\gamma}^t$.

Generátor a matice grupy γ^t mají tvar:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_0 & C^* & q_0 \\ b_0 & 0 & \tau \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p(t) & A^t & q(t) \\ b(t) & 0 & a^t \end{pmatrix}, A^t = e^{tC^*}, a^t = e^{\tau t}.$$

Trojice (C, ρ^*, j_0) určuje přesahovou míru ρ :

- generátor C určuje tvar afinních transformací γ^t tak, aby splňovaly $\gamma^t(\rho) = e^t \rho$,
- spektrální míra ρ^* určuje podmíněné rozdělení horizontální složky \mathbf{U} na hladině $v(t)$, vertikální složka V má exponenciální rozdělení,
- bod j_0 určuje na vertikální ose začátek základního poloprostoru J_0 , orbitu prostoru, na kterém je definována $\tilde{\rho}$, a $v(t) = \tilde{\gamma}^t(j_0)$.

Je vhodné volit j_0 v závislosti na znaménku τ tak, že $j_0 = \text{sign}(\tau) \in \{-1, 0, 1\}$. Interval (j_*, j^*) je pak buď jedna z polopřímek $(0, \infty)$, $(-\infty, 0)$, nebo celá reálná přímka \mathbb{R} .

Z věty 5.6 o reprezentaci má horizontální část \mathbf{U} za podmínky $V = v(t)$ rozdělení jako $A^t \mathbf{U}^* + m(t)$, kde \mathbf{U}^* je náhodný vektor odpovídající přesahové míře ρ^* a $m(t) = p(t) + v(0)q(t) \in \mathbb{R}^h$. Parametr t je určen z

$$P(T > t) = P(V > v(t)),$$

T má exponenciální rozdělení.

Jak uvidíme v příkladech níže, má-li \mathbf{U}^* normální rozdělení, pak všechny tyto podmíněné rozdělení mají normální rozdělení. Má-li \mathbf{U}^* rovnoměrné rozdělení na jednotkové kouli v \mathbb{R}^h , pak všechny tyto podmíněné rozdělení mají rovnoměrné rozdělení na elipsoidu se středem v $m(t)$. Má-li \mathbf{U}^* rovnoměrné rozdělení na jednotkové krychli $(-1, 1)^h$, pak všechny tyto podmíněné rozdělení mají rovnoměrné rozdělení na parallelpipedu se středem v $m(t)$. Afinní rozdělení vezmou původní rozdělení \mathbf{U}^* , posunou ho a otočí, roztáhnou, zmenší, ... Proto například z jednotkové koule vzniknou elipsoidy: dostaneme je nestejným roztažením koule do různých směrů.

5.3 Přesahové míry v \mathbb{R}^2

V této sekci vypočteme konkrétní tvary limitních rizikových rozdělení, respektive přesahových měr. Budeme předpokládat, že spektrální míra má hustotu.

Příklad 5.7. Necht $\mathbf{W} = (U, V)' \in \mathbb{R}^2$ je limitní rizikový vektor, $\tau = 0$ a vertikální složka V má tedy standardní exponenciální rozdělení. Pozitivní afinní transformace $\tilde{\gamma}^t$ je pak proto translace $v \mapsto v + t$. Generátor C je daný maticí:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
. První řádek odpovídá virtuální souřadnici, druhý horizontální souřadnici u a třetí vertikální souřadnici v . Grupa afinních transformací $\gamma^t = e^{tC}$ má matici:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t^2/2 & 1 & t \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
. Matice $A^t = 1$, vektory $p(t) = t^2/2$ a $q(t) = t$. Dále $b(t) = t$ a $a^t = 1$.

Předpokládejme, že náhodná veličina U^* odpovídající spektrální míře ρ^* je rovnoměrně rozdělena na intervalu $(-1, 1)$ a má hustotu f_0 . Jelikož je $\tau = 0$, vezmeme za základní poloprostor $J_0 = H_+$. Základní bod vertikální složky je potom $j_0 = 0$. Jelikož $v(t) = \tilde{\gamma}^t(j_0)$ a $\tilde{\gamma}^t$ je posunutí, je $v(0) = \tilde{\gamma}^0(0) = 0$. To zcela odpovídá tomu, že rozdělení U horizontální složky je na začátku základního poloprostoru J_0 (na hladině $v = j_0$) rovno spektrálnímu rozdělení (v našem případě rovnoměrné rozdělení na

$(-1, 1)$). Na dalších hladinách, jak postupujeme po vertikální ose nahoru, je U transformací U^* ($U = \tilde{\gamma}^t(U^*)$), kde $\tilde{\gamma}$ je část afinní transformace působící na U). Napišme rovnici $\gamma^t(u(0), v(0)) = (u(t), v(t))$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t^2/2 & 1 & t \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t^2/2 + u \\ t \end{pmatrix}.$$

Vertikální složka je tedy $v(t) = t$. To také vyplývá z rovnosti

$$P(T > t) = P(V > v(t)),$$

$$e^{-t} = e^{-v(t)}.$$

Podmíněná náhodná veličina U_t reprezentující horizontální složku za podmínky $V = v(t)$ má tedy rozdělení

$$U_t = t^2/2 + U^*.$$

Dle věty o transformaci náhodné veličiny 4.22 dostaneme spolu s $|\det A^t| = 1$ její hustotu: $f_0(u - t^2/2)$.

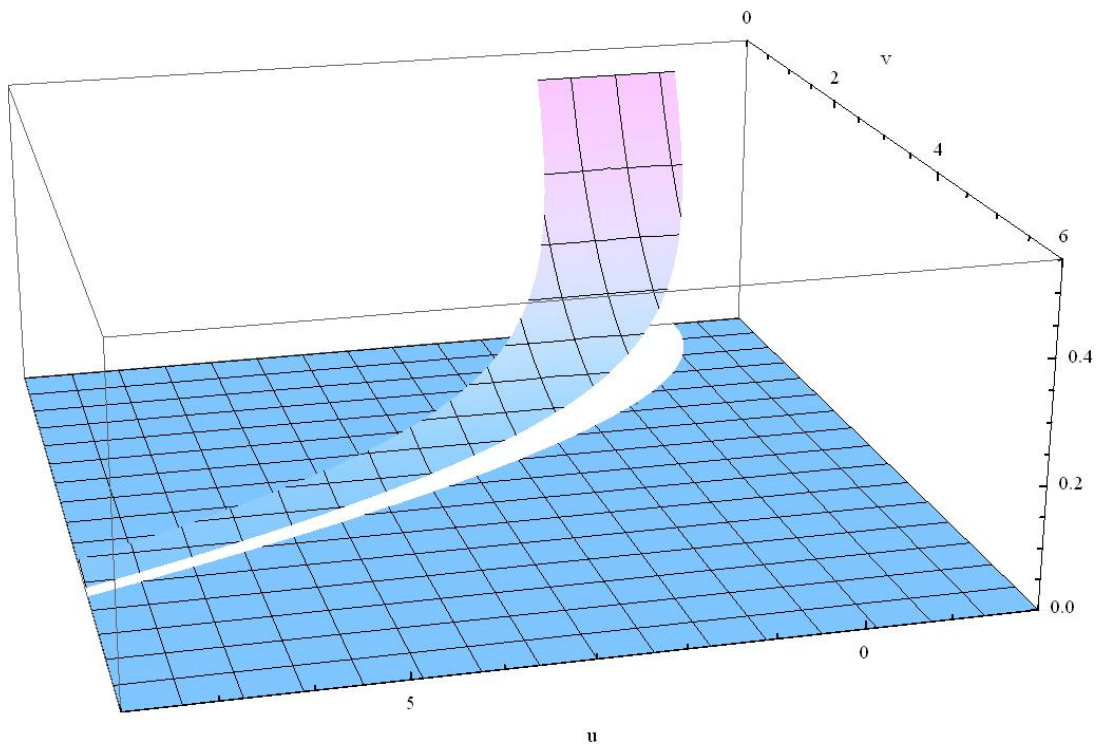
Limitní rizikový vektoru \mathbf{W} má hustotu

$$g(u, v) = e^{-v} f_0(u - v^2/2), \quad v > 0.$$

To je také hustota přesahové míry rozšiřující rozdělení \mathbf{W} , ale tentokrát pro $v \in \mathbb{R}$. Hustota $g(u, v)$ pro $v > 0$ je zobrazena na obrázku 5.1 níže. Můžeme si všimnout, že počáteční interval $(-1, 1)$ se s klesající výškou postupně zužuje a otáčí.

□

Příklad 5.8. Narozdíl od minulého příkladu budeme nyní uvažovat případ $\tau = 3/4 > 0$. Afinní transformace vertikální složky proto budou expanze $\gamma^t(v) = e^{\tau t}v$, $v(0) = j_0 = 1$. Základní poloprostor je $J_0 = \mathbb{R}^h \times [1, \infty)$. Matice generátoru C je: $\begin{pmatrix} \tau & 1 \\ 0 & \tau \end{pmatrix}$. Matice má jen dva řádky, protože uvažujeme linerární transformaci bez posunutí. Jde o zkosení. První řádek odpovídá horizontální souřadnici u a druhý vertikální souřadnici v . Grupa $\gamma^t = e^{tC}$ má pak matici: $\begin{pmatrix} e^{\tau t} & te^{\tau t} \\ 0 & e^{\tau t} \end{pmatrix}$. Matice $A^t = e^{\tau t}$, vektory $p(t)$ a $b(t)$ (viz minulá sekce) v matici nejsou, protože posunutí chybí, $q(t) = te^{\tau t}$ a $a^t = e^{\tau t}$.



Obrázek 5.1: Hustota $g(u, v)$ limitního rizikového vektoru \mathbf{W} z příkladu 5.7

Nechť rozdělení náhodné veličiny U^* je standardní normální s hustotou f_0 . Jelikož rozdělení U_t , veličiny $U|V = v(t)$, vznikne afinní transformací U^* , bude pro všechny t rovněž normální. Při $\tau > 0$ se zobecněné Paretovo limitní rozdělení V rovná Paretovu rozdělení s hustotou:

$$g(v) = \frac{\lambda}{v^{\lambda+1}}.$$

Jak γ^t transformují základní rozdělení $(U^*, 0)$ opět odvodíme z rovnice $\gamma^t(u(0), v(0)) = (u(t), v(t))$:

$$\begin{pmatrix} e^{\tau t} & te^{\tau t} \\ 0 & e^{\tau t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\tau t}u + te^{\tau t} \\ e^{\tau t} \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že $u(t) = e^{\tau t}u + te^{\tau t}$ a $v(t) = e^{\tau t}$. Z následujících rovností zjistíme hodnotu parametru λ Paretova rozdělení.

$$P(T > t) = P(V > v(t)),$$

$$e^{-t} = 1/(e^{\tau t})^\lambda$$

Parametr λ je tedy: $\lambda = 1/\tau > 0$. Z věty o transformaci náhodné veličiny 4.22 vyplývá spolu s $|\det A^t| = e^{\tau t} = v$, že $U_t = (e^{\tau t}U^* + te^{\tau t})$ má hustotu $f_0((u-t)/e^{\tau t})$, střední hodnotu $te^{\tau t}$ a rozptyl $e^{2\tau t}$. Hustota limitního rizikového vektoru \mathbf{W} je pak:

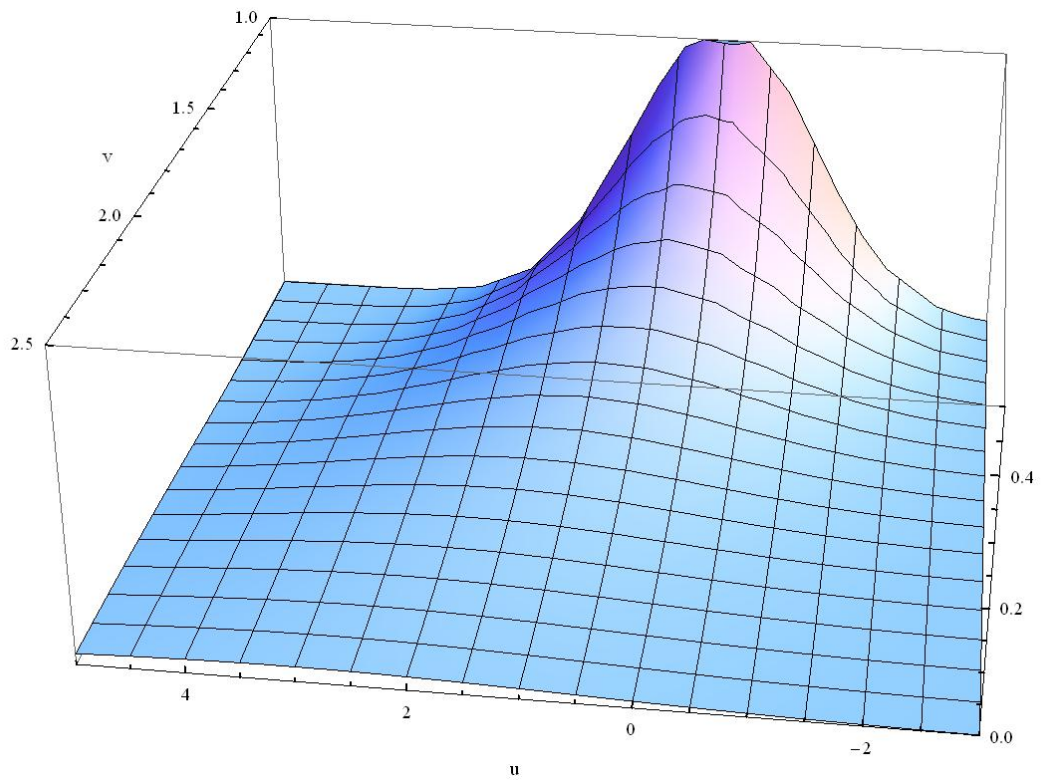
$$g(u, v) = \frac{1/\tau}{v^{1/\tau+1}} f_0\left(\frac{u - \log v/\tau}{v}\right) \frac{1}{v}, \quad t = \frac{1}{\tau} \log v, \quad v \geq 1.$$

Hustota $g(u, v)$ je rovněž hustota přesahové míry ρ , ale tentokrát pro $v > 0$. Hustota $g(u, v)$ pro $v \geq 1$ je zobrazena na obrázku 5.2. Pomocné černé čáry na grafu ukazují, že pro každé v má horizontální složka normální hustotu.

□

Přesahové míry určuje trojice (C, ρ^*, j_0) . Nejdříve se podívejme, jak vypadají generátory C . Pokud $\tau = 0$ a $\tilde{\gamma}$ jsou tím pádem translace jako v příkladu 5.7, existují dva druhy matice generátoru C v Jordanově tvaru, $\mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$



Obrázek 5.2: Hustota $g(u, v)$ limitního rizikového vektoru \mathbf{W} z příkladu 5.8

První řádek odpovídá virtuální souřadnici, druhý pak vertikální a třetí horizontální.

Pokud $\tau > 0$ (respektive $\tau < 0$) a $\tilde{\gamma}$ jsou potom expanze (respektive kontrakce) jako v příkladu 5.8, existují tři druhy matice generátoru C v Jordanově tvaru. Jeden s translací a dva lineární:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}.$$

U první matice odpovídá první řádek opět virtuální souřadnici, druhý vertikální a třetí horizontální. U zbylých dvou matic je první řádek vertikální souřadnice a druhý horizontální.

Každý z těchto generátorů určuje přesahovou míru. Když vezmeme v úvahu znaménko μ ($\mu > 0$, $\mu < 0$) a speciální případ $\mu = 0$, určují první dvě matice spíše celkem $4 = 1 + 3$ než 2 kvalitativně rozdílné přesahové míry. U dalších tří matic je situace obdobná. V závislosti na znaménku $\mu - \tau$ (> 0 , < 0) a se speciálním případem $\mu = \tau$, určují poslední tři matice celkem $7 = 1 + 3 + 3$ přesahových měr. To je pro $\tau > 0$. Pro $\tau < 0$ je to symetricky dalších 7 přesahových měr. Dohromady máme 18 různých přesahových měr.

Bod j_0 je pevně daný. Je buď 1, -1 nebo 0 v závislosti na znaménku τ . Žádné další přesahové míry tedy neurčuje. Narozdíl od spektrální míry ρ^* . Podle toho, jaké má rozdělení, vznikají další přesahové míry.

Vidíme, že přesahových měr pro horizontální přesahy existuje již ve dvourozměrném prostoru mnoho. S rostoucím počtem rozměrů se jejich počet nadále zvyšuje. To je velký rozdíl oproti kapitole 3, kde jsme měli jen tři druhy limitních rizikových rozdělení.

Pro trojrozměrný prostor \mathbb{R}^3 lze najít generátory přesahových měr v sekci 14.9 knihy Balkema [3]. Jak píší autoři, ve třech rozměrech už existuje jenom v závislosti na generátorech C 103 kvalitativně různých přesahových měr. Ty se dále dělí podle toho, jaké rozdělení má spektrální míra.

5.4 Sféry přitažlivosti

O sférách přitažlivosti pro přesahy přes horizontální prahy toho pro mnoho symetrických grup γ^t není moc známého. Čím složitější γ^t je, tím více podmínek a omezení musíme klást na vektor \mathbf{Z} , aby $\mathbf{Z} \in \mathcal{D}^h(\mathbf{W})$. To samé platí pro spektrální míru ρ^* .

Je dobré začít s jednoduchými afinními transformacemi a jednoduchým spektrálním rozdělením. Afinní transformace můžou být například čisté translace $(\mathbf{u}, v) \mapsto (\mathbf{u}, v + t)$. Za rozdělení spektrálního vektoru U^* můžeme vzít normální rozdělení nebo rovnoměrné rozdělení na jednotkové kouli. To nám dohromady určí tvar přesahové míry, která rozšiřuje rozdělení limitního rizikového vektoru.

Limitní rizikový vektor \mathbf{W} má hustotu ve tvaru

$$g(\mathbf{u}, v) = g_v(\mathbf{u})\tilde{g}(v),$$

kde \tilde{g} je hustota jednorozměrného GPD a $g_v(\mathbf{u})$ je hustota podmíněného vektoru $\mathbf{U}|V = v$. Proto, když chceme zkonstruovat vektor \mathbf{Z} s hustotou f , aby $\mathbf{Z} \in \mathcal{D}^h(\mathbf{W})$, je přirozené uvažovat f ve tvaru

$$f(\mathbf{x}, y) = f_y(\mathbf{x})\tilde{f}(y),$$

kde všechny $f_y(\mathbf{x})$ jsou stejného typu. Hustota $\tilde{f}(y)$ musí patřit do sféry přitažlivosti jednorozměrného GPD.

Více o sférách přitažlivosti lze najít v kapitole 15 knihy Balkema [3]. Autoři se zde omezují na tři základní symetrické grupy: čisté translace (viz výše), skalární kontrakce $(\mathbf{u}, v) \mapsto e^{\tau t}(\mathbf{u}, v)$, kde $\tau < 0$, a skalární expanze $(\mathbf{u}, v) \mapsto e^{\tau t}(\mathbf{u}, v)$, kde $\tau > 0$. Jako spektrální rozdělení pak berou normální nebo rovnoměrné rozdělení. Pro translace patří do sféry přitažlivosti náhodné vektory s lehkými chvosty, pro kontrakce vektory s omezeným nosičem a pro expanze vektory s těžkými chvosty.

Kapitola 6

Přesahy přes eliptické prahy

Narozdíl od minulých kapitol nebudeme v této považovat za extrémní ty pozorování, které leží ve vzdáleném poloprostoru, ale ty, které leží mimo oblast ohraničenou elipsou. Použité věty a definice jsou převzaty z kapitoly 16 knihy Balkema [3].

Až do teď jsme vyšetřovali přesahy přes lineární prahy - poloprostory. V kapitole 4 se jsme pracovali s rozděleními, jejichž úroňové množiny byly konvexní. Oblast rizika, kde se nacházejí extrémní hodnoty, byla dána vzdálenými poloprostory. Díky konvexitě bylo jedno v jaké směru se pohybujeme, limitní rozdělení bylo pro všechny směry stejné. V kapitole 5 jsme naopak vyšetřovali podobu limitních rozdělení jen pro jeden směr. Pracovali jsme s rozděleními, jejichž úroňové množiny nejsou konvexní. Riziko a extrémní hodnoty se pak nachází v jednom směru. Vždy jsme nejprve transformovali soustavu souřadnic, aby byl tento směr horizontální. V této kapitole lineární přesahy opustíme a budeme pracovat s elipsoidy. Oblast, kde se nachází riziko, bude doplněk elipsy v prostoru \mathbb{R}^d . Nezáleží tedy na směru. Vezměme otevřený jednotkový kruh $B \in \mathbb{R}^d$. Extrémní hodnoty budou takové body, že když budeme nafukovat kruh B , tak tyto body budou stále v jeho doplňku.

Tato teorie je vhodná pro rozdělení s těžkými chvosty.

Nechť γ^n jsou lineární expanze a $E_n = \gamma^n(B)$ jsou elipsoidy. Lineární expanze vezmou jednotkovou kouli a s rostoucím n ji nafukují. Rychlost

nafukování nemusí být ve všech směrech stejná. Proto z koule vzniknou elipsoidy. Zajímá nás rozdělení náhodného vektoru $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^d$ za podmínky, že $\mathbf{Z} \in E_n^c$.

Podmínka stability má tento tvar:

Pro okolí počátku soustavy souřadnic B a lineární expanzi γ je rozdělení náhodného vektoru \mathbf{Z} za podmínky $\mathbf{Z} \in B^c$ a rozdělení náhodného vektoru \mathbf{Z} za podmínky $\mathbf{Z} \in \gamma(B)^c$ asymptoticky stejného tvaru či typu.

Podmínka stability říká, že extrémní vektory, které žijí na vzdáleném okolí nuly, můžeme pomocí lineárních transformací posunout zpět na základní okolí nuly. Na tomto základním okolí je můžeme porovnat a zjistit k jakému limitnímu rozdělení konvergují. Zajímá nás tedy konvergence v distribuci:

$$\mathbf{W}_n = (\gamma^n)^{-1}(\mathbf{Z}^{E_n^c}) \xrightarrow{d} \mathbf{W} \text{ na } B^c, n \rightarrow \infty,$$

kde $\mathbf{Z}^{E_n^c} = \mathbf{Z} | \mathbf{Z} \in E_n^c$.

Nechť máme náhodný výběr $\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_n$ z rozdělení π s těžkými chvosty. Předpokládejme, že

$$\rho_t = e^t \beta(t)^{-1}(\pi) \rightarrow \rho \text{ slabě na } (\epsilon B)^c, t \rightarrow \infty, \epsilon > 0, \quad (6.1)$$

kde ρ je Radonova míra na $\mathbb{R}^d / \{0\}$, která je kladná a konečná na všech komplementech jednotkové koule B . Pomocí ϵ můžeme z ϵB udělat libovolně malé okolí nuly. Proto je ρ definována na $\mathbb{R}^d / \{0\}$. Normalizace $\beta(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{A}(d)$ jsou spojitě a mění se jako γ^t :

$$\beta^{-1}(s_n) \beta(s_n + t_n) \rightarrow \gamma^t, s_n \rightarrow \infty, t_n \rightarrow t \in \mathbb{R}. \quad (6.2)$$

Normalizace γ^t jsou lineární expanze, viz následující definice.

Definice 6.1. *Grupa γ^t , $t \in \mathbb{R}$, je grupa lineárních expanzí, jestliže jsou transformace γ^t lineární a všechny vlastní čísla matice těchto transformací leží v komplexní rovině mimo jednotkový kruh.*

Nepotřebujeme již afinní transformace, stačí nám lineární. Je to proto, že elipsoidy nemusíme posouvat, jen zvětšovat. Podmínka na vlastní čísla zaručuje, že při transformaci dojde ke zvětšení množin.

Nyní definujme přesahovou míru pro expanze.

Definice 6.2. Přesahová míra pro expanze je nenulová Radonova míra ρ na $\mathbb{R}^d/\{0\}$, která splňuje $\gamma^t(\rho) = e^t\rho$ pro grupu expanzí γ^t , $t \in \mathbb{R}$.

Přesahová míra ρ pro expanze je konečná na B^c (a tedy i na $(\epsilon B)^c$, $\epsilon > 0$) a splňuje tedy (6.1). Označme $R_0 = \gamma(B)/B$ a $R_n = \gamma^n(R_0)$. Množiny R_n , $n = 0, 1, \dots$, jsou prstence, které na sebe navazují a vyplňují celý prostor \mathbb{R}^d/B . Protože Radonova míra je konečná na kompaktních množinách, je $\rho(R_0) = o$ konečná. Protože platí $\gamma^n(\rho) = e^n\rho$, tak $\rho(R_n) = o/e^n$ a celkově máme

$$\rho(B^c) = o + o/e + o/e^2 + \dots < \infty.$$

Výraz (6.1) je podobný tomu z věty 5.5. Míry $\rho_t = \frac{\beta^{-1}(t)(\pi)}{\pi(E_t^c)}$ jsou pravděpodobnostní míry na komplementu jednotkové koule. Předpokládáme, že $P(\mathbf{Z} \in E_t^c) = \pi(E_t^c) = e^{-t}$. Elipsoidy zvětšujeme tak, že pravděpodobnost, že do nich vektor \mathbf{Z} patří, exponenciálně klesá. Výhoda $\beta(t)$ spočítá v tom, že je toto zobrazení spojitě. Normalizace γ^n určené počtem pozorování jsou definované pro přirozená čísla. V zobrazení můžou vzniknout skoky. To u $\beta(t)$ nenastane. Přitom však existuje vztah mezi $\beta(t)$ a γ^n : $\beta(t)$ se mění jako γ^n .

Předpokládejme, že platí (6.1) a (6.2). Pak

$$\begin{aligned} \beta^{-1}(s_n)\beta(s_n + t_n)(\rho_{s_n+t_n}) &= \beta^{-1}(s_n)\beta(s_n + t_n)e^{s_n+t_n}\beta^{-1}(s_n + t_n)(\pi) = \\ &= e^{s_n+t_n}\beta^{-1}(s_n)(\pi) = e^{t_n}\rho_{s_n}. \end{aligned}$$

Když $n \rightarrow \infty$, tak z toho plyne, že

$$\gamma^t(\rho) = e^t\rho,$$

neboť z (6.2) jde $\beta^{-1}(s_n)\beta(s_n + t_n) \rightarrow \gamma^t$ a z (6.1) jde $\rho_{s_n} \rightarrow \rho$. Pro přesahovou míru platí stejná symetrie jako v kapitole 5. Teď to však není předpoklad, ale důsledek jiných předpokladů.

Nyní můžeme definovat sféru přitažlivosti pro přesahy přes eliptické prahy.

Definice 6.3. Necht má náhodný vektor $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^d$ rozdělení π a míra ρ je Radonova míra na $\mathbb{R}^d/\{0\}$, která je nedegenerovaná (nežije na nadrovině). Říkáme, že π a \mathbf{Z} patří do sféry přitažlivosti míry ρ , jestliže platí (6.1) a (6.2) (a tím pádem $\gamma^t(\rho) = e^t\rho$). Píšeme $\pi \in \mathcal{D}^\infty(\rho)$.

V jednorozměrném případě patří náhodná veličina do sféry přitažlivosti Fréchetova rozdělení (viz 1.1), jestliže se pravidelně mění v nekonečnu. Ve více rozměrech má pro míry podmínka pravidelné měnivosti následující podobu.

Definice 6.4. Konečná míra μ na \mathbb{R}^d se mění pravidelně, právě když existuje spojitá funkce $\beta : [0, \infty) \rightarrow GL(d)$ tak, že platí (6.2) a

$$e^t \beta(t)^{-1}(\mu) \rightarrow \rho \text{ vágně na } \mathbb{R}^d / \{0\}$$

pro Radonovu míru ρ , pro kterou $\rho(B^c) < \infty$. Míra μ se mění pravidelně v nekonečnu, když lze navíc každou omezenou množinu pokrýt elipsoidy $E_t = \beta(t)(B)$, kde B je otevřená jednotková koule.

Grupa $GL(d)$ je grupa invertibilních d -rozměrných matic. Protože předpokládáme (6.1), patří do sféry přitažlivosti $\mathcal{D}^\infty(\rho)$ právě ty rozdělení, které se v nekonečnu pravidelně mění. Je to analogie jednorozměrného případu.

Předpokládejme, že $cl(E_s) \subset E_t$ pro $0 \leq s < t$, kde $cl(\cdot)$ značí uzávěr množiny. Elipsoidy $E_t = \beta(t)(B)$ se zvětšují tak, že do každé větší vždy patří i uzávěr menší. Připomeňme, že předpokládáme, že E_t jsou otevřené. Pak můžeme zavést exponenciální polární souřadnice. Definujme vzájemně jednoznačné zobrazení Φ :

$$\Phi : (p, t) \mapsto \gamma^t(p), \quad \Phi : \partial B \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d / \{0\}.$$

Znak ∂ značí hranici množiny. Grupa expanzí γ^t pak odpovídá zobrazení

$$(p, s) \mapsto (p, s + t), \quad (p, s) \in \partial B \times \mathbb{R}.$$

To znamená, že na expanze se můžeme dívat tak, že vezmeme bod na hranici základní množiny B a posuneme ho dále od této hranice. Pokud to tak uděláme pro všechny body z této hranice, dostaneme novou hranici, která je větší než ta původní. Z toho plyne, že stejně jako v minulé kapitole, bude i nyní mít přesahová míra ρ součinovou strukturu. Tato struktura již ale nebude dána horizontální a vertikální souřadnicí, ale směrovou a radiální složkou. Přesahová míra ρ na $\mathbb{R}^d / \{0\}$ odpovídá součinové míře

$$d\rho^* \times e^{-t} dt \text{ na } \partial B \times \mathbb{R}.$$

Míra ρ^* na ∂B je spektrální míra míry ρ .

Rozdělení míry ρ si můžeme představit jako rozdělení spektrální míry na hranici jednotkového kruhu B , které postupně spojitě roztahujeme pomocí transformace γ^t a zaplníme tak celý prostor. Každý bod je jednoznačně dán směrem z hranice B a vzdáleností t . Pracujeme tedy s polárními souřadnicemi. Pro každou vzdálenost t je rozdělení na hranici $E_t = \gamma^t(B)$ transformací spektrálního rozdělení míry ρ^* . Přitom je toto hraniční rozdělení zmenšeno o e^t . S rostoucí vzdáleností míra množin klesá o e^t . To odpovídá tom, že platí $\gamma^t(\rho) = e^t\rho$. Podobně tomu bylo i v kapitole 5. Tam ovšem vzdálenost nahradila vertikální souřadnice a hranici B horizontální souřadnice.

K určení přesahové míry ρ (a tím pádem i limitního rizikového rozdělení) potřebujeme dvě věci: spektrální míru ρ^* a generátor C grupy lineárních expanzí.

Pokud by ρ měla hustotu g pak z věty o transformaci náhodného vektoru 4.22 platí:

$$g(\gamma^t(w)) = g_0(w)e^{-t}/(\det \gamma)^t, \quad w \in \partial B, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Funkce g_0 je spojitá nezáporná funkce na hranici B . Odpovídá spektrální míře. Transformovaná hustota je spektrální hustota zmenšená o e^t . S rostoucí vzdáleností od B , klesá hustota g exponenciálně.

Sféry přitažlivosti pro eliptické prahy jsou prozkoumány více než pro lineární přesahy. Sekce 16.3 knihy Balkema [3] se věnuje sférám přitažlivosti z obecnějšího hlediska. Je tam například dokázáno, že můžeme předpokládat, že normalizace $\beta(t)$ jsou lineární. Ve stejné knize jsou pak v kapitole 17 blíže popsány sféry přitažlivosti pro přesahové míry určené diagonálními symetriemi γ^t . Zajímavý výsledek například je, že když jsou lineární transformace γ^t skalární: $\gamma^t(\mathbf{w}) = e^{t/\lambda}\mathbf{w}$, $\lambda > 0$ je parametr, náhodný vektor $\mathbf{Z} \geq 0$ a jeho marginály mají tvar

$$1 - F_i(t) \sim c_i L(t)/t^\lambda, \quad t \rightarrow \infty, \quad c_i > 0, \quad i = 1, \dots, d,$$

pro nějakou pomalu se měnící funkci L (viz 1.3), pak $\mathbf{Z} \in \mathcal{D}^\infty(\rho)$, právě když \mathbf{Z} patří do sféry přitažlivosti souřadnicových extrémů.

Literatura

- [1] Abdous B., Fougères A.L., Ghoudi K., Soulier P.: *Estimation of bivariate excess probabilities for elliptical models*, Bernoulli, 14(4):1065-1088, 2008
- [2] Balkema G., Embrechts P.: *Multivariate excess distributions*, <http://www.math.ethz.ch/embrecht/papers.html>, 2004
- [3] Balkema G., Embrechts P.: *High risk scenarios and extremes. A geometric approach*, Zurich Lectures in Advanced Mathematics. Zürich: European Mathematical Society, 2007
- [4] Berman S. M.: *Sojourns and extremes of Fourier sums and series with random coefficients*, Stochastic Processes and their Applications, 15(3):213-238, 1983
- [5] Chavez-Demoulin V., Embrechts P.: *An EVT primer for credit risk*, <http://www.math.ethz.ch/embrecht/papers.html>, 2008
- [6] Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosch T.: *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer, 1997
- [7] Fougères A.L., Soulier P.: *Estimation of conditional laws given an extreme component*, <http://math.univ-lyon1.fr/fougeres/englishal.html>, 2010
- [8] Fougères A.L., Soulier P.: *Limit conditional distributions for bivariate vectors with polar representation*, <http://math.univ-lyon1.fr/fougeres/englishal.html>, 2008
- [9] Hashorva E.: *Gaussian approximation of conditional elliptic random vectors*, Stochastic Models, 22(3):441-457, 2006
- [10] Mikosch T.: *How to model multivariate extremes if one must?*, Statist. Neerlandica, 59:324-338, 2005