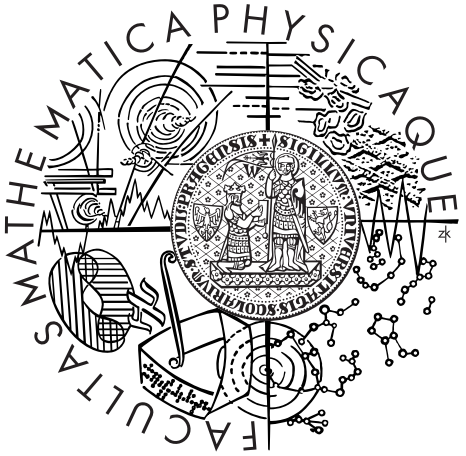
Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Bc. Eliška Bartošová, roz. Hejlová

Moderní výuka prostorové geometrie

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce:	RNDr. Petra Surynková
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Učitelství matematiky - deskriptivní geometrie pro střední školy

Praha 2013

Můj vřelý dík patří mé vedoucí práce RNDr. Petře Surynkové za čas věnovaný konzultacím a mnohé cenné rady. A dále děkuji všem ostatním, kteří mě u psaní této práce podporovali.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne ..... Podpis autora

Název práce: Moderní výuka prostorové geometrie

Autor: Bc. Eliška Bartošová, roz. Hejlová

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Petra Surynková, katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Tato práce je především sbírkou řešených příkladů z deskriptivní geometrie, která je však doplněna o základní teorii nutnou pro tato řešení. Teorie obsahuje definici a základní vlastnosti mnohoúhelníků i jejich konstrukce. Na tuto část navazují tělesa, z nich především hranoly a jehlany. Druhá kapitola shrnuje základní teorii promítání, včetně definic zobrazovacích metod (Mongeovo, středové atd.) a základních pojmů s nimi spojených. Druhá část je věnována řešeným příkladům, kde vždy jedno zadání je řešeno ve čtyřech promítáních (příklady jsou na sestrojení bodu, přímky, roviny, hranolů a jehlanů). Nedílnou součástí práce jsou animace do programu Lisa Viewer, který vznikl v rámci mé druhé diplomové práce a který umožňuje interaktivní prohlížení příkladů včetně prostorového náhledu. Každý příklad je také doplněn o PDF se zadáním s řešením tohoto příkladu vhodný pro tisk a využití jak ve výuce tak i k samostudiu.

Klíčová slova: prostorová geometrie, projekce, geometrický software, konstrukce těles

Title: Modern approach to teaching spatial geometry

Author: Bc. Eliška Bartošová, *nee* Hejlová

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Petra Surynková, Department of Mathematics Education

Abstract: This work is a collection of solved problems in descriptive geometry, supplemented by elementary theory needed for their solution. The theory includes definitions and elemtary properties of polygons and their constructions. Theory about solids, mostly prisms and pyramids, is also included. The second chapter introduces theory of projection, including definitions of projection methods (Monge, center, etc.) and corresponding terms. The second part contains a collection of problems, where each problem is solved in four projection methods (there are problems of construction of a point, line, plane, prism and pyramid). For each problem there is an animation for Lisa Viewer program attached, which makes an integral part of the work. These animations allow to look at figures of the problems interactively and even in three dimensions. There is also a PDF document with problem assignment and solution for each problem, suitable for print.

Keywords: spatial geometry, projection, geometrical software, construction of solids

Obsah

Úvod **3**

1 Mnohoúhelníky a tělesa **5**
1.1 Mnohoúhelník . . . 5
1.1.1 Základní konstrukce některých pravidelných mnohoúhelníků 6
1.2 Tělesa . . . 11
1.2.1 Mnohostěn . . . 11
1.2.2 Hranolová plocha a hranol . . . 12
1.2.3 Jehlanová plocha a jehlan . . . 13

2 Promítání **15**
2.1 Definice a rozdělení promítání . . . 15
2.1.1 Středové promítání . . . 17
2.1.2 Rovnoběžné promítání . . . 18
2.2 Další pojmy používané v deskriptivní geometrii . . . 20
2.3 Mongeovo promítání . . . 27
2.4 Kosoúhlé promítání . . . 28
2.5 Pravoúhlá axonometrie . . . 31
2.6 Středové promítání . . . 33
2.7 Středové promítání s pomocnou průmětnou . . . 34
2.8 Lineární perspektiva . . . 35

3 Sestrojení bodu, přímky a roviny **37**
3.1 Zobrazení bodu . . . 37
3.1.1 Řešení v Mongeově promítání . . . 38
3.1.2 Řešení v kosoúhlém promítání . . . 39
3.1.3 Řešení v pravoúhlé axonometrii . . . 41
3.1.4 Řešení v lineární perspektivě . . . 45
3.2 Zobrazení přímky . . . 48
3.2.1 Řešení v Mongeově promítání . . . 49
3.2.2 Řešení v kosoúhlém promítání . . . 51
3.2.3 Řešení v pravoúhlé axonometrii . . . 53
3.2.4 Řešení v lineární perspektivě . . . 56
3.3 Zobrazení roviny . . . 60
3.3.1 Řešení v Mongeově promítání . . . 60
3.3.2 Řešení v kosoúhlém promítání . . . 63
3.3.3 Řešení v pravoúhlé axonometrii . . . 65
3.3.4 Řešení v lineární perspektivě . . . 67

4 Konstrukce těles **70**
4.1 Hranol s podstavou v půdorysně . . . 70
4.1.1 Řešení v Mongeově promítání . . . 72
4.1.2 Řešení v kosoúhlém promítání . . . 73
4.1.3 Řešení v pravoúhlé axonometrii . . . 74
4.1.4 Řešení v lineární perspektivě . . . 75

4.2 Hranol s podstavou v obecné rovině 76
4.2.1 Řešení v Mongeově promítání 78
4.2.2 Řešení v kosoúhlém promítání 78
4.2.3 Řešení v pravoúhlé axonometrii 79
4.2.4 Řešení v lineární perspektivě 81
4.3 Kosý hranol 82
4.3.1 Řešení v Mongeově promítání 84
4.3.2 Řešení v kosoúhlém promítání 85
4.3.3 Řešení v pravoúhlé axonometrii 85
4.3.4 Řešení v lineární perspektivě 86
4.4 Jehlan s podstavou v nárysně 86
4.4.1 Řešení v Mongeově promítání 88
4.4.2 Řešení v kosoúhlém promítání 88
4.4.3 Řešení v pravoúhlé axonometrii 89
4.4.4 Řešení v lineární perspektivě 89
4.5 Jehlan s podstavou v obecné rovině 90
4.5.1 Řešení v Mongeově promítání 92
4.5.2 Řešení v kosoúhlém promítání 93
4.5.3 Řešení v pravoúhlé axonometrii 93
4.5.4 Řešení v lineární perspektivě 93
4.6 Kosý jehlan 95
4.6.1 Řešení v Mongeově promítání 97
4.6.2 Řešení v kosoúhlém promítání 97
4.6.3 Řešení v pravoúhlé axonometrii 97
4.6.4 Řešení v lineární perspektivě 98

Závěr **99**

Seznam použité literatury **100**

A Obrázky k příkladům z kap. 4 **101**

Úvod

Průzkum, který jsem provedla v loňském roce a prezentovala na soutěži SVOČ 2012 [6], mimo jiné naznačuje, že středoškolští studenti si často neuvědomují všechny rozdíly a souvislosti mezi jednotlivými promítáními. Různá promítání si pletou, při črtání těles si často neuvědomují, jaké promítání používají a někdy dokonce při kreslení více objektů do jednoho obrázku použijí pro každý objekt jiné promítání. To mě motivovalo k vytvoření systému Lisa – programu umožňujícímu rýsovat v různých promítáních a tím napomoci k jejich lepšímu chápaní – a sbírky řešených příkladů, ve které je jedno zadání vždy řešeno ve více promítáních. Tato práce obsahuje právě tuto sbírku příkladů a kromě toho také nutný teoretický základ.

Řešení jednoho příkladu ve více promítáních je velmi užitečné, protože si díky tomu student snáze uvědomí všechny rozdíly a souvislosti mezi jednotlivými promítáními. Přitom to ale v učebnicích, závěrečných pracích ani jiných výukových materiálech není běžné a tato práce je tímto poměrně unikátní.

Systém Lisa vzniká jako má druhá diplomová práce, a je stále ve vývoji. Jeho součástí je však i program Lisa Viewer, který slouží k interaktivnímu prohlížení konstrukcí a který je již hotový a byl prezentován na soutěži SVOČ 2013 [5]. Lze ho stáhnout na internetových stránkách `http://sites.google.com/site/eliskahejlova/moje-prace`.

Nedílnou a velmi důležitou součástí této práce jsou kromě zadání a řešení příkladů také zdrojové soubory právě pro program Lisa Viewer, které obsahují konstrukce všech těchto příkladů. Pomocí programu je možné tyto konstrukce zobrazit, krokovat řešení, prohlížet si stejnou situaci v různých promítáních a především nejen zobrazit situaci v průmětně, ale také náhled na situaci v prostoru, se kterým lze libovolně otáčet, přibližovat apod. Díky této interaktivitě je prohlížení konstrukcí v programu mnohem přehlednější a názornější než obrázky na papíře.

Všechny obrázky vložené v této práci jsou vytvořeny pomocí programu Lisa Viewer (někdy s mírnými úpravami pro větší přehlednost), jsou to však jen statické, neinteraktivní obrázky, a proto důrazně doporučuji nedívat se při čtení příkladů pouze na ně, ale spustit si vždy každý příklad v programu a krokovat si postupy řešení zde.

V neposlední řadě práce obsahuje ke každému příkladu i verzi zadání a výsledku vhodnou pro tisk, což jistě usnadní využití této práce při výuce či při samostudiu.

V následujících dvou kapitolách jsou vytvořeny teoretické základy, nutné pro řešení příkladů uvedených v dalších kapitolách. V první kapitole jsou shrnuty poznatky o mnohoúhelnících, hranolech a jehlanech, což jsou objekty se kterými budeme dále pracovat.

Druhá kapitola pojednává o promítání a představuje zobrazovací metody, ve kterých budou řešeny příklady. Součástí této kapitoly je i vysvětlení pojmů, jejichž znalost budeme v příkladech předpokládat, jako je osová afinita, středová kolineace, otáčení, hlavní přímky roviny atd.

Dále následují kapitoly s řešenými příklady. Všechny příklady jsou koncipovány tak, že existuje jedno zadání, které je nejprve řešeno obecně, a poté ve všech

promítáních – Mongeově promítání, kosoúhlém promítání, pravoúhlé axonometrii a lineární perspektivě. Třetí kapitola obsahuje jednoduché příklady na konstrukci základních prvků v jednotlivých promítáních – bodu, přímky a roviny. Čtvrtá kapitola pak obsahuje konstrukce těles – hranolů a jehlanů – opět vždy stejný příklad ve všech čtyřech promítáních.

1. Mnohoúhelníky a tělesa

Tato práce je sbírkou řešených příkladů, ve kterých budou postupně sestrojena tělesa, konkrétně hranoly a jehlany.Abychom mohli tato tělesa sestrojovat musíme nejdříve zavést potřebnou teorii, kterou budeme dále v příkladech využívat.

V této kapitole jsou tedy shrnuty základní poznatky o mnohoúhelnících, konstrukcích mnohoúhelníků a tělesech. Všechny tyto objekty budeme uvažovat v euklidovské rovině a prostoru. Euklidovský n-rozměrný prostor E_n je afinní n-rozměrný prostor, na jehož zaměření je definován skalární součin jako:

$$(u, v) = u \cdot v = v_1u_1 + v_2u_2 + \cdots + v_nu_n,$$

$$\text{kde } u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \text{ a } v = (v_1, v_2, \ldots, v_n).$$

Pomocí skalárního součinu definujeme normu vektoru[1] $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$. Na euklidovském prostoru pak definujeme vzdálenost dvou bodů jako normu jejich rozdílu[2], tj. jako délku vektoru mezi těmito body:

$$d(A, B) = \|A - B\| = \sqrt{(A_1 - B_1)^2 + (A_2 - B_2)^2 + \cdots + (A_n - B_n)^2}.$$

$$\text{kde } A = (A_1, A_2, \ldots, A_n) \text{ a } B = (B_1, B_2, \ldots, B_n).$$

Jedná se vlastně o zobecněnou Pythagorovu větu.

Budeme používat pouze dvou- a tří-rozměrný prostor, které nazýváme euklidovská rovina a euklidovský prostor, a značíme je E_2 a E_3.

1.1 Mnohoúhelník

Mnohoúhelník a související pojmy můžeme definovat takto:

Definice 1.1. Mějme v euklidovské rovině E_2 dáno n různých bodů $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \leq 3$), z nichž žádné tři neleží v téže přímce; pak množinu úseček $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \ldots, A_{n-1}A_n$ nazýváme *lomenou čarou* $A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$.

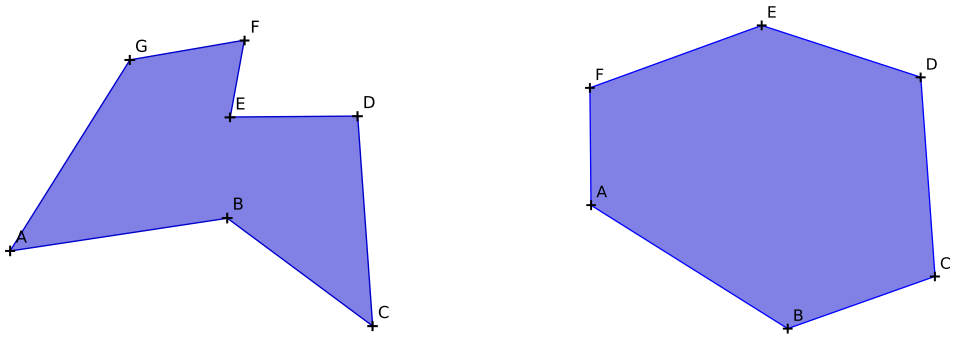
Definice 1.2. Uzavřená lomená čára, $A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_nA_1$, jež leží v rovině a sama sebe neprotíná, ohraničuje část roviny, která se nazývá *mnohoúhelník* či určitěji *n-úhelník*.

O lomené čáře $A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_nA_1$ se říká, že je *hranice mnohoúhelníku* (n-úhelníku), body $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se nazývají *vrcholy mnohoúhelníku*, úsečky A_1A_2, $A_2A_3, A_3A_4, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ *strany mnohoúhelníku*. Bodům mnohoúhelníku, které nepatří k jeho hranici, se říká *vnitřní body mnohoúhelníku*; množina všech vnitřních bodů tvoří *vnitřek mnohoúhelníku*.

Vrcholy n-úhelníku, které jsou krajními body některé jeho strany, se nazývají *sousední vrcholy*. Úsečka, jejíž krajní body jsou libovolné dva nesousední vrcholy, se nazývá *úhlopříčka*. [7]

[1] Norma vektoru určuje jeho délku, tj. bereme-li vektor jako vzdálenost dvou bodů, pak určuje jejich vzdálenost.

[2] Rozdílem dvou bodů A, B je vektor v určený těmito body, tj. $v = A - B$.



Nekonvexní mnohoúhelník Konvexní mnohoúhelník

Obrázek 1.1: Příklady mnohoúhelníků

Další pojmy, které budeme používat, definujeme takto:

Přímka dělí rovinu na dvě navzájem opačné *poloroviny* a je jejich společnou *hranicí* nebo-li *hraniční přímkou* [9]. Polorovinou tedy rozumíme část roviny ohraničenou přímkou, která do poloroviny patří a je její hranicí. Průnik dvou polorovin, které mají různoběžné hraniční přímky, nazýváme *úhel*. Průsečík hraničních přímek označujeme jako *vrchol* úhlu, polopřímky ohraničující úhel nazýváme *ramena* úhlu.

Definice 1.3. *Konvexní mnohoúhelník* leží v jedné z polorovin určených kteroukoliv stranou.

Každá polorovina, v níž konvexní mnohoúhelník leží a jejíž hraniční přímka má s mnohoúhelníkem společnou právě jednu jeho stranu, se nazývá *opěrná polorovina* konvexního mnohoúhelníku. Konvexní mnohoúhelník je průnikem všech opěrných polorovin. [9]

Definice 1.4. *Pravidelný mnohoúhelník* je každý konvexní mnohoúhelník, jehož všechny strany jsou stejně dlouhé a všechny vnitřní úhly jsou shodné.

Středem pravidelného n-úhelníka rozumíme střed souměrnosti n-úhelníka.

1.1.1 Základní konstrukce některých pravidelných mnohoúhelníků

Dále uvedeme konstrukce některých pravidelných mnohoúhelníků.

Hledání euklidovských konstrukcí pro sestrojení pravidelných n-úhelníků, je jedna z proslulých úloh, které se matematici snaží vyřešit již od starověku.

Problém konstrukce pravidelného n-úhelníka lze převést na problém dělení plného úhlu na n stejných dílů. Tento geometrický problém lze také převést na řešení algebraického problému $x^n - 1 = 0$. Řešení této rovnice v Gaussově rovině[3] tvoří právě vrcholy pravidelného mnohoúhelníka.

[3] Gaussova rovina je rovina komplexních čísel.

Dnes je dokázáno, že pro některé pravidelné n-úhelníky neexistuje euklidovská konstrukce. To, zda daný n-úhelník lze či nelze sestrojit, vyjadřuje následující tvrzení:

Tvrzení 1.1. *Pravidelný n-úhelník je možno sestrojit pravítkem a kružítkem právě tehdy, má-li číslo n tvar*

$$n = 2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$$

kde $m \geq 0$ a $p_1, p_2 \ldots p_k$ jsou různá Fermatova prvočísla.

Poznamenejme, že Fermatova prvočísla jsou prvočísla tvaru $2^{2^r} + 1$. Pro $r = 0, 1, 2, 3, 4$ dostáváme prvočísla $3, 5, 17, 257, 65537$. Pro $r = 5$ však již dostáváme číslo složené. Není dosud známo, zda vůbec existují další Fermatova prvočísla. Problém konstrukce pravidelných n-úhelníků je tedy touto větou převeden na problém ekvivalentní, který dosud není uzavřen. [4]

V následujících kapitolách uvedeme přesné konstrukce pravidelného šestiúhelníka, pětiúhelníka a desetiúhelníka. Záměrně uvádíme konstrukce, které se používají pro ruční rýsování.

Jak bylo řečeno, pro některé pravidelné n-úhelníky nelze přesnou konstrukci nalézt. Existuje ale řada přibližných metod, jak tyto mnohoúhelníky sestrojit. Jednu z nich si ukážeme v závěru této kapitoly.

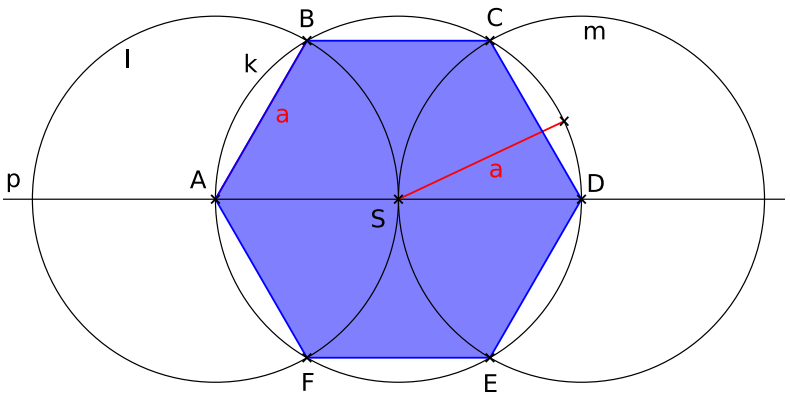
Konstrukce šestiúhelníka

Zadání: Sestrojte šestiúhelník, znáte-li střed S a délku strany šestiúhelníka a.

Řešení: Konstrukci šestiúhelníka začínáme sestrojením kružnice k se středem S a poloměrem rovným délce strany a, tj. $k(S, a)$. Dalším krokem je sestrojení průměru, který zjednoduší a zpřesní konstrukci. Tento průměr nám protne kružnici k v bodech A a D, což jsou již vrcholy hledaného šestiúhelníka. Zbylé vrcholy nalezneme pomocí dvou kružnic l a m, které jsou definované $l(A, a)$ a $m(D, a)$. Průsečíky kružnice k s kružnicemi l a m jsou zbylé vrcholy šestiúhelníka, tj. vrcholy B, C, E a F. Celá konstrukce viz obr. 1.2.

Postup konstrukce 1.1.

1. $k; k(S, a)$
2. $p; S \in p \wedge p$ lib. průměr k
3. $A, D; \{A, D\} = k \cap p$
4. $l; l(A, a)$
5. $B, F; \{B, F\} = k \cap l$
6. $m; m(D, a)$
7. $C, E; \{C, E\} = k \cap m$
8. A, B, C, D, E, F tvoří vrcholy pravidelného šestiúhelníka



Obrázek 1.2: Konstrukce pravidelného šestiúhelníka

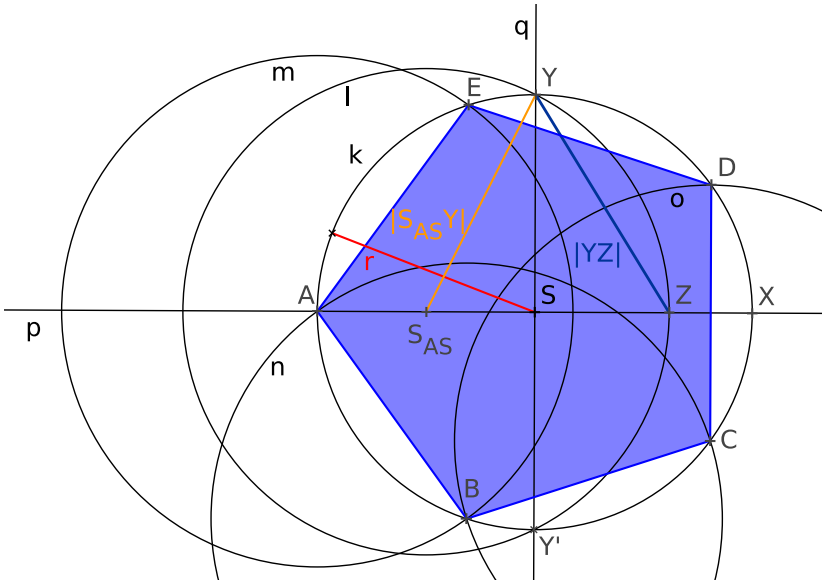
Konstrukce pětiúhelníka a desetiúhelníka

Zadání: Sestrojte pětiúhelník, znáte-li střed S a poloměr kružnice opsané r, tj. kružnice, která prochází všemi vrcholy pětiúhelníka a její střed je ve středu pětiúhelníka.

Řešení: Konstrukci pětiúhelníka začneme opsanou kružnicí $k(S, r)$, jejíž střed S je střed pětiúhelníka a poloměr r je dán ze zadání. Dále sestrojíme dva na sebe kolmé průměry kružnice dané přímkami p, q, které protínají kružnici k v bodech A, X pro přímku p a v bodech Y, Y' přímka q. Nyní sestrojíme kružnici l, jejíž střed leží v bodě S_{AS}, což je střed úsečky AS, a poloměr je $|S_{AS}Y|$. Průsečíky právě sestrojené kružnice l s průměrem p nazveme Z, Z'. Dále budeme uvažovat bod Z, který leží uvnitř kružnice k. Vzdálenost $|YZ|$ je hledaná délka strany pětiúhelníka, stačí již pomocí kružnic m, n a o, viz postup konstrukce, nalézt body B, C, D a E, které nám spolu s bodem A vytvoří vrcholy pravidelného pětiúhelníka, viz obr. 1.3.

Postup konstrukce 1.2.

1. $k; k(S, r)$
2. $p; S \in p \wedge p$ lib. průměr k
3. $q; S \in q \wedge q \perp p$
4. $A, X; \{A, X\} = k \cap p$
5. $Y, Y'; \{Y, Y'\} = k \cap q$
6. $S_{AS}; S$ je střed úsečky AS
7. $l; l(S_{AS}, |S_{AS}Y|)$



Obrázek 1.3: Konstrukce pravidelného pětiúhelníka

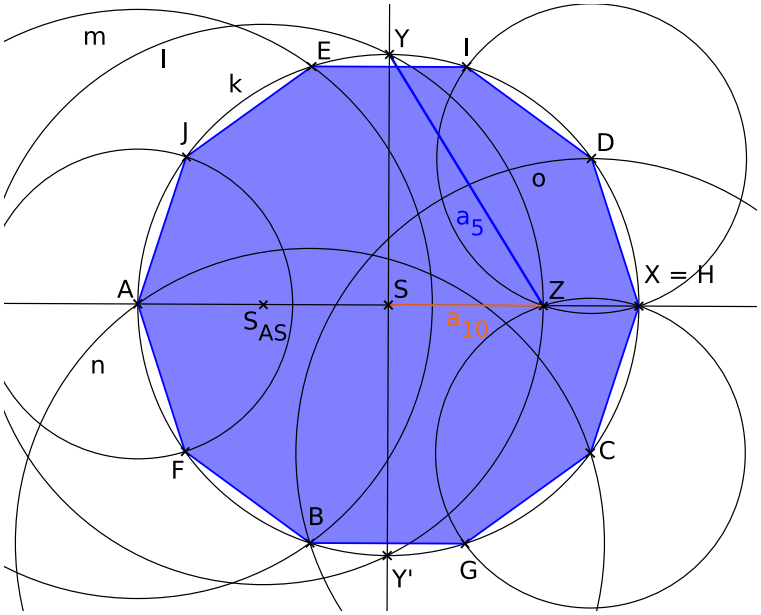
8. $Z, Z'; \{Z, Z'\} = l \cap p$, dále budeme uvažovat bod Z, který leží uvnitř kružnice k
9. $|YZ|$ je délka strany pětiúhelníka
10. $m; m(A, |YZ|)$
11. $B, E; \{B, E\} = m \cap k$
12. $n; n(B, |YZ|)$
13. $C; \{C, A\} = n \cap k$, druhý průsečík je již v existujícím bodě A
14. $o; o(C, |YZ|)$
15. $D; \{D, B\} = o \cap k$, druhý průsečík je již v existujícím bodě B
16. A, B, C, D, E tvoří vrcholy pravidelného pětiúhelníka

Pravidelný desetiúhelník můžeme sestrojit pomocí pětiúhelníka, buď dle tvrzení půlením úhlů, nebo pomocí konstrukce pětiúhelníka, kde délka strany pravidelného desetiúhelníka je rovna velikosti úsečky SZ viz obr. 1.4.

Přibližná konstrukce pravidelných mnohoúhelníků

Na závěr si ještě ukážeme přibližnou konstrukci pravidelných n-úhelníků, kterou lze použít, pokud pro dané n neexistuje konstrukce přesná.

Zadání: Mějme dán střed S a poloměr kružnice opsané r, sestrojte pravidelný n-úhelník, pro $n \geq 2$.



Obrázek 1.4: Konstrukce pravidelného desetiúhelníka

Řešení: Opět nejdříve sestrojíme opsanou kružnici $k(S,r)$. Sestrojíme dva na sebe kolmé průměry p a q. Průsečíky kružnice k s průměrem q nazveme N_0 a N_n, kde n je počet hran hledaného n-úhelníka. Tuto úsečku N_0N_n rozdělíme na n shodných dílů, tj. body $N_1, N_2, N_3 ... N_{n-1}$. Dále sestrojíme kružnici l se středem v bodě N_0 a poloměrem $|N_0N_n|$. Tato kružnice vytíná na přímce p dva body, které pojmenujeme X, Y.

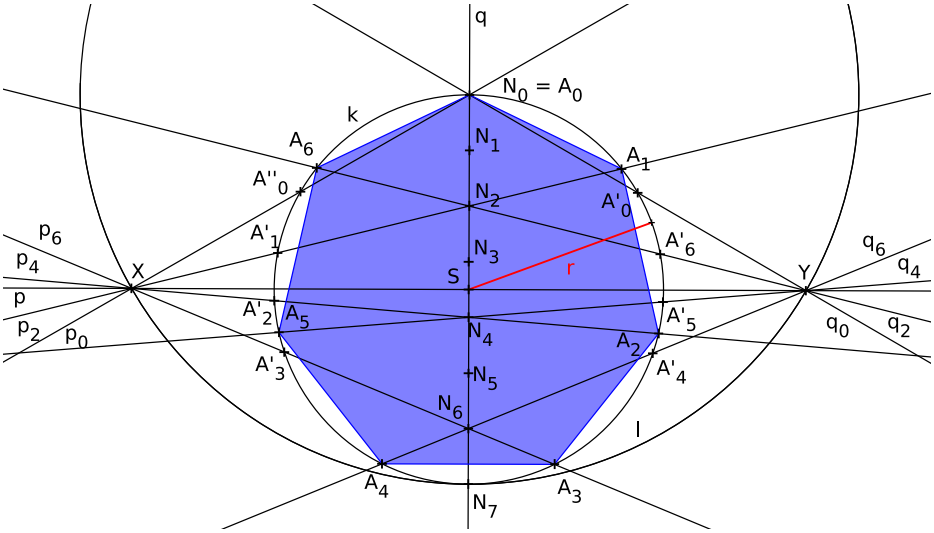
Dále sestrojíme přímku procházející bodem X s každým druhým bodem rozdělující úsečku N_0N_n, tj. každým bodem se sudým indexem. Vzniknou nám přímky $XN_0, XN_2, ...XN_{2k}$, kde $n = 2k$, pro n sudé nebo $n = 2k + 1$ pro n liché. Průsečík přímky XN_i, kde $i \in \{0, 2, \dots 2k\}$, a kružnice k nazveme A_j, A'_j, kde $i = 2j$. Vrcholy mnohoúhelníka jsou pak body A_j, pro které platí, že neleží mezi body XN_i.

Analogicky najdeme zbylé vrcholy pomocí bodu Y. Nebo můžeme využít symetrie n-úhelníka podle průměru q.

Body $A_0, A_1, \dots A_{n-1}$ tvoří vrcholy hledaného n-úhelníka, viz obr. 1.5.

Postup konstrukce 1.3. pro $n = 7$:

1. $k; k(S,r)$
2. $p; S \in p \wedge p$ lib. průměr k
3. $q; S \in q \wedge q \perp p$
4. $N_0, N_7; \{N_0, N_7\} = q \cap k$
5. $N_1, N_2, \dots, N_6; N_1, \dots N_6 \in\leftrightarrow N_0N_7 \wedge |N_0N_1| = |N_1N_2| = \dots = |N_6N_7|$
6. $l; l(N_0, |N_0N_7|)$



Obrázek 1.5: Ukázka přibližné konstrukce pravidelného n-úhelníka pro $n = 7$

7. $X, Y; \{X, Y\} = l \cap p$
8. $p_0, p_2, p_4, p_6; p_0 =\leftrightarrow XN_0, p_2 =\leftrightarrow XN_2, p_4 =\leftrightarrow XN_4, p_6 =\leftrightarrow XN_6$
9. $A_j, A'_j; \{A_j, A'_j\} = p_i \cap k$, pro $i = 2j \wedge i \in \{0, 2, 4, 6\}$ Dále uvažujeme body A_j, pro které platí, že neleží mezi body X a N_i
10. $q_0, q_2, q_4, q_6; q_0 =\leftrightarrow YN_0, q_2 =\leftrightarrow YN_2, q_4 =\leftrightarrow YN_4, q_6 =\leftrightarrow YN_6$
11. $A_j, A'_j; \{A_j, A'_j\} = q_i \cap k$, pro $j = \frac{i}{2} + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \wedge i \in \{0, 2, 4, 6\}$ Dále uvažujeme body A_j, pro které platí, že neleží mezi body Y a N_i
12. body $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ tvoří vrcholy pravidelného sedmiúhelníka

1.2 Tělesa

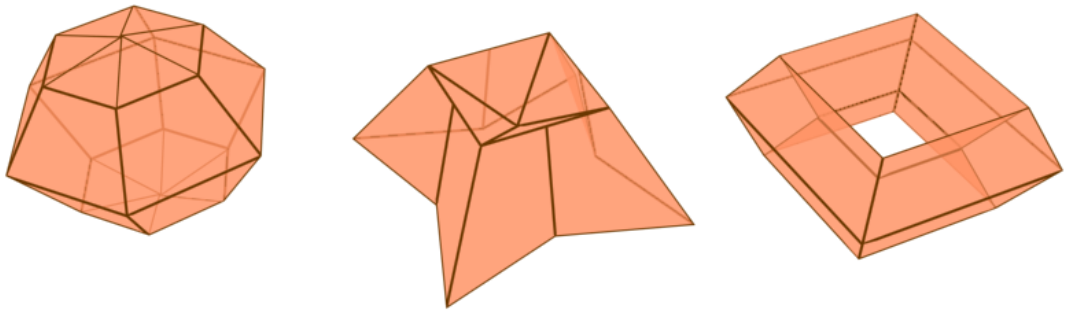
V této podkapitole věnované tělesům si nejdříve definujeme mnohostěny. Dále k nim přidáme hranolovou plochu, jehlanovou plochu, hranol a jehlan.

1.2.1 Mnohostěn

Definice mnohostěnu a dalších pojmů s ním spojených:

Definice 1.5. Mnohostěn je těleso, omezené samými rovinnými mnohoúhelníky, jež tvoří jeho *stěny*. Strany těchto mnohoúhelníků jsou *hranami* mnohostěnu. Každou hranu mají společnou právě dva mnohoúhelníky resp. stěny a platí, že žádné dva sousední mnohoúhelníky neleží v téže rovině. Nejméně tři hrany se sbíhají v jednom bodě, jejž nazýváme *vrcholem* nebo *rohem* mnohostěnu.

Jestliže mnohostěn je celý na téže straně od roviny každé své stěny, nazýváme jej *konvexní*. [2] Není-li mnohostěn konvexní je *nekonvexní* viz obr. 1.6.



konvexní mnohostěn nekonvexní mnohostěn nekonvexní mnohostěn

Obrázek 1.6: Příklady konvexních a nekonvexních mnohostěnů

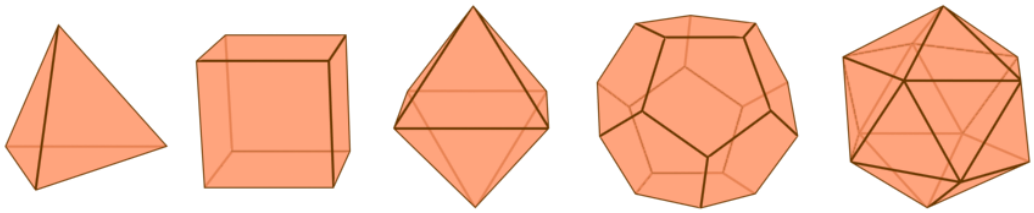
Pro konvexní mnohostěny platí:

Věta 1.1. Eulerova věta
Označíme-li s počet stěn, h počet hran a v počet vrcholů konvexního mnohostěnu, pak [8]

$$s + v = h + 2.$$

Jsou-li všechny stěny tělesa shodné pravidelné n-úhelníky nazýváme toto těleso *pravidelným mnohostěnem*. Tato tělesa také označujeme jako Platónská a jsou známa již od antiky. Již staří Řekové uměli dokázat, že jich není a nemůže být víc než pět. Patří mezi ně čtyřstěn, šestistěn (krychle), osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn viz obr. 1.7.

Šestistěn je každému známá krychle, jejíž stěny jsou čtverce. Dvanáctistěn je tvořen dvanácti shodnými pětiúhelníky a ostatní tělesa jsou tvořena rovnostrannými trojúhelníky.

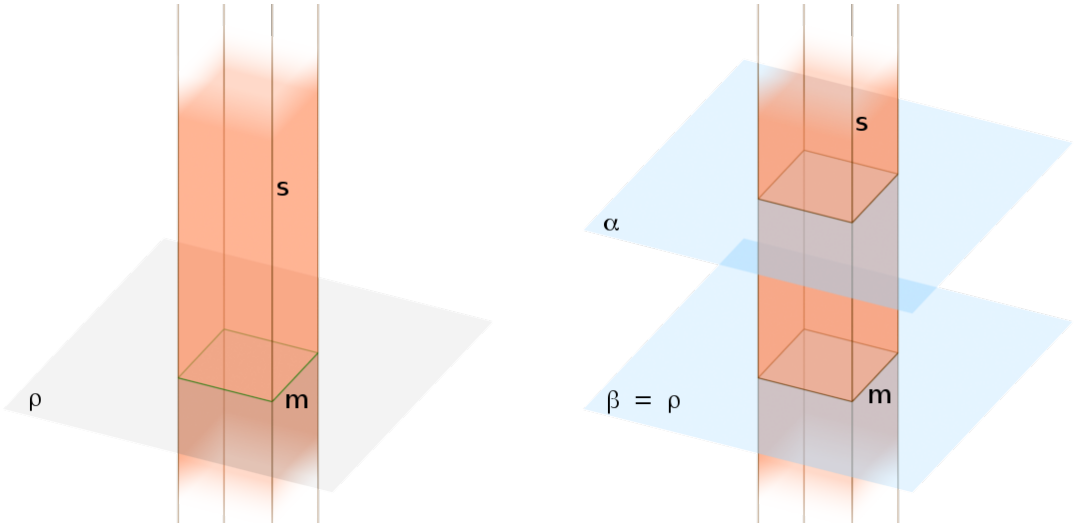


Obrázek 1.7: Platónská tělesa: čtyřstěn, krychle, osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn

1.2.2 Hranolová plocha a hranol

Nejdříve definujeme hranolovou plochu, prostor a poté pomocí těchto pojmů definujeme hranol.

Definice 1.6. Nechť je dán mnohoúhelník m ležící v rovině ϱ a přímka s různoběžná s rovinou ϱ. Množina všech přímek směru s, které protínají mnohoúhelník m, resp. jeho obvod, se nazývá *hranolový prostor*, resp. *hranolová plocha*. [10]



Obrázek 1.8: a) Čtyřboká hranolová plocha b) čtyřboký hranol definovaný pomocí hranolové plochy

Hranolová plocha je znázorněna na obrázku 1.8a.

Mnohoúhelník m se nazývá *řídicí mnohoúhelník*, přímky procházející vrcholy řídicího mnohoúhelníka se nazývají *hrany* hranolové plochy. Všechny přímky procházející jednou stěnou řídicího mnohoúhelníka tvoří *stěnu* plochy. Hranolovou plochu nazveme *n-bokou*, pokud její řídicí mnohoúhelník je právě n-úhelník. Podobně definujeme i *konvexní*, či *nekonvexní* hranolovou plochu pomocí řídicího mnohoúhelníka, tedy je-li řídicí mnohoúhelník konvexní je i plocha konvexní, jinak je nekonvexní.

Definice 1.7. *Hranol* je část hranolového prostoru ohraničená dvěma různými rovinami α, β, pro které platí $\alpha \parallel \beta \wedge s \nparallel \alpha$.

Hranol je znázorněn na obrázku 1.8b.

Hranol je tedy část hranolového prostoru vymezená dvěma rovnoběžnými rovinami. Pokud jej definujeme takto, je hranol nejen jeho plášť, ale i uzavřený prostor, který vymezuje. Pokud bychom chtěli pouze plášť, stačilo by místo hranolového prostoru vzít hranolovou plochu.

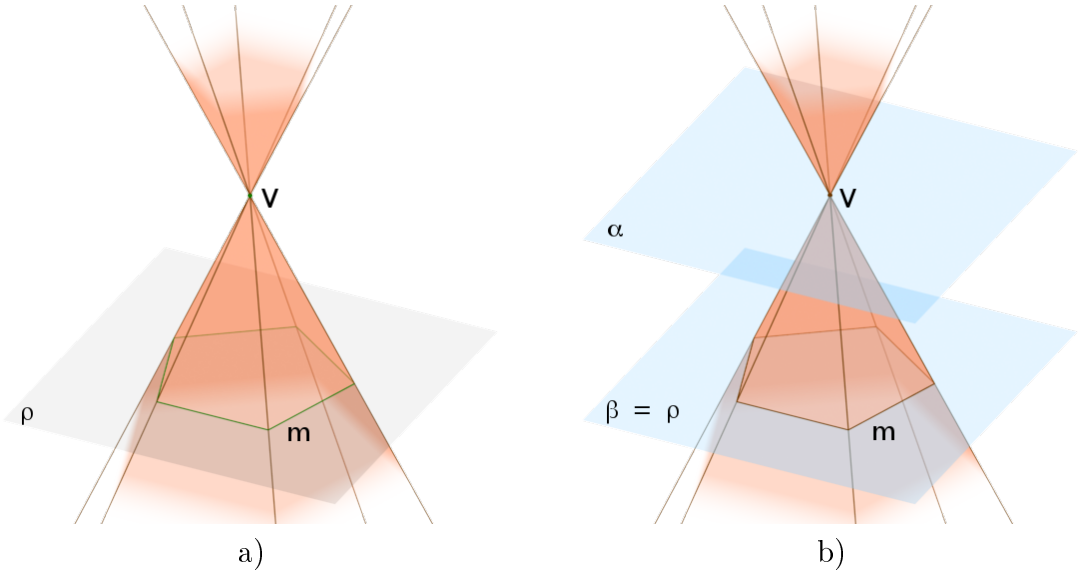
Všechny pojmy, které jsme definovali pro hranolovou plochu a prostor platí i pro hranol. Mnohoúhelníkům, které hranolová plocha vytíná v rovinách α a β, říkáme *podstavy*. Vzdálenost rovin podstav, tj. rovin α a β, nazýváme *výškou* hranolu. Hranol nazveme *kolmý hranol*, jestliže směr s jeho hran je kolmý na roviny podstav, tj. $s \perp \alpha$ ($s \perp \beta$). Není-li kolmý, nazýváme jej *kosý hranol*.

Je-li podstavou kolmého hranolu pravidelný n-úhelník, nazýváme jej *pravidelný* n-boký hranol.

1.2.3 Jehlanová plocha a jehlan

Definice 1.8. Nechť je dán mnohoúhelník m ležící v rovině ϱ a bod V, který v rovině ϱ neleží. Množina všech přímek procházející bodem V a protínajících mnohoúhelník m, resp. jeho obvod, se nazývá *jehlanový prostor*, resp. *jehlanová plocha*.

Jehlanová plocha je znázorněna na obrázku 1.9a.



Obrázek 1.9: a) Pětiboká jehlanová plocha b) pětiboký jehlan definovaný pomocí jehlanové plochy a rovnoběžných rovin α a β

Jehlanová a hranolová plocha jsou si velmi podobné. Kdybychom bod V posouvali ve směru s až do nekonečna, stanou se ze spojnic bodu V a řídicího mnohoúhelníku rovnoběžné přímky se směrem s a dostaneme tedy hranolovou plochu danou směrem s.

Pojmy jako hrana, stěna, konvexní jehlanová plocha atd. jsou díky tomu definovány obdobně jako u hranolové plochy. Bod V se nazývá *vrchol* jehlanové plochy.

Definice 1.9. Jehlan je část jehlanového prostoru ohraničená vrcholem V a rovinou α tak, že platí $V \notin \alpha$.

Jehlan je znázorněn na obrázku 1.9b.

Obdobně jako u hranolu i zde, pokud bychom místo jehlanového prostoru v definici použili jehlanovou plochu, získáme pouze plášť jehlanu.

Výška jehlanu je definována jako vzdálenost vrcholu V od roviny podstavy α. Jehlan, jehož podstava má střed souměrnosti S a přímka určená tímto středem S a vrcholem V je kolmá na rovinu podstavy (tj. na rovinu α), se nazývá *kolmý*. Pokud jehlan není kolmý je *kosý*. Přímku SV nazýváme *osou jehlanu*. Kolmý jehlan, jehož podstava je pravidelný n-úhelník, se nazývá *pravidelný n-boký jehlan*.

Komolý jehlan je definován jako část jehlanové plochy ohraničená dvěma různými rovinami α, β, které jsou rovnoběžné, ani jedna z nich neprochází vrcholem V a bod V neleží mezi rovinami α a β. Pokud by bod V ležel mezi rovinami α a β, označujeme toto těleso jako *dvojjehlan*.

2. Promítání

V první kapitole byla shrnuta základní teorie o mnohoúhelnících a mnohostěnech. Nyní teoretický základ potřebný pro konstrukci příkladů v dalších kapitolách doplníme o základy teorie promítání. Nejdříve je definováno promítání. Z obecné definice promítání jsou odvozeny dva typy promítání – rovnoběžné a středové. Definice jednotlivých typů promítání jsou doplněny o vlastnosti a tvrzení, které pro ně platí a podle kterých lze v promítání rýsovat.

Další oddíl v této kapitole je věnován základním pojmům souvisejícím s promítáním, ale také s příklady, které jsou dále řešeny. Znalost těchto pojmů bude v řešení příkladů předpokládána. Mezi tyto pojmy patří zavedení kartézské soustavy souřadnic, speciální přímky roviny, ale také definice a vlastnosti osové afinity a středové kolineace, které budou využity například při otáčení. Další konstrukce, které jsou zde definovány a které budeme dále využívat, jsou otáčení a sklápění roviny. Tyto postupy dále využijeme např. v axonometrii.

Poslední část této kapitoly je věnována konkrétním zobrazovacím metodám. Vysvětleny jsou zde Mongeovo promítání, kosoúhlé promítání, pravoúhlá axonometrie, středové promítání a jeho speciální případ lineární perspektiva. Opět jako u promítání jsou zde uvedeny definice a základní vlastnosti. Návod, jak v daných zobrazovacích metodách konstruovat základní útvary, jako jsou bod, přímka a rovina, nalezneme v následující kapitole.

2.1 Definice a rozdělení promítání

Deskriptivní geometrie má dva hlavní úkoly. Prvním je ukázat vhodné metody k převedení úloh prostorové geometrie na úlohy rovinné geometrie a tak umožnit jejich grafické řešení. Jinými slovy úkolem je hledat předpis, který tento převod umožní. *Zobrazení*, v deskriptivní geometrii častěji označované jako *princip zobrazení*, je předpis, který každému prvku (*vzor*) nějaké množiny přiřazuje právě jeden prvek (*obraz*) jiné množiny. Prvky jsou zde myšleny body euklidovského prostoru (vzor) a euklidovské roviny (obraz). Zde konkrétně se jedná o zobrazení E_3 do E_2, tj. euklidovského prostoru do euklidovské roviny. Pro zdůraznění vlastnosti, že každému vzoru je přiřazen právě jeden obraz, můžeme zobrazení také nazývat *jednoznačné zobrazení*[1].

Druhým úkolem deskriptivní geometrie je najít metody, které z rovinného obrazu prostorového objektu zpětně odvodí vlastnosti útvaru, např. prostorovou polohu, rozměry apod. Hledáme tedy zobrazení, které je *vzájemně jednoznačné*, pomocí něhož každému vzoru lze jednoznačně přiřadit jeho obraz a zároveň ke každému obrazu jednoznačně nalézt právě jeden jeho vzor.

Vzájemně jednoznačná zobrazení, která jsou v deskriptivní geometrii využívána, označujeme *zobrazovací metody*. [10]

Vše jsme uvažovali pro body, to však stačí, neboť ostatní útvary definujeme v deskriptivní geometrii obvykle jako množiny bodů. Umíme-li tedy zobrazit bod, umíme promítnout jakýkoliv objekt.

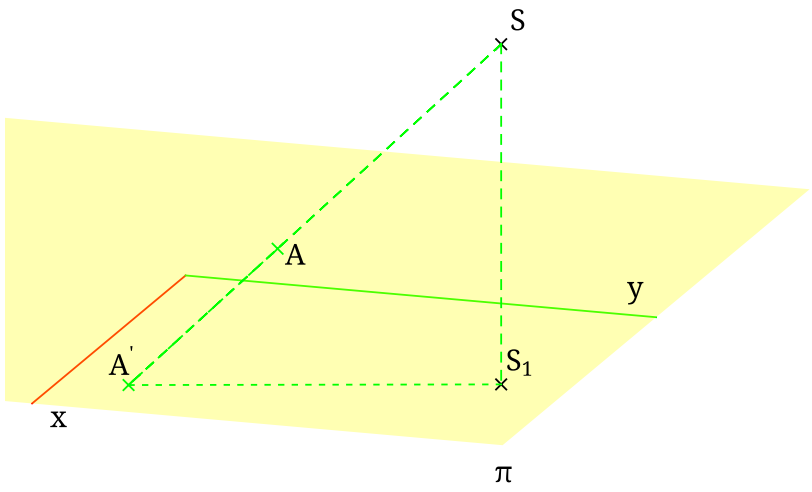
[1] Není však nutně vzájemně jednoznačné.

Uvažované zobrazovací metody jsou definovány jako zobrazení na obecné plochy, my však dále budeme uvažovat výhradně zobrazení na rovinu.

Dále v textu budeme používat *projektivně rozšířený euklidovský prostor* $\overline{E_3}$. Jedná se o rozšíření o tzv. *nevlastní elementy* ležící „v nekonečnu“. Nevlastní bod můžeme chápat jako průsečík rovnoběžek a je jednoznačně určen jejich směrem. Analogicky definujeme *nevlastní přímku* jako průsečnici rovnoběžných rovin. *Nevlastní rovina* je definována jako množina všech nevlastních bodů. Obdobně definujeme i *projektivně rozšířenou euklidovskou rovinu* $\overline{E_2}$. Pokud chceme zdůraznit, že je nějaký element nevlastní, značíme jej s dolním indexem ∞, např. nevlastní bod A značíme A_∞.

Promítání je zobrazení projektivně rozšířeného euklidovského prostoru $\overline{E_3}$ do projektivně rozšířené euklidovské roviny $\overline{E_2}$. Nejdříve ukážeme jeho obecnou definici, kterou dále vysvětlíme a popíšeme další vlastnosti.

Definice 2.1. Nechť je dán pevný bod S a pevná rovina π v $\overline{E_3}$, které nejsou incidentní (tj. $S \notin \pi$). Zobrazení, ve kterém obrazem bodu A prostoru je průsečík A' přímky SA s rovinou π, se nazývá *promítání* (projekce) z bodu S do roviny π.



Obrázek 2.1: Zobrazení bodu A ve středovém promítání, náhled na prostorovou situaci

Bod S se nazývá *střed promítání*, rovina π *průmětna*, spojnice SA *promítací přímka*, bod A' *průmět bodu* A, viz obr. 2.1. Promítání je určeno středem S a průmětnou π. [10]

Z definice a z odstavce výše plyne, že promítání je jednoznačné zobrazení $\overline{E_3}\backslash\{S\} \rightarrow \overline{E_2}$, Bod S nelze promítnout, tj. nemá obraz, protože není možné jednoznačně sestrojit promítací přímku procházející bodem S.

Základní vlastnosti promítání:

- Průmětem bodu, který je různý od středu promítání, je bod.
- Průmětem přímky, která neprochází středem promítání, je přímka. Průmětem promítací přímky (tedy libovolné přímky procházející středem S) je bod.

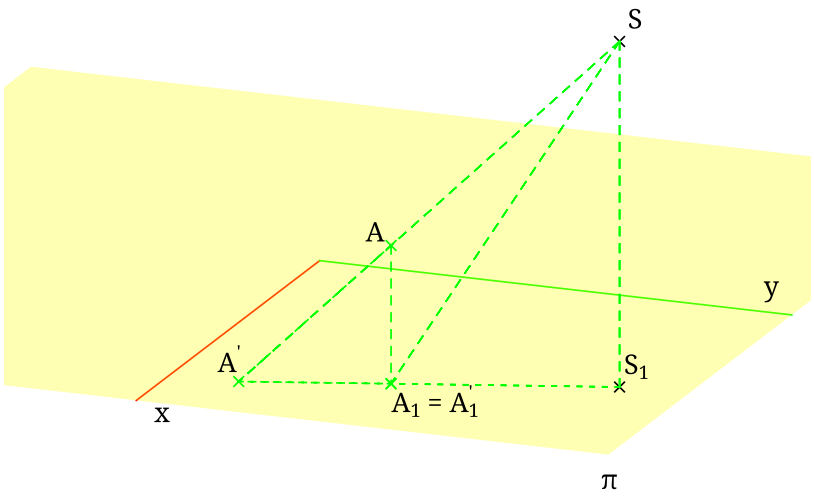
- Průmět bodu přímky je bodem průmětu přímky.
- Průmětem roviny, která neprochází středem promítání, je průmětna. Průmětem roviny procházející středem S (nazýváme ji *promítací rovina*) je přímka.
- Promítáním se zachovává incidence.

Důkazy těchto tvrzení můžeme nalézt na str. 95-97 v [10].

Promítání je definováno na rozšířeném euklidovském prostoru, musíme tedy rozlišovat mezi vlastními a nevlastními útvary. Průmětnu budeme uvažovat vždy vlastní, ale střed S může být vlastní i nevlastní.

2.1.1 Středové promítání

Středové promítání v $\overline{E_3}$ je určeno vlastním středem S a (vlastní) průmětnou π, pro které platí $S \notin \pi$, viz obr. 2.2. Průmětu útvaru ve středovém promítání říkáme *středový průmět* útvaru. Pojem *středová rovina* označuje promítací rovinu (prochází bodem S) rovnoběžnou s průmětnou.



Obrázek 2.2: Zobrazení bodu A ve středovém promítání s pomocným půdorysem v prostorovém náhledu na promítání

- Středový průmět bodu (vlastní nebo nevlastní), který neleží ve středové rovině, je vlastní bod.
- Středový průmět bodu, který leží ve středové rovině (a je různý od S), je nevlastní bod.
- Středový průmět přímky (vlastní nebo nevlastní), která není promítací a neleží (leží) ve středové rovině, je vlastní (nevlastní) přímka.
- Středový průmět promítací přímky, která neleží (leží) ve středové rovině, je vlastní (nevlastní) bod.

- Středový průmět promítací roviny různé od středové roviny je vlastní přímka. Středový průmět středové roviny je nevlastní přímka. Středový průmět jakékoliv jiné roviny je průmětna.

Ve středovém promítání platí následující tvrzení o poměru bodů:

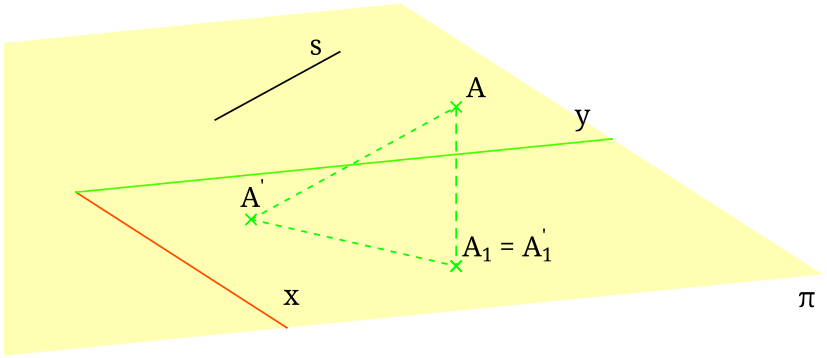
- Středové promítání nezachovává *dělicí poměr*[2].
- Středové promítání zachovává *dělicí dvojpoměr*[3].

Z těchto vlastností plyne, že se např. rovnoběžky mohou promítnou jako různoběžky.

2.1.2 Rovnoběžné promítání

Rovnoběžné promítání v $\overline{E_3}$ je určeno nevlastním středem S, který je definován pomocí směru s, a (vlastní) průmětnou π, pro které platí $S \notin \pi$ tj. $s \nparallel \pi$. Směr s nazýváme *směr promítání* a průmět označujeme jako *rovnoběžný průmět* daného útvaru, viz obr. 2.3.

- Rovnoběžný průmět vlastního bodu je vlastní bod. Rovnoběžný průmět nevlastního bodu je nevlastní bod.



Obrázek 2.3: Zobrazení bodu A v rovnoběžném promítání s pomocným půdorysem v prostorovém náhledu na promítání

Odtud je zřejmé, že můžeme uvažovat euklidovský prostor bez projektivního rozšíření, neboť vlastní útvary se zobrazí vždy na vlastní. Dále proto budeme uvažovat pouze E_3, resp. E_2 pro rovnoběžné promítání, nebude-li řečeno jinak.

- Rovnoběžný průmět bodu je bod.

[2] Definován pro tři různé kolineární body A, B, C jako poměr vzdáleností $\frac{|AC|}{|BC|}$.

– Leží-li bod C mezi body A a B je dělicí poměr bodů (ABC) záporný

– Neleží-li bod C mezi body A a B je dělicí poměr bodů (ABC) kladný

[3] Definován pro čtyři různé kolineární body A, B, C, D jako poměr poměrů $\frac{(ABC)}{(ABD)}$

- Rovnoběžný průmět přímky, která není promítací, je přímka. Rovnoběžný průmět promítací přímky je bod.
- Rovnoběžný průmět promítací roviny (rovnoběžné se směrem promítání) je přímka. Rovnoběžný průmět každé jiné roviny je průmětna.
- Rovnoběžný průmět rovnoběžných přímek, které nejsou promítací, jsou rovnoběžné přímky. Rovnoběžný průmět různoběžných přímek, z nichž žádná není promítací, jsou různoběžky nebo dvě splývající přímky.
- Rovnoběžný průmět polopřímky je polopřímka, rovnoběžný průmět úsečky je úsečka (za předpokladu, že ani polopřímka ani úsečka neleží na promítací přímce).
- Rovnoběžný průmět poloroviny je polorovina, rovnoběžný průmět rovnoběžníka je rovnoběžník (za předpokladu, že polorovina ani rovnoběžník neleží v promítací rovině).
- Rovnoběžným průmětem úhlu (jehož žádné rameno neleží na promítací přímce) je úhel.

Z těchto tvrzení lze dokázat:

- Rovnoběžné průměty stejně velkých a vzájemně rovnoběžných úseček (které neleží na promítacích přímkách) jsou stejně veliké a vzájemně rovnoběžné úsečky.
- Rovnoběžný průmět útvaru, který leží v rovině rovnoběžné s průmětnou, je útvar s ním shodný.

Analogicky jako pro středové promítání můžeme odvodit, jak se chovají dělicí poměr a dvojpoměr při rovnoběžném promítání. Platí následující tvrzení:

- Rovnoběžné promítání zachovává *dělicí poměr*[4].
- Rovnoběžné promítání zachovává *dělicí dvojpoměr*[5].

Druhé tvrzení je triviálním důsledkem prvního, neboť dělicí dvojpoměr je definován jako poměr dělicích poměrů, zachovávají-li se tedy dělicí poměry, zachovává se i dělicí dvojpoměr.

Rovnoběžné promítání se dále dělí na *pravoúhlé* a *kosoúhlé* podle úhlu, který svírá směr promítání s průmětnou, tj. je-li směr kolmý na průmětnu nebo je k ní kosý.

Kosoúhlé promítání je určeno směrem promítání s a průmětnou π, pro které platí $s \nparallel \pi \wedge s \not\perp \pi$. Pro určení pravoúhlého promítání stačí pouze průmětna, směr s je jednoznačně dán, $s \perp \pi$.

V pravoúhlém promítání platí další vlastnosti, které zjednodušují některé konstrukce:

[4] Definován pro tři různé kolineární body A, B, C jako poměr vzdáleností $\frac{|AC|}{|BC|}$.

– Leží-li bod C mezi body A a B je dělicí poměr bodů (ABC) záporný.

– Neleží-li bod C mezi body A a B je dělicí poměr bodů (ABC) kladný.

[5] Definován pro čtyři různé kolineární body A, B, C, D jako poměr poměrů $\frac{(ABC)}{(ABD)}$

Věta 2.1 (Věta o pravoúhlém průmětu kolmých přímek)**.** *Dvě vzájemně kolmé přímky, z nichž žádná není promítací, promítají se v pravoúhlém promítání jako vzájemně kolmé přímky právě tehdy, když alespoň jedna je rovnoběžná s průmětnou [10].*

Důsledky této věty a další tvrzení o pravoúhlém promítání:

- Pravoúhlým průmětem pravého úhlu, jehož jedno rameno je rovnoběžné s průmětnou a druhé není k ní kolmé, je opět pravý úhel.
- Nechť žádné rameno pravého úhlu není kolmé k průmětně ani s ní rovnoběžné. Nechť π' je rovina, která prochází vrcholem pravého úhlu rovnoběžně s průmětnou.

  a) Jestliže ramena pravého úhlu leží právě v jednom z poloprostorů určených rovinou π', pak pravoúhlým průmětem pravého úhlu je tupý nebo přímý úhel.

  b) Jestliže ramena pravého úhlu leží v různých poloprostorech určených rovinou π', pak pravoúhlým průmětem pravého úhlu je ostrý nebo nulový úhel.
- Délka pravoúhlého průmětu úsečky, která není kolmá k průmětně, se rovná nejvýše délce dané úsečky. Rovnost nastane tehdy, když úsečka je rovnoběžná s průmětnou.

2.2 Další pojmy používané v deskriptivní geometrii

V tomto oddíle zavedeme další pojmy, které se často využívají v deskriptivní geometrii, a to kartézská soustava souřadnic, hlavní a spádové přímky roviny, stopník přímky a stopa roviny, osová afinita a středová kolineace, otáčení a sklápění roviny a zobrazení mnohostěnu.

Kartézská soustava souřadnic

Abychom mohli jednoznačně zadávat body v prostoru a uměli je pak následně správně zobrazit, musíme zavést kartézskou soustavu souřadnic. Tedy nějaký systém jak jednoduše nalézt polohu bodu. Zvolíme proto v prostoru tři navzájem kolmé osy x, y a z, protínající se v tzv. *počátku*, který značíme O.

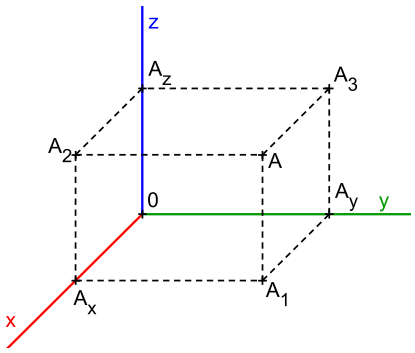
Podle polohy os x, y (osa z vždy směřuje "nahoru") rozlišujeme dva druhy soustav – levotočivá a pravotočivá, viz obr. 2.4. Pro určení, zda je soustava levotočivá nebo pravotočivá, používáme tzv. pravidlo pravé ruky. Nastavíme ruku tak, že palec ukazuje ve směru osy z a prsty jdou ve směru od osy x k ose y, pak použijeme-li pravou ruku, jedná se o pravotočivou soustavu souřadnic, platí-li to pro levou ruku, máme soustavu levotočivou.

Dále budeme uvažovat pravotočivou soustavu souřadnic, nebude-li řečeno jinak.

Libovolný bod A v prostoru pak lze určit pomocí tří reálných čísel x_A, y_A a z_A, která nazýváme *souřadnice bodu* A a zapisujeme $A = [x_A, y_A, z_A]$. Pokud

a) Pravotočivá soustava souřadnic b) Levotočivá soustava souřadnic

Obrázek 2.4: Kartézské soustavy souřadnic



Obrázek 2.5: Zobrazení bodu A v kartézské soustavě souřadnic, vyznačení souřadnic bodu A a tzv. souřadnicového kvádru.

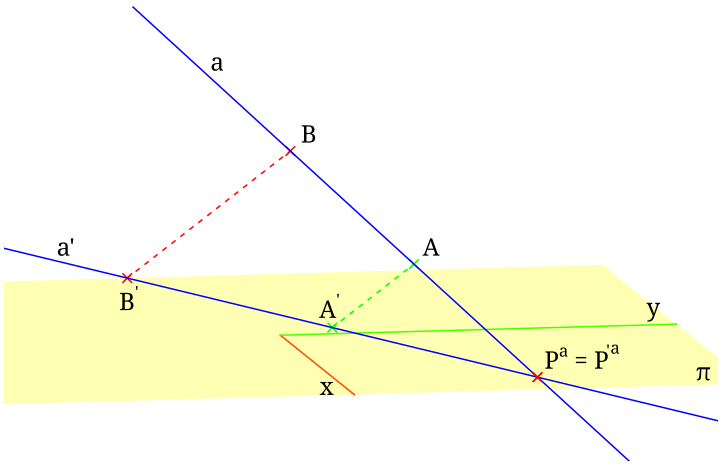
bychom vedli bodem A roviny rovnoběžné s jednotlivými souřadnicovými rovinami, pak části rovin tvoří tzv. souřadnicový kvádr, který protíná osu x v bodě $A_x = [x_A, 0, 0]$, osu y v bodě $A_y = [0, y_A, 0]$ a osu z v bodě $[0, 0, z_A]$, viz obr. 2.5.

Rovinu danou osami x a y nazýváme *půdorysna* a značíme ji π. Druhá rovina daná osami x a z je nazývána *nárysna* a značíme ji ν. Poslední souřadnicová rovina je *bokorysna* daná osami y, z, jejíž označení je μ.

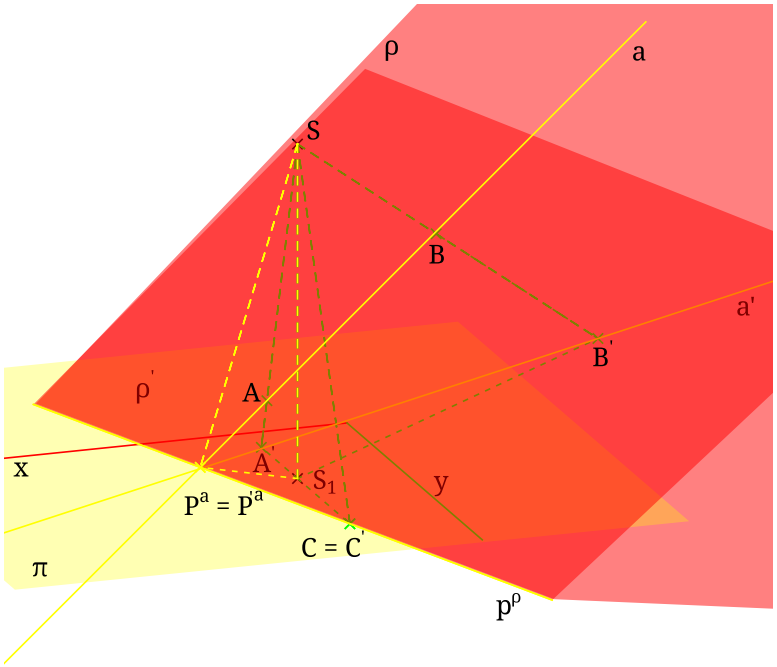
Pojmy spojené s promítáním

Tyto pojmy jsou používány ve všech promítáních, ve kterých budeme dále pracovat.

Promítáme-li přímku, pak její průsečík (myšleno skutečné přímky v prostoru) s průmětem, resp. s průmětnou, do které promítáme, nazýváme *stopník přímky*, viz obr. 2.6, kde je zobrazen stopník P^a přímky a v rovnoběžném promítání. Analogicky pro rovinu, průsečnice roviny s průmětnou se nazývá *stopa roviny*. Platí, že stopník libovolné přímky dané roviny, existuje-li, leží na stopě této roviny. Pokud máme více průměten, pak stopníky a stopy označujeme příslušným názvem, tj. stopníky v půdorysně nazýváme *půdorysné stopníky*, v nárysně *nárysné stopníky* atd. Promítáme-li do axonometrické průmětny, dostáváme *axonometrický stopník*. Tyto body označujeme počátečními písmeny názvů průměten, ve kterých leží, s horním indexem označujícím název přímky, např. půdorysný stopník přímky a značíme P^a. Analogicky označujeme stopu roviny viz obr. 2.7, kde je



Obrázek 2.6: Stopník přímky a, P^a, v rovnoběžném promítání

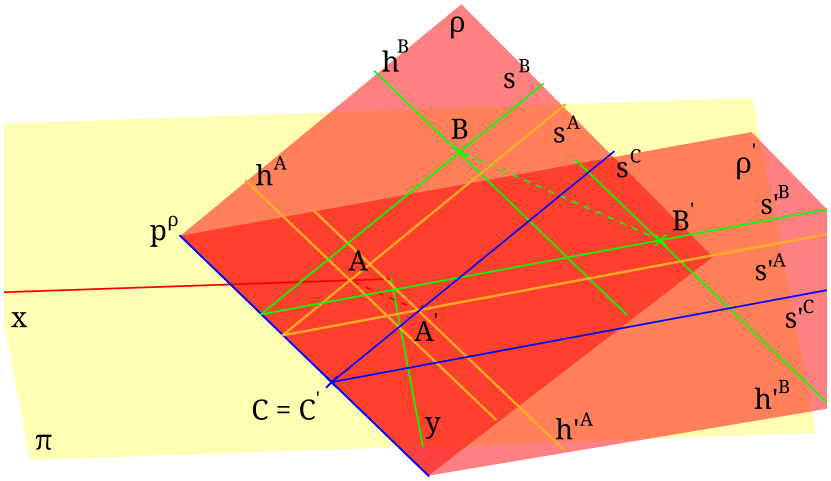


Obrázek 2.7: Stopa roviny ϱ, p^ϱ, ve středovém promítání

zobrazena stopa roviny ϱ do průmětny π ve středovém promítání, např. axonometrickou stopu roviny ϱ značíme a^ϱ.

Hlavní přímka roviny je libovolná přímka roviny, která je rovnoběžná s průmětnou, tj. se stopou roviny v dané průmětně. Pro hlavní přímku tedy platí, že každý bod této přímky má konstantní vzdálenost od průmětny. Této vlastnosti se využívá např. při dohledávání třetí souřadnice bodu ležícího v dané rovině.

Spádová přímka roviny je libovolná přímka, která je kolmá na stopu roviny, tedy i na všechny hlavní přímky. Nazývá se spádová přímka, neboť určuje tzv. *spád roviny*, sklon roviny vůči průmětně. Ukázka hlavních a spádových přímek je na obr. 2.8.



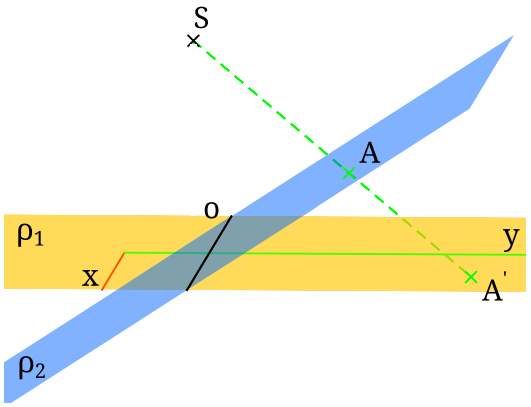
Obrázek 2.8: Hlavní (h^A, h^B) a spádové (s^A, s^B) přímky roviny ϱ a jejich kolmé průměty do průmětny π.

Osová afinita a středová kolineace

Osovou afinitu a středovou kolineaci lze definovat v rovině, v prostoru nebo mezi dvěma rovinami v prostoru, pro potřeby této práce bude definovat osovou afinitu a středovou kolineaci pouze mezi dvěma rovinami v prostoru.

Osová afinita a středová kolineace jsou vzájemně jednoznačná zobrazení v $\overline{E_3}$

Definice 2.2. Nechť jsou dány dvě roviny $\varrho_1, \varrho_2 \subset \overline{E_3}$ a bod $S \in \overline{E_3}$, který není s nimi incidentní. Vztah mezi oběma rovinami, v němž bodu z jedné roviny odpovídá jeho průmět ze středu S do druhé roviny, se nazývá *kolineace mezi rovinami* ϱ_1, ϱ_2 (zprostředkovaná středem promítání S).



Obrázek 2.9: Středová kolineace daná rovinami ϱ_1 a ϱ_2 a středem S, zobrazení bodu A

Středu promítání S říkáme *střed kolineace*. Průsečnici rovin ϱ_1 a ϱ_2, pokud existuje, nazýváme *osou kolineace* a obvykle ji značíme o, viz obr. 2.9. [10]

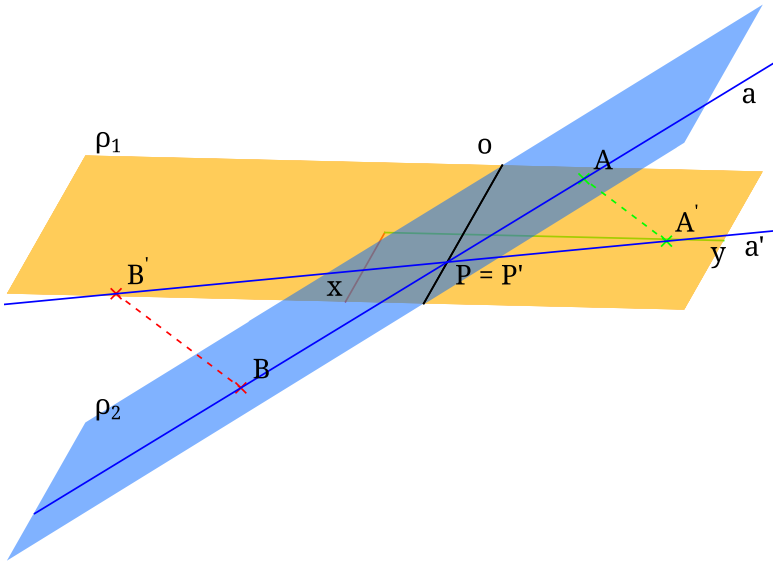
Z definice kolineace a středového promítání plyne následující tvrzení:

Tvrzení 2.1. *V kolineaci mezi dvěma rovinami bodu jedné roviny odpovídá bod druhé roviny, přímce odpovídá přímka a bodu na přímce odpovídá bod na přímce [10].*

V kolineaci existují *samodružné body*, tj. body, které se při daném zobrazení zobrazí sami na sebe, zůstanou tzv. na místě. Jestliže $\varrho_1 \not\equiv \varrho_2$ jsou samodružné body právě všechny body osy kolineace o, neboť tyto body leží v obou rovinách. Speciálně, je-li $\varrho_1 \parallel \varrho_2$, pak osa o je nevlastní přímka, a tedy samodružné body jsou nevlastní body těchto rovin. Jestliže $\varrho_1 \equiv \varrho_2$, pak každý bod je samodružný a takovou kolineaci nazýváme *identitou*.

Tvrzení 2.2. *Nesamodružné přímky, které si odpovídají v kolineaci, protínají se na ose[10].*

Situace z této věty je znázorněna na obr. 2.10.



Obrázek 2.10: Osová afinita daná rovinami ϱ_1 a ϱ_2 a směrem s, zobrazení přímky a dané body A, B

Kolineace mezi dvěma rovinami je určena středem S a rovinami ϱ_1, ϱ_2, pokud S je s rovinami neincidentní.

Jelikož jsme v rozšířeném euklidovském prostoru $\overline{E_3}$, musíme rozlišovat zda jsou střed S a osa kolineace o vlastní či nevlastní. Podle této volby dělíme kolineace na tato čtyři zobrazení:

- Posunutí – o nevlastní, S nevlastní
- Stejnolehlost – o nevlastní, S vlastní
- Středová kolineace mezi rovinami ϱ_1, ϱ_2 – o vlastní, S vlastní, viz obr. 2.9
- Osová afinita mezi rovinami ϱ_1, ϱ_2 – o vlastní, S nevlastní, viz obr. 2.10

Ve středové kolineaci se mohou vlastní body zobrazit na nevlastní, takové body označujeme jako *úběžníky*, a naopak nevlastní body se zobrazí na vlastní. Přímku, která se zobrazí na nevlastní nazýváme úběžnicí.

Osová afinita je kolineace, jejíž osa o je vlastní a střed S je nevlastní, je tedy dán pomocí směru s, který nazýváme *směrem afinity*. Ose říkáme *osa afinity*.

Pro afinitu platí:

Tvrzení 2.3. *Osová afinita mezi dvěma rovinami zachovává rovnoběžnost.*

Jinými slovy rovnoběžné přímky se zobrazí na rovnoběžné přímky.

Při mnoha konstrukcích v deskriptivní geometrii pracujeme v rovině, která není rovnoběžná nebo totožná s průmětnou (při promítání se vzdálenosti zachovávají), a vzdálenosti se tedy zkreslují. Je potřeba najít nějakou metodu, zobrazení, která nám umožní vidět útvary ve skutečné velikosti. Možností je danou rovinu transformovat, např. otočit do roviny, ve které se vzdálenosti (a tím i geometrické útvary) zobrazí ve skutečné velikosti.

V dalším oddíle bude popsáno sklápění a otáčení roviny.

Sklápění roviny do průmětny

Mějme dány dvě vlastní roviny ϱ_1 a ϱ_2 v $\overline{E_3}$, pro které platí $\varrho_1 \perp \varrho_2$. Sklápění je vzájemně jednoznačné zobrazení rovin z ϱ_1 do ϱ_2, kde bodu $A \in \varrho_1$ odpovídá bod $A^o \in \varrho_2$. Sklápění definujeme jako otočení roviny ϱ_1 do roviny ϱ_2. Osa otáčení o je průsečnicí rovin ϱ_1, ϱ_2.

Střed otáčení bodu A je průmět bodu A' do průmětny π a poloměr je vzdálenost $|AA'|$, tedy vzdálenost bodu A od průmětny. Kružnice, po které se otáčí bod A, leží v rovině kolmé na osu otáčení. Průsečnicemi této roviny s ϱ a π jsou spádová přímka s, procházející příslušným bodem, a její průmět s'. Střed kružnice je stopník spádové přímky s, viz obr. 2.11.

Sklopený bod A^o tedy sestrojíme následovně:

- Při sklápění promítací roviny ϱ_1 do roviny ϱ_2 sklopíme její libovolný bod A, který neleží v rovině ϱ_2, takto: Nalezneme vzdálenost bodu A od roviny ϱ_2, která je rovna vzdálenosti AA', kde A' je kolmý průmět bodu A do roviny ϱ_2, tj. $A' \in o$. Na kolmici k ose o procházející bodem A' vyneseme tuto vzdálenost a získáme bod A^o ležící v rovině ϱ_2.

Otáčení roviny do průmětny

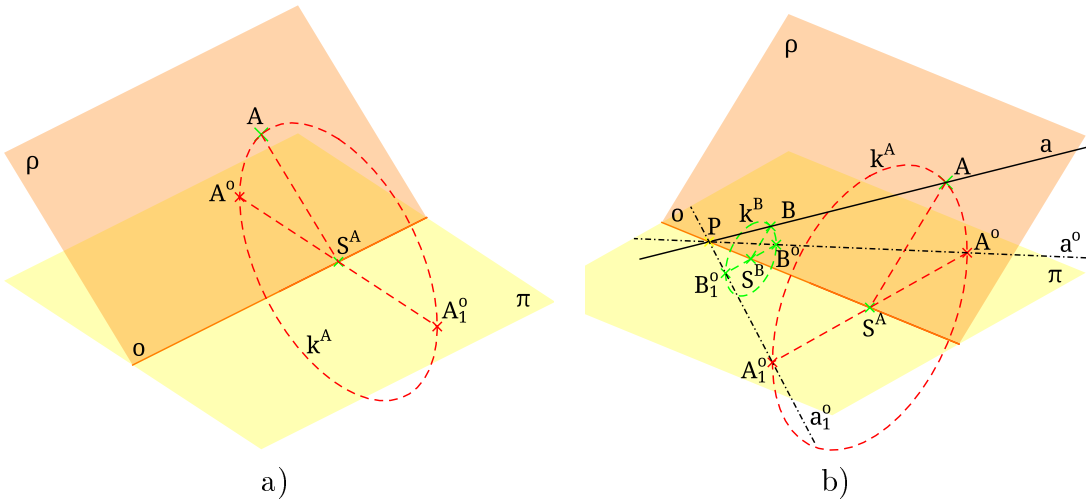
Otáčení roviny ϱ do průmětny π je jednoznačné zobrazení, které bodu $A \in \varrho$ přiřadí jednoznačně bod $A^o \in \pi$, viz obr. 2.11.

Otáčení je jednoznačně dáno osou a úhlem otáčení. Osa otáčení je stopa roviny ϱ, tedy přímka p^ϱ, a úhel otočení úhel, který svírají ϱ s průmětnou (ne nutně musíme volit ten menší z nich, dostáváme tedy dvě možnosti jak otáčet, tj. o úhel $|\sphericalangle \varrho\pi|$ nebo $180° - |\sphericalangle \varrho\pi|$).

Odpovídající si body A, A^o leží na kružnici, která je v rovině kolmé na osu, a tedy kolmé na průmětnu π. Průsečnicemi roviny kružnice s rovinou ϱ a průmětnou jsou spádová přímka s procházející bodem A a její průmět s', které se protínají ve stopníku spádové přímky P^s, tedy ve středu kružnice, po které se bod A otáčí.

Poloměr otáčení pro bod A je vzdálenost $|AP^s|$.

Osa otáčení je přímka samodružných bodů, tyto body při otáčení zůstávají na místě. Navíc platí, že při otáčení jsou spojnice odpovídajících si bodů A, A^o všechny rovnoběžné, protože leží vždy v rovině kolmé k ose otáčení a zároveň



Obrázek 2.11: Náhled na prostorovou situaci při otáčení roviny ϱ do průmětny π a) bodu A b) přímky a dané body A a B, bod P je samodružný

tvoří výseč na kružnici příslušnou stejnému úhlu (úhlu otočení). Daný vztah je tedy afinitou mezi rovinami ϱ a π, která je dána osou afinity p^{ϱ} a směrem AA^o.

V úlohách budeme řešit příklady na sestrojení těles, konkrétně hranolů a jehlanů. Uvedeme proto oddíly o univerzálních postupech platných pro všechna promítání.

Zobrazení mnohostěnu

Průmět mnohostěnu sestrojíme, promítneme-li všechny jeho vrcholy, hrany i stěny. Každý průmět mnohostěnu je ohraničený mnohoúhelníkem, který nazýváme *obrys*.

Pro zvýšení názornosti o tvaru a poloze tělesa zobrazeného průměty pokládáme těleso za neprůhledné a rozlišujeme v průmětech části *viditelné* a *neviditelné* [2].

Zobrazení hranolu má obecně tyto základní konstrukční kroky [8]:

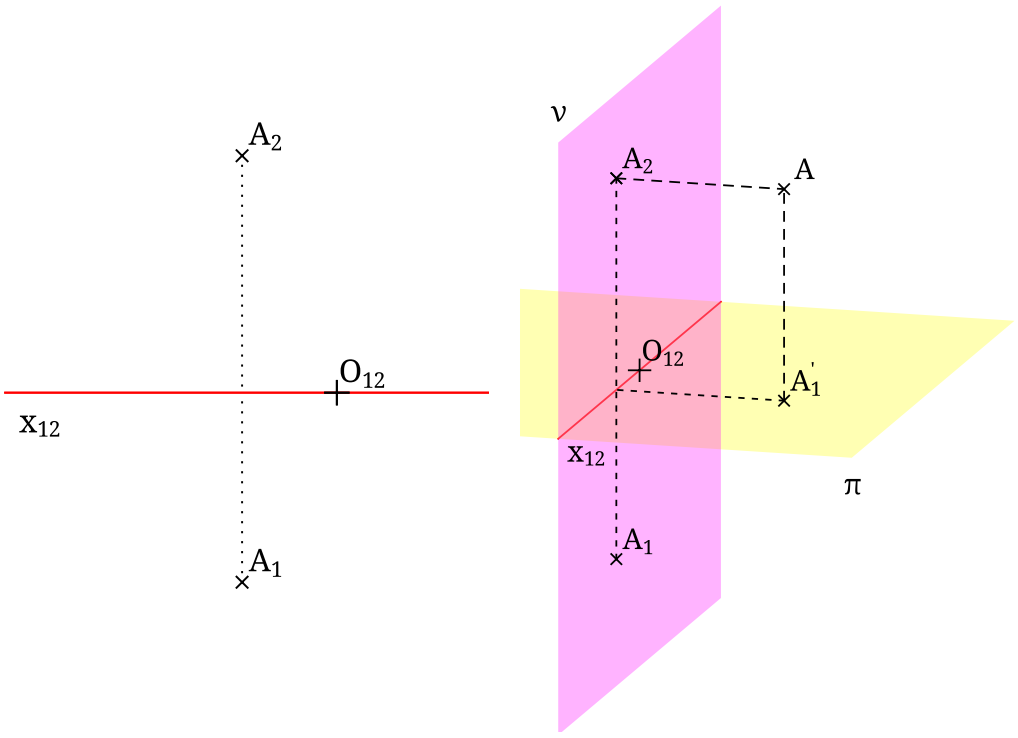
1. Zobrazení jedné podstavy
2. Zobrazení bočních hran
3. Zobrazení druhé podstavy
4. Určení viditelnosti

Zobrazení jehlanu obsahuje tyto základní konstrukční kroky [8]:

1. Zobrazení podstavy
2. Zobrazení vrcholu
3. Zobrazení bočních hran
4. Určení viditelnosti

Dále uvedeme několik zobrazovacích metod, tj. již konkrétní vzájemně jednoznačná zobrazení, která se v deskriptivní geometrii používají. Z definice promítání víme, že promítání je jednoznačné zobrazení, není však vzájemně jednoznačné, tj. neumíme zpětně rekonstruovat původní objekty z jejich průmětů. Proto většinou používáme dvě promítání, např. na různé průmětny nebo dva druhy promítání (kosoúhlé a pravoúhlé), čímž již získáme zobrazení vzájemně jednoznačné. Často se využívá tzv. pomocných průmětů, např. půdorysu, nárysu.

2.3 Mongeovo promítání



Obrázek 2.12: Zobrazení bodu A v Mongeově promítání a) situace v průmětně ν b) náhled na situaci v prostoru

Mějme dány dvě vlastní roviny π (půdorysna) a ν (nárysna) v rozšířeném euklidovském prostoru $\overline{E_3}$, pro které platí, že $\pi \perp \nu$, a dva směry $s_1, s_2 \in \overline{E_3}$, pro které platí, že $s_1 \perp \pi$ a $s_2 \perp \nu$.

Libovolný bod A prostoru zobrazíme tak, že jej promítneme ve směru s_1 do průmětny π do bodu A_1' a zároveň jej promítneme ve směru s_2 do průmětny ν do bodu A_2, viz obr. 2.12. Obrazem bodu A je tedy uspořádaná dvojice bodů (A_1', A_2). Nalezené průměty nyní sdružíme do jedné roviny tak, že sklopíme rovinu π kolem základnice x, $x = \pi \cap \nu$. Bod A_1' se při sklápění zobrazí do bodu A_1 v rovině ν. Spojnice bodů $o^A =\!\!\leftrightarrow A_1A_2$ v rovině ν je kolmá na osu x, protože rovina daná polopřímkami $\rightarrow AA_1'$ a $\rightarrow AA_2$ je rovinou, ve které se sklápí bod A_1', a je kolmá na osu x, a tedy průsečnice těchto dvou rovin o^A je kolmá na osu x.

Bod A tedy zobrazíme do dvojice *sdružených průmětů* A_1, A_2, jejichž spojnice je kolmá na osu x. Zpětně pak máme-li dvojici bodů A_1, A_2 v rovině ν tak,

že $\leftrightarrow A_1A_2 \perp x$, pak zpětným sklopením bodu A_1 nalezneme bod $A'_1 \in \pi$ a průsečnice přímek p, q je bod A, přímka p je dána bodem A'_1 a směrem s_1, přímka q je dána bodem A_2 a směrem s_2.

Obrazem bodu A je tedy v Mongeově promítání uspořádaná dvojice (A_1, A_2). Průmět A_1 bodu A nazýváme *půdorysným průmětem* bodu A, průmět bodu A_2 bodu A nazýváme *nárysným průmětem* bodu A. Osa x je průsečnicí obou průměten, proto je v obou průmětech samodružná, tj. platí $x = x_1 = x_2$, zkráceně ji značíme $x_{1,2}$ a nazýváme ji *základnicí*. Spojnici A_1A_2 nazýváme *ordinálou*.

V Mongeově promítání tedy platí následující tvrzení:

- Mongeovo promítání je vzájemně jednoznačné zobrazení bodů $A \in \overline{E_3}$ na uspořádané dvojice (A_1, A_2) ležící na ordinálách průmětny.
- Mongeovo promítání je dáno dvěma navzájem kolmými rovinami.

V každém z průmětů navíc platí všechna tvrzení, která jsme odvodili pro obecné kolmé promítání. [10]

2.4 Kosoúhlé promítání

Kosoúhlé promítání je založeno na kosoúhlém průmětu do jedné průmětny. Pokud toto promítání chceme využívat jako zobrazovací metodu musíme kosoúhlý průmět doplnit dalším průmětem. Používá se buď a) pravoúhlého průmětu do téže průmětny, nebo b) pravoúhlého průmětu do pomocné průmětny.

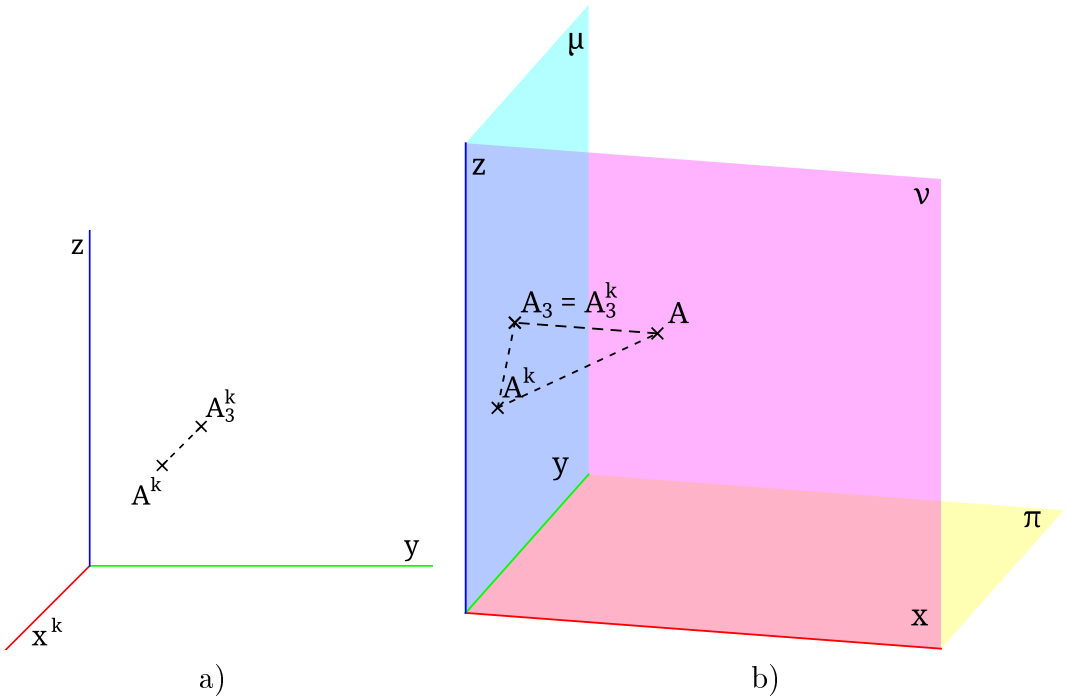
a) Kosoúhlé promítání na jednu průmětnu s pomocným pravoúhlým promítáním Mějme dánu vlastní rovinu μ (bokorysnu) v rozšířeném euklidovském prostoru $\overline{E_3}$ a směr s kosý k průmětně, tj. $s \not\perp \mu \wedge s \nparallel \mu$.

Libovolný bod $A \in \overline{E_3}$ zobrazíme pomocí směru s do průmětny μ do bodu A^k a zároveň jej také do této roviny promítneme ve směru kolmém do bodu A_3, viz obr. 2.13. Obrazem bodu A je tedy uspořádaná dvojice bodů (A_3, A^k), jejich spojnice je ordinála a platí pro ni, že má pevný směr s_3, který je dán pravoúhlým průmětem směru s nebo kosoúhlým průmětem kolmého směru na bokorysnu.

Pro kosoúhlé promítání tedy platí:

- Kosoúhlé promítání na jednu průmětnu s pomocným pravoúhlým promítáním je vzájemně jednoznačné zobrazení bodů $A \in \overline{E_3}$ na uspořádané dvojice (A^k, A_3), které leží na ordinálách.
- Kosoúhlé promítání je určeno průmětnou μ a směrem s, pro který platí $s \not\perp \mu \wedge s \notin \mu$.

Nechť $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ je úhel, který svírá směr s s průmětnou μ, a x_A je orientovaná vzdálenost bodu A, který neleží v μ, od průmětny μ. Potom z podmínky $\operatorname{cotg} \varphi = A_2A^k : |x_A| =\!\!\rightarrow A_2A^k : x_A$ dostáváme $\rightarrow A_2A^k = q \cdot x_A$, kde $q = \operatorname{cotg} \varphi$ je kladná konstanta určená směrem kosoúhlého promítání. Číslo q nazýváme *poměrem krácení* (*kvocient*).



Obrázek 2.13: Zobrazení bodu A v kosoúhlém promítání na jednu průmětnu s pomocným pravoúhlým promítáním na μ a) situace v průmětně μ b) náhled na situaci v prostoru

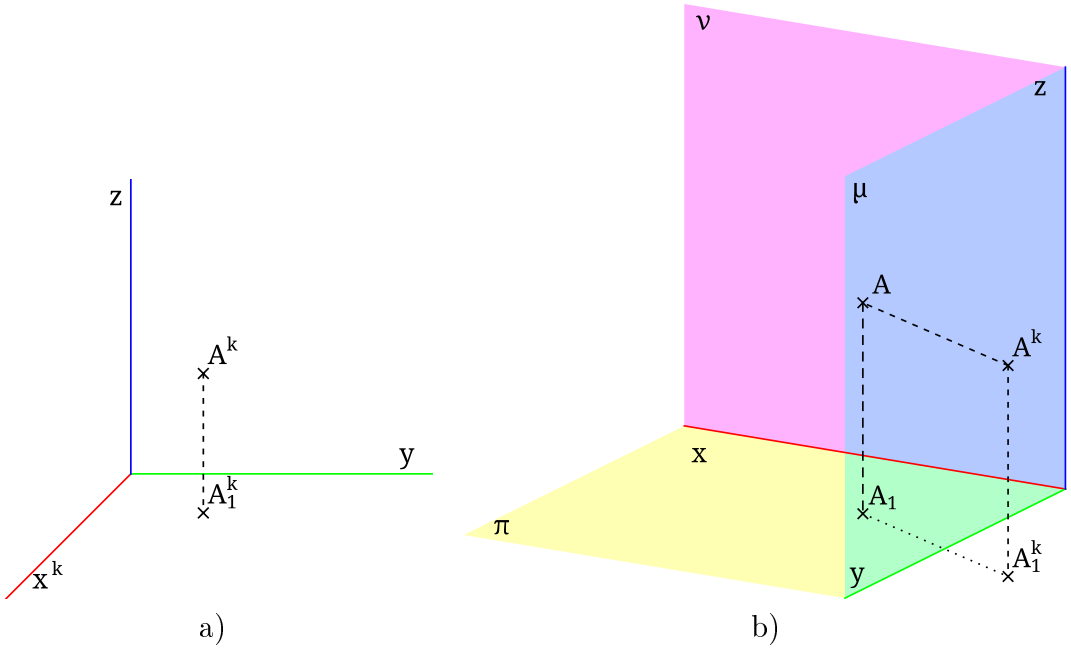
- Orientovaná vzdálenost kosoúhlého průmětu A^k bodu A od jeho pravoúhlého průmětu A_3 se rovná orientované vzdálenosti bodu A od průmětny μ násobené poměrem krácení q, tj. $|A^k A_3| = q \cdot |A\mu|$.
- Kosoúhlé promítání na jednu průmětnu $\mu \subset \overline{E_3}$ s pomocným pravoúhlým promítáním je určeno orientovaným směrem ordinál a poměrem krácení q.

b) Kosoúhlé promítání s užitím pomocné průmětny Mějme dány dvě vlastní roviny μ (bokorysna) a π (půdorysna) v rozšířeném euklidovském prostoru $\overline{E_3}$, pro které platí, že $\mu \perp \pi$, a směr s kosý k průmětně, tj. $s \not\perp \mu \wedge s \nparallel \mu$.

Libovolný bod A prostoru zobrazíme tak, že jej promítneme pravoúhle do průmětny π do bodu A_1 a pak kosoúhle promítneme jak bod A_1 tak i bod A do průmětny μ do bodů A_1^k a A^k, viz obr. 2.14. Obrazem bodu A je tedy uspořádaná dvojice bodů (A_1^k, A^k), která leží na kolmici (ordinále) k průsečnici průměten μ a π, tj. ose y.

Platí tedy následující tvrzení:

- Kosoúhlé promítání s užitím pomocné průmětny je vzájemně jednoznačné zobrazení bodů $A \in \overline{E_3}$ na uspořádané dvojice bodů (A_1^k, A^k), které leží na ordinálách kolmých k základnici.
- Kosoúhlé promítání s užitím pomocné průmětny je určeno dvěma průmětnami μ a π, pro které platí $\mu \perp \pi$, a směrem s, pro který platí $s \not\perp \mu \wedge s \nparallel \mu$.
- Kosoúhlé promítání s užitím pomocné průmětny je určeno osou y a směrem s, pro který platí $s \not\perp \mu \wedge s \nparallel \mu$.



Obrázek 2.14: Zobrazení bodu A v kosoúhlém promítání s užitím pomocné průmětny π a) situace v průmětně μ b) náhled na situaci v prostoru

Místo pomocné průmětny π můžeme také využít jako pomocnou průmětnu ν, tj. nárysnu. Postup konstrukce a odvození je analogický jako pro půdorysnu, pouze průměty analogicky značíme A_2 a A_2^k.

V praxi se často využívá kombinace těchto dvou promítání, která se nazývá *technické kosoúhlé promítání*.

Mějme dány dvě vlastní roviny $\mu, \pi \subset \overline{E_3}$, pro které platí $\mu \perp \pi$, a směr s kosý k průmětně μ, tj. $s \not\perp \mu \wedge s \nparallel \mu$.

Pro technické kosoúhlé promítání platí následující tvrzení:

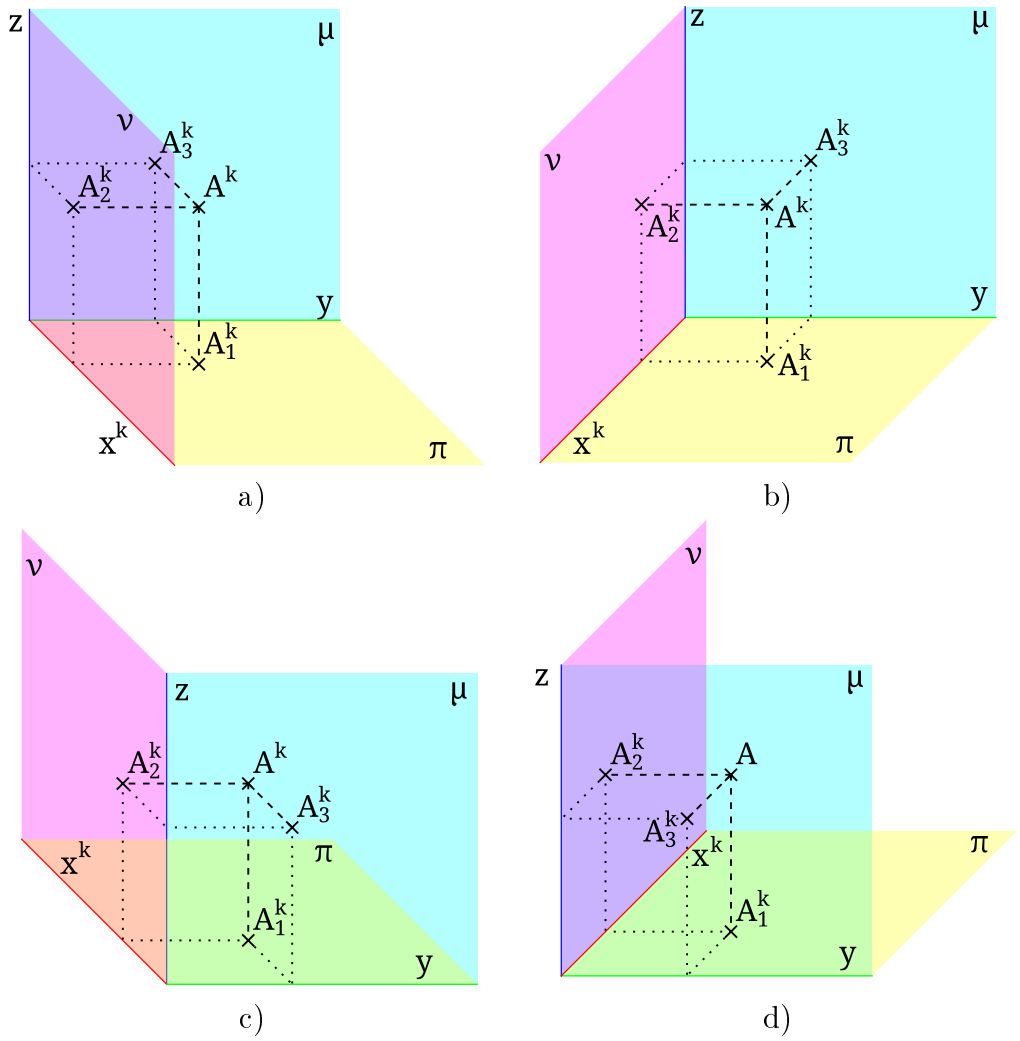
- Technické kosoúhlé promítání je určeno úhlem ω, který svírá orientovaná ordinála o s orientovanou osou y, a poměrem krácení q.

  Ordinála o je dána spojnicí bodů $A^k A_3$, ale také spojnicí bodů $A_1^k A_x$, kde A_x je kolmý průmět bodu A_1 do nárysny, resp. kolmý průmět bodu A_2 do půdorysny.

- Říkáme, že kosoúhlé promítání je dáno dvojicí (ω, q), pokud pro úhel ω platí $0 \leq \omega \leq 2 \cdot \pi$ a číslo $q > 0$.

U kosoúhlého promítání rozlišujeme dva základní pohledy podle velikosti úhlu ω. Je-li $0 < \omega < 180°$ říkáme, že kosoúhlé promítání je *nadhledem* viz obr. 2.15ab, je-li $180° < \omega < 360°$ mluvíme o *podhledu* viz obr. 2.15cd. [10]

Pro některé konstrukce je užitečné využít tzv. *přidružené Mongeovo promítání*, které je definováno pro pravotočivou soustavu souřadnic jako kolmý průmět do bokorysny μ a půdorysny π. Bokorys tedy splývá s kosoúhlým bokorysným průmětem a mezi půdorysem v tomto Mongeově promítání a kosoúhlým půdorysem existuje afinita, kde osou je osa y a směr je dán spojnicí kosoúhlého půdorysu a půdorysu libovolného bodu.



Obrázek 2.15: Zobrazení bodu A v kosoúhlém promítání (situace v průmětně) a) nadhled zprava b) nadhled zleva c) podhled zleva d) podhled zprava

2.5 Pravoúhlá axonometrie

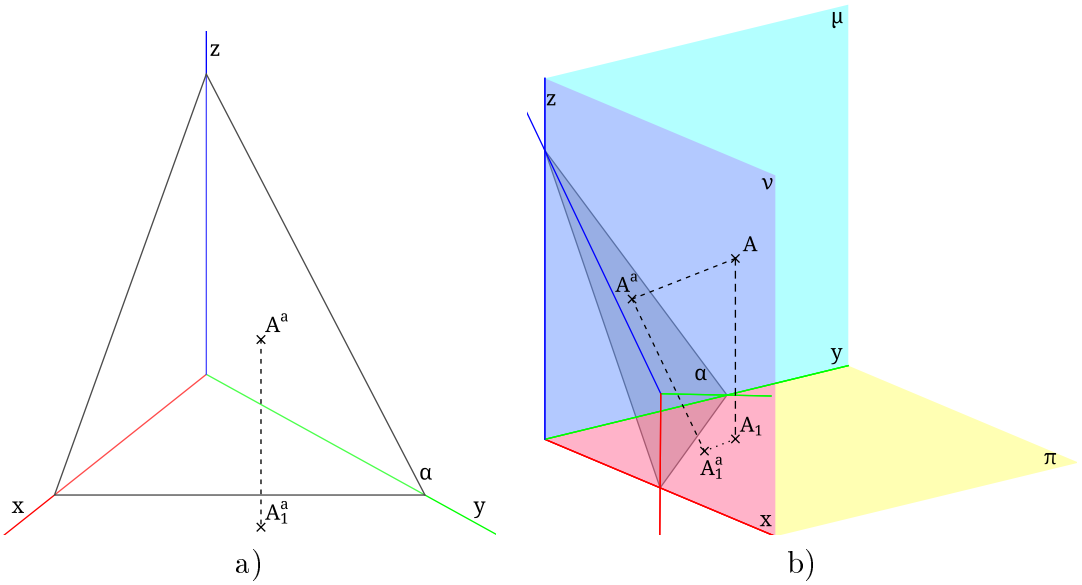
Mějme dány vlastní roviny α (*axonometrická průmětna*) a π (půdorysna) v rozšířeném prostoru $\overline{E_3}$, pro které platí $\alpha \nparallel \pi \wedge \alpha \not\perp \pi$.

Libovolný bod $A \in \overline{E_3}$ zobrazíme tak, že jej kolmo promítneme do průmětny π do bodu A_1 a pak kolmo promítneme jak bod A tak i A_1 do axonometrické průmětny α do bodů A_1^a a A^a, viz obr. 2.16. Obrazem bodu A je tedy uspořádaná dvojice bodů (A_1^a, A^a) ležící na ordinále, která je kolmá na průsečnici rovin π a μ.

Pro pravoúhlou axonometrii platí následující tvrzení:

- Pravoúhlá axonometrie je vzájemně jednoznačné zobrazení bodů prostoru $A \in \overline{E_3}$ na uspořádané dvojice bodů (A_1^a, A^a), které leží na ordinálách průmětny α.

Pravoúhlá axonometrie s jednou pomocnou průmětnou se v praxi moc nepoužívá, častěji se využívá kombinace axonometrické průmětny α a tří pomocných průměten, za které volíme souřadnicové roviny π (půdorysna), ν (nárysna)



Obrázek 2.16: Zobrazení bodu A v pravoúhlé axonometrii s pomocným průmětem do půdorysny π a) situace v axonometrické průmětně α b) náhled na situaci v prostoru

a μ (bokorysna), viz obr. 2.17, kde jsou zobrazeny všechny tři pomocné průměty. Axonometrickou průmětnu pak volíme tak, aby neprocházela počátkem 0 souřadnicového systému a byla obecná vůči všem souřadnicovým rovinám, tj. $\alpha \not\perp \pi \wedge \alpha \not\perp \nu \wedge \alpha \not\perp \mu \wedge \alpha \nparallel \pi \wedge \alpha \nparallel \nu \wedge \alpha \nparallel \mu$.

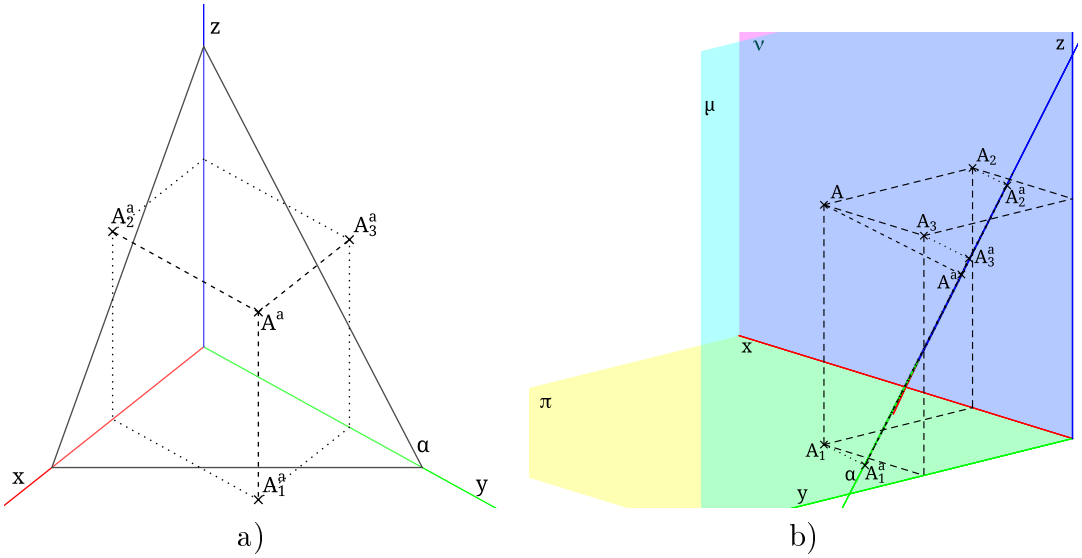
Průsečnice pomocných průměten π, ν a μ a roviny α jsou vlastně stopy axonometrické průmětny v jednotlivých pomocných rovinách, tj. p^α, n^α a m^α, nebo je možné je chápat jako stopy jednotlivých průměten v axonometrické rovině, tj. $p^\alpha = a^\pi, n^\alpha = a^\nu$ a $m^\alpha = a^\mu$. Tyto přímky se protínají na osách, po řadě tedy sestrojíme body $X = a^\pi \cap a^\nu, Y = a^\nu \cap a^\mu$ a $Z = a^\mu \cap a^\pi$. Body X, Y, Z tvoří *axonometrický trojúhelník*.

Průměty os x, y a z do axonometrické průmětny x^a, y^a, z^a a axonometrický průmět počátku 0^a tvoří *axonometrický osový kříž*.

Pro axonometrický osový kříž a axonometrický trojúhelník platí následující věty:

- Axonometrický trojúhelník je ostroúhlý.
- Axonometrický osový kříž je tvořen výškami axonometrického trojúhelníka.
- Každá z přímek axonometrického osového kříže leží v tupém úhlu zbývajících dvou přímek.

Jestliže zvolíme místo axonometrické průmětny α rovinu $\alpha' \parallel \alpha$, pak nový axonometrický trojúhelník $X'Y'Z'$ je podobný trojúhelníku XYZ roviny α. Navíc platí, že odpovídající strany trojúhelníků jsou navzájem rovnoběžné. Střed podobnosti je v průmětu počátku 0^a. Platí tedy, že osový kříž je pro obě roviny totožný. Axonometrická průmětna je tedy jednoznačně dána normálovým vektorem axonometrické průmětny.



Obrázek 2.17: Zobrazení bodu A v pravoúhlé axonometrii s pomocnými průměty souřadnicových rovin π, ν a μ a) situace v průmětně α b) náhled na situaci v prostoru, pohled je nastaven tak, aby se průmětna α zobrazila do přímky

A platí následující tvrzení:

- Pravoúhlá axonometrie je jednoznačně určena buď axonometrickým trojúhelníkem, nebo osovým křížem.

Axonometrický trojúhelník je dán délkami jeho stran. Axonometrický osový kříž je zadán pomocí úhlů jednotlivých jeho přímek $\sphericalangle xy, \sphericalangle yz$ a $\sphericalangle zx$ (index se zpravidla nepíše). [10]

Poslední zobrazovací metodou, kterou budeme v příkladech využívat, je středové promítání, resp. jeho speciální případ lineární perspektiva.

2.6 Středové promítání

Mějme dánu vlastní rovinu π v rozšířeném euklidovském prostoru $\overline{E_3}$ a vlastní bod $S \notin \pi$.

Libovolný bod $A \neq S$ prostoru zobrazíme tak, že jej promítneme do průmětny π středově z bodu S do bodu A^s a také jej promítneme do π kolmo na bod A_2. Obrazem bodu A je tedy uspořádaná dvojice (A_2, A^s), která leží na přímce procházející bodem S_2, tj. kolmým průmětem bodu S do π. Tuto přímku nazýváme *ordinálou*. Bod S_2 nazýváme *hlavní bod*. Pokud by bod A ležel na spojnici bodů SS_2, tj. na pravoúhlé promítací přímce bodu S, pak se zobrazí do bodu S_2 a platí tedy $A_2 = A^s = S_2$.

Vzdálenost d bodu S od průmětny π se nazývá *distance*.

Pro středové promítání platí následující tvrzení:

- Středové promítání na jednu průmětnu je vzájemně jednoznačné zobrazení bodů $A \in \overline{E_3} \backslash \{s = SS_2\}$ na uspořádané dvojice (A_2, A^s) bodů průmětny $\pi \backslash \{S_2\}$, které leží na ordinálách procházejících hlavním bodem S_2.

- Středové promítání je určeno hlavním bodem a distancí.

Při zobrazování přímky p různoběžné s průmětnou můžeme nalézt dva speciální body. Prvním je stopník N této přímky, tj. průsečík s průmětnou, pro který platí $N_2 = N^s$. Druhý speciální bod je *úběžník (úběžný bod)* U^s, což je bod obrazu přímky p, na který se zobrazí při středovém promítání nevlastní bod U_∞ přímky p. Tento bod U^s nalezneme, vedeme-li středem promítání S přímku p' rovnoběžnou s přímkou p. U^s je pak stopník přímky p'.

Pro průměty přímek ve středovém promítání platí:

- Nutná a postačující podmínka pro to, aby přímka byla kolmá k průmětně, je:

  Její úběžník U^s splývá s hlavním bodem S_2.

- Nutná a postačující podmínka pro to, aby odchylka přímky od průmětny se rovnala ω $(0 < \omega < \frac{1}{2}\pi)$, je:

  Její úběžník U^s leží na kružnici k se středem v hlavním bodě S_2 a o poloměru $d \cdot \mathrm{cotg}(\omega)$.

- Rovnoběžné přímky mají společný úběžník U_s.

- Pro různoběžné přímky platí, že spojnice jejich úběžníků je rovnoběžná se spojnicí jejich stopníků.

Průmět roviny ϱ ve středovém promítání je dán stopou n^ϱ a středovým průmětem u^ϱ, tzv. *úběžnicí* její nevlastní přímky u^ϱ. Úběžnici roviny ϱ nalezneme jako stopu rovnoběžné roviny $\varrho' \parallel \varrho$ procházející středem S [10].

Pro průměty rovin platí následující tvrzení [10]:

- Stopa a úběžnice roviny ϱ, která je různoběžná s průmětnou, jsou vzájemně rovnoběžné.

- Nutná a postačující podmínka pro to, aby rovina byla kolmá k průmětně, je:

  Její úběžnice prochází hlavním bodem S_2.

- Nutná a postačující podmínka pro to, aby rovina měla od průmětny odchylku ω, je:

  Její úběžnice je tečna kružnice se středem v hlavním bodě S_2 a poloměrem $d \cdot \mathrm{cotg}(\omega)$.

2.7 Středové promítání s pomocnou průmětnou

V předešlé kapitole bylo popsáno středové promítání, kde se pomocný průmět promítal kolmo do stejné průmětny jako středový průmět, jinými slovy pomocná průmětna splývala s průmětnou π, zde budeme značit π_0. V tomto středovém promítání je pomocná průmětna π_1, pro kterou platí $\pi_1 \perp \pi_0$.

Bod $A \in \overline{E_3}$ promítneme kolmo do pomocné průmětny π_1, kde dostáváme bod A_1 a oba body, tj. A i A_1, pomocí středu promítneme do průmětny π_0. Tyto průměty nazýváme A^s a A_1^s.

Středové promítání s pomocnou průmětnou je vzájemně jednoznačné zobrazení bodů $A \in \overline{E_3} \backslash \{s\}$ (přímka s je dána bodem S a jeho kolmým průmětem do π_0) na uspořádané dvojice bodů (A_1^s, A^s) průmětny $\pi \backslash \{S_\infty\}$ (S_∞ je směr kolmý na π_1), které leží na ordinálách procházejících bodem S_∞.

Středové promítání, které využívá obou pomocných průměten, tj. obou předchozích promítání (středové a středové s pomocnou průmětnou), nazýváme *technickým středovým promítáním*, které se často využívá v praxi.

2.8 Lineární perspektiva

Technické středové promítání, které má připomínat co nejvíce vidění lidským okem, nazýváme *lineární perspektiva*. Lineární perspektiva není definována formálně, je popsána pouze experimentálně odvozenými pravidly.

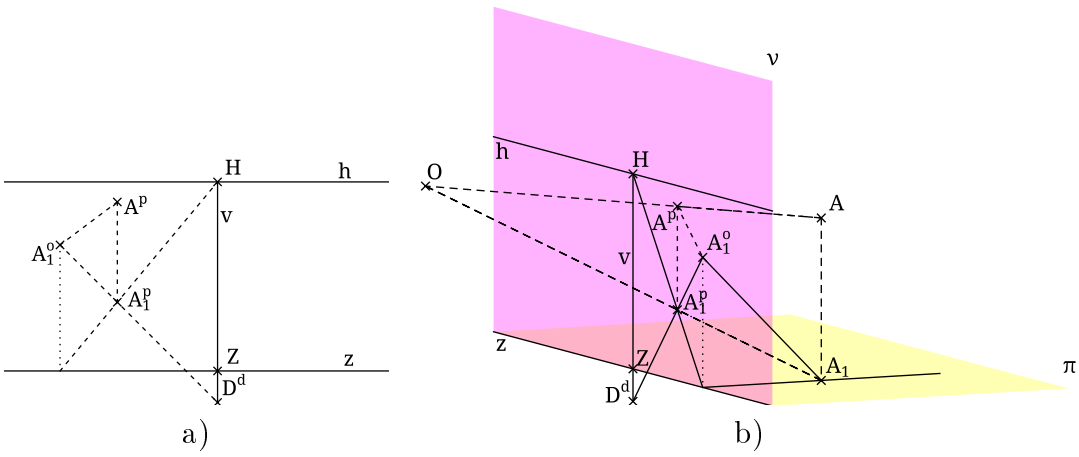
Základní podmínky jsou tyto:

1. Distance je nejméně $20 - 25$ cm, tj. má se rovnat minimální vzdálenosti, ze které lze ještě dobře pozorovat jak objekty, tak i obrazy.

2. Pozorovaný předmět leží v rotačním kuželovém prostoru s vrcholem ve středu promítání S, s osou kolmo k průmětně a s vrcholovým úhlem, který se přibližně rovná $40° - 60°$.

   Obraz objektu má zhruba vyplňovat kruh o středu v hlavním bodě, jehož poloměr se přibližně rovná jedné třetině distance.

3. Vzdálenost středu od pomocné průmětny π_1 má odpovídat poloze oka při vidění.



Obrázek 2.18: Zobrazení bodu A v lineární perspektivě a) situace v průmětně ν b) náhled na situaci v prostoru

Jelikož lineární perspektiva je speciální případ středového promítání, můžeme využít všech tvrzení platných pro toto promítání. Pro některé pojmy se v lineární perspektivě používá speciálních názvů.

Za průmětnu π_0 volíme nárysnu ν. Středu promítání říkáme *oko* a značíme jej O. Jeho pravoúhlý průmět do průmětny ν nazýváme *hlavní bod* a značíme jej H. Vzdálenost $d = |OH|$ je distance, přímka OH je *hlavní přímka*.

Pomocnou rovinu volíme půdorysnu π. Pomocná průmětna π se označuje *základní rovina*, její stopa na průmětně π je *základnice* a značí se z, viz obr. 2.18, kde je navíc i zobrazen bod A. Směrová rovina procházející okem rovnoběžná se základní rovinou je *obzorová rovina*. Její stopa, tj. úběžnice základní roviny, se nazývá horizont h. Horizont je úběžnice všech horizontálních rovin. Výška horizontu je vzdálenost horizontu od základnice. *Stanovištěm* nazýváme kolmý průmět O do základní roviny, tj. O_1. *Výška oka* je vzdálenost $|OO_1|$, tj. výška horizontu. Rovina procházející okem kolmo k základnici se nazývá *hlavní vertikální rovina*. Její průsečnici v s průmětnou nazýváme *hlavní vertikálou*. Přímka v je úběžnicí všech vertikálních rovin. Průsečík hlavní vertikály a základnice se nazývá *základní bod* a značí se Z.

Distanční kružnice k_d je kružnice v průmětně π se středem S a poloměrem rovným distanci d. Body této kružnice nazýváme *distančníky*. Průsečíky distanční kružnice s horizontem nazýváme *levý* a *pravý distančník*, D^l, D^p, a průsečíky s hlavní vertikálou *horní* a *dolní distančník*, D^h, D^d. Levý a pravý distančník jsou úběžníky přímek, které leží v horizontálních rovinách a svírají s průmětnou úhel 45°. Horní a dolní distančník jsou úběžníky přímek, které leží ve vertikálních rovinách a s průmětnou svírají úhel 45°.

Přímky kolmé k průmětně se nazývají hloubkové a jejich úběžník je hlavní bod H.

Středové průměty bodů v lineární perspektivě nazýváme *perspektivy* a označujeme je indexem p, tj. např. A^p.

3. Sestrojení bodu, přímky a roviny

V této kapitole jsou řešené příklady na konstrukci bodů, přímek a roviny v jednotlivých promítáních – Mongeově promítání, kosoúhlém promítání, pravoúhlé axonometrii a lineární perspektivě.

Účelem této kapitoly je ukázat základní konstrukce v jednotlivých promítáních, která jsou teoreticky popsána v předešlé kapitole. Tyto konstrukce jsou pak v další kapitole, která je věnována konstrukcím těles, brány za známé a případně se na ně pouze odkazuje, nejsou již znova vysvětlovány.

Příklady mají vždy jedno zadání, které je postupně řešeno ve všech čtyřech promítáních. Řešení je také doplněno obrázky, které jsou z programu Lisa Viewer. Jsou vždy dva ukazující stejnou situaci – na jednom je situace v průmětně a druhý se snaží ukázat, jak daný příklad vypadá v náhledu na prostorovou situaci, tedy jak promítání funguje. Jelikož jsou ale obrázky pouze dvourozměrné a statické, nevystihují situaci tak názorně. Proto doporučuji využít program Lisa Viewer, který umožňuje v náhledu modelem libovolně otáčet, přibližovat atd., což pomáhá lépe "vidět" třetí rozměr.

K řešením v některých promítáních je v této kapitole přiložena i speciální animace ukazující specifika daného promítání. To je kvůli lepšímu pochopení základních konstrukcí v konkrétních promítáních. V další kapitole jsou již pouze obecné animace, a to z toho důvodu, aby bylo možné v programu snadno mezi promítáními přepínat (aniž by „překážely" pomocné konstrukce z ostatních promítání), což je jeden ze základních cílů této práce.

Ke každému příkladu je na CD také přiloženo PDF s předrýsovaným zadáním a výsledkem daného příkladu ve verzi pro tisk.

3.1 Zobrazení bodu

Zadání: V pravotočivé kartézské soustavě souřadnic v E_3 sestrojte následující body:

a) bod $P = [3, 5, 0]$ ležící v půdorysně

b) bod $N = [1, 0, 3]$ ležící v nárysně

c) bod $M = [0, 2, 4]$ ležící v bokorysně

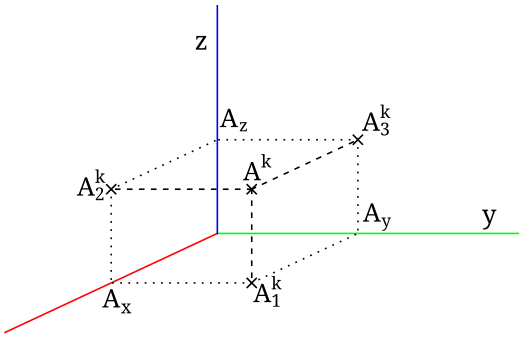
d) bod $A = [5, 3, 2]$

V souboru `Animace/Priklady/1_zobrazeni_bodu.obr` lze nalézt animaci k tomuto příkladu.

Obecné řešení v prostoru: V kartézské soustavě souřadnic jsou všechny tři osy navzájem kolmé a jednotky na nich stejně dlouhé. Při konstrukci bodu X nejdříve nalezneme body X_x, X_y a X_z, což jsou body na jednotlivých osách o souřadnicích daných souřadnicemi bodu X.

- $X = [x_X, y_X, z_X]$

- $X_x = [x_X, 0, 0]$
- $X_y = [0, y_X, 0]$
- $X_z = [0, 0, z_X]$



Obrázek 3.1: Souřadnicový kvádr pro bod A

Tyto body společně s počátkem, bodem X a průměty bodu X do průměten tvoří vrcholy souřadnicového kvádru, viz obr. 3.1 pro bod A.

Pokud je jedna ze souřadnic bodů nulová, souřadnicový kvádr se změní na rovinný obdélník, který leží v souřadnicové rovině dané osami, jejichž souřadnice nejsou nulové.

3.1.1 Řešení v Mongeově promítání

Doplnění zadání pro Mongeovo promítání: Mějme pravotočivou kartézskou soustavu souřadnic v E_3 (kladná část osy $x_{1,2}$ směřuje doleva).

Při rýsování na papír volíme polohu papíru na šířku[1]. Počátek soustavy souřadnic má polohu vůči papíru $O = [9, 8]_p$.

Řešení: Mongeovo promítání je kolmé promítání na dvě navzájem kolmé roviny π a ν. Bodu A přiřadí dvojici (A'_1, A_2), kde $A'_1 \in \pi$ je kolmý průmět bodu A do půdorysny a $A_2 \in \nu$ je kolmý průmět bodu A do nárysny. Je-li $A = [x_A, y_A, z_A]$, pak souřadnice jeho průmětů jsou následující: $A'_1 = [x_A, y_A, 0]$ a $A_2 = [x_A, 0, z_A]$, jak je vidět na obr. 3.2.

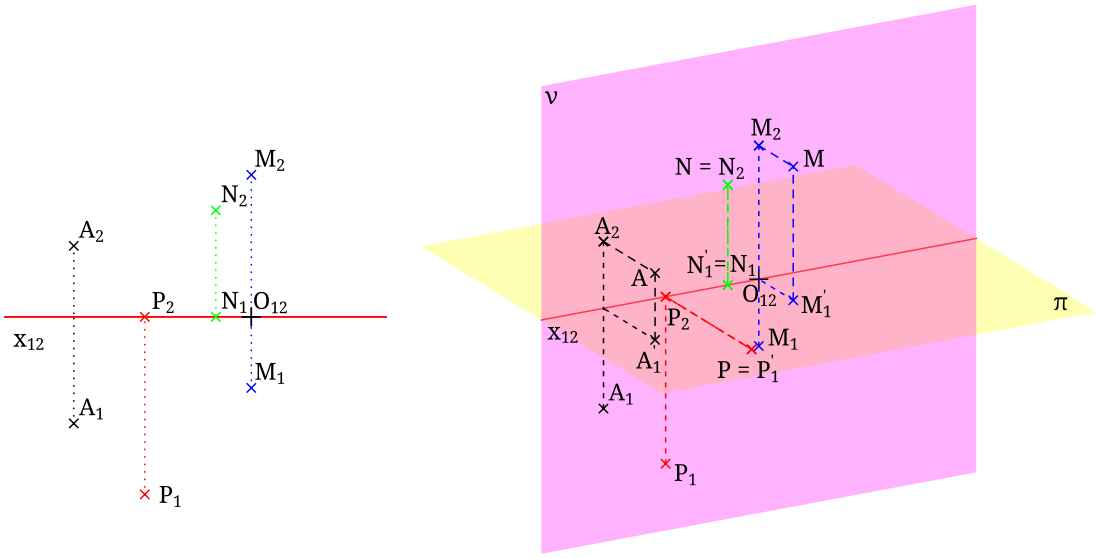
Nyní půdorysnu sklopíme do nárysny kolem osy x, která je průsečnicí nárysny a půdorysny. Průmět bodu A'_1 se zobrazí na A_1 o souřadnicích $[x_A, 0, -y_A]$. x-ová souřadnice se při sklápění nemění, y-ová je nulová – sklápíme do nárysny a absolutní hodnota z-ové souřadnice je rovna poloměru otáčení, tj. y_A. Otáčíme tak, aby kladná polorovina půdorysny splynula se zápornou částí nárysny.

V nárysně tedy můžeme volit novou kartézskou soustavu souřadnic v E_2 se středem 0_{MP} v počátku soustavy v E_3, osa x_{MP} splývá s osou x, osa y_{MP} je totožná s osou z. Souřadnice v této soustavě budeme značit dolním indexem MP.

Při rýsování sestrojíme osu x, která je průsečnicí nárysny a půdorysny, značíme ji tedy $x_{1,2}$. Osu z a průmět osy y většinou nezobrazujeme.

Body P, N, M a A tedy zobrazíme následovně:

[1] Rýsujeme pouze na polovinu papíru, tj. formát A5



Obrázek 3.2: Body P, N, M a A v Mongeově promítání a) situace v průmětně, b) náhled na situaci v prostoru

a) $P; P_1 = [3,5]_{MP} \wedge P_2 = [3,0]_{MP}$

b) $N; N_1 = [1,0]_{MP} \wedge N_2 = [1,3]_{MP}$

c) $M; M_1 = [0,-2]_{MP} \wedge M_2 = [0,4]_{MP}$

d) $A; A_1 = [5,-3]_{MP} \wedge A_2 = [5,2]_{MP}$

Průměty těchto bodů nalezneme na obr. 3.2. Pro bod A, i pro ostatní body, můžeme sestrojit body A_x, A_y a A_z.

3.1.2 Řešení v kosoúhlém promítání

Doplnění zadání pro kosoúhlé promítání: Mějme pravotočivou kartézskou soustavu souřadnic v E_3 (kladná část osy y směřuje doprava). Kosoúhlé promítání je dáno krácením $q = \frac{1}{2}$ a $\omega = 155°$.

Při rýsování na papír volíme polohu papíru na šířku[2]. Počátek soustavy souřadnic v kosoúhlém promítání má souřadnice $0 = [5,8]_p$.

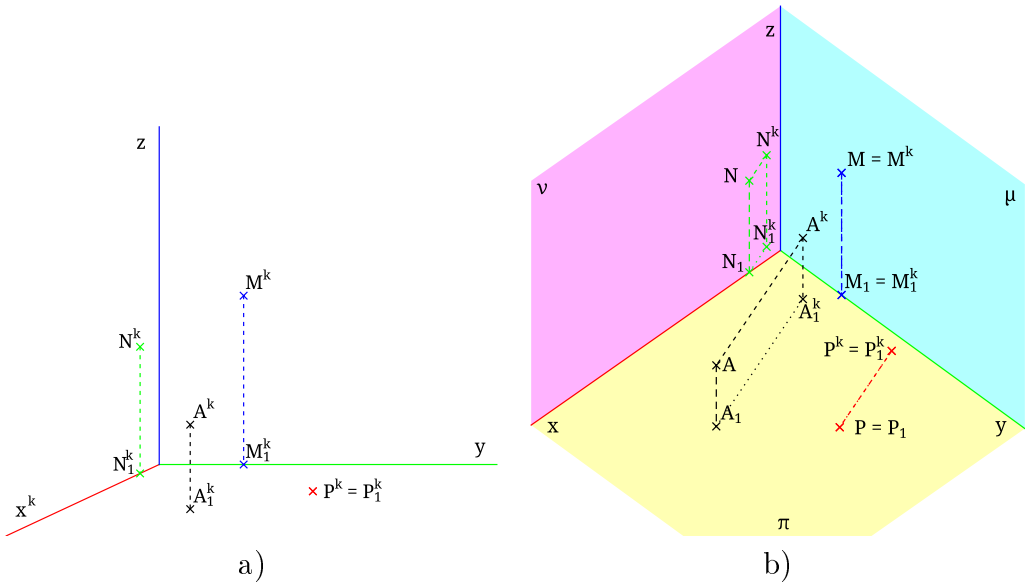
Řešení: Kosoúhlé promítání je rovnoběžné promítání na jednu průmětnu. Směr promítání je různoběžný s průmětnou, ale není kolmý. Při pravotočivé soustavě souřadnic promítáme na bokorysnu, tj. souřadnou rovinu danou osami y, z. Jelikož tyto osy leží v průmětně, vzdálenosti se na nich nezkreslují, stejně tak i ve všech rovinách s bokorysnou rovnoběžných. Osa x se však zkresluje. Toto zkreslení vyjadřujeme pomocí hodnoty q, která je rovna poměru jednotky na zkreslené ose x ku nezkreslené jednotce.

Při rýsování osu y volíme vodorovně, osa z je kolmá na osu y. Úhel mezi osou y a krácenou osou x značíme ω. Krácenou osu x budeme značit x^k, protože často využíváme i nekrácenou osu x z přidruženého Mongeova promítání.

[2]Rýsujeme pouze na polovinu papíru, tj. formát A5

Hodnota q určuje směr afinity mezi kosoúhlým průmětem osy x^k a zápornou částí osy z, přímku, která je určená tímto směrem budeme značit s, viz obr. 3.4. Přímku s vedeme bodem na krácené ose x^k ve vzdálenosti q od počátku a jednotkou na záporné části osy z.

a) Kosoúhlý průmět bodu P ležícího v půdorysně splývá s kosoúhlým půdorysem, tj. $P^k = P_1^k$. Kosoúhlý průmět bodu P tedy sestrojíme shodně jako kosoúhlý půdorys bodu A, viz postup konstrukce 3.1. Sestrojíme bod P_y a bod P_1, což je půdorys v přidruženém Mongeově promítání. Bod P^k nalezneme pomocí ordinál a pomocí půdorysu směru promítání s_1.



Obrázek 3.3: Body P, N, M a A v kosoúhlém promítání a) pohled ve směru promítání, b) náhled na situaci v prostoru

b) Kosoúhlý průmět bodu N ležícího v nárysně sestrojíme pomocí bodu N_x, který leží na krácené ose x^k, ze kterého vedeme rovnoběžku s osou z. Na tuto rovnoběžku vyneseme velikost z-ové souřadnice. Platí tedy, že kosoúhlý průmět se rovná kosoúhlému bokorysu.

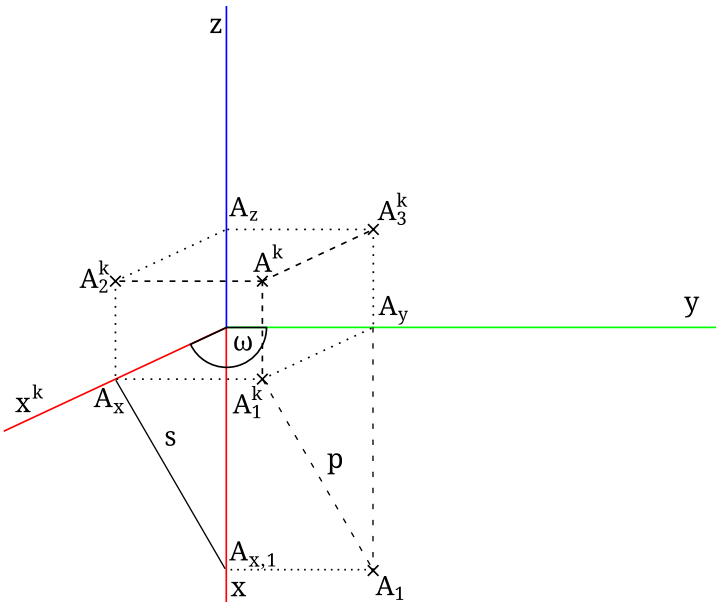
c) Bod M leží v bokorysně, v průmětně, do které promítáme, zůstává tedy na místě. Kosoúhlý průmět bodu M ležícího v bokorysně splývá s kosoúhlým bokorysem.

d) Bod A zobrazíme na dvojici (A^k, A_1^k), kde A^k je kosoúhlý průmět bodu A a A_1^k je kosoúhlý půdorys bodu A. Případně můžeme použít další pomocné průměty, viz kap. 2.4.

Kosoúhlý průmět bodu A sestrojíme následovně:

Postup konstrukce 3.1. kosoúhlý průmět bodu A

1. $A_y; A_y = [0, 3, 0] \Rightarrow A_y^k = A_{y1}^k$



Obrázek 3.4: Konstrukce bodu A pomocí přidruženého Mongeova promítání na půdorysnu a bokorysnu, navíc vyznačen úhel ω a poměr krácení q

2. $A_x; A_x = [5, 0, 0]$ – sestrojíme bod A_{x1} tedy půdorys z přidruženého Mongeova promítání
3. $o^{Ak}; o^{Ak} \parallel x_k \wedge A_y \in o^{Ak}$
4. $p; p \parallel s \wedge A_{x1} \in p$, kde s je určeno krácením q
5. $A_1^k; A_1^k = p \cap o^{Ak}$
6. $k; k \parallel z \wedge A_1^k \in k$
7. $A^k; |A^k A_1^k| = z_A = 2$

Analogicky sestrojíme ostatní body, viz obr. 3.3. Navíc můžeme sestrojit souřadnicový kvádr, resp. jeho kosoúhlý průmět, a dourčit tak zbylé průměty bodů, viz obr. 3.4.

3.1.3 Řešení v pravoúhlé axonometrii

Doplnění zadání pro pravoúhlou axonometrii: Mějme pravotočivou soustavu souřadnic v E_3 s počátkem 0. Axonometrie je dána axonometrickým trojúhelníkem. Délky stran trojúhelníka jsou $|XY| = 7,2, |YZ| = 6,4$ a $|ZX| = 7,8$.

Polohu papíru volíme na šířku[3]. Souřadnice bodu $X = [3; 6, 8]_p$ a spojnice bodů XY je rovnoběžná se spodním okrajem papíru.

V souboru `Animace/Priklad_1/1_bod_Ax.obr` lze nalézt speciální animaci ke konstrukci bodu A v pravoúhlé axonometrii.

[3]Rýsujeme pouze na polovinu papíru, tj. formát A5

Řešení: Pravoúhlá axonometrie je rovnoběžné promítání na jednu průmětnu, kdy směr je kolmý na průmětnu. Průmětna α je různoběžná k souřadnicovým osám. Promítání je jednoznačně určeno směrem promítání, resp. rovinou α, přesnější popis v kap. 2.5.

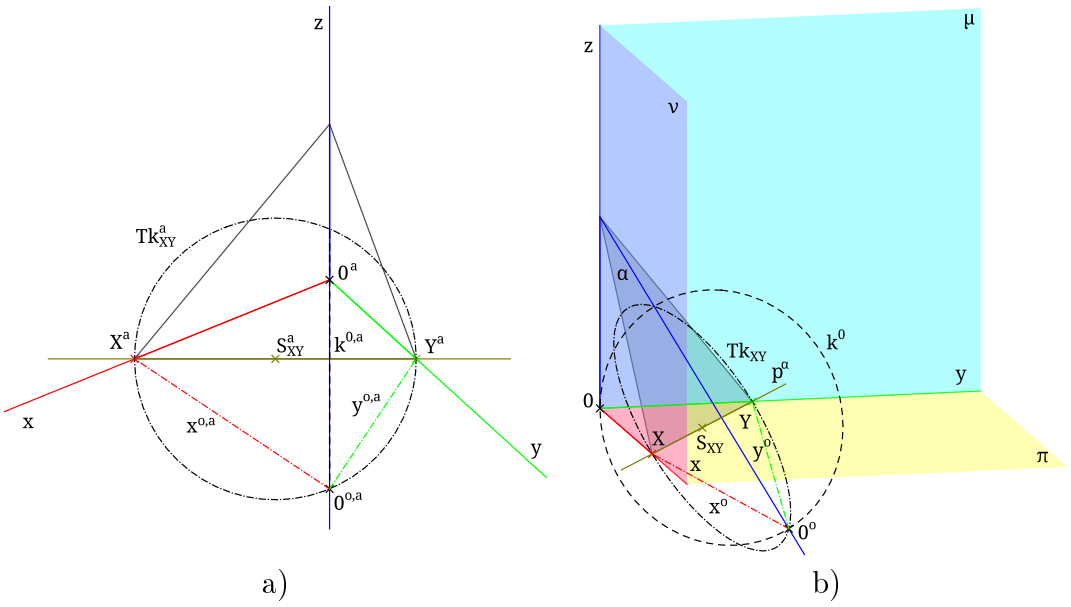
Axonometrickou průmětnu nejčastěji zobrazujeme pomocí jejích stop v souřadnicových rovinách, pokud ji zobrazujeme (často nezáleží na přesné poloze roviny, tedy její vzdálenosti od počátku). Jelikož je poloha průmětny různoběžná se souřadnicovými rovinami, tvoří její stopy ostroúhlý trojúhelník. Průměty os x, y a z tvoří výšky axonometrického trojúhelníka.

Jednotlivé osy se zkreslují. Abychom byli schopni nanášet přesné vzdálenosti, souřadnice, musíme zobrazit jejich skutečné velikosti. Nejčastěji se používají tyto dva postupy:

1. Otočení souřadnicové roviny do průmětny α kolem stopy α
   - Např.: Otočení půdorysny π do α kolem osy p^α, viz postup konstrukce 3.2.
   - Otáčíme souřadnicovou rovinu kolem stopy axonometrické průmětny v této rovině. Otočený počátek 0^o nalezneme na průsečíku kolmice na osu otáčení procházející průmětem počátku 0 a Thaletovy kružnice nad úsečkou, kterou na stopě vytíná axonometrický trojúhelník, viz obr. 3.5.
2. Sklopení roviny kolmé na průmětnu α obsahující jednu z os
   - Např.: Sklopení roviny ϱ_z do α kolem axonometrické stopy a^{ϱ_z}, kde $\varrho_z \perp \alpha \wedge z \subset \varrho_z$, viz postup konstrukce 3.3.
   - Sklápíme rovinu kolmou na axonometrickou průmětnu, promítne se tedy na stopu a^ϱ, viz kap. 2.1.2. Opět sklopený počátek 0^o nalezneme na průsečíku kolmice na osu otáčení procházející průmětem počátku 0 a Thaletovy kružnice nad úsečkou, kterou na stopě vytíná axonometrický trojúhelník.

Postup konstrukce 3.2. otočení půdorysny π do průmětny α

1. osa otočení p_1^α – půdorysná stopa roviny α
2. $X; p_1^\alpha \cap x$
3. $Y; p_1^\alpha \cap y$
4. odpovídající body A_1^a a A_1^o leží na kolmici na osu otáčení
5. $p; p \perp p_1^\alpha \wedge 0^a \in p$
6. Tk_{XY} – Thaletova kružnice nad průměrem XY
7. $0^o; 0^o = p \cap Tk_{XY}$ – neboť osy x, y svírají u 0 pravý úhel
8. afinita – osa afinity p_1^α, dva odpovídající si body 0 a 0^o



Obrázek 3.5: Otočení půdorysny π do průmětny α a) situace v průmětně, b) náhled na situaci v prostoru

9. $x^o; X \in x^o \wedge 0^o \in x^o$
10. $y^o; Y \in y^o \wedge 0^o \in y^o$

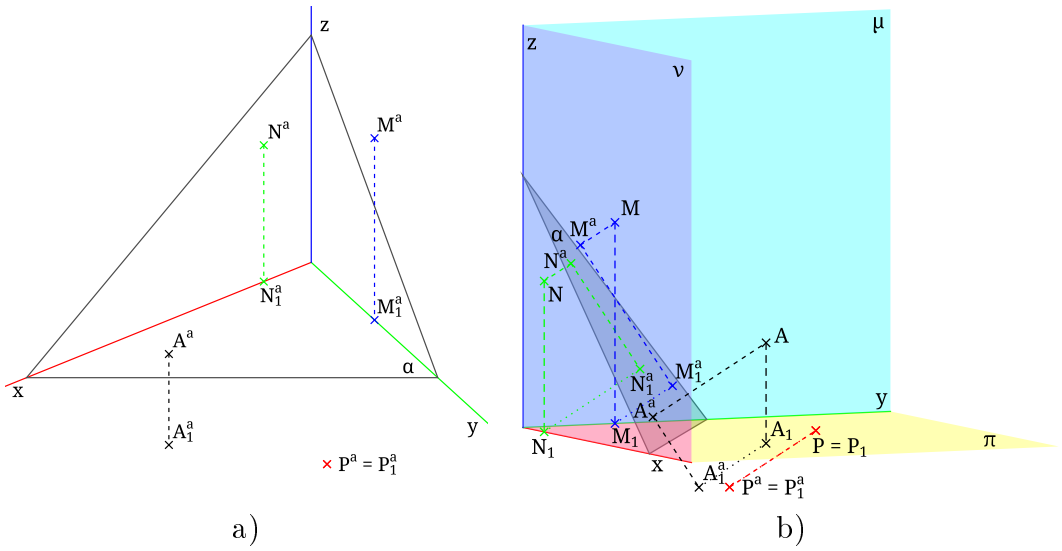
Postup konstrukce 3.3. sklopení roviny ϱ_z do průmětny α

1. $\varrho_z; \varrho_z \perp \alpha \wedge z \subset \varrho_z$
2. $a^{\varrho_z}; a^{\varrho_z} = \varrho_z \cap \alpha$ – axonometrická stopa roviny ϱ_z
3. $Z; Z = a^{\varrho_z} \cap z$
4. $P; P = a^{\varrho_z} \cap p_1^a$
5. $q; q \perp a^{\varrho_z} \wedge 0 \in q$
6. Tk_{ZP} – Thaletova kružnice nad průměrem ZP
7. $0^o; 0^o = q \cap Tk_{ZP}$ – neboť osa z a půdorysna π svírají u 0 pravý úhel
8. afinita – osa afinity a^{ϱ_z}, dva odpovídající si body 0 a 0^o
9. $z^o; Z \in z^o \wedge 0^o \in z^o$

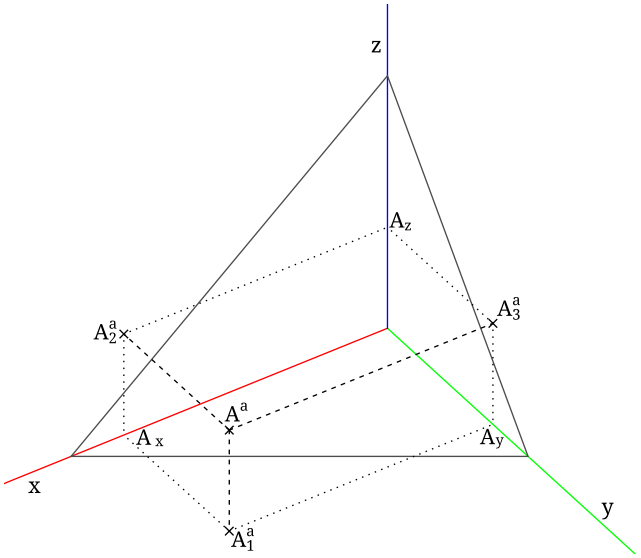
Bod X zobrazíme na dvojici (X^a, X_1^a), kde X^a je axonometrický průmět bodu X a X_1^a je axonometrický půdorys bodu X. Případně můžeme použít pomocné průměty do jiných souřadnicových rovin než do půdorysny, viz kap. 2.5.

Nejdříve sestrojíme body P, N a M.

a) Bod P má nulovou z-ovou souřadnici, leží tedy v půdorysně. Jeho axonometrický průmět splývá s axonometrickým půdorysem, tj. $P^a = P_1^a$, viz obr. 3.6.



Obrázek 3.6: Body P, N, M a A v pravoúhlé axonometrii a) situace v průmětně, b) náhled na situaci v prostoru



Obrázek 3.7: Souřadnicový kvádr pro bod A v pravoúhlé axonometrii

b) Bod N má nulovou souřadnici y_N a tedy leží v nárysně, platí tedy $N^a = N_2^a$. Tento průmět nalezneme otočením nárysny ν do α. Axonometrický půdorys bodu N, $N_1^a \in x$ a $N_1^a \in k \wedge k \parallel z$.

c) Bod M leží v bokorysně, pro jeho průměty tedy platí, že $M^a = M_3^a$. Axonometrický bokorys můžeme nejrychleji nalézt otočením bokorysny do průmětny α. Axonometrický půdorys leží na ose y. Ordinála, která spojuje axonometrický půdorys a bokorys, je rovnoběžná s osou z.

d) Axonometrický průmět bodu A nalezneme takto:

Postup konstrukce 3.4. konstrukce axonometrického průmětu bodu A

1. Otočíme π do α – nalezneme $0^o, x^o$ a y^o

2. $A_1^o; A_1 = [5, 3, 0]$
3. $A_1^a;$ – nalezneme pomocí afinity, např. pomocí přímky $A0$
4. Sklopíme ϱ_z do α – nalezneme $0'^o$ a z^o
5. $A_z^o; A_z^o = [0, 0, 2]$
6. $k; k \perp a^{\varrho_z} \wedge A_z^o \in k$
7. $A_z^a; A_z^a = z \cap k$
8. $o^{Aa}; o^{Aa} \parallel z \wedge A_1^a \in o^{Aa}$
9. $A^a; |A_1^a A^a| = |0A_z^a|$

Pro bod A můžeme sestrojit souřadnicový kvádr, resp. doplnit zbylé pomocné průměty bodu A, viz obr. 3.7.

3.1.4 Řešení v lineární perspektivě

Doplnění zadání pro lineární perspektivu: Mějme pravotočivou soustavu souřadnic v $\overline{E_3}$ s počátkem 0. Lineární perspektiva je dána distancí $d = 7$, základnice z splývá s osou x, průmětna splývá s nárysnou. Výška středu promítání, resp. vzdálenost $|HZ|$ je rovna 5.

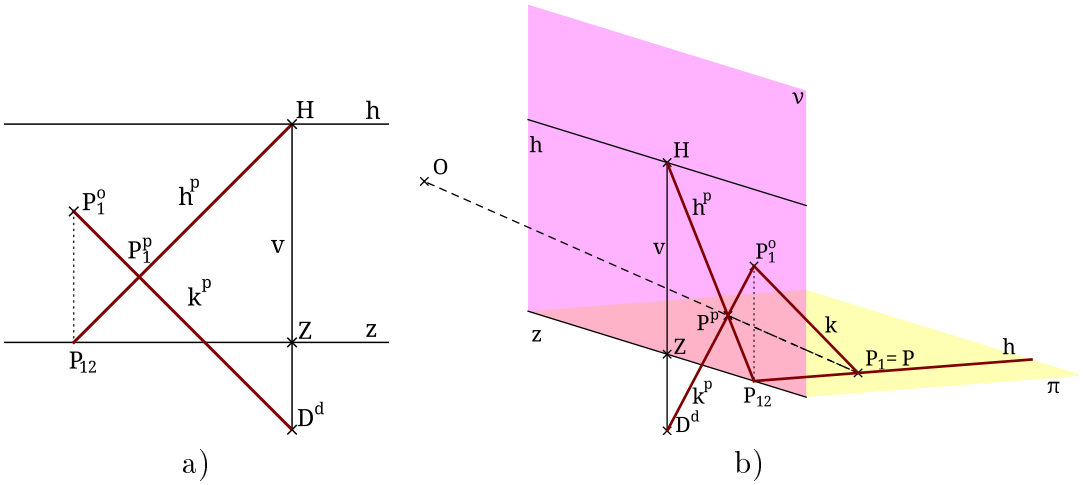
Při rýsování na papír volíme polohu papíru na šířku[4]. Základní bod Z má souřadnice $Z = [6, 8; 9, 5]_p$, základnice z je rovnoběžná se spodním okrajem papíru.

V souboru `Animace/Priklad_1/1_bod_LP.obr` lze nalézt speciální animaci ke konstrukci bodu A v lineární perspektivě.

Řešení: Lineární perspektiva je středové promítání na průmětnu ν s pomocnou průmětnou π. Lineární perspektiva je dána středem O a průmětnou. Průmětnu zde budeme vždy volit jako nárysnu a jako pomocnou průmětnu budeme brát půdorysnu. Distance d je tedy vzdálenost středu promítání O od nárysny, výška oka (středu promítání) je vzdálenost bodu O od půdorysny. Základnice z je průsečnice průmětny a pomocné průmětny, tj. stopa pomocné roviny. Hlavní přímka h je úběžnice pomocné roviny, tj. přímka úběžníků. Dále sestrojujeme hlavní bod H, kolmý průmět bodu O do průmětny a také úběžník tzv. hloubkových přímek půdorysny, tj. přímek kolmých na základnici. Dolní distančník D^d je bod na hlavní vertikále, úběžnici rovin kolmých na průmětnu, a je vzdálen o distanci od bodu H (leží na polopřímce HZ). D^d je úběžník přímek, které leží ve vertikální rovině a svírají s průmětnou úhel 45°, více viz kap. 2.8.

Pro sestrojení perspektivního půdorysu používáme otočený půdorys do roviny π.

[4]Rýsujeme pouze na polovinu papíru, tj. formát A5



Obrázek 3.8: Půdorys bodu A v lineární perspektivě a) situace v průmětně, b) náhled na situaci v prostoru

a) Bod P ležící v půdorysně nejdříve otočíme do nárysny kolem základnice. Pro konstrukci perspektivního průmětu bodu P využijeme pomocných přímek procházejících bodem P: hloubkové přímky h a přímky k ležící v rovině kolmé k průmětně a svírající s ní úhel 45°. Tato konstrukce je znázorněna na obrázku 3.8.

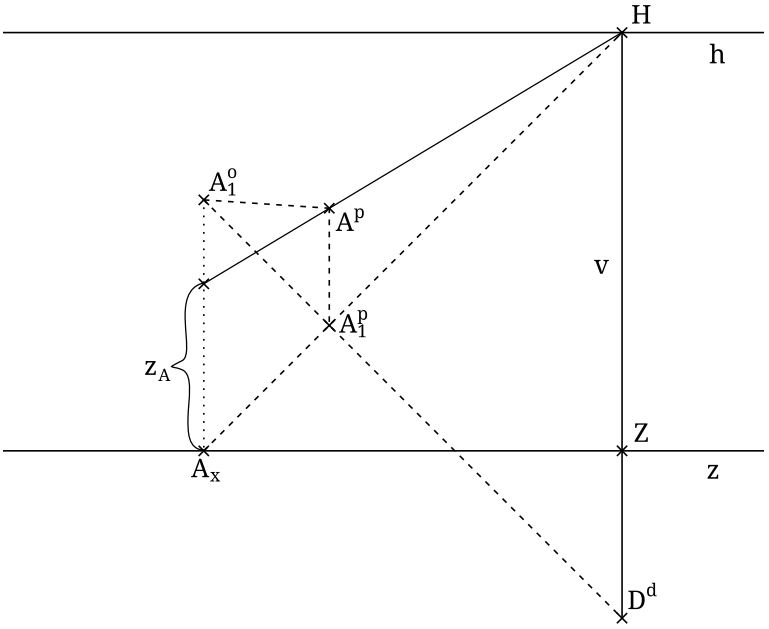
Postup konstrukce 3.5. Konstrukce perspektivního průmětu bodu $P \in \pi$

1. $h; h \perp \nu \wedge P \in h \Rightarrow h = h_1$
2. $P_{1,2}; P_{1,2} = h \cap z$ – kolmý průmět půdorysu bodu P do nárysny
3. $h^p; P_{1,2} \in h^p \wedge H \in h^p$ – hloubková přímka h ležící v půdorysně: stopník je $P_{1,2}$ a úběžník je H
4. P_1^o; otočený půdorys bodu P do nárysny
5. $k; P \in k \wedge k_1 \perp z \wedge |\sphericalangle \pi k| = 45°$
6. $k^p; P_1^o \in k^p \wedge D^d \in k^p$ – přímka k ležící v rovině kolmé na nárysnu: prochází P_1^o a úběžník je D^d
7. $P^k; P^k = h^p \cap k^p$

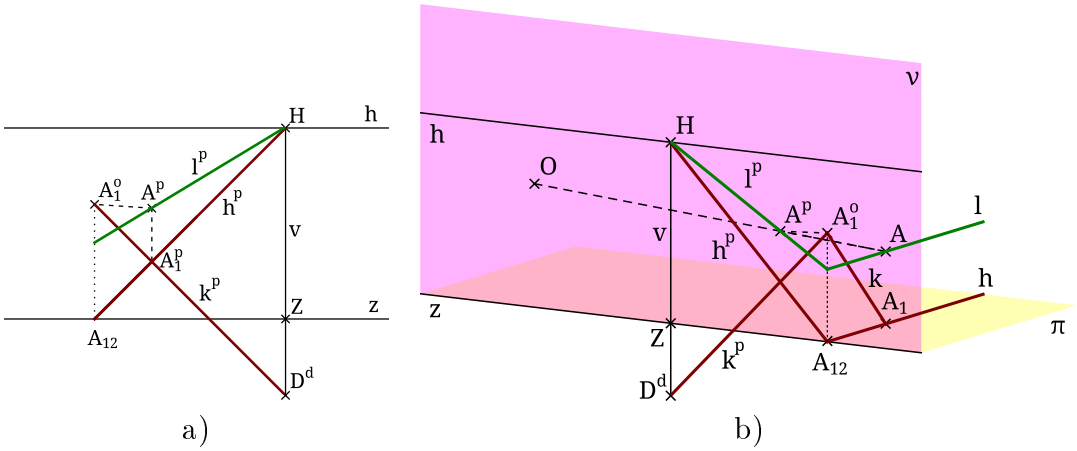
b) Bod N ležící v nárysně se při středovém promítání zobrazí sám na sebe, je samodružný, tj. $N = N^p$.

c) a d) Zbylé body budeme konstruovat shodně, v perspektivě nemají nijak speciální polohu, proto je uvedeme dohromady. Nejdříve sestrojíme jejich půdorysy, které pak otočíme do nárysny, získáme body M_1^o a A_1^o.

Nyní sestrojíme perspektivní půdorysy těchto bodů analogicky, jako jsme sestrojovali perspektivní průmět bodu P. Poslední, co nám zbývá, je sestrojit M^p a A^p, tj. vynést výšku, vzdálenost od půdorysny. Potřebujeme tedy sestrojit kolmici na půdorysnu, která se nám zobrazí na kolmici na základnici. Vzdálenosti se obecně nezachovávají, zachovávají se ale v nárysně, kam promítáme. Můžeme tedy



Obrázek 3.9: Nanesení z-ové souřadnice bodu A v lineární perspektivě

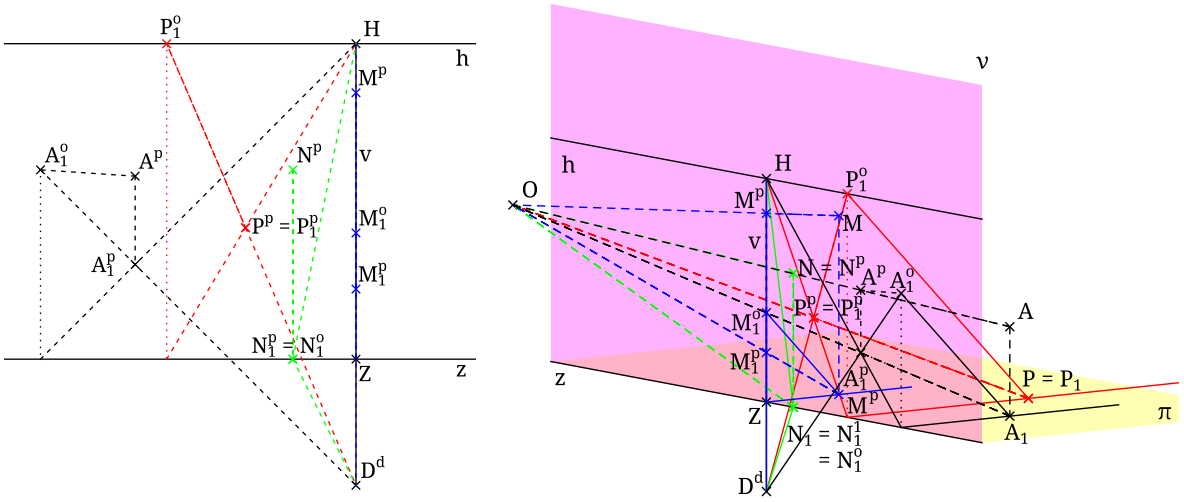


Obrázek 3.10: Konstrukce bodu A v lineární perspektivě, vynesení z-ové souřadnice a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru

vynést vzdálenost zde a pomocí přímky rovnoběžné s půdorysnou π procházející koncovým bodem ji přenést, viz obr. 3.9 a 3.10, kde jsou vyznačeny pomocné přímky, které se ke konstrukci využívají.

Postup konstrukce 3.6. Vynesení výšky z_A v lineární perspektivě od A^p

1. $l; A^p \in l$ – libovolná přímka procházející bodem A. Nejčastěji volíme hloubkovou přímku (známe její úběžník).
2. $U_l; U_l = h \cap l$ – úběžník přímky l
3. $P_l; P_l = z \cap l$ – stopník přímky l
4. $k; k \perp z \wedge P_l \in k \Rightarrow k = k^p$



a) b)

Obrázek 3.11: Body P, N, M a A v lineární perspektivě a) situace v průmětně, b) náhled na situaci v prostoru

5. $A'; A' \in k \wedge |A'P_l| = z_A$ – nanášíme-li kladnou $z-$ovou souřadnici, nanášíme do poloroviny dané z obsahující h, jinak do druhé poloroviny ($A' = A'^p$)

6. $l'; l' \parallel l \wedge A' \in l' \Rightarrow A' \in l'^p \wedge U_l \in l'^p$

7. $A^p; A^p = l'^p \cap k$

Analogicky sestrojíme perspektivní průmět bodu M. Průměty bodů P, N, M a A jsou zobrazeny v obr. 3.11.

3.2 Zobrazení přímky

Zadání: V pravotočivé kartézské soustavě souřadnic v E_3 jsou dány body A, B. Sestrojte:

a) přímku a danou body A, B a nalezněte její stopníky.

b) přímku b procházející bodem A kolmou na půdorysnu.

Pro každou přímku nalezněte všechny stopníky, tj. stopníky v rovinách, které se v daném promítání používají.

Souřadnice bodů:

$$A = [5, 2, 6]$$

$$B = [1, 4, 3]$$

V souboru `Animace/Priklad_2/2_primky.obr` lze nalézt animaci k tomuto příkladu.

3.2.1 Řešení v Mongeově promítání

Doplnění zadání pro Mongeovo promítání: Mějme pravotočivou kartézskou soustavu souřadnic v E_3. Kladná část osy x_{12} směřuje doleva.

Při rýsování na papír volíme polohu papíru na šířku[5]. Počátek soustavy souřadnic má polohu vůči papíru $0 = [10, 7]_p$.

V souboru `Animace/Priklad_2/2_primky_MP.obr` lze nalézt speciální animaci k tomuto příkladu upravenou pro Mongeovo promítání.

Řešení: Body A a B sestrojíme stejně jako body v předešlé úloze. Sestrojíme postupně přímky a a b.

a) Přímka a je dána body A, B. Půdorys a_1 přímky a nutně prochází půdorysy A_1 a B_1. Stejně tak i nárys a_2 přímky a prochází nárysy těchto bodů A_2 a B_2.

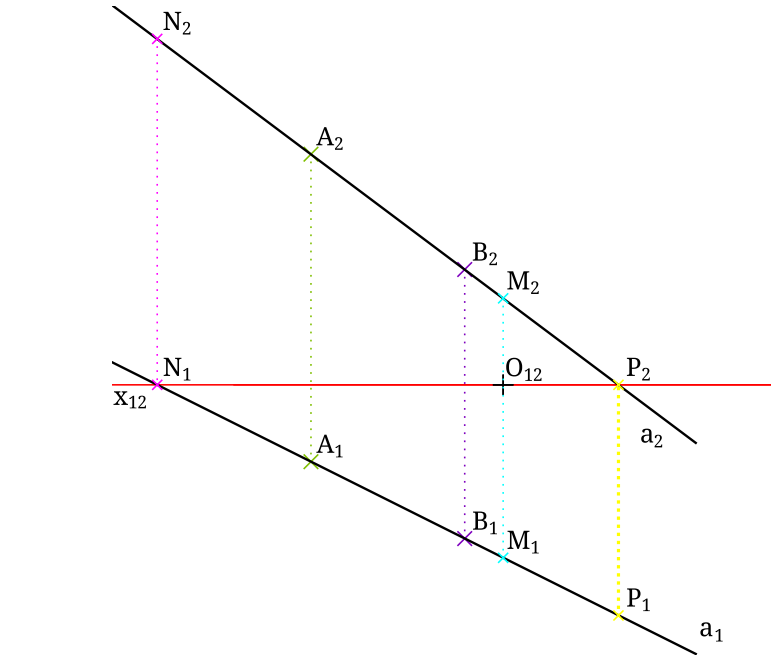
V Mongeově promítání promítáme na dvě průmětny, máme tedy dva stopníky, půdorysný a nárysný, více o stopníku v kap. 2.2. Stopník přímky je průsečík přímky s průmětnou. Hledáme tedy bod na přímce a, který leží v půdorysně, tj. má nulovou z-ovou souřadnici. Podíváme se do půdorysu, resp. kde půdorys protíná základnici, viz obr. 3.12. Tento bod je půdorys nárysného stopníku přímky a, N_1^a. Nárys nárysného stopníku nalezneme na nárysu přímky a a na ordinále. Analogicky nalezneme nárys půdorysného stopníku P_2^a jako průsečík nárysu přímky a se základnicí. Půdorys pak leží na půdorysu přímky a a příslušné ordinále, viz obr. 3.12.

b) Přímka b prochází bodem A a je kolmá na půdorysnu. Směr promítání je kolmý na půdorysnu, půdorys přímky b se tedy promítne na bod a platí $A_1 = b_1$. Nárysna je kolmá na půdorysnu, nutně je tedy přímka b s nárysnou rovnoběžná. Nárys b_2 přímky b prochází průmětem A_2 bodu A a je kolmý na základnici.

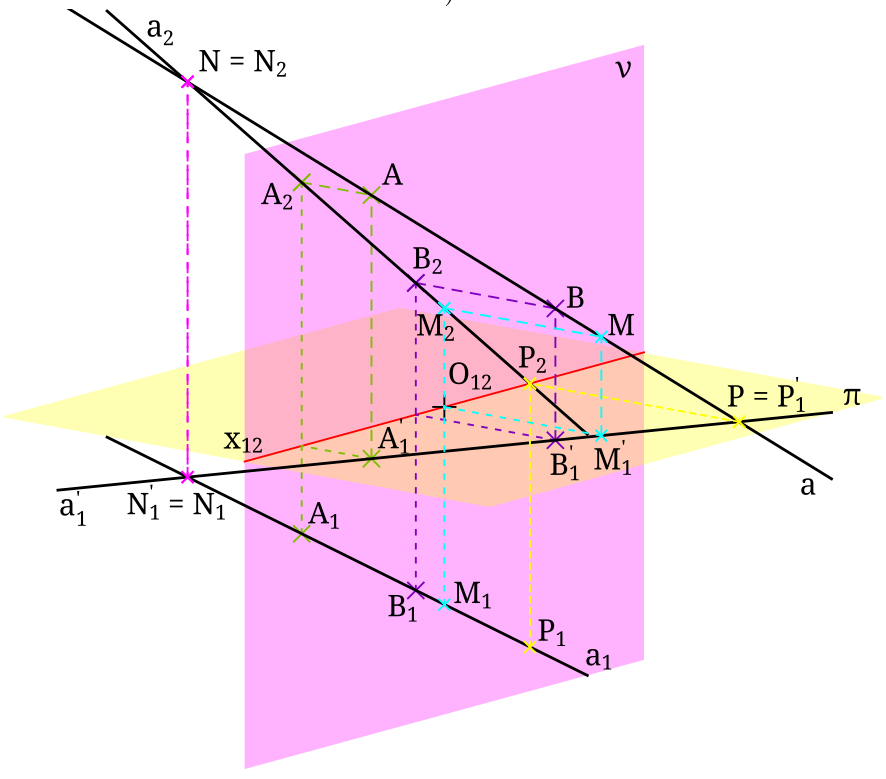
Půdorys půdorysného stopníku splývá s půdorysem přímky, tj. $P_1^b = b_1$. Nárys P_2^a leží na průsečíku nárysu přímky b a základnice.

Nárysný stopník přímka b nemá, resp. nemá vlastní stopník, neboť neexistuje vlastní průsečík přímky b s nárysnou, jak je vidět na obrázku 3.13.

[5] Rýsujeme pouze na polovinu papíru, tj. formát A5

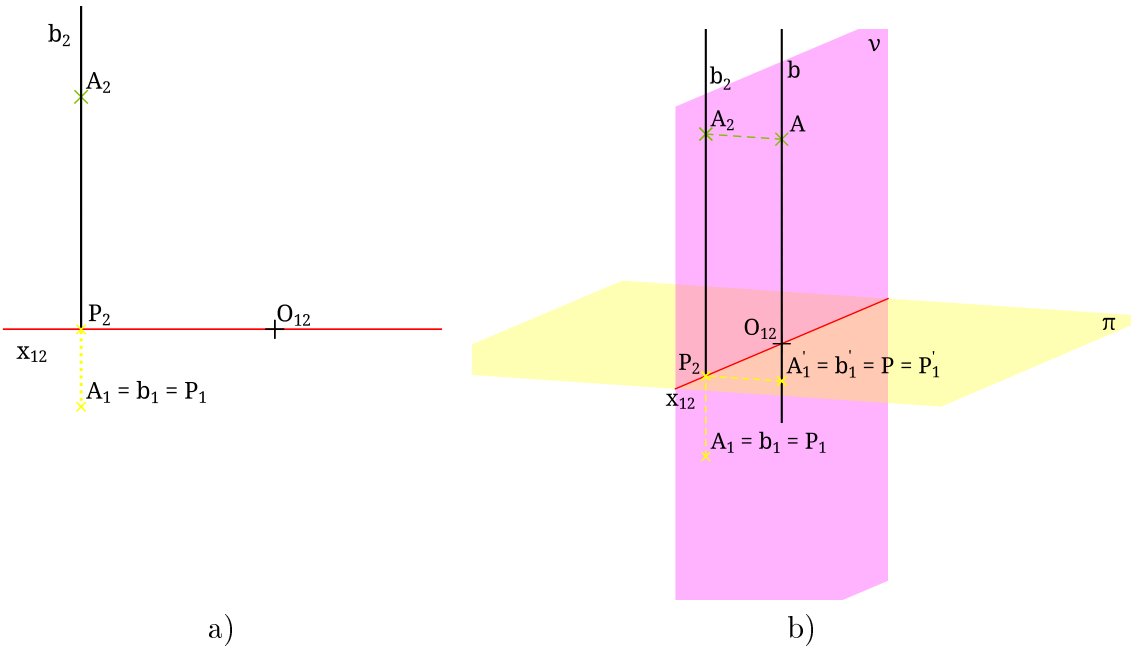


a)



b)

Obrázek 3.12: Sdružené průměty přímky a v Mongeově promítání, a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru



Obrázek 3.13: Sdružené průměty přímky b v Mongeově promítání, a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru

3.2.2 Řešení v kosoúhlém promítání

Doplnění zadání pro kosoúhlé promítání: Mějme pravotočivou kartézskou soustavu souřadnic v E_3. Kladná část osy y směřuje doprava. Kosoúhlé promítání je dáno krácením $q = \frac{3}{4}$ a $\omega = 160°$.

Při rýsování na papír volíme polohu papíru na výšku[6]. Počátek kosoúhlého promítání má souřadnice $0 = [9, 3]_p$.

V souboru `Animace/Priklad_2/2_primky_KP.obr` lze nalézt speciální animaci k tomuto příkladu upravenou pro kosoúhlé promítání.

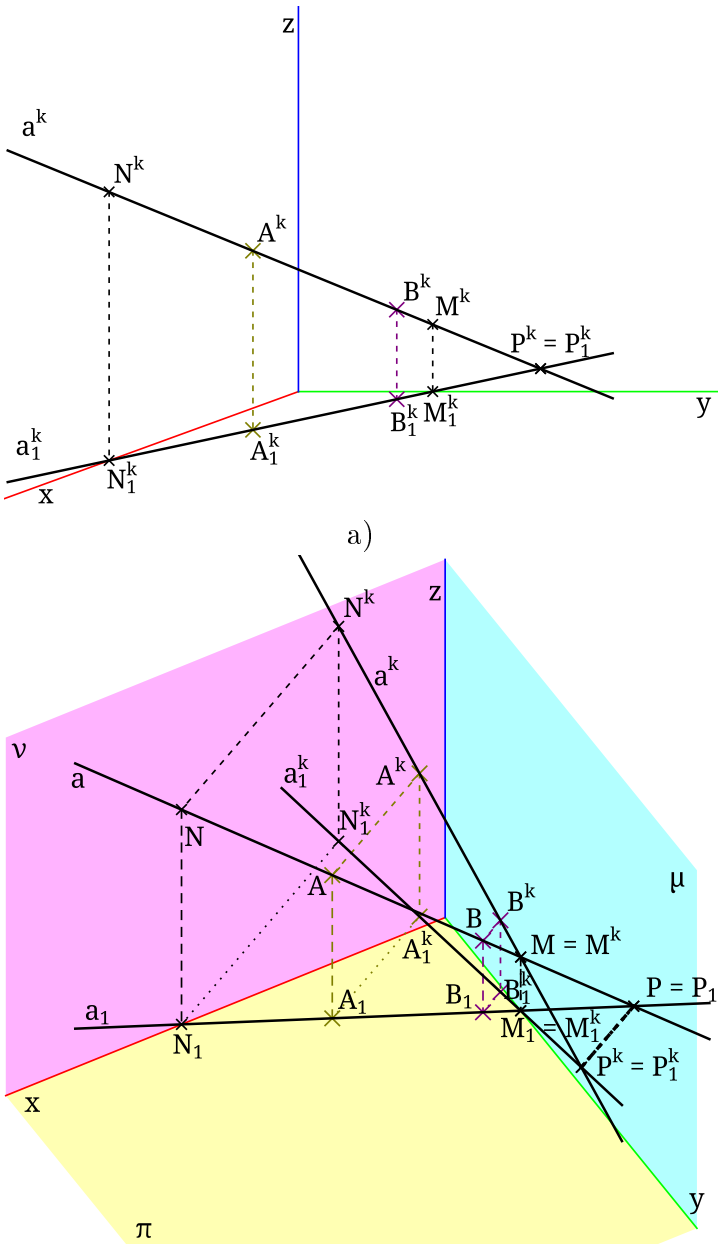
Řešení: Sestrojíme kosoúhlé průměty a kosoúhlé půdorysy obou bodů A i B. Přímky a a b sestrojíme následovně:

a) Přímka a je dána body A a B, nutně tedy musí kosoúhlý průmět a^k procházet jejich průměty A^k a B^k. Stejně i kosoúhlý půdorys a_1^k přímky a prochází kosoúhlými půdorysy bodů A a S.

Analogicky sestrojíme ostatní pomocné průměty, neboť umíme sestrojit pomocné průměty bodů A, B, viz předešlá úloha.

Stopníky v kosoúhlém promítání máme tři, půdorysný, nárysný a bokorysný. Hledáme tedy průsečíky přímky a s půdorysnou, nárysnou a bokorysnou. Tyto průsečíky nalezneme shodně jako v Mongeově promítání, tj. např. kde a_1^k protíná osu y, je půdorys bokorysného stopníku, kde tato přímka protíná osu x^k, dostáváme půdorys nárysného stopníku. Ostatní průměty stopníků nalezneme pomocí ordinál.

[6] Rýsujeme pouze na polovinu papíru, tj. formát A5



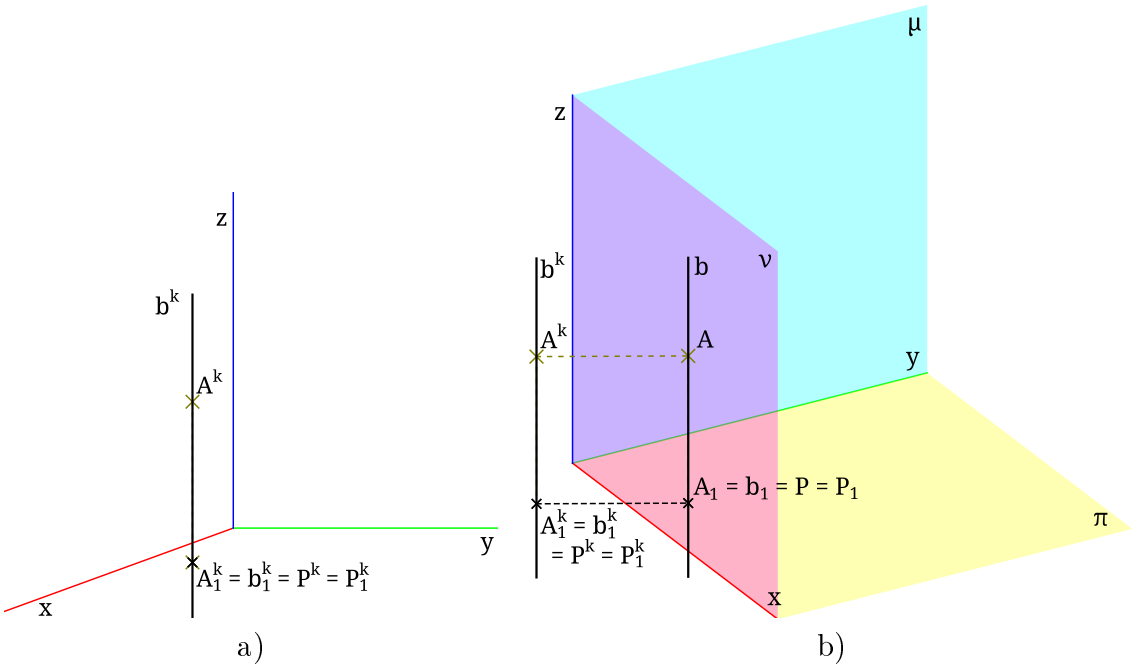
Obrázek 3.14: Přímka a zobrazená v kosoúhlém promítání, a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru

Platí, že jednotlivé stopníky leží v příslušné průmětně, takže kosoúhlý průmět splývá s průmětem do této roviny. Navíc platí, že průsečík kosoúhlého průmětu a^k přímky a s pomocným průmětem je stopník přímky a v dané průmětně.

Řešení tohoto příkladu je na obr. 3.14.

b) Přímka b prochází bodem A a je kolmá na půdorysnu. Půdorys přímky b splyne s půdorysem bodu A, viz řešení v Mongeově promítání. Kosoúhlý půdorys b_1^k přímky b splyne s kosoúhlým půdorysem bodu A, tj. $b_1^k = A_1^k$.

Kosoúhlý průmět b^k prochází průmětem A^k bodu A, navíc má být b kolmá na půdorysnu. Přímka, která je kolmá na půdorysnu, je osa z, tedy i b^k je rovnoběžná s osou z. Navíc musí platit, že prochází i svým kosoúhlým půdorysem,



Obrázek 3.15: Přímka b zobrazená v kosoúhlém promítání, a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru

což je zároveň i stopník této přímky. Ostatní stopníky přímka b nemá, neboť je s nárysnou a bokorysnou rovnoběžná.

Řešení tohoto příkladu je na obr. 3.15.

3.2.3 Řešení v pravoúhlé axonometrii

Doplnění zadání pro pravoúhlou axonometrii: Mějme pravotočivou soustavu souřadnic v E_3 s počátkem 0. Axonometrie je dána axonometrickým trojúhelníkem. Délky stran trojúhelníka jsou $|XY| = 10,3, |YZ| = 10,8$ a $|ZX| = 7,8$.

Polohu papíru volíme na výšku[7]. Souřadnice bodu $X = [9,6]_p$ a spojnice bodů XY je rovnoběžná se spodním okrajem papíru.

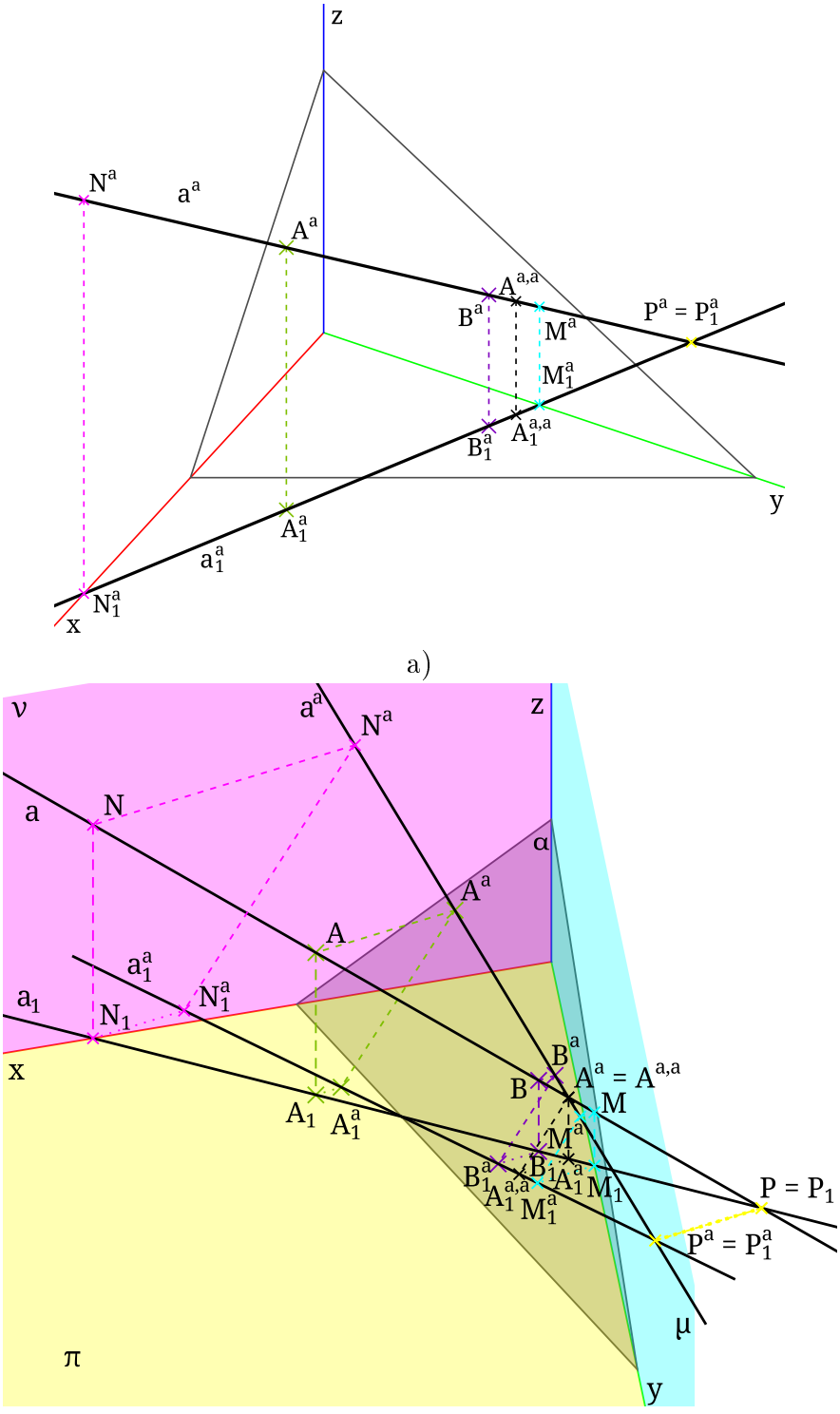
V souboru `Animace/Priklad_2/2_primky_Ax.obr` lze nalézt speciální animaci k tomuto příkladu upravenou pro pravoúhlou axonometrii.

Řešení: Sestrojíme axonometrické průměty A^a, B^a a axonometrické půdorysy A_1^a, B_1^a bodů A, B.

a) Přímka a je dána body A, B. Axonometrický průmět a^a přímky a prochází axonometrickými průměty bodů A, B, stejně i axonometrický půdorys a_1^a prochází průměty A_1^a a B_1^a.

Stopníky přímky a nalezneme na průsečících průmětů souřadnicových os s a_1^a, tímto způsobem nalezneme nárysný a bokorysný stopník. Půdorysný stopník pak leží na průsečíku axonometrického průmětu s axonometrickým půdorysem přímky a. Jejich zbylé průměty pak nalezneme na ordinálách a příslušných průmětech

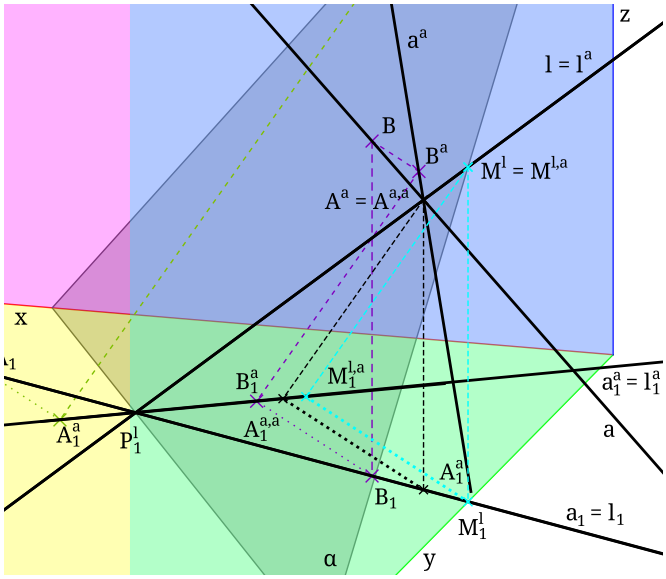
[7] Rýsujeme pouze na polovinu papíru, tj. formát A5



Obrázek 3.16: Přímka a zobrazená v pravoúhlé axonometrii, a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru

přímky a. Navíc musí platit, že průsečík pomocného průmětu s axonometrickým průmětem je stopník v dané rovině.

V pravoúhlé axonometrii navíc existuje ještě axonometrický stopník, tj. průsečík přímky a s axonometrickou průmětnou α. Tento stopník, který značíme A^a, nalezneme pomocí metody krycí přímky. Tato metoda se využívá při hledání



Obrázek 3.17: Konstrukce axonometrického stopníku A^a pomocí krycí přímky l, detail náhledu na prostorovou situaci

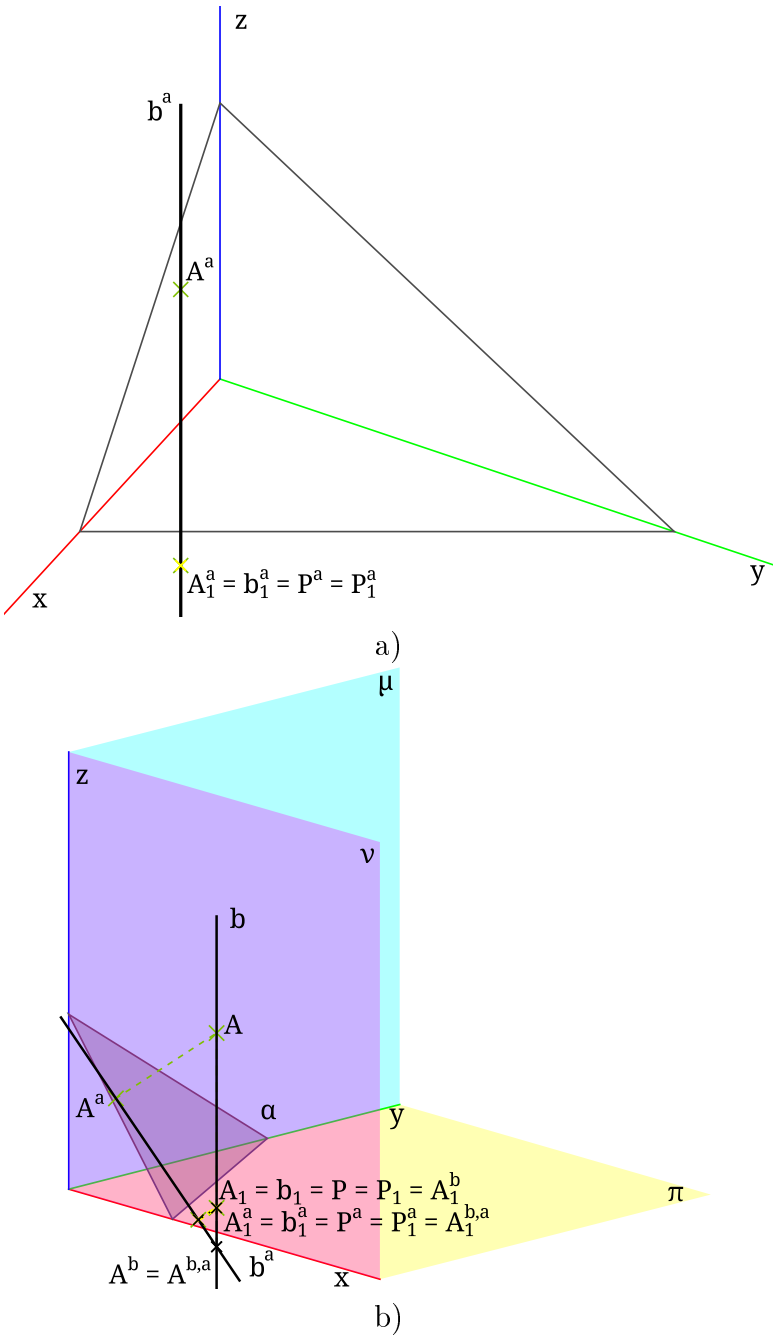
průsečíku přímky a a roviny α. Sestrojíme tzv. krycí přímku l, která v jednom z průmětů splývá s přímkou a, a navíc požadujeme, aby tato přímka ležela v rovině α, tedy další její průmět nalezneme pomocí stopníků. Jelikož přímky l a a leží v jedné rovině, jejich průsečík je reálný a tento průsečík A^a je hledaný průsečík přímky a a roviny α, tedy axonometrický stopník přímky a, viz obr. 3.17.

Řešení tohoto příkladu naleznete na obr. 3.16.

b) Přímka b prochází bodem A a je kolmá na půdorysnu. Půdorys této přímky je bod, protože je rovnoběžná se směrem promítání, proto i axonometrický půdorys je bod b_1^a, pro který navíc musí platit, že $b_1^a = A_1^a$.

Axonometrický průmět přímky b prochází průmětem A^a a je rovnoběžný s osou z, která je kolmá na rovinu π.

Půdorysný stopník P^b je roven půdorysu přímky b, tj. $P^b = b_1^a$. Nárysný a bokorysný stopník přímka b nemá, protože je rovnoběžná s osou z, nárysnu ani bokorysnu tedy nikdy neprotne, viz 3.18.



Obrázek 3.18: Přímka b zobrazená v pravoúhlé axonometrii, a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru

3.2.4 Řešení v lineární perspektivě

Doplnění zadání pro lineární perspektivu: Mějme pravotočivou soustavu souřadnic v $\overline{E_3}$ s počátkem 0. Lineární perspektiva je dána distancí $d = 7$, základnice z splývá s osou x, průmětna splývá s nárysnou. Výška středu promítání, resp. vzdálenost $|HZ|$, je rovna 5.

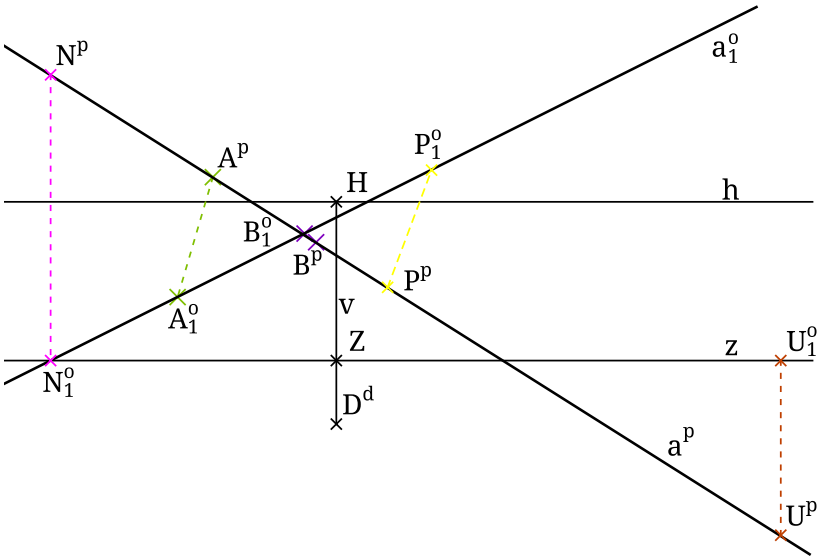
Při rýsování na papír volíme polohu papíru na šířku. Základní bod Z má souřadnice $Z = [7, 5; 6]_p$, základnice z je rovnoběžná se spodním okrajem papíru.

V souboru `Animace/Priklad_2/2_primky_LP.obr` lze nalézt speciální anima-

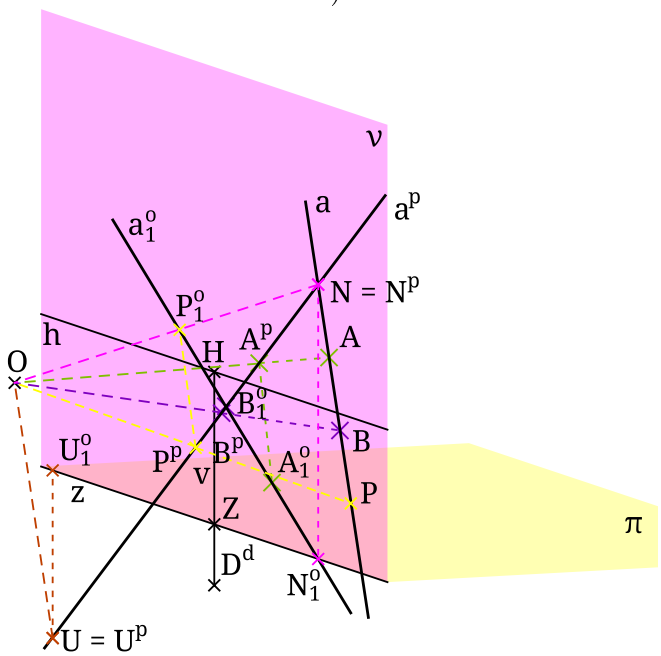
ci k tomuto příkladu upravenou pro lineární perspektivu.

Řešení: Nejdříve sestrojíme perspektivní průměty bodů A a B.

Pro obě přímky v lineární perspektivě sestrojíme nejen stopníky, ale i úběžník, tedy bod, na který se zobrazí nevlastní bod přímky.



a)



b)

Obrázek 3.19: Přímka a zobrazená v lineární perspektivě, a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru

a) Přímka a je dána dvěma body A, B. Její perspektivní průmět musí také těmito body procházet, resp. jejich průměty A^p, B^p.

V lineární perspektivě máme dvě průmětny, hlavní průmětnu ν a pomocnou průmětnu π. Určujeme tedy dva stopníky, ve shodě s předchozí terminologií, nárysný stopník v rovině ν a půdorysný v rovině π.

Půdorysný stopník nalezneme na průsečíku perspektivního průmětu přímky a a jejího půdorysu. Půdorys nárysného stopníku nalezneme na průsečíku základnice z a půdorysu, resp. otočeného půdorysu přímky a, viz obr. 3.19.

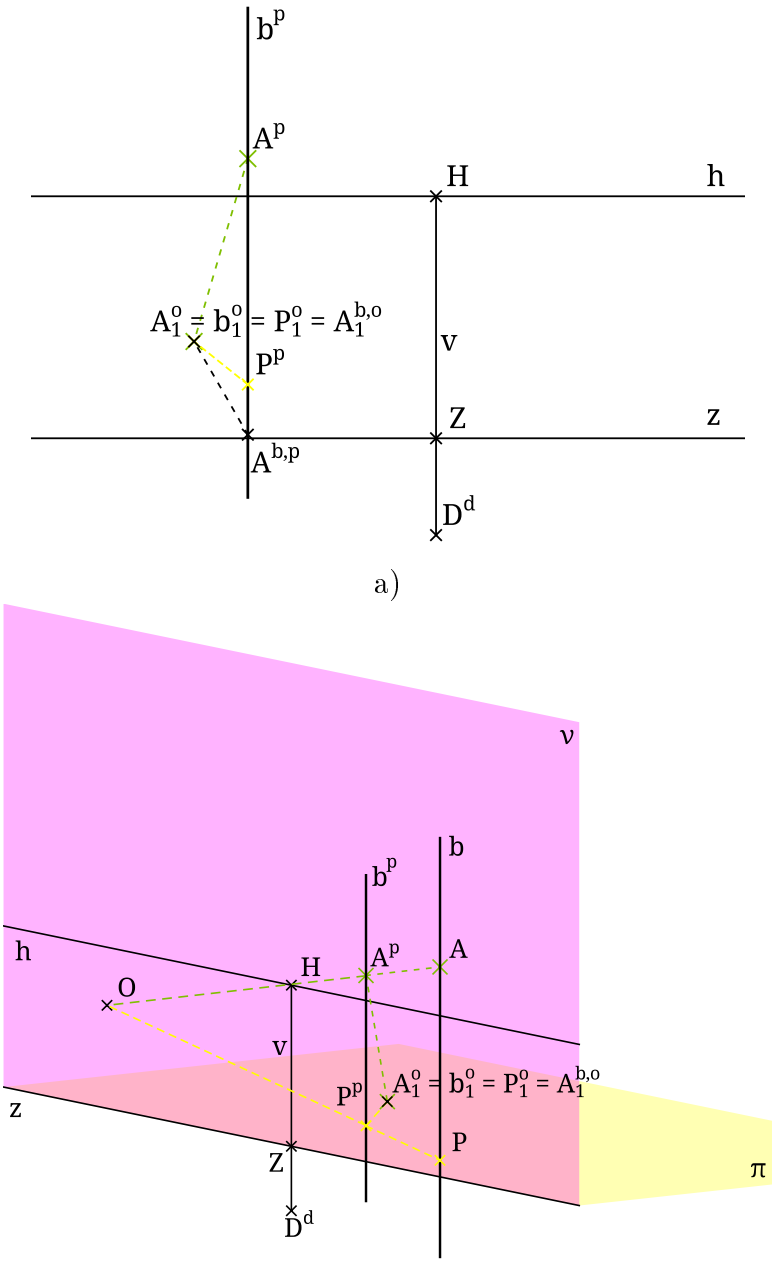
Úběžník přímky a nalezneme jako stopník přímky a', která je rovnoběžná s přímkou a a prochází středem S. Otočený půdorys přímky a' prochází tedy otočeným půdorysem středu promítání, bodu O. Perspektivní průmět a'^p je jeden bod, což je zároveň hledaný úběžník U.

b) Perspektivní průmět přímky b, která je kolmá na půdorysnu a prochází bodem A, prochází perspektivním průmětem bodu A a je kolmý na základnici.

Nárysný stopník přímka b nemá vlastní, půdorysný leží v půdorysně, můžeme nalézt otočený půdorysný stopník, nebo perspektivní průmět půdorysného stopníku, viz konstrukce bodu v lineární perspektivě 3.5.

Průměty přímky b v lineární perspektivě se stopníky jsou zobrazeny na obr. 3.20.

Úběžník této přímky je nevlastní bod přímky b.



Obrázek 3.20: Přímka b zobrazená v lineární perspektivě, a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru

3.3 Zobrazení roviny

Zadání: V pravotočivé kartézské soustavě souřadnic v E_3 máme dánu rovinu ϱ body A, B a C. Sestrojte stopy roviny ϱ a dourčete bod D tak, aby ležel v této rovině.

Souřadnice bodů:

$$A = [8; 3; 1]$$

$$B = [2; 7; 4]$$

$$C = [1; 4,5; 8]$$

$$D = [4; 3; z]$$

V souboru `Animace/Priklad_3/3_rovina.obr` lze nalézt animaci k tomuto příkladu.

Obecné řešení v prostoru: Rovina může být dána třemi body, dvěma přímkami, které nejsou mimoběžné a nesplývají, přímkou a bodem, který na ni neleží, a dalšími způsoby. V deskriptivní geometrii se často používá zadání třemi speciálními body, průsečíky se souřadnicovými osami x, y a z. Tyto body, jelikož leží na osách, mají vždy dvě souřadnice nulové a jsou určeny uspořádanou trojicí (x, y, z), kde $X = [x, 0, 0], Y = [0, y, 0]$ a $Z = [0, 0, z]$.

Stopa roviny je průsečnice roviny s průmětnou. Stopa roviny je tedy přímka, jejíž body jsou stopníky přímek roviny. Přímka je jednoznačně dána dvěma body, a stačí nám tedy nalézt dva stopníky, dva body roviny ležící v průmětně.

3.3.1 Řešení v Mongeově promítání

Doplnění zadání pro Mongeovo promítání: Mějme pravotočivou kartézskou soustavu souřadnic v E_3 (kladná část osy $x_{1,2}$ směřuje doleva).

Při rýsování na papír volíme polohu papíru na výšku. Počátek soustavy souřadnic má polohu vůči papíru $O = [14, 14]_p$.

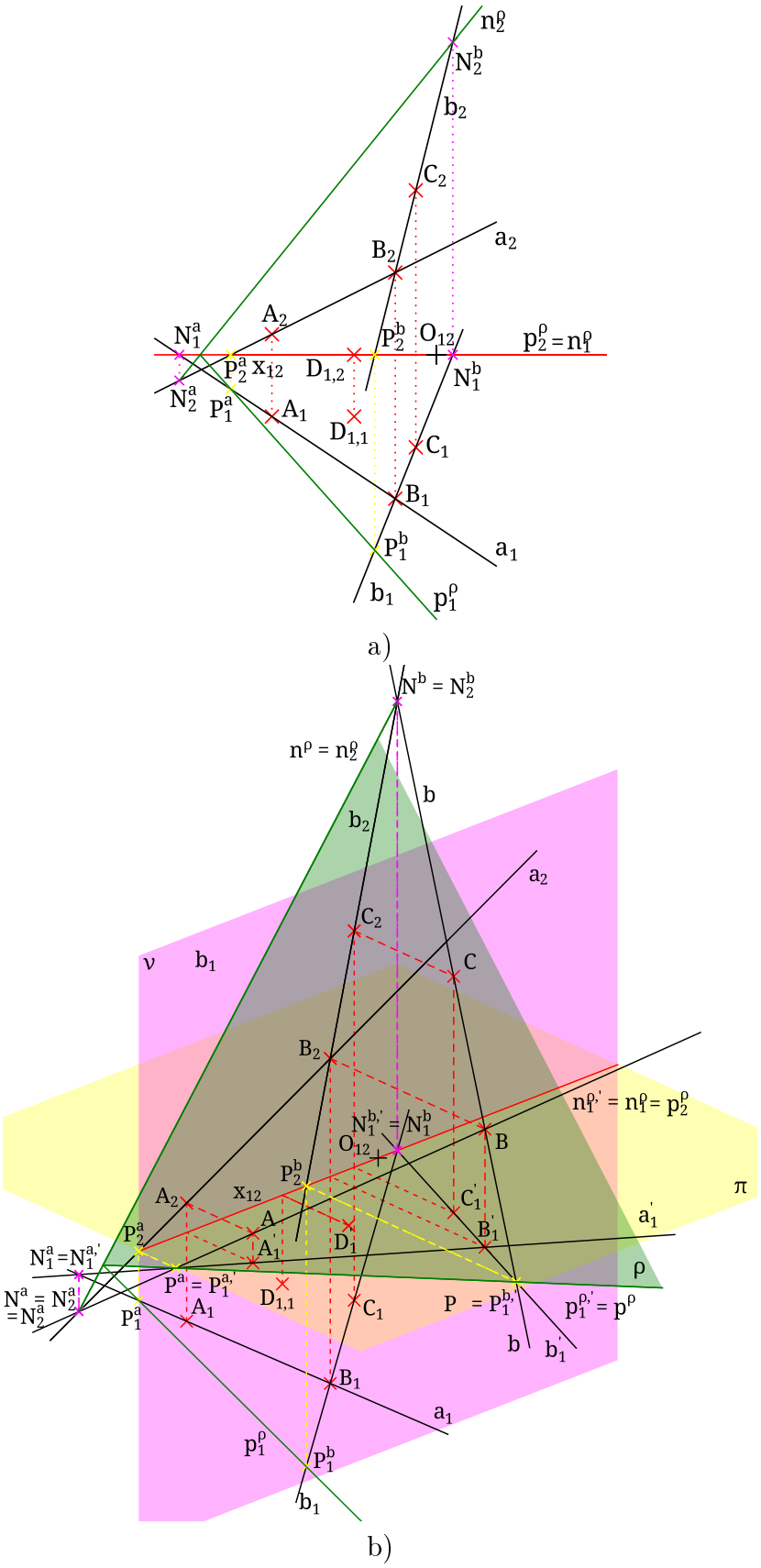
V souboru `Animace/Priklad_3/3_rovina_MP.obr` lze nalézt speciální animaci k tomuto příkladu upravenou pro Mongeovo promítání.

Řešení: Rovina ϱ je dána body A, B a C. Stopy roviny nalezneme pomocí stopníků dvou přímek, které vytvoříme pomocí libovolné dvojice bodů z A, B, C.

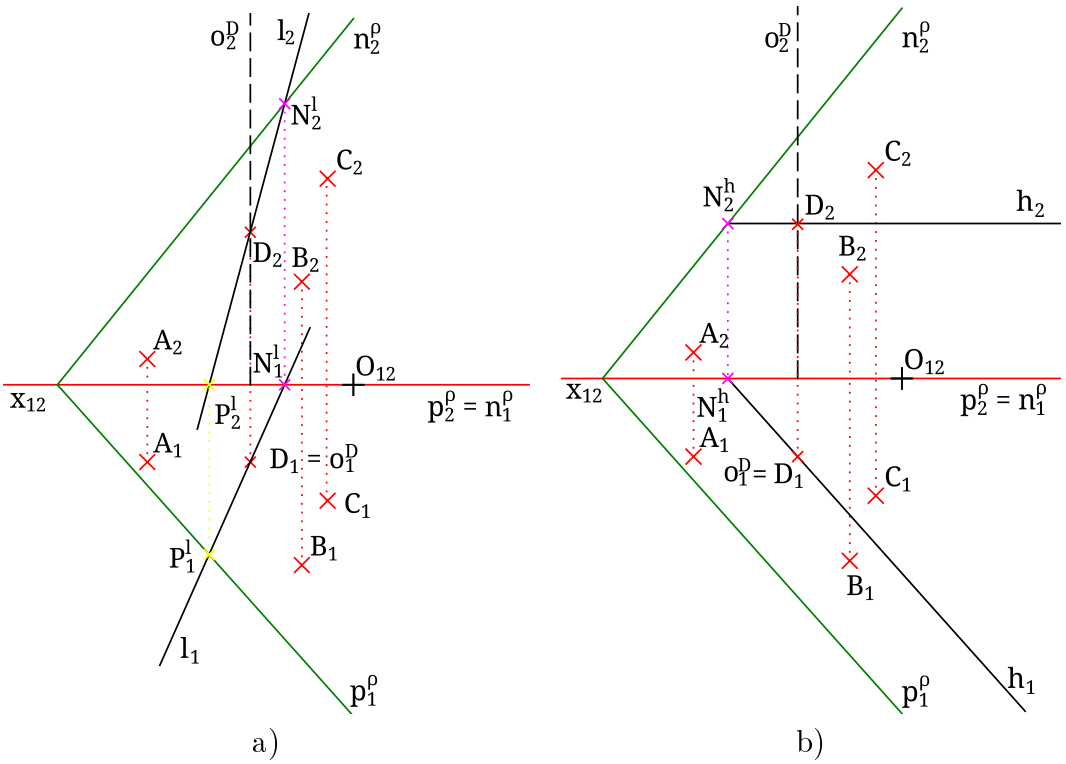
Např. sestrojíme přímku a body A, B a přímku b body B, C. Nalezneme stopníky těchto přímek, viz předchozí příklad. Půdorys půdorysné stopy p_1^ϱ je dán půdorysnými průměty stopníků P_1^a, P_1^b přímek a, b. Nárys nárysné stopy n_2^ϱ je spojnice N_2^a, N_2^b.

Nárysná stopa a půdorysná stopa se protínají na základnici, neboť obě musí procházet průsečíkem roviny ϱ s osou x. Průmět roviny ϱ v Mongeově promítání je zobrazen na obrázku 3.21.

Bod D, který je dán půdorysem, ležící v rovině ϱ dourčíme pomocí přímky roviny ϱ, která tímto bodem prochází. Můžeme volit libovolnou přímku:



Obrázek 3.21: Rovina ϱ daná body A, B a C v Mongeově promítání, a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru



Obrázek 3.22: Konstrukce nárysu bodu D v Mongeově promítání, a) pomocí libovolné přímky l roviny ϱ b) pomocí hlavní přímky h

Postup konstrukce 3.7. dourčení bodu $D \in \varrho$ pomocí libovolné přímky l, viz obr. 3.22a

1. $l_1; B_1 \in l_1$ – libovolně
2. $N_1^l; N_1^l = l_1 \cap x_{1,2}$
3. $P_1^l; P_1^l = l_1 \cap p_1^\varrho$
4. $N_2^l; N_2^l = n_2^l \cap o^{N^l}$
5. $P_2^l; P_2^l = x_{1,2} \cap o^{P^l}$
6. $l_2; P_2^l \in l_2 \wedge N_2^l \in l_2$
7. $D_2; D_2 = l_2 \cap o^D$

Často se za přímku l volí hlavní přímka roviny ϱ. Tato volba zjednodušuje konstrukci, neboť víme směr této přímky, stačí nalézt pouze jeden průsečík, druhý je nevlastní a směr je dán volbou hlavní přímky, tedy s jakou průmětnou je rovnoběžná. Vedeme-li hlavní přímku rovnoběžnou s půdorysnou, tedy horizontálu h, konstrukce bude následující:

Postup konstrukce 3.8. dourčení bodu $D \in \varrho$ pomocí horizontály h, viz obr. 3.22b

1. $h_1; B_1 \in h_1 \wedge h_1 \parallel p_1^\varrho$
2. $N_1^h; N_1^h = h_1 \cap x_{1,2}$

3. $N_2^h; N_2^h = n_2^h \cap o^{N^h}$

4. $h_2; P_2^h \in h_2 \wedge h_2 \parallel x_{1,2}$

5. $D_2; D_2 = l_2 \cap o^D$

3.3.2 Řešení v kosoúhlém promítání

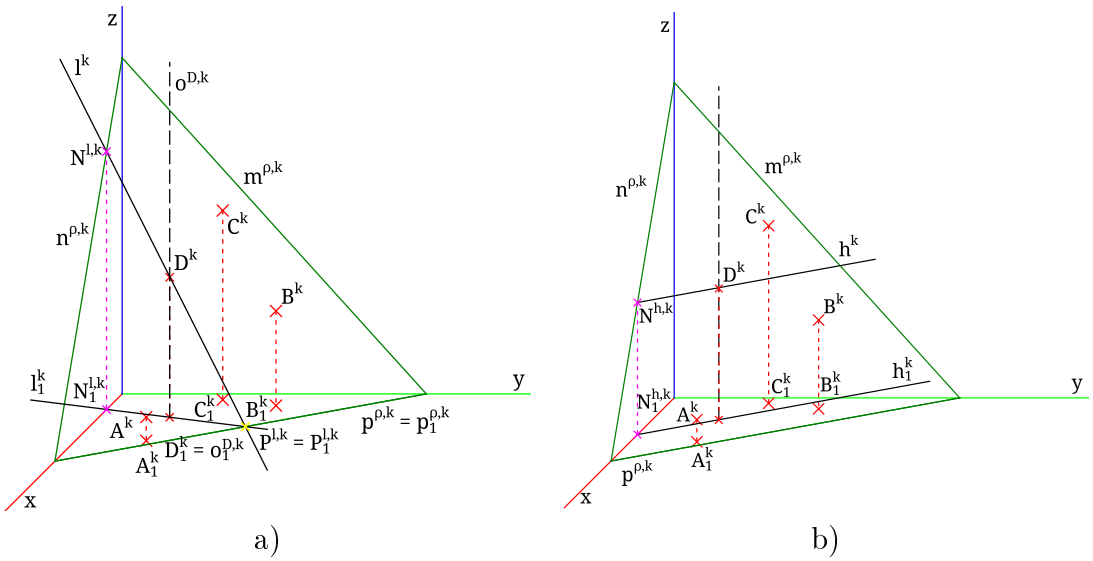
Doplnění zadání pro kosoúhlé promítání: Mějme pravotočivou kartézskou soustavu souřadnic v E_3 (kladná část osy y směřuje doprava). Kosoúhlé promítání je dáno krácením $q = \frac{1}{4}$ a $\omega = 135°$.

Při rýsování na papír volíme polohu papíru na výšku. Počátek soustavy souřadnic v kosoúhlém promítání má souřadnice $0 = [5, 8]_p$.

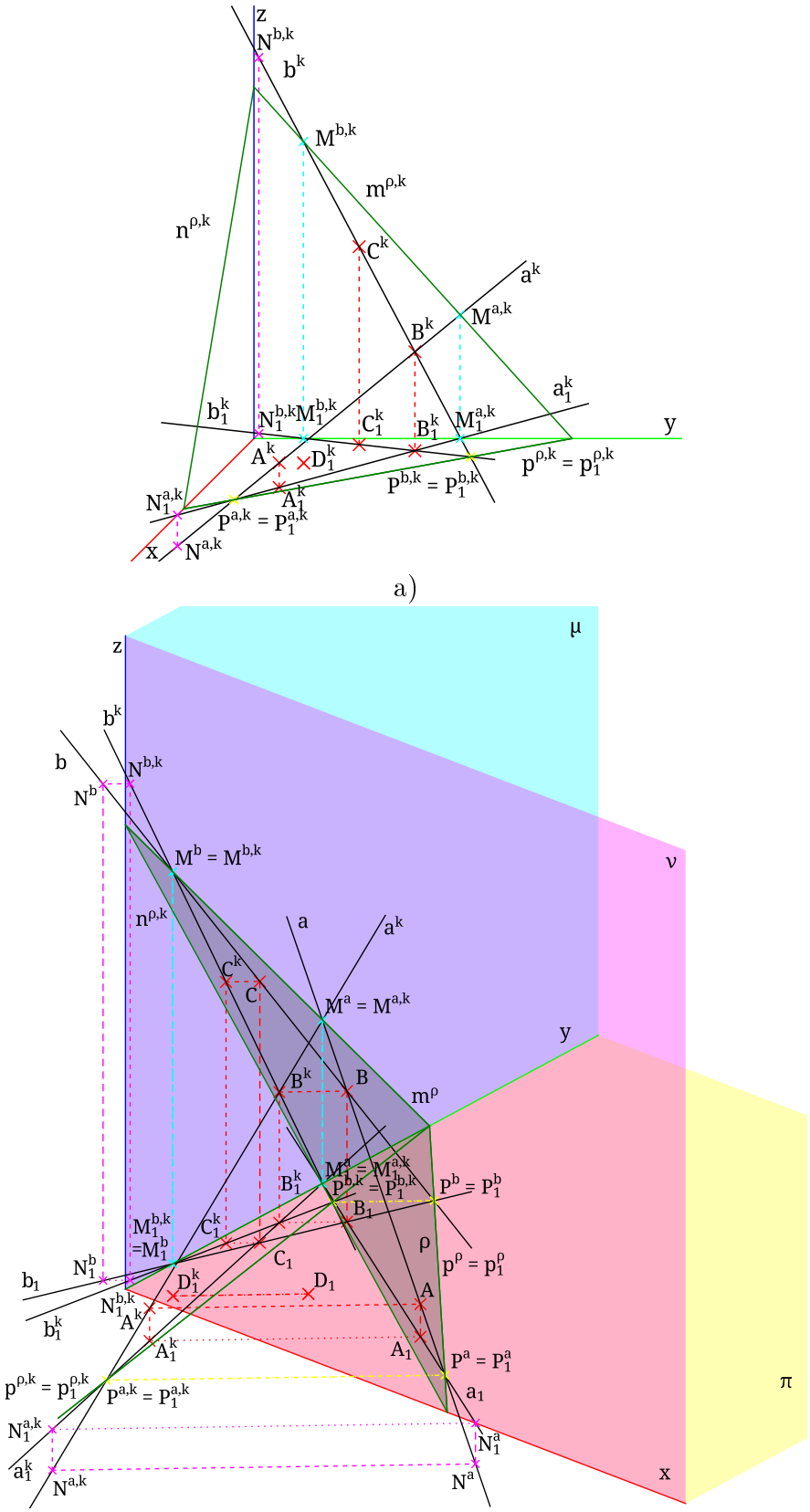
V souboru `Animace/Priklad_3/3_rovina_KP.obr` lze nalézt speciální animaci k tomuto příkladu upravenou pro kosoúhlé promítání.

Řešení: Rovina ϱ je dána třemi body, které promítneme kosoúhle do bokorysny a ke kterým nalezneme také kosoúhlé půdorysy. Stopy roviny v kosoúhlém promítání hledáme stejně jako v Mongeově promítání, sestrojíme tedy dvě přímky dané body A, B a C. Nalezneme jejich stopníky. Spojnice kosoúhlých průmětů půdorysných stopníků je půdorysná stopa $p^{\varrho,k}$, spojnice kosoúhlých průmětů nárysných stopníků je nárysná stopa $n^{\varrho,k}$ a stejně tak i spojnice bokorysných stopníků je bokorysná stopa $m^{\varrho,k}$. Platí, že stopy se protínají na osách, viz obr. 3.24.

Bod D je dán svým půdorysem a máme jej dourčit tak, aby ležel v rovině ϱ. Opět budeme postupovat analogicky jako v Mongeově promítání, tedy vedeme libovolnou přímku l roviny ϱ, jejíž půdorys prochází půdorysem bodu D a dourčíme její kosoúhlý průmět. Na průsečíku ordinály bodem D_1 a kosoúhlého průmětu l^k leží kosoúhlý průmět bodu D. Za přímku l můžeme volit jakoukoliv přímku, viz obr. 3.23a, často volíme hlavní přímku, viz obr. 3.23b.



Obrázek 3.23: Konstrukce kosoúhlého průmětu bodu D v kosoúhlém promítání, a) pomocí libovolné přímky l roviny ϱ b) pomocí hlavní přímky h



Obrázek 3.24: Rovina ϱ daná body A, B a C v kosoúhlém promítání, a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru

3.3.3 Řešení v pravoúhlé axonometrii

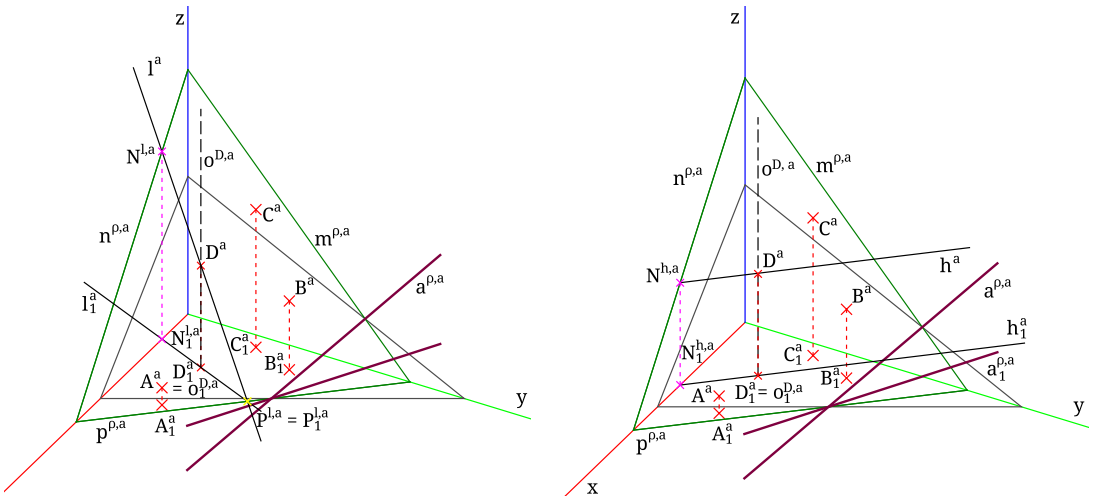
Doplnění zadání pro pravoúhlou axonometrii: Mějme pravotočivou soustavu souřadnic v E_3 s počátkem 0. Axonometrie je dána axonometrickým trojúhelníkem. Délky stran trojúhelníka jsou $|XY| = 18,3, |YZ| = 18$ a $|ZX| = 12$.

Polohu papíru volíme na výšku. Souřadnice bodu $X = [6,8]_p$ a spojnice bodů XY je rovnoběžná se spodním okrajem papíru.

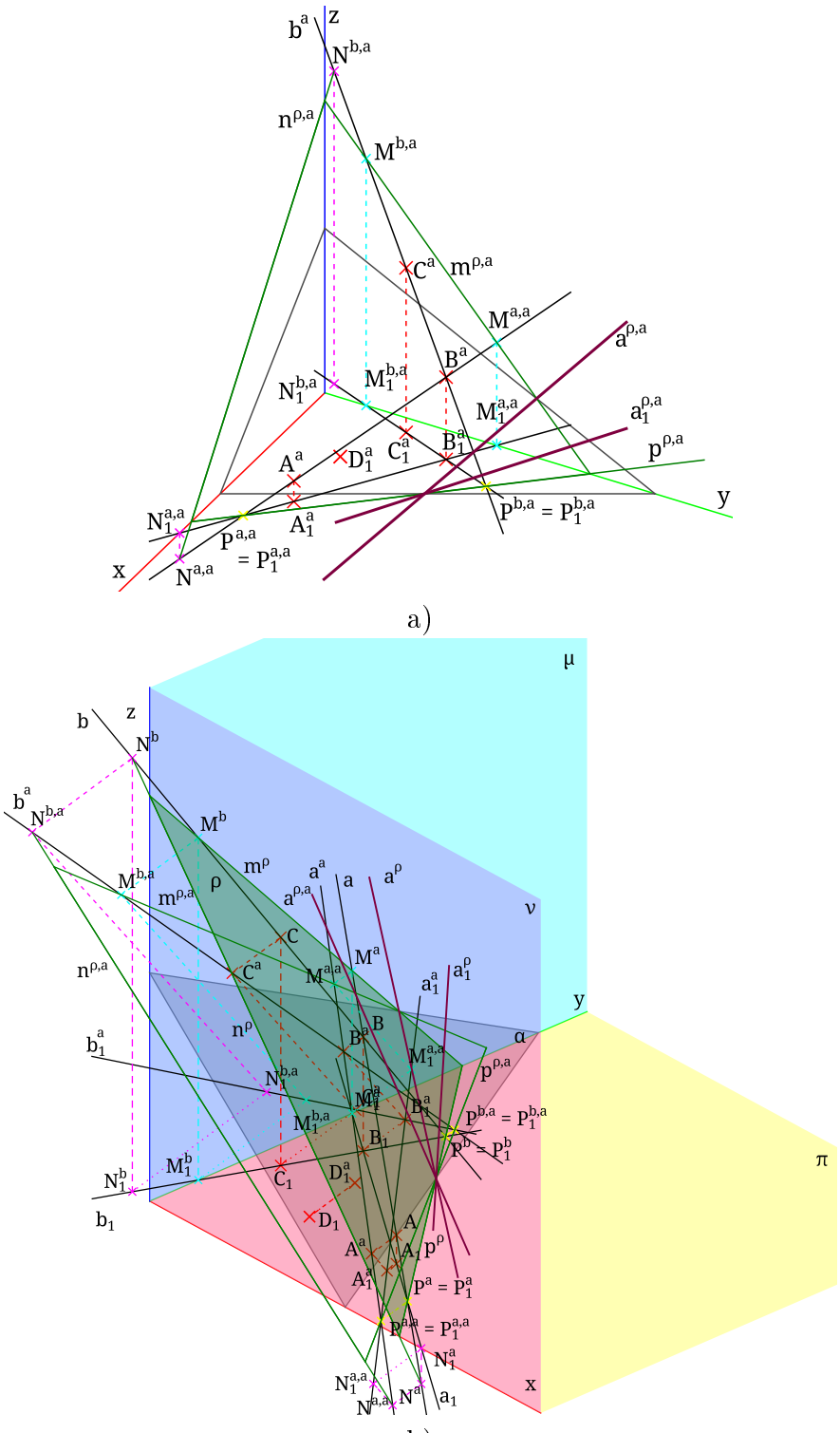
V souboru `Animace/Priklad_3/3_rovina_Ax.obr` lze nalézt speciální animaci k tomuto příkladu upravenou pro pravoúhlou axonometrii.

Řešení: Stopy roviny ϱ sestrojíme shodně jako v kosoúhlém promítání. Opět vedeme dvě přímky body A, B, C. Najdeme stopníky těchto přímek a spojnice odpovídajících stopníků jsou příslušné stopy, viz obr. 3.26. Navíc zde konstruujeme axonometrickou stopu roviny ϱ, tedy průsečnici roviny ϱ s rovinou α. Tuto přímku nalezneme jako spojnici průsečíků stop s příslušnou stopou roviny α v průmětně.

Axonometrický průmět bodu D nalezneme pomocí přímky l roviny ϱ. Půdorys přímky l prochází půdorysem bodu D, ale jinak ji volíme libovolně. Pomocí stopníků nalezneme její axonometrický průmět a na ordinále o^D, která je rovnoběžná s osou z, a průmětu přímky l^a leží průmět bodu D^a, viz obr. 3.25.



Obrázek 3.25: Konstrukce axonometrického průmětu bodu D v pravoúhlé axonometrii, a) pomocí libovolné přímky l roviny ϱ b) pomocí hlavní přímky h



Obrázek 3.26: Rovina ϱ daná body A, B a C v pravoúhlé axonometrii, a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru

3.3.4 Řešení v lineární perspektivě

Doplnění zadání pro lineární perspektivu: Mějme pravotočivou soustavu souřadnic v $\overline{E_3}$ s počátkem 0. Lineární perspektiva je dána distancí $d = 13$, základnice z splývá s osou x, průmětna splývá s nárysnou. Výška středu promítání, resp. vzdálenost $|HZ|$, je rovna 9.

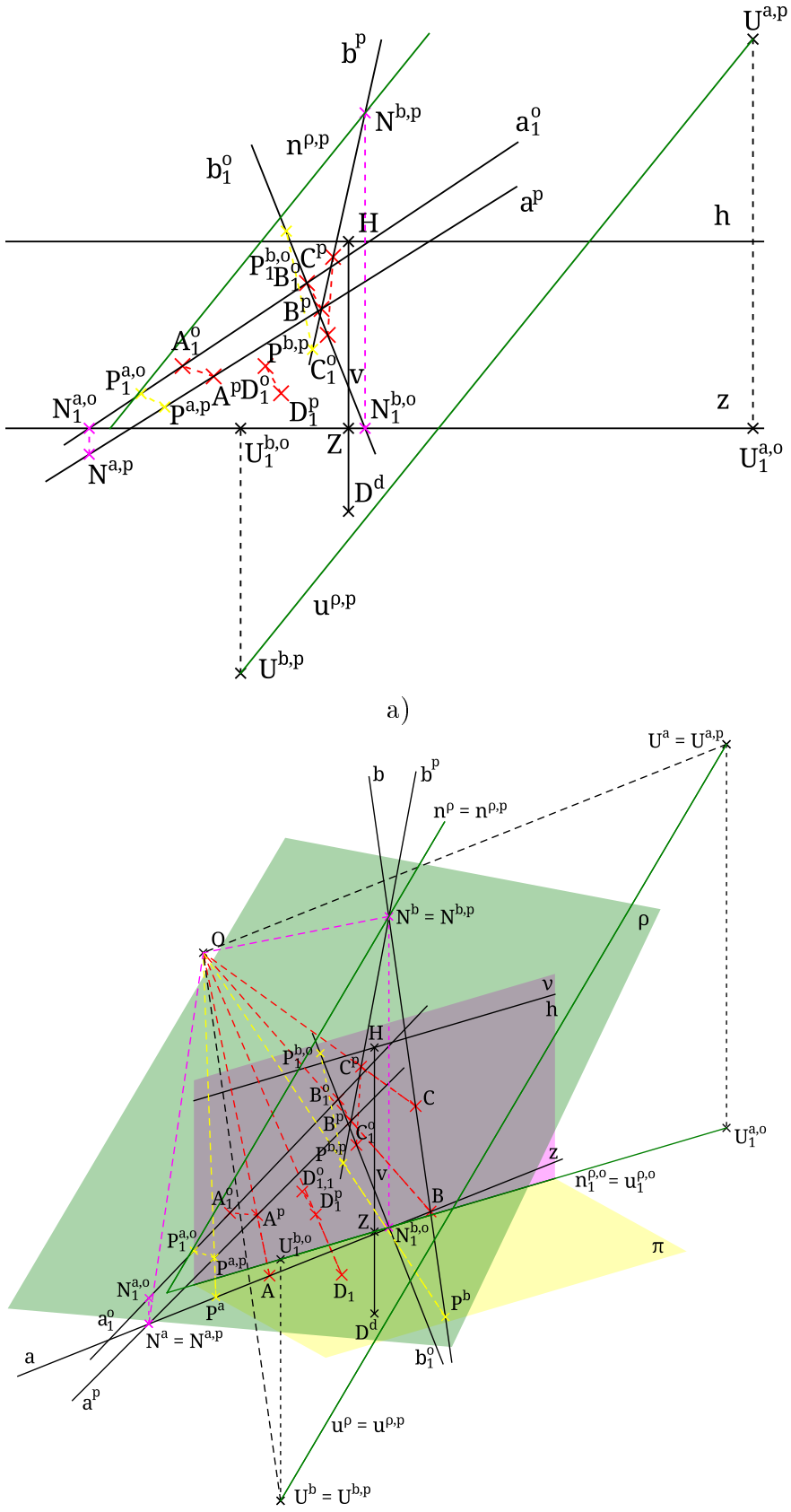
Při rýsování na papír volíme polohu papíru na šířku. Základní bod Z má souřadnice $Z = [16, 5]_p$, základnice z je rovnoběžná se spodním okrajem papíru.

V souboru `Animace/Priklad_3/3_rovina_LP.obr` lze nalézt speciální animaci k tomuto příkladu upravenou pro lineární perspektivu.

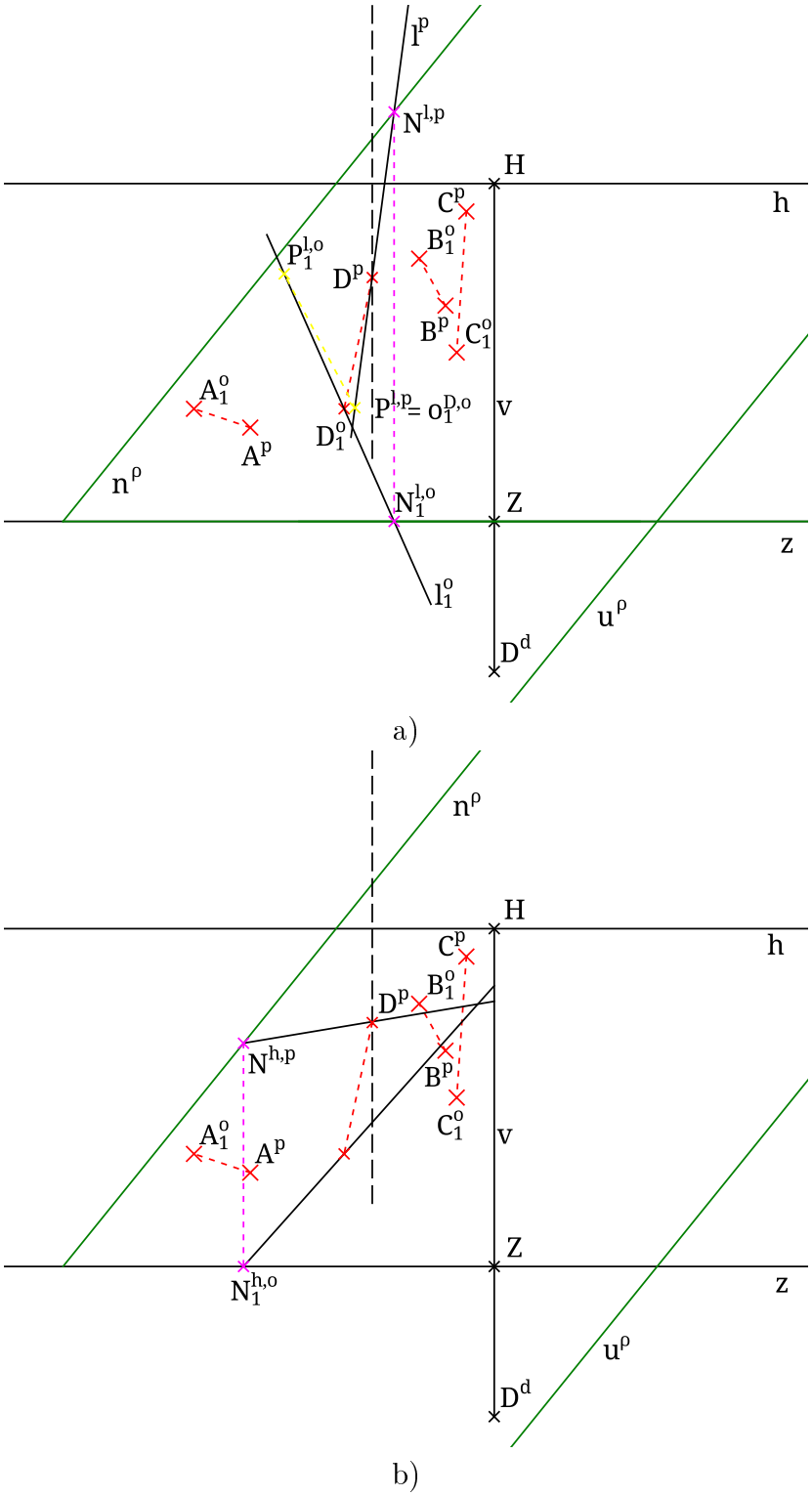
Řešení: Rovina ϱ je dána třemi body. Nejdříve sestrojíme perspektivní průměty bodů A, B a C. Sestrojíme přímky $a =\leftrightarrow AB$ a $b =\leftrightarrow BC$. Sestrojíme perspektivní průměty těchto přímek, tj. a^p a b^p. Nalezneme stopníky a úběžníky těchto přímek. Spojnice stopníků je stopa roviny a spojnice úběžníků je úběžnice roviny. Navíc platí, že stopa je rovnoběžná s úběžnicí, viz obr. 3.27.

Výšku bodu D dourčíme pomocí libovolné přímky l v rovině ϱ. Vedeme půdorys této přímky půdorysem bodu D a otočíme jej do nárysny. Nalezneme nárysný a půdorysný stopník přímky l, pomocí ordinál (kolmice na základnici) nalezneme jejich perspektivní průměty, kterými vedeme perspektivní průmět přímky l. Na průsečíku ordinály bodu D, tj. o^D, a l^p leží perspektivní průmět bodu D, viz obr. 3.28a.

Za pomocnou přímku l můžeme také volit hlavní přímku roviny ϱ, která je rovnoběžná s půdorysnou, označíme ji h. Sestrojíme perspektivní půdorys. Nalezneme perspektivní průmět nárysného stopníku přímky h, půdorysný stopník tato přímka nemá, neboť je rovnoběžná s půdorysnou, ale nutně je přímka h rovnoběžná se svým půdorysem. V perspektivním průmětu mají tedy tyto přímky h_1^p a h^p společný úběžník U^h, který leží na úběžnici roviny ϱ. Pomocí tohoto bodu nalezneme perspektivní průmět přímky h a analogicky jako u přímky l nalezneme perspektivní průmět bodu D, viz obr. 3.28b.



Obrázek 3.27: Rovina ϱ daná body A, B a C v lineární perspektivě, a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru



Obrázek 3.28: Konstrukce perspektivního průmětu bodu D v lineární perspektivě, a) pomocí libovolné přímky l roviny ϱ b) pomocí hlavní přímky h

4. Konstrukce těles

V této kapitole jsou řešené příklady, které jsou zaměřené na konstrukci těles. Každý příklad je řešen nejdříve obecně bez použití konkrétního promítání. Tento obecný postup je doplněn symbolickým popisem konstrukce. Dále je každý příklad řešen v Mongeově promítání, kosoúhlém promítání, pravoúhlé axonometrii a lineární perspektivě. Tyto postupy jsou stručné a jsou zaměřeny hlavně na specifika konkrétního promítání při konstrukci daného příkladu.

Příklady nejsou převzaté, ale vymyšlené speciálně pro účely této práce. Především jsem se snažila souřadnice volit tak, aby byly příklady přehledné ve všech promítáních.

Jednotlivé příklady jsou podpořeny animacemi, krokovanými obrázky, do programu Lisa Viewer. Obrázky jsou u této kapitoly poměrně velké, a proto nejsou umístěny přímo v textu, ale v příloze A. Některé však na papíře nejsou příliš přehledné a proto doporučuji otevřít si vždy příslušnou animaci, kde lze daný příklad zobrazit v náhledu na prostorovou situaci a postupně si modelem otáčet a získat tak lepší představu jak dané promítání, konstrukce fungují.

Ke každému příkladu jsou také na CD přiložena PDF s předrýsovaným zadáním a řešením určená pro tisk pro využití při výuce nebo při samostudiu.

Pro rýsování bez předrýsovaného zadání je zde u každého příkladu uvedena optimální poloha příkladu na papíře a také i velikost papíru, který je vhodný pro daný příklad. Proto zavedeme novou soustavu souřadnic v E_2, kde počátek volíme v levém dolním rohu. Osa x splývá s dolní hranou papíru osa y splývá s levým okrajem papíru. Souřadnice v této soustavě budeme značit $[x, y]_p$.

V příkladech není u těles řešena viditelnost hran. Je tomu tak proto, že program Lisa Viewer neumí viditelnost řešit a ručně nastavit styl zobrazení jednotlivých hran také nelze, protože objekty jsou reprezentovány jen pomocí prostorových souřadnic (průměty jsou generovány automaticky) a zároveň v každém průmětu může být viditelnost jiná. Při zobrazování těles budeme tedy vlastně zobrazovat jen jejich tzv. drátové sítě (pouze hrany a vrcholy). Postup při určování viditelnosti je dostatečně popsán v jiné literatuře, např. [10, 8].

4.1 Hranol s podstavou v půdorysně

Zadání: Mějme dánu pravotočivou kartézskou soustavu souřadnic v E_3. Zobrazte obecný kvádr $ABCDEFGH$ s dolní podstavou v půdorysně. Podstava je dána vrcholem A, středem S a jednou z délek podstavného obdélníka $a = 4$. Výška tělesa v je 8.

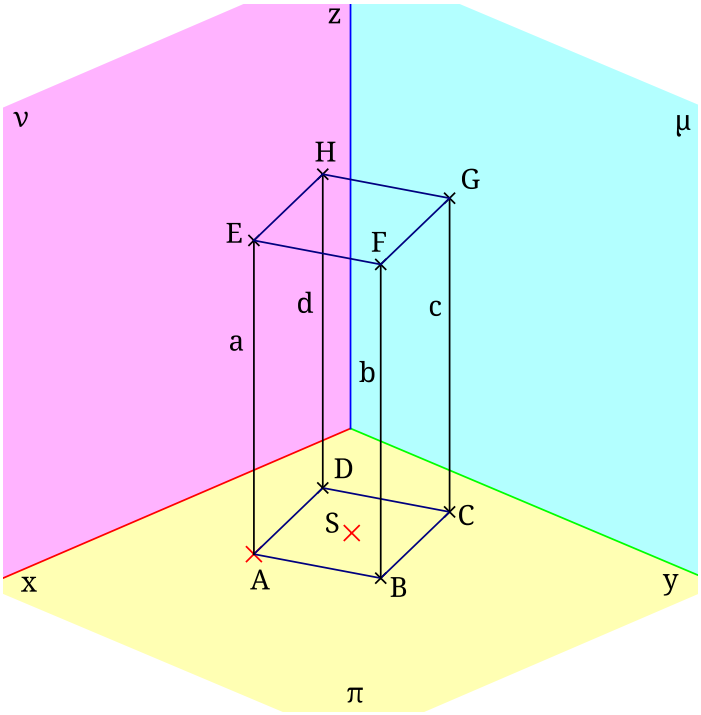
Souřadnice bodů:

$$A = [8, 4, 0]$$

$$S = [5, 5, 0]$$

V souboru `Animace/Priklad_4.1/4.1_hranol_pudorysna.obr` lze nalézt animaci k tomuto příkladu.

Obecné řešení v prostoru: Nejdříve musíme sestrojit podstavu tělesa. Podíváme se proto nejdříve na situaci v půdorysně, ve které podstava hranolu leží.



Obrázek 4.1: Hranol $ABCDEFGH$ z příkladu 4.1.

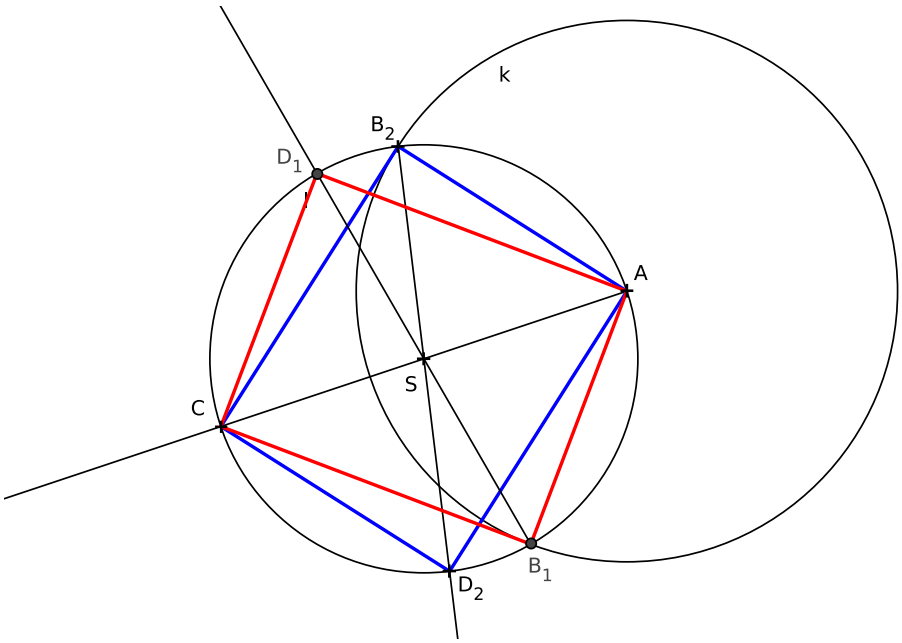
Máme dány body A a S v rovině. Okamžitě můžeme nalézt bod C, který leží na polopřímce AS tak, že bod S je středem úsečky AC. Jak vidíme na obr. 4.2, body B a D nalezneme na Thaletově kružnici l nad průměrem AC, protože body leží na obdélníku a u vrcholů B a D je tedy pravý úhel. Dále víme, že bod B leží od bodu A ve vzdálenosti a. Sestrojíme tedy kružnici k se středem A a poloměrem a. Průsečíky kružnic l a k jsou body B, B'. Dostáváme dvě řešení. Pro obě řešení sestrojíme poslední vrchol podstavy bod D, resp. D', obdobně jako bod C.

Postup konstrukce 4.1.

1. $C; C \in \leftrightarrow AS \wedge |AS| = |CS|$
2. $t_{AC}; t_{AC}(S, |AS|)$ Thaletova kružnice nad AC
3. $k; k(A, a)$
4. $B; \{B\} = k \cap l$
5. $D; D \in \leftrightarrow BS \wedge |BS| = |DS|$
6. obdélník A, B, C, D

Tato úloha má dvě řešení, jak plyne z konstrukce. Aby řešení bylo pouze jedno, přidáme na bod B resp. bod D další dodatečnou podmínku: Vrchol B má větší y-ovou souřadnici než vrchol D.

Máme tedy sestrojenou dolní podstavu a nyní zkonstruujeme zbytek tělesa. Každým vrcholem podstavy, tj. body A, B, C a D, sestrojíme kolmici k rovině podstavy. Na jednotlivé kolmice naneseme výšku tělesa, tj. v, čímž získáme zbývající vrcholy kvádru E, F, G a H, viz postup konstrukce 4.2.



Obrázek 4.2: Konstrukce podstavy hranolu při kolmém pohledu do půdorysny

Dostáváme tedy řešení, kvádr $ABCDEFGH$, viz obr. 4.1 v náhledu na prostorovou situaci bez využití konkrétního promítání.

Postup konstrukce 4.2.

1. $a; a \perp \pi \wedge A \in a$
2. $b; b \perp \pi \wedge B \in b$
3. $c; c \perp \pi \wedge C \in c$
4. $d; d \perp \pi \wedge D \in d$
5. $E; E \in a \wedge |AE| = v$
6. $F; F \in b \wedge |BF| = v$, $G; G \in c \wedge |CG| = v$, $H; H \in d \wedge |DH| = v$
7. $ABCDEFGH$ jsou vrcholy hledaného hranolu

4.1.1 Řešení v Mongeově promítání

Doplnění zadání pro Mongeovo promítání: Mějme pravotočivou kartézskou soustavu souřadnic v E_3. Kladná část osy x_{12} směřuje doleva.

Při rýsování na papír volíme polohu papíru na výšku. Počátek soustavy souřadnic má polohu vůči papíru $0 = [18,5; 14]_p$.

V souboru `Animace/Priklad_4.1/4.1_hranol_pudorysna_MP.obr` lze nalézt speciální verzi animace tohoto příkladu pro Mongeovo promítání.

Řešení: Sestrojíme půdorysné a nárysné průměty bodů A a S, jak postupovat je vysvětleno v kapitole 2.3. Stejně jako v obecném řešení budeme nejdříve konstruovat podstavu kvádru, která leží v půdorysně.

Nejdříve sestrojíme půdorys podstavy, postup je shodný s postupem z obecné konstrukce (4.1). Podstava leží v půdorysně a zobrazí se nezkresleně. Dostáváme tedy vrcholy A_1, B_1, C_1 a D_1. Nárysy bodů A a S již máme ze zadání, stačí dourčit body B, C a D. Jejich nárysy nalezneme postupně na příslušných ordinálách (o^B, o^C a o^D), tedy na kolmicích na osu x_{12} procházejících odpovídajícími body B_1, C_1 a D_1.

Když máme sestrojenou dolní podstavu, zbývá nalézt horní podstavu. Nejdříve sestrojíme směr hran hranolu, který je kolmý na podstavu a tedy i na půdorysnu. Půdorys hrany a, procházející bodem A, leží ve směru promítání, promítne se proto do bodu, tj. $a_1 = A_1$. Nárys této přímky je nutně kolmý na základnici, neboť přímka v prostoru je kolmá na půdorysnu. Platí, že $a_2 \perp x_{12} \wedge A_2 \in a_2$. Zbylé hrany b, c a d jsou rovnoběžné s a.

Nyní stačí na hrany nanést výšku hranolu v. Jelikož jsou hrany tělesa rovnoběžné s nárysnou, platí, že se v nárysu zachovávají vzdálenosti. Stačí tedy nanést v na příslušné hrany a dostaneme hledané vrcholy E, F, G, H.

Nyní snadno sestrojíme hranol $ABCDEFGH$, viz obr. A.1.

4.1.2 Řešení v kosoúhlém promítání

Doplnění zadání pro kosoúhlé promítání: Mějme pravotočivou kartézskou soustavu souřadnic v E_3. Kladná část osy y směřuje doprava. Kosoúhlé promítání je dáno krácením $q = \frac{3}{4}$ a $\omega = 135°$.

Při rýsování na papír volíme polohu papíru na výšku. Počátek kosoúhlého promítání má souřadnice $0 = [8, 16]_p$.

Řešení: Nejdříve sestrojíme počátek 0 a jednotlivé osy y, x^k a z. Sestrojíme kosoúhlé průměty a kosoúhlé půdorysné průměty bodů A a S, tj. body A^k, S^k a A_1^k, S_1^k, jak postupovat pro kosoúhlý průmět i kosoúhlý půdorys je vysvětleno v kapitole 2.4. Jelikož podstava leží v půdorysně, oba sestrojené průměty splývají, tedy $A_1^k = A^k$ a $S_1^k = S^k$.

Nyní sestrojíme podstavu $ABCD$, ze které známe jeden vrchol A a střed S. Hledáme tedy kosoúhlé průměty bodů B, C, D. Vzdálenosti se v půdorysně nezobrazují ve skutečné velikosti, tedy podstavný obdélník nelze konstruovat přímo v průmětu. Musíme průmětnu otočit do bokorysny, což uděláme pomocí přidruženého Mongeova promítání.

Budeme tedy konstruovat půdorysy přidruženého Mongeova promítání, tj. A_1, přitom musíme dodržet, že osa y_{MP} splyne s osou y z kosoúhlého promítání. Osa x_{MP} je kolmá na osu y a splývá se zápornou částí osy z. Navíc platí, že ordinála z kosoúhlého promítání (rovnoběžná s osou x^k) se protíná s ordinálou z půdorysu přidruženého Mongeova promítání (rovnoběžná s x_{MP}). A také platí, že spojnice bodů $A_1^k A_1$ je rovnoběžná s přímkou s, které určuje krácení na ose x^k vůči x_{MP}.

Dostáváme tedy osovou afinitu: osa afinity je osa y, směr afinity je dán dvojicí odpovídajících si bodů. Pomocí této afinity zkonstruujeme body A_1 a S_1. V otočení sestrojíme obdélník $A_1B_1C_1D_1$, podle postupu z obecného řešení, viz postup

konstrukce 4.1.

Pomocí inverzní afinity nalezneme k bodům B_1, C_1, D_1 jejich kosoúhlé půdorysy B_1^k, C_1^k, D_1^k a tedy také jejich kosoúhlé průměty, B^k, C^k, D^k.

Nyní sestrojíme kolmice na půdorysnu body B_1^k, C_1^k, D_1^k, tyto přímky jsou rovnoběžné s osou z, neboť ta je také kolmá na půdorysnu. Pak sestrojíme body E, F, G, H, které leží na příslušných kolmicích a, b, c, d vzdálené od dolní podstavy o výšku tělesa, viz postup konstrukce 4.2. Vzdálenosti se na ose z nezkreslují, vyneseme tedy vzdálenost v na všechny kolmice a sestrojíme body E^k, F^k, G^k a H^k. Jejich kosoúhlé půdorysy splývají s odpovídajícími půdorysy bodů $A_1^k, B_1^k, C_1^k, D_1^k$. Máme tedy sestrojen kvádr $ABCDEFGH$, viz obr. A.2.

4.1.3 Řešení v pravoúhlé axonometrii

Doplnění zadání pro pravoúhlou axonometrii: Mějme pravotočivou soustavu souřadnic v E_3 s počátkem 0. Axonometrie je dána axonometrickým trojúhelníkem. Délky stran trojúhelníka jsou $|XY| = 10, |YZ| = 10{,}6$ a $|ZX| = 9{,}2$.

Polohu papíru volíme na výšku. Souřadnice bodu X vůči souřadnicím na papíru jsou $X = [10, 15]_p$. Spojnice bodů XY je rovnoběžná se spodním okrajem papíru.

Řešení: Nejdříve sestrojíme axonometrický trojúhelník XYZ a nalezneme průměty jednotlivých os x, y a z, které jsou výškami v tomto trojúhelníku. Sestrojíme axonometrické průměty bodů A a S, A^a, S^a, a pomocný půdorysný průmět těchto bodů A_1^a a S_1^a, popis jak nalézt tyto průměty je v kapitole 2.5. Opět platí, že tyto průměty splývají, tj. $A_1^a = A^a$ a $S_1^a = S^a$.

Tyto průměty hledáme pomocí otočení půdorysny do axonometrické průmětny. Tohoto otočení využijeme pro sestrojení podstavy tělesa, neboť v axonometrickém průmětu se nám půdorysna zkresluje. V otočení tedy sestrojíme podstavu $A^o B^o C^o D^o$, podle postupu konstrukce 4.1.

Pomocí afinity nalezneme axonometrické půdorysy $A_1^a B_1^a C_1^a D_1^a$ a jelikož podstava leží v půdorysně, rovnají se tyto body i axonometrickým průmětům odpovídajících bodů, tj. $A_1^a = A^a, B_1^a = B^a, C_1^a = C^a$ a $D_1^a = D^a$.

Je tedy sestrojena dolní podstava kvádru. Nyní sestrojíme kolmice, budoucí hrany kvádru, vedoucí vrcholy podstavy, a, b, c a d, viz postup konstrukce 4.2. Axonometrické průměty těchto přímek musí být rovnoběžné s osou z, neboť hledáme kolmice k půdorysně a osa z je právě kolmá na tuto rovinu. Půdorysy těchto přímek splývají s půdorysy odpovídajících bodů, neboť jsou ve směru promítání. Platí tedy, že $A_1^a = a_1, B_1^a = b_1, C_1^a = b_1, D_1^a = b_1$. A navíc půdorysy vrcholů horní podstavy se také zobrazí do těchto bodů, tj. $A_1^a = E_1^a$ a analogicky pro ostatní vrcholy. Axonometrické průměty těchto vrcholů E, F, G a H nalezneme na příslušných kolmicích ve vzdálenosti v, výšky tělesa. Na průmětu osy z se však vzdálenosti nezobrazují ve skutečnosti, musíme tedy vzdálenost v nanést v otočení, sestrojíme tedy bod $V = [0, 0, v]$, který leží na ose z. A vzdálenost tohoto bodu V od počátku naneseme na kolmice od bodů dolní podstavy. Sestrojili jsme tedy hranol $ABCDEFGH$, viz obr. A.3.

4.1.4 Řešení v lineární perspektivě

Doplnění zadání pro lineární perspektivu: Mějme pravotočivou soustavu souřadnic v E_3 s počátkem 0. Lineární perspektiva je dána distancí $d = 7$, základnice z splývá s osou x, průmětna splývá s nárysnou. Výška středu promítání, resp. vzdálenost $|HZ|$, je rovna 5.

Při rýsování na papír volíme polohu papíru na šířku. Počátek splývá s bodem $Z = [19, 5]_p$, osa x splývá se základnící, která je rovnoběžná se spodní hranou papíru.

V souboru `Animace/Priklad_4.1/4.1_hranol_pudorysna_LP.obr` lze nalézt speciální verzi animace tohoto příkladu pro lineární perspektivu.

Řešení: Sestrojíme základní prvky lineární perspektivy, z, h, Z, H a D^d. Dále sestrojíme otočené půdorysy bodů A, S, tj. půdorys do pomocné průmětny π_1 otočíme kolem základnice do nárysny, dostáváme body A_1^o a S_1^o, přesný návod na sestrojení těchto objektů naleznete v kapitole 2.8.

Nyní opět konstruujeme podstavu tělesa, která leží v půdorysně. V otočení tedy sestrojíme podstavný obdélník ve skutečné velikosti, návod nalezneme v postupu konstrukce 4.1. Získáme tedy body A_1^o, B_1^o, C_1^o a D_1^o.

Dalším krokem je sestrojení perspektivního průmětu podstavy. Pro sestrojení těchto průmětů nalezneme kolmé průměty otočených půdorysů na základnici, tyto body označíme A_{12}, B_{12}, C_{12} a D_{12}. Perspektivní průmět A^p bodu A nalezneme jako průsečík spojnic $A_1^o D^d$ a $A_{12}H$. Analogicky sestrojíme perspektivní průměty ostatních vrcholů podstavy B^p, C^p, D^p.

Kolmice k půdorysně se v lineární perspektivě zobrazí na kolmice k základnici, perspektivní průměty přímek a, b, c a d jsou tedy kolmé k z a procházejí odpovídajícími průměty bodů A, B, C a D.

Body podstavy leží na těchto kolmicích ve vzdálenosti v, výšky tělesa. Vzdálenosti se však v lineární perspektivě obecně nezachovávají, zachovávají se pouze v průmětně, do které promítáme, tedy v nárysně. Ale platí, že přímky, které jsou rovnoběžné, se protínají na úběžníku roviny, ve které leží, což je zde horizont. A tzv. hloubkové přímky, tj. přímky, které jsou kolmé na základnici, mají úběžník v hlavním bodě. Tohoto poznatku využijeme k nanesení výšky a nalezení bodu E. V bodě A_{12} ležícího na základnici vedeme kolmici l^A a ve vzdálenosti v od bodu A_{12} na polopřímce $A_{12}A_1^o$ nalezneme bod E'. Tento bod spojíme s hlavním bodem a tam, kde tato spojnice protne přímku k^{Ap}, leží bod E^p.

Zbylé body horní podstavy sestrojíme pomocí úběžníků dolní podstavy:

Postup konstrukce 4.3.

1. $U_{AB}; U_{AB} = \leftrightarrow A^pB^p \cap \leftrightarrow C^pD^p$ - úběžník hrany AB
2. $U_{BC}; U_{BC} = \leftrightarrow B^pC^p \cap \leftrightarrow D^pA^p$ - úběžník hrany BC
3. $p; p = \leftrightarrow E^pU_{AB}$
4. $F^p; F^p = p \cap k^{Bp}$
5. $q; q = \leftrightarrow E^pU_{BC}$

6. $H^p; H^p = q \cap k^{Dp}$

7. $o; o =\leftrightarrow F^p U_{BC}$

8. $G^p; G^p = o \cap k^{Cp}$

Tímto jsme sestrojili celý hranol $ABCDEFGH$, který je zobrazen na obr. A.4.

4.2 Hranol s podstavou v obecné rovině

Zadání: V pravotočivé kartézské soustavě souřadnic v E_3 sestrojte pravidelný kolmý pětiboký hranol $ABCDEA'B'C'D'E'$ s podstavou v rovině ϱ, který je dán středem dolní podstavy S a vrcholem horní podstavy A'.

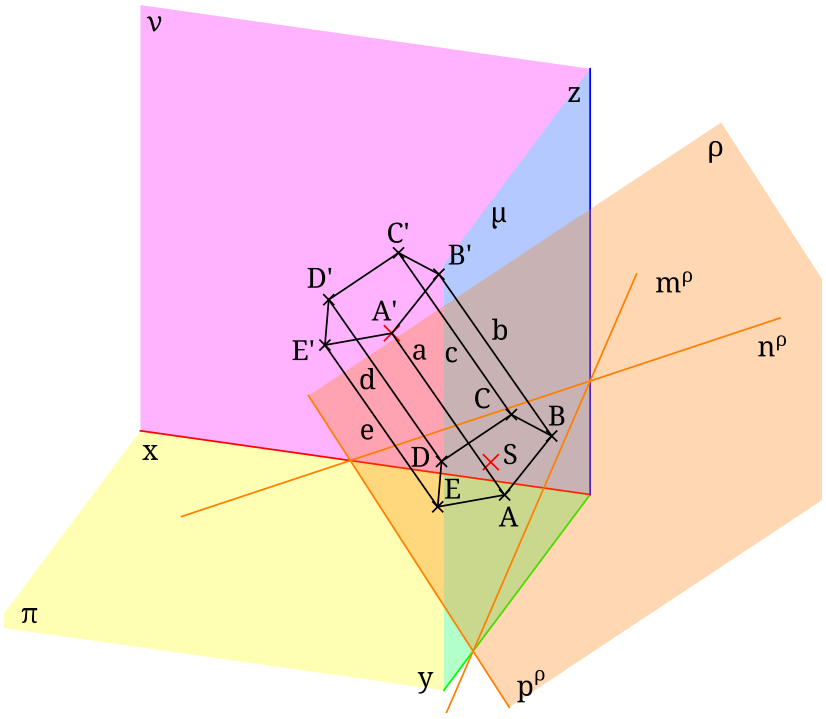
Souřadnice bodů:

$$\varrho = (8, 12, 4)$$

$$S = [2{,}5; 2{,}5; ?]$$

$$A' = [4{,}5; 6{,}5; 8]$$

V souboru `Animace/Priklad_4.2/4.2_hranol_obecna_poloha.obr` lze nalézt animaci k tomuto příkladu.



Obrázek 4.3: Hranol $ABCDEA'B'C'D'E'$ z příkladu 4.2.

Obecné řešení v prostoru: Rovina ϱ je dána souřadnicemi (x, y, z), které představují průsečíky roviny ϱ se souřadnicovými osami, tj. body $X = [x, 0, 0] \wedge Y = [0, y, 0] \wedge Z = [0, 0, z]$. V této rovině leží bod S, který je dán pouze dvěma souřadnicemi, x-ovou a y-ovou – máme tedy půdorys tohoto bodu, S_1. Nejdříve

bod S dourčíme tak, aby v rovině ϱ ležel. Bodem S_1 vedeme kolmici k průmětně a nalezneme průsečík této přímky s rovinou ϱ, průsečík je hledaný bod S.

Hranol je dán rovinou podstavy ϱ, středem podstavy S a vrcholem horní podstavy. Hranol je pravidelný pětiboký. Platí, že přímka AA' je kolmá na rovinu ϱ. Sestrojíme tedy kolmici na rovinu ϱ bodem A' a pata kolmice je vrchol A. Nyní máme dánu podstavu středem a vrcholem. V rovině ϱ sestrojíme pětiúhelník, přesný návod jak postupovat je v postupu konstrukce 1.2. Získáme dolní podstavu $ABCDE$. Horní podstavu nyní sestrojíme např. pomocí rovnoběžnosti hran, nebo přenesením vzdálenosti AA' na rovnoběžky k této přímce vedené body B, C, D a E.

Získáváme tedy celé těleso $ABCDEA'B'C'D'E'$, viz obr. 4.3.

Postup konstrukce 4.4.

1. $\varrho; \varrho = (x, y, z) \Rightarrow X = [x, 0, 0] \wedge Y = [0, y, 0] \wedge Z = [0, 0, z]$
2. $p; p \perp \pi \wedge S_1 \in \pi$
3. $S; S = p \cap \varrho$
4. $a; a \perp \varrho \wedge A' \in a$
5. $A; A = a \cap \varrho$
6. $B, C, D, E; ABCDE \in \varrho$ je pravidelný pětiúhelník se středem S
7. $b; b \parallel a \wedge B \in b$
8. $c; c \parallel a \wedge C \in c$
9. $d; d \parallel a \wedge D \in d$
10. $e; e \parallel a \wedge E \in e$
11. $q; q \parallel AB \wedge A' \in q$
12. $B'; B' = b \cap q$
13. $r; r \parallel BC \wedge B' \in r$
14. $C'; C' = c \cap r$
15. $s; s \parallel CD \wedge C' \in s$
16. $D'; D' = d \cap s$
17. $t; t \parallel DE \wedge D' \in t$
18. $E'; E' = e \cap t$
19. $ABCDEA'B'C'D'E'$ je pravidelný pětiboký hranol

4.2.1 Řešení v Mongeově promítání

Doplnění zadání pro Mongeovo promítání: Mějme pravotočivou kartézskou soustavu souřadnic v E_3. Kladná část osy x_{12} směřuje doleva.

Při rýsování na papír volíme polohu papíru na výšku. Počátek soustavy souřadnic má vůči papíru souřadnice $0 = [16, 13]_p$.

Řešení: Rovinu ϱ máme dánu pomocí průsečíků s jednotlivými osami x, y, z, můžeme tedy sestrojit půdorysnou a nárysnou stopu této roviny, p^ϱ, n^ϱ. U bodu S nemáme dánu z-ovou souřadnici, kterou dourčíme tak, aby bod S ležel v rovině ϱ, viz konstrukce 3.7 nebo konstrukce 3.8. Půdorys bodu S_1 máme dán, nárys S_2 nalezneme pomocí hlavní přímky rovnoběžné s půdorysnou, která je v půdorysu rovnoběžná s půdorysnou stopou roviny ϱ a v nárysu je rovnoběžná se základnicí. Bodem S_1 tedy vedeme přímku $h_1 \parallel p_1^\varrho$. Nalezneme půdorys nárysného stopníku N_1^h, který leží na základnici. Nárys N_2^h tohoto stopníku leží na nárysné stopě a na ordinále. Bodem N_2^h prochází $h_2 \parallel x_{1,2}$, na průsečíku této přímky s ordinálou bodu S leží hledaný nárys bodu S.

Máme tedy sestrojené zadání a dalším krokem je konstrukce podstavy, kterou máme dánu rovinou ϱ, ve které leží, a středem S. Analogicky jako v obecném řešení také zde nejdříve musíme nalézt vrchol A jako patu kolmice spuštěné z vrcholu A' na rovinu ϱ.

Postup konstrukce 4.5. Konstrukce kolmice k rovině v Mongeově promítání

1. $a; a \perp \varrho \wedge A' \in a \Rightarrow a_1 \perp p_1^\varrho \wedge a_2 \perp n_2^\varrho$
2. $s; s \subset \varrho \wedge s_1 \perp p_1^\varrho$ – spádová přímka roviny ϱ
3. $A; A = a \cap s \Rightarrow A_2 = a_2 \cap s_2 \wedge A_2 = a_1 \cap o^A$ (ordinála bodu A) – princip krycí přímky (v půdorysu se $a_1 = s_1$)

Podstava je pravidelný pětiúhelník, který je nyní dán středem S a vrcholem A, ležící v rovině ϱ, která je obecná vůči průmětnám, vzdálenosti se tedy zkracují. Podstavu proto sestrojíme v otočení, které rovinu ϱ otáčí do půdorysny π. Volba průmětny, do které otáčíme, je libovolná, záleží většinou pouze na tom, kam se nám otočení vejde a na přehlednosti obrázku. Jak konstruovat otáčení naleznete v kapitole 2.2. Konstrukce pravidelného pětiúhelníka je popsána v postupu 1.2.

Po vrácení zpět z otočení máme vrcholy podstavy A_1, B_1, C_1, D_1, E_1. Nárysy těchto bodů nalezneme na průsečících ordinál a hlavních přímek procházejících příslušnými body.

Hrany b, c, d a e jsou rovnoběžné s a a procházejí odpovídajícími vrcholy podstavy. Vrcholy B', C', D' a E' nalezneme v půdorysu analogicky jako v obecném řešení 4.4, nárysy sestrojíme pomocí ordinál.

Po doplnění chybějících hran dostáváme hledaný hranol $ABCDEA'B'C'D'E'$, viz obr. A.5.

4.2.2 Řešení v kosoúhlém promítání

Doplnění zadání pro kosoúhlé promítání: Mějme pravotočivou kartézskou soustavu souřadnic v E_3. Kladná část osy y směřuje doprava. Kosoúhlé promítání je dáno krácením $q = \frac{1}{3}$ a $\omega = 135°$.

Při rýsování na papír volíme polohu papíru na šířku. Počátek kosoúhlého promítání má souřadnice $0 = [12, 8]_p$.

Řešení: Rovina ϱ, ve které leží podstava hranolu, je dána průsečíky s osami, kterými prochází stopy roviny. Kosoúhlý průmět bodu S nalezneme pomocí hlavní přímky h roviny ϱ a ordinál bodu S, viz konstrukce bodu D v oddíle 3.3.2.

Dále nalezneme kosoúhlý průmět a kosoúhlý půdorys bodu A', kterým vedeme přímku a. Přímka a je kolmá na rovinu ϱ, protože hledáme vrchol A dolní podstavy kolmého hranolu. Průměty přímky a jsou kolmé na stopy roviny, tj. $a_1^k \perp p_1^k$ a $a^k \perp m^k$, kde m^k značíme stopu v bokorysně. Bod A pak nalezneme jako průsečík přímky a a roviny ϱ, který hledáme pomocí krycí přímky s, která splývá s jedním z průmětů přímky a.

Máme tedy střed podstavy S a jeden vrchol, podstavu sestrojíme v otočení. Otočíme tedy rovinu ϱ kolem jejího kosoúhlého průmětu půdorysné stopy p_1^k, popis otáčení naleznete v kapitole 2.2. Získáme kosoúhlé půdorysy těchto bodů, jejich kosoúhlé průměty nalezneme na příslušných hlavních přímkách a ordinálách (ordinály, které bod A_1^k spojují s A^k, jsou dvě přímky, které se protínají na ose y, ordinála v kosoúhlém půdorysu je rovnoběžná s osou x^k a ordinála v bokorysně je rovnoběžná s osou z).

Máme tedy sestrojenou podstavu hranolu $ABCDE$. Každým vrcholem podstavy kromě vrcholu A vedeme rovnoběžku s přímkou a, tj. po řadě přímky b, c, d a e. Na tyto přímky naneseme výšku tělesa, která je dána vzdáleností $|AA'|$. Jelikož promítáme rovnoběžně a vzdálenosti vynášíme na rovnoběžné přímky, vzdálenosti se zachovávají, stačí tedy přenést vzdálenost v kosoúhlém průmětu $|A^k A'^k|$, kosoúhlé půdorysy vrcholů můžeme nalézt stejně, nebo je odvodit pomocí ordinál.

Sestrojili jsme hranol $ABCDEA'B'C'D'E'$, který je zobrazený na obr. A.6.

4.2.3 Řešení v pravoúhlé axonometrii

Doplnění zadání pro pravoúhlou axonometrii: Mějme pravotočivou soustavu souřadnic v E_3 s počátkem 0. Axonometrie je dána axonometrickým trojúhelníkem. Délky stran trojúhelníka jsou $|XY| = 10, |YZ| = 12$ a $|ZX| = 9$.

Polohu papíru volíme na výšku. Souřadnice bodu $X = [5, 11]_p$ a spojnice bodů XY je rovnoběžná se spodním okrajem papíru.

Řešení: Sestrojíme zadání příkladu, tj. bod A', rovinu ϱ a půdorys bodu S, jak postupovat naleznete v kapitole 3. Bod S, který je dán svým půdorysem dourčíme pomocí hlavní přímky roviny ϱ rovnoběžné s půdorysnou.

Abychom mohli sestrojit dolní podstavu musíme nalézt vrchol podstavy. Umíme nalézt vrchol A, který leží na hraně procházející vrcholem horní podstavy A'. Sestrojíme tedy kolmici a bodem A' k rovině ϱ, neboť sestrojujeme kolmý hranol. Axonometrický průmět této kolmice a bude kolmý na axonometrickou stopu a^ϱ. V konstrukci axonometrického půdorysu využijeme faktu, že výšky v trojúhelníku jsou kolmé na stěnu, na kterou jsou spuštěny, a protínají se v jednom bodě. Sestrojíme trojúhelník daný počátkem 0, průsečíkem prodloužené osy z a půdorysné stopy p^ϱ a průsečíkem stopy p^ϱ a jedné ze souřadnicových os x nebo y. Který

z průsečíků to bude, volíme tak, aby vzniklý trojúhelník byl ostroúhlý. Přesněji vypadá postup takto:

Postup konstrukce 4.6. Konstrukce kolmice a bodem A' k obecné rovině ϱ

1. $a^a; A' \in a \wedge a \perp a^\varrho$
2. $1; 1 = z \cap p^\varrho$ – průsečík prodloužené osy z a půdorysné stopy p^ϱ
3. $X_\varrho; X_\varrho = p^\varrho \cap x$
4. $Y_\varrho; Y_\varrho = p^\varrho \cap y$
5. $2; \triangle 01 X_\varrho \Rightarrow 2 = X_\varrho \vee 2 = Y_\varrho$
6. nechť platí $2 = X_\varrho$ jinak místo osy x budeme používat osu y
7. $l; l \parallel x \wedge 2 \in l$
8. $k; k \perp 01 \wedge 2 \in k$
9. $R; R = l \cap k$
10. $a'; 0 \in a' \wedge R \in a'$ – směr půdorysu kolmice a
11. $a_1^a; a_1^a \parallel a' \wedge A_1'^a \in a_1^a$

Sestrojili jsme přímku a, na které leží hrana AA'. Bod A nalezneme jako průsečík této přímky s rovinou ϱ. Tento průsečík nalezneme pomocí krycí přímky l, která v axonometrickém průmětu splývá s axonometrickým půdorysem přímky a. Přímku l volíme tak, aby ležela v rovině ϱ, umíme tedy odvodit její axonometrický průmět. Bod A je průsečík těchto přímek, tj. a a l.

Z podstavy známe střed S a jeden vrchol A, zbytek vrcholů sestrojíme v otočení. Otáčet budeme do axonometrické průmětny kolem axonometrické stopy roviny ϱ. Při otáčení využíváme vzdálenosti bodu od průmětny, což je v ostatních promítáních dáno jinými průměty, zde však nikde implicitně není a musíme jej tedy nalézt.

Vzdálenost bodu od průmětny určíme pomocí následujícího postupu 4.7.

Postup konstrukce 4.7. Určení vzdálenosti bodu A od axonometrické průmětny α

- Pokud bod A leží na nějaké ose x, y nebo z, pak nalezneme vzdálenost ve sklopení axonometrické promítací roviny dané osy, tj. roviny kolmé na α, viz. konstrukce 3.3 .

  Hledaná vzdálenost je pak $|AA^o|$.

- Pokud bod A neleží na ose, pak vedeme bodem A rovinu α' rovnoběžnou s axonometrickou průmětnou, postup 4.8. Vzdálenost bodu A od roviny α jsme převedli na vzdálenost dvou rovnoběžných rovin, kterou nalezneme jako vzdálenost průsečíku R roviny α s libovolnou osou. Tím jsme převedli tento případ na předchozí. Hledáme tedy vzdálenost bodu R na ose od roviny α.

Postup konstrukce 4.8. Rovina γ rovnoběžná s β bodem B

1. $h^a; h^a \parallel n^{\beta,a} \wedge B^a \in h^a$
2. $h_1; h_1 \parallel y \wedge B_1 \in h_1$
3. $P_1^a; P_1^a = h^a \cap h_1$ – stopník hlavní přímky
4. $p^\gamma; P_1^a \in p^\gamma \wedge p^\gamma \parallel p^\alpha$
5. $X; X = p^\gamma \cap x$
6. $n^\gamma; X \in p^\gamma \wedge n^\gamma \parallel n^\alpha$
7. $Y; Y = p^\gamma \cap y$
8. $m^\gamma; Y^a \in p^\gamma \wedge m^\gamma \parallel m^\alpha$

Nyní již můžeme otočit rovinu ϱ do axonometrické průmětny, návod naleznete v kap. 2.2. Máme tedy sestrojenou dolní podstavu tělesa.

Známe také směr hran, můžeme tedy každým vrcholem podstavy $ABCDE$ vést rovnoběžku s přímkou a, na které leží hrana AA'. Bod A' je vrcholem horní podstavy, zbylé vrcholy doplníme pomocí rovnoběžnosti.

Máme tedy sestrojený hranol $ABCDEA'B'C'D'E'$, který nalezneme zobrazený na obr. A.7.

4.2.4 Řešení v lineární perspektivě

Doplnění zadání pro lineární perspektivu: Mějme pravotočivou soustavu souřadnic v $\overline{E_3}$ s počátkem 0. Lineární perspektiva je dána distancí $d = 7$, základnice z splývá s osou x, průmětna splývá s nárysnou. Výška středu promítání, resp. vzdálenost $|HZ|$ je rovna 5.

Při rýsování na papír volíme polohu papíru na šířku. Počátek splývá s bodem $Z = [16, 7]_p$, osa x splývá se základnící, která je rovnoběžná se spodní hranou papíru.

Řešení: Sestrojíme zadání, tedy perspektivní průměty bodu A', perspektivní průmět půdorysu bodu S a nalezneme stopu a úběžnici roviny ϱ, dourčíme bod S tak, aby ležel v rovině ϱ. Návod jak postupovat je v kapitole 3.

Dalším krokem konstrukce je sestrojení přímky a, která prochází bodem A' a je kolmá na rovinu ϱ. Pro konstrukci této kolmice a sestrojíme úběžník normál U^n roviny ϱ.

Tento úběžník sestrojíme pomocí sklopení roviny α, která je kolmá na rovinu ϱ a prochází bodem O, tj. středem promítání. Průsečík těchto rovin α a ϱ nazveme přímkou k (v průmětu splývá s průmětem roviny α) jejíž úběžník je bod U^k, který leží na úběžnici u^ϱ.

Sklopíme rovinu α, ve které leží jak přímka k tak i přímka n, tj. normála roviny ϱ procházející středem O. Sklopený bod O nalezneme na kolmici na průmět přímky k a na tzv. řídicí kružnici se středem H a poloměrem d. Sklopená přímka k^o prochází svým úběžníkem U^k a sklopeným bodem O. A nyní již můžeme sestrojit sklopenou přímku n, která prochází bodem O^o a je kolmá na k^o. Průsečík n^o

s průmětem přímky k je hledaný úběžník U^n, viz postup 4.9. Tímto bodem tedy prochází všechny kolmice k rovině ϱ.

Postup konstrukce 4.9. Konstrukce úběžníku normál roviny ϱ

1. $\alpha; \alpha \perp \varrho \wedge O \in \alpha$
2. $k; k \perp n^\varrho \wedge H \in k$
3. $U^k; k \cap u^\varrho$
4. $k_d; k_d(H, d)$ řídicí kružnice, $d = |HD^d|$
5. $O^o; O^oH \perp k \wedge O^o \in k_d$
6. $k^o; U^k \in k^o \wedge O^o \in k^o$
7. $n^o; n^o \perp k^o \wedge O^o \in n^o$
8. $U^n; U^n = k \cap a^o$

Přímku a nyní sestrojíme tak, že spojíme body A' a její úběžník normál, tj. bod U^n.

Pokud máme sestrojenou přímku a, musíme pomocí krycí přímky nalézt průsečík této přímky s rovinou ϱ. Tento průsečík je vrchol dolní podstavy, bod A. Nyní již máme střed S a vrchol A dolní podstavy hranolu, můžeme tedy pomocí otočení v otočeném půdorysu sestrojit podstavu, pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Pomocí rovnoběžnosti a faktu, že body leží v rovině ϱ, dourčíme jejich perspektivní průmět, využijeme konstrukci bodu D v oddíle 3.3.4.

Nyní potřebujeme sestrojit přímky b, c, d a e, které jsou rovnoběžné s přímkou a, všechny tedy procházejí bodem U^n. Nyní již můžeme sestrojit hrany b, c, d a e. Vrcholy druhé podstavy sestrojíme pomocí rovnoběžnosti, tj. pomocí úběžníků příslušných přímek. Dostáváme tedy hranol $ABCDEA'B'C'D'E'$, který je zobrazen na obr. A.8.

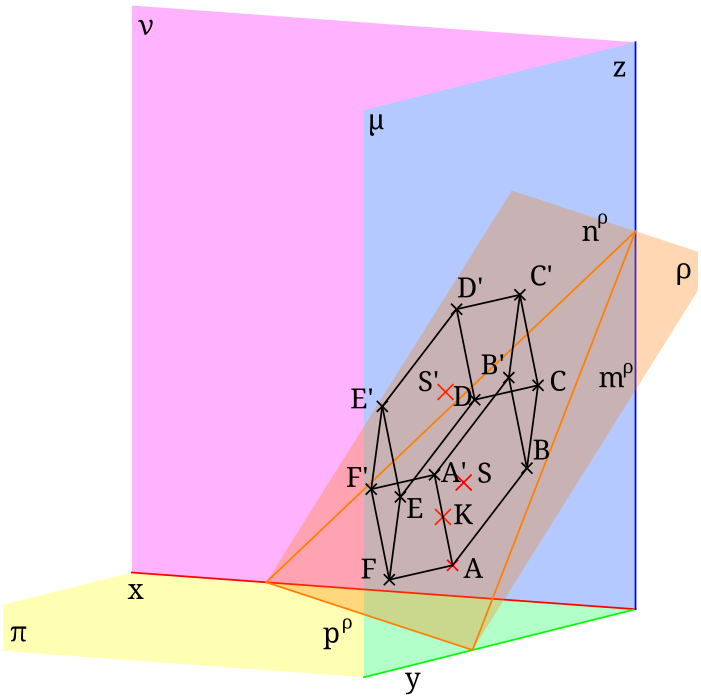
4.3 Kosý hranol

Zadání: V pravotočivé kartézské soustavě souřadnic v E_3 sestrojte pravidelný kosý hranol, jehož podstava je pravidelný šestiúhelník ležící v rovině ϱ. Hranol je dán středy podstav S, S' a bodem K, který leží na hraně AA'.

Souřadnice bodů:

$$\varrho = (11, 9, 10)$$
$$S = [3{,}5; 3; ?]$$
$$S' = [3{,}5; 4; 6]$$
$$K = [2{,}5; 6; 3]$$

V souboru `Animace/Priklad_4.3/4.3_kosy_hranol.obr` lze nalézt animaci k tomuto příkladu.



Obrázek 4.4: Hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ z příkladu 4.3.

Obecné řešení v prostoru: Kosý hranol je dán rovinou podstavy ϱ, ze které dále známe střed S. Je dán střed horní podstavy S', který společně s bodem S určuje směr hran AA', BB' atd. hranolu.

Nejdříve tedy sestrojíme rovinu ϱ, která je dána průsečíky s osami, tj. body $X = [11, 0, 0], Y = [0, 9, 0]$ a $Z = [0, 0, 10]$. Bod S, který je dán svým půdorysem a který leží v rovině ϱ, dourčíme pomocí přímky k, která je kolmá na půdorysnu. Abychom mohli sestrojit podstavu, musíme nalézt další její bod. Máme dán bod K, který leží na hraně AA'. Sestrojíme-li tuto hranu, tj. přímku procházející bodem K, která bude rovnoběžná s SS', a nalezneme její průsečík s rovinou ϱ, získáme vrchol podstavy A. Nyní můžeme v rovině ϱ sestrojit pravidelný šestiúhelník daný středem S a vrcholem A, postup konstrukce 1.1. Máme tedy sestrojenou podstavu danou vrcholy A, B, C, D, E a F.

Každým z těchto bodů vedeme rovnoběžku s SS', na které vyneseme vzdálenost $|SS'|$ a dostaneme vrcholy horní podstavy, A', B', C', D', E', F'. A získáváme tedy celý šestiboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$, viz obr. 4.4.

Postup konstrukce 4.10. konstrukce kosého hranolu v prostoru

1. $\varrho; \varrho = (11, 9, 10)$
2. $S_1; S_1 = [3, 5; 3, 0]$ – půdorys bodu S
3. $k; k \perp \pi \wedge S_1 \in k$
4. $S; S = k \cap \varrho$
5. $K; K = [2, 5; 6; 3]$
6. $S'; S' = [3, 5; 4; 6]$

7. $s; s =\leftrightarrow SS'$
8. $a; a \parallel s \wedge K \in a$
9. $A = a \cap \varrho$
10. $ABCDEF; ABCDEF$ je šestiúhelník v rovině ϱ
11. $A'; |AA'| = |SS'| \wedge A' \in a$
12. $b; b \parallel s \wedge B \in b$
13. $B'; |BB'| = |SS'| \wedge A' \in a$
14. analogicky jako bod B' sestrojíme vrcholy C', D', E' a F'
15. $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ šestiboký hranol

4.3.1 Řešení v Mongeově promítání

Doplnění zadání pro Mongeovo promítání: Mějme pravotočivou kartézskou soustavu souřadnic v E_3. (Kladná část osy $x_{1,2}$ směřuje doleva.)

Při rýsování na papír volíme polohu papíru na výšku. Počátek soustavy souřadnic má polohu vůči papíru $0 = [16, 14]_p$.

Řešení: Rovina ϱ je dána průsečíky s osami, díky tomu sestrojíme půdorysnou a nárysnou stopu roviny ϱ, neboť body $X = [11, 0, 0]$ a $Y = [0, 9, 0]$ prochází půdorysná stopa p_1^ϱ a nárysná stopa n_2^ϱ prochází body X a $Z = [0, 0, 10]$, když rovina $\varrho = (11, 9, 10)$.

Půdorys bodu S je dán ze zadání, nárys S_2 dourčíme tak, aby bod S ležel v rovině ϱ, viz konstrukce bodu D v postupu 3.7 nebo 3.8.

Sestrojíme průměty bodů K a S'. Body S, S' vedeme přímku s, která určuje směr hran hledaného hranolu. Bodem K pak vedeme přímku a, tj. hranu AA'. Vrchol A nalezneme jako průsečík přímky a a roviny ϱ. Tento průsečík nalezneme pomocí krycí přímky l, která leží v rovině ϱ a navíc leží v rovině kolmé na půdorysnu, která je určena přímkou a (směrová rovina přímky a). Platí tedy, že $l_1 = a_1$, nárys přímky l odvodíme pomocí stopníků, které leží na příslušných stopách roviny ϱ.

Podstava je nyní dána vrcholem A a středem S v rovině ϱ, opět musíme rovinu otočit, abychom sestrojili pravidelný šestiúhelník, popis otočení roviny naleznete v oddíle 2.2.

Získáváme podstavu $ABCDEF$, vrcholy vedeme po řadě přímky b, c, d, e a f (přímku a již máme sestrojenou), které jsou rovnoběžné s s. Na tyto přímky naneseme vzdálenost SS' a získáme tak vrcholy horní podstavy. Přímky mají obecnou polohu vůči průmětnám, a tedy vzdálenosti se nezobrazují ve skutečných velikostech. Platí ale, že při rovnoběžném promítání na rovnoběžné přímky, se vzdálenosti zachovávají, viz oddíl 2.1.2. Můžeme tedy přenášet vzdálenost $|S_1S_1'|$ v půdorysu a $|S_2S_2'|$ v nárysu, případně druhý průmět odvodíme pomocí ordinál.

Máme sestrojené těleso $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$, které je zobrazeno na obr. A.9.

4.3.2 Řešení v kosoúhlém promítání

Doplnění zadání pro kosoúhlé promítání: Mějme pravotočivou kartézskou soustavu souřadnic v E_3. (Kladná část osy y směřuje doprava.) Kosoúhlé promítání je dáno krácením $q = \frac{1}{2}$ a $\omega = 135°$.

Při rýsování na papír volíme polohu papíru na výšku. Počátek soustavy souřadnic v kosoúhlém promítání má souřadnice $0 = [7, 11]_p$.

Řešení: Sestrojíme zadání, tj. rovinu ϱ, body S', K a půdorys bodu S, a nalezneme kosoúhlé průměty a kosoúhlé půdorysy těchto objektů. Pomocí hlavní přímky h dourčíme bod S tak, aby ležel v rovině ϱ. Návod jak postupovat je v oddíle 3.3.2.

Směr hran je dán přímkou $s = \leftrightarrow SS'$. Bodem K vedeme rovnoběžku a s přímkou s, na které leží hrana AA'. Vrchol A leží na průsečíku přímky a a roviny ϱ. Tento průsečík nalezneme opět pomocí krycí přímky l, kterou vedeme v kosoúhlém půdorysu, tj. v kosoúhlém půdorysu splývají $l_1^k = a_1^k$, kosoúhlý půdorys odvodíme tak, aby přímka l ležela v rovině ϱ. Na průsečíku přímek a a l pak bude hledaný vrchol A.

Nyní máme již podstavu dánu středem S a vrcholem A, pro sestrojení podstavy však musíme rovinu ϱ otočit. Otáčíme kolem bokorysné stopy roviny ϱ do bokorysny. V otočení sestrojíme pravidelný šestiúhelník, jak jej sestrojit naleznete v postupu 1.1. Nalezené vrcholy v otočení vrátíme zpět a dourčíme chybějící průmět. Získáváme body $A^kB^kC^kD^kE^kF^k$ a $A_1^kB_1^kC_1^kD_1^kE_1^kF_1^k$.

Přímky b, c, d, e a f sestrojíme rovnoběžné s přímkou s a procházející po řadě body B, C, D, E a F. Rovnoběžky budou rovnoběžné v obou průmětech s odpovídajícími průměty přímky s.

Horní podstavu nyní sestrojíme pomocí rovnoběžnosti hran kvádru tak, aby platilo $A' \in a$, $B' \in b$, $C' \in c$, $D' \in d$, $E' \in e$ a $F' \in f$.

Po doplnění chybějících hran získáváme kosý hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$, viz obr. A.10.

4.3.3 Řešení v pravoúhlé axonometrii

Doplnění zadání pro pravoúhlou axonometrii: Mějme pravotočivou soustavu souřadnic v E_3 s počátkem 0. Axonometrie je dána axonometrickým trojúhelníkem. Délky stran trojúhelníka jsou $|XY| = 11,6, |YZ| = 14$ a $|ZX| = 11,5$.

Polohu papíru volíme na výšku. Souřadnice bodu $X = [10, 11]_p$ a spojnice bodů XY je rovnoběžná se spodním okrajem papíru.

Řešení: Sestrojíme zadání, nalezneme axonometrický průmět a půdorys bodů S a K, stopy roviny ϱ a dourčíme axonometrický průmět bodu S, který je dán svým půdorysem, aby ležel v rovině ϱ. Postup jak dané objekty sestrojit naleznete v oddíle 3.3.3.

Podstava je dána pouze středem a rovinou, ve které leží. Pro její sestrojení musíme dourčit alespoň jeden vrchol, pomocí něhož pak budeme schopni podstavu v otočení sestrojit. Máme dán bod K, který leží na hraně AA', sestrojíme-li přímku a obsahující tuto hranu, pak průsečík této přímky a s rovinou podstavy bude hledaný vrchol, konkrétně vrchol A.

Přímka s daná body SS' určuje směr hran tělesa, tedy i přímka a musí mít stejný směr. Bodem K proto vedeme přímku a rovnoběžnou s přímkou s. Průsečík A přímky a s rovinou ϱ nalezneme pomocí krycí přímky.

Nyní je možné sestrojit podstavu, která je tvořena pravidelným šestiúhelníkem. Otočíme tedy rovinu ϱ do axonometrické průmětny kolem axonometrické stopy roviny ϱ. Abychom mohli nalézt afinitu, která je určena otáčením, musíme sestrojit dva odpovídající si body, tj. bod a jeho obraz při otáčení. Pro otočení bodu musíme určit jeho vzdálenost od průmětny. Postup jak tuto vzdálenost určit je v postupu 4.7.

Jakmile máme sestrojenou podstavu $ABCDEF$, sestrojíme přímky b, c, d, e a f, které procházejí po řadě body B, C, D, E a F a jsou rovnoběžné s přímkou s, přímku a již máme sestrojenou. V axonometrickém průmětu přenášíme vzdálenost $|S^a S'^a|$, axonometrický půdorys dourčíme pomocí ordinál.

Máme tedy sestrojený hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$, viz obr. A.11.

4.3.4 Řešení v lineární perspektivě

Doplnění zadání pro lineární perspektivu: Mějme pravotočivou soustavu souřadnic v $\overline{E_3}$ s počátkem 0. Lineární perspektiva je dána distancí $d = 9$, základnice z splývá s osou x, průmětna splývá s nárysnou. Výška středu promítání, resp. vzdálenost $|HZ|$ je rovna 6.

Při rýsování na papír volíme polohu papíru na šířku. Počátek splývá s bodem $Z = [16, 7]_p$, osa x splývá se základnicí, která je rovnoběžná se spodní hranou papíru.

Řešení: Sestrojíme body S, S' a K a rovinu ϱ, resp. její stopy a úběžnici. Dourčíme bod S tak, aby ležel v rovině ϱ, viz řešení v oddíle 3.3.4. Body S, S' vedeme přímku s a nalezneme její úběžník U, jak postupovat nalezneme v oddíle 3.2.4. Pomocí tohoto úběžníku sestrojíme rovnoběžku s přímkou s bodem K, přímka a. Nalezneme průsečík přímky a s rovinou ϱ, např. pomocí krycí přímky. Průsečík je bod A, vrchol podstavy. V otočeném půdorysu otočíme a sestrojíme podstavu, pravidelný šestiúhelník, pomocí afinity vrátíme zpět a nalezneme chybějící průměty.

Druhou podstavu nalezneme pomocí rovnoběžnosti, tj. pomocí úběžníků, boční hrany procházejí bodem U a vždy odpovídající hrany jsou si rovnoběžné, protínají se tedy na úběžnici roviny ϱ, neboť rovnoběžné roviny mají stejnou úběžnici.

Dostáváme tedy hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ zobrazený na obr. A.12.

4.4 Jehlan s podstavou v nárysně

Zadání: Mějme dánu pravotočivou kartézskou soustavu souřadnic v E_3. Zobrazte kolmý jehlan s podstavou v nárysně. Podstava je pravidelný šestiúhelník daný vrcholy A, B. Dále je dán vrchol V jehlanu.

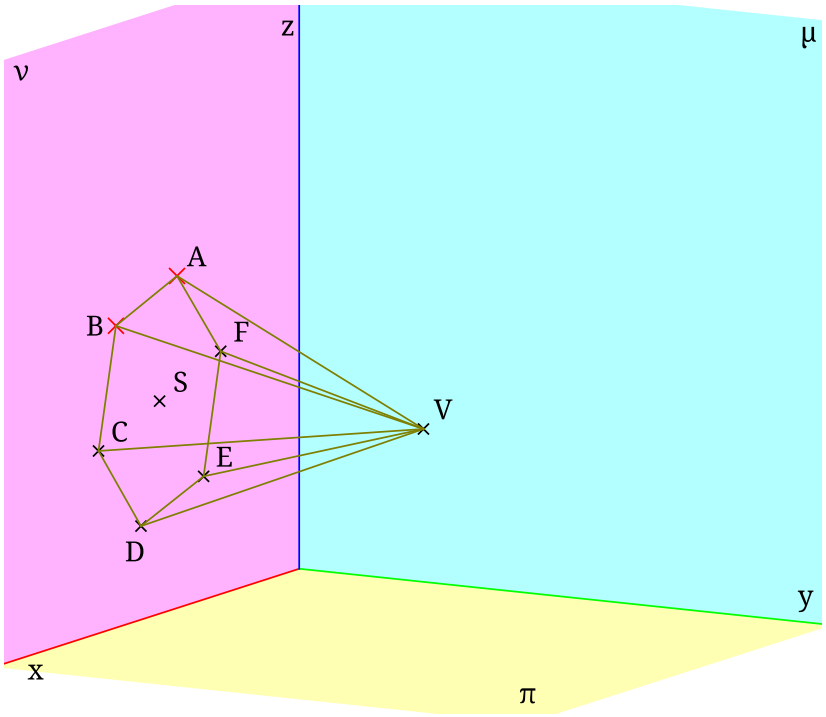
Souřadnice bodů:

$$A = [4; 0; 5{,}5]$$

$$B = [6, 0, 5]$$

$$V = [?, 5, ?]$$

V souboru `Animace/Priklad_4.4/4.4_jehlan_narysna.obr` lze nalézt animaci k tomuto příkladu.



Obrázek 4.5: Jehlan $ABCDEFV$ z příkladu 4.4.

Obecné řešení v prostoru: Podstava leží v nárysně a je dána dvěma vrcholy A, B. Pro sestrojení podstavy musíme nejdříve sestrojit střed S podstavy. Pravidelný šestiúhelník se skládá z šesti rovnostranných trojúhelníků. Střed S tedy leží na průsečíku osy úsečky AB a na kružnici k se středem v bodě A a poloměrem $|AB|$. Přímka s kružnicí se protínají ve dvou bodech, z bodů vybereme ten, který má menší z-ovou souřadnici. Když známe střed, umíme již sestrojit pravidelný šestiúhelník, viz postup 1.1. Máme tedy sestrojenou podstavu $ABCDEF$.

Vrchol V je dán pouze y-ovou souřadnicí, ale navíc víme, že jehlan je kolmý. Platí tedy, že spojnice SV je kolmá na podstavu jehlanu, tedy na nárysnu. Sestrojíme proto bodem S kolmici k nárysně, na které bude ležet bod V. Jelikož podstava leží v nárysně, je kolmý směr na tuto rovinu směrem osy y a bod V má proto shodnou x-ovou a z-ovou souřadnici jako bod S.

Máme tedy sestrojený bod V, zbývá pouze sestrojit hrany AV, BV, CV, DV, EV a FV.

Postup konstrukce 4.11. Konstrukce jehlanu s podstavou v nárysně

1. $A, B; A = [4; 0; 5{,}5], B = [6, 0, 5]$
2. $o_{AB}; o_{AB}$ je osa úsečky AB
3. $k; k(A, |AB|)$
4. $S, S'; \{S, S'\} = o_{AB} \cap k$

5. $ABCDEF; ABCDEF \in \nu$ je pravidelný šestiúhelník se středem S

6. $o; o \perp \nu \wedge S \in o$

7. $V; V \in o \wedge x_V = y_S \wedge y_V = y_S$

8. $ABCDEFV$ je pravidelný šestiboký jehlan

4.4.1 Řešení v Mongeově promítání

Doplnění zadání pro Mongeovo promítání: Mějme pravotočivou kartézskou soustavu souřadnic v E_3. (Kladná část osy $x_{1,2}$ směřuje doleva)

Při rýsování na papír volíme polohu papíru na výšku[1]. Počátek soustavy souřadnic má polohu vůči papíru $0 = [8, 11]_p$.

Řešení: Sestrojíme zadání, tedy body A a B. Podstava leží v nárysně, kde se vzdálenosti nezkreslují, můžeme tedy sestrojit pravidelný šestiúhelník shodně jako v obecném řešení.

Máme tedy podstavu $ABCDEF$, půdorysy těchto bodů leží na ose $x_{1,2}$, neboť podstava leží v nárysně. Vrchol V je dán pouze y-ovou souřadnicí. Víme ale, že leží na kolmici o na nárysnu. Směr promítání na nárysnu je kolmý, nárys této kolmice o se tedy zobrazí do bodu, podle vlastností rovnoběžného promítání, viz oddíl 2.1.2. Proto i nárys bodu V splyne s nárysem bodu S. V půdorysu se kolmice o zobrazí na kolmici k základnici. Bod V nyní nalezneme nanesením jeho y-ové souřadnice právě na půdorysný průmět kolmice o.

Nyní sestrojíme chybějící hrany jehlanu AV, BV, CV, DV, EV a FV jak v nárysu tak i v půdorysu a dostáváme jehlan $ABCDEFV$, viz obr. A.13.

4.4.2 Řešení v kosoúhlém promítání

Doplnění zadání pro kosoúhlé promítání: Mějme pravotočivou kartézskou soustavu souřadnic v E_3. (Kladná část osy y směřuje doprava.) Kosoúhlé promítání je dáno krácením $q = \frac{3}{4}$ a $\omega = 160°$.

Při rýsování na papír volíme polohu papíru na výšku[2]. Počátek soustavy souřadnic v kosoúhlém promítání má souřadnice $0 = [10, 7]_p$.

Řešení: Sestrojíme zadání, a jelikož podstava leží v nárysně, půdorysy bodů A a B leží na průmětu osy x. Podstavu můžeme sestrojit ve sklopení do bokorysny, sklopíme tedy nárysnu kolem osy z do bokorysny (sklápíme, neboť roviny ν a μ jsou na sebe kolmé). Ve sklopení sestrojíme pravidelný šestiúhelník nad stranou AB, viz postup konstrukce 4.11.

Po vrácení zpět získáme kosoúhlé průměty vrcholů podstavy, tj. A^k, B^k, C^k, D^k, E^k a F^k. Kosoúhlé půdorysy nalezneme na ose x^k a na příslušných ordinálách.

Vrchol V je dán y-ovou souřadnicí a navíc má být jehlan kolmý. Platí tedy, že vrchol V leží na kolmici o, která prochází bodem S a je kolmá na nárysnu, tj. rovnoběžná s osou y. Na ose y se vzdálenosti nezkracují, naneseme tedy y-ovou souřadnici bodu V jak v kosoúhlém půdorysu tak i kosoúhlém průmětu.

[1] Rýsujeme pouze na polovinu papíru, tj. formát A5

[2] Rýsujeme pouze na polovinu papíru, tj. formát A5

Nyní již sestrojíme chybějící hrany jehlanu AV, BV, CV, DV, EV a FV, ve všech průmětech, a získáme tak hledaný jehlan $ABCDEFV$, jak je zobrazeno na obr. A.14.

4.4.3 Řešení v pravoúhlé axonometrii

Doplnění zadání pro pravoúhlou axonometrii: Mějme pravotočivou soustavu souřadnic v E_3 s počátkem 0. Axonometrie je dána axonometrickým trojúhelníkem. Délky stran trojúhelníka jsou $|XY| = 7, |YZ| = 9{,}4$ a $|ZX| = 9{,}4$.

Polohu papíru volíme na výšku. Souřadnice bodu $X = [10, 10]_p$ a spojnice bodů XY je rovnoběžná se spodním okrajem papíru.

Řešení: Nejdříve sestrojíme zadání příkladu, tj. body A a B.

Sestrojíme podstavu, která leží v nárysně, půdorys tedy leží na ose x. Podstavu sestrojíme v otočení nárysny do axonometrické průmětny, viz konstrukce bodu v axonometrii – otočení půdorysny – v oddíle 3.2. Pomocí tohoto otočení můžeme sestrojit i axonometrické nárysy zadaných bodů A, B. Podstavu sestrojíme shodně jako v obecném řešení, viz postup 4.13. Axonometrický průmět podstavy splývá s axonometrickým nárysem, tj. $A_2^a B_2^a C_2^a D_2^a E_2^a F_2^a = A^a B^a C^a D^a E^a F^a$.

Vrchol V nalezneme na přímce o, která je osou jehlanu, prochází tedy středem podstavy S a je kolmá na nárysnu. Axonometrický průmět bodu V leží na axonometrickém průmětu přímky o. Axonometrický průmět osy o prochází bodem 0^a a je rovnoběžný s průmětem osy y, protože ta je také kolmá na rovinu ν. Bod V^a pak leží od bodu S^a v orientované vzdálenosti (dle y-ové souřadnice), kterou ale musíme nejdříve promítnout, nyní můžeme využít otočenou půdorysnu (zobrazovali jsme zadání), nebo sklopíme, viz postup 3.3.

Vrcholy dolní podstavy nyní spojíme hranami s vrcholem V a dostáváme hledaný jehlan $ABCDEFV$, viz obr. A.15.

4.4.4 Řešení v lineární perspektivě

Doplnění zadání pro lineární perspektivu: Mějme pravotočivou soustavu souřadnic v $\overline{E_3}$ s počátkem 0. Lineární perspektiva je dána distancí $d = 7{,}5$, základnice z splývá s osou x, průmětna splývá s nárysnou. Výška středu promítání, resp. vzdálenost $|HZ|$ je rovna 5.

Při rýsování na papír volíme polohu papíru na šířku. Počátek splývá s bodem $Z = [15, 6]_p$, osa x splývá se základnící, která je rovnoběžná se spodní hranou papíru.

Řešení: Sestrojíme zadání, tj. body A a B, ležící v nárysně, tedy jejich perspektivní průmět splývá s nárysem těchto bodů. Celá podstava se tedy zobrazí ve skutečné velikosti a v perspektivním průmětu proto sestrojíme pravidelný šestiúhelník nad hranou AB stejně jako v obecném postupu konstrukce 4.11.

Zbývá tedy pouze nalézt perspektivní průmět vrcholu jehlanu. Osa o hranolu je kolmá na nárysnu, rovinu podstavy, a prochází bodem S. Kolmá přímka k nárysně se v lineární perspektivě nazývá hloubková a její úběžník je hlavní bod H a stopník je v tomto případě bod $S \in \nu$.

Půdorys bodu V je již jednoznačně dán, y-ová souřadnice je dána ze zadání a zároveň leží na půdorysu přímky o. Sestrojíme tedy perspektivní průmět půdorysu bodu V a na kolmici k základnici a o^p je hledaný průmět V^p.

Po doplnění hran získáváme hledaný jehlan $ABCDEFV$, který je zobrazený na obr. A.16.

4.5 Jehlan s podstavou v obecné rovině

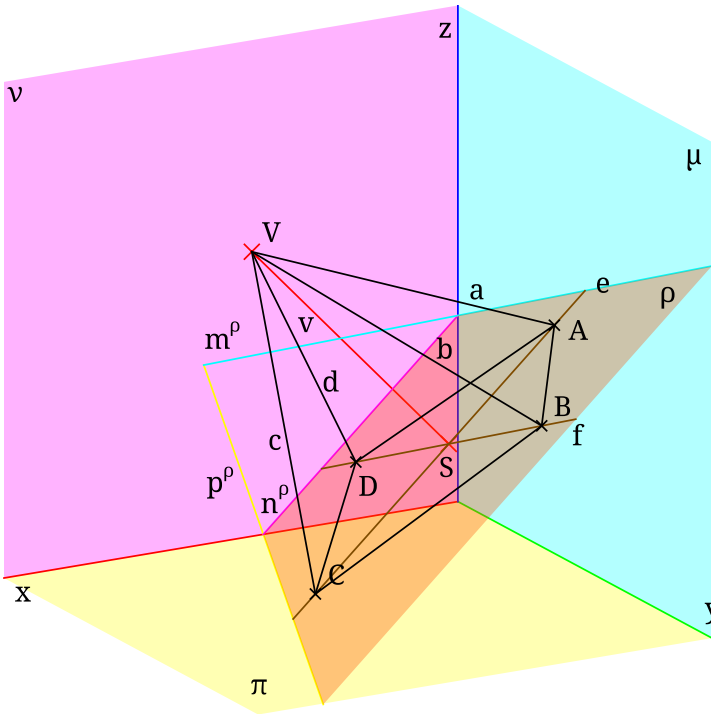
Zadání: Mějme dánu pravotočivou kartézskou soustavu souřadnic v E_3. Sestrojte pravidelný čtyřboký jehlan, který je dán úsečkou SV. Bod V je vrchol a S je střed podstavy. Délka strany podstavy je shodná s výškou tělesa. Navíc platí, že úhlopříčky podstavy jsou rovnoběžné se souřadnicovými rovinami ν, μ.

Souřadnice bodů:

$$S = [3, 5, 3]$$

$$V = [6{,}5; 3{,}5; 7]$$

V souboru `Animace/Priklad_4.5/4.5_jehlan_obecna_poloha.obr` je animace k tomuto příkladu, v souboru `Animace/Priklad_4.5/4.5_podstava.obr` je speciální animace pro konstrukci podstavy.



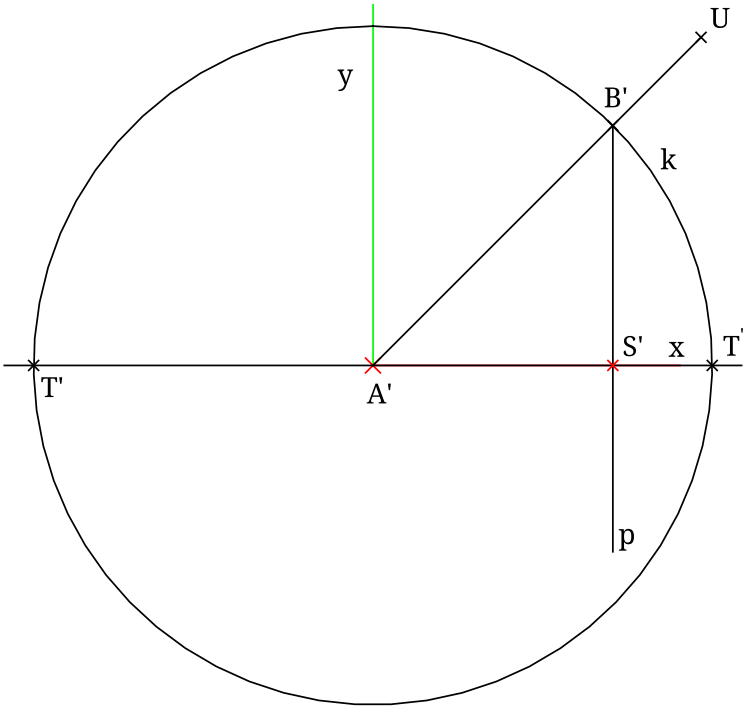
Obrázek 4.6: Jehlan $ABCDV$ z příkladu 4.5.

Obecné řešení v prostoru: Jehlan daný středem podstavy S a vrcholem V. Sestrojujeme pravidelný jehlan, rovina podstavy ϱ je tedy kolmá na osu jehlanu $o =\leftrightarrow SV$. Rovina ϱ je tedy kolmá na přímku o a prochází bodem S. Délka strany čtvercové podstavy je rovna vzdálenosti $|SV|$. Úhlopříčky jsou rovnoběžné s průmětnami ν a μ. Jelikož hlavní přímky jsou rovnoběžné právě s průmětnou a leží v rovině ϱ, hledané přímky jsou právě hlavní přímky roviny ϱ.

Při konstrukci podstavy je nutné si nejdříve uvědomit, co ze čtverce vůbec známe, tj. střed S, úhlopříčky (jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami) a délka strany je rovna výšce jehlanu, tj. je také známa.

Pomocí pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka $\triangle SAB$ sestrojíme nejdříve délku poloviny úhlopříčky čtverce. Zvolíme přímku e' a na ni bod A'. Sestrojíme kružnici s poloměrem délky strany čtverce, tj. $|SV|$, a středem A'. Polopřímka $A'U$ a přímka e' svírají úhel 45°, protože e' je osa vnitřního úhlu čtverce a na polopřímce $A'U$ leží strana čtverce.

Druhý vrchol B' hledaného čtverce na polopřímce $A'U$ leží také na kružnici k. Pata kolmice S' z bodu B' na přímku e' je střed čtverce a tedy vzdálenost $|S'A'|$ je hledaná velikost poloviny úhlopříčky.



Obrázek 4.7: Konstrukce podstavy jehlanu z příkladu 4.5.

Postup konstrukce 4.12. Konstrukce čtverce daného středem S, úhlopříčkami e, f a délkou strany $|SV|$, viz obr. 4.7

1. $S, e, f, |SV|$ – dáno ze zadání
2. A', e' – zvolíme libovolně, mimo hlavní konstrukci (budeme rýsovat v rovině)
3. $k; k(A', |SV|)$
4. $T, T'; \{T, T'\} = k \cap e'$
5. $U; |\sphericalangle TA'U| = 45°$
6. $B'; B' =\!\!\rightarrow A'U \cap k$
7. $p; p \perp e' \wedge B' \in p$

8. $S'; S' = p \cap e'$
9. $|S'A'| = |S'B'|$ polovina délky úhlopříčky čtverce

Nyní přeneseme nalezenou vzdálenost $|S'A'|$ do středu podstavy S na úhlopříčky e, f, získáme tedy vrcholy A, B, C a D podstavy. Zbývá tedy sestrojit chybějící hrany AV, BV, CV a DV, abychom získali jehlan $ABCDV$, viz obr. 4.6.

Postup konstrukce 4.13. Konstrukce jehlanu s podstavou v obecné rovině

1. $S, V; S = [3, 5, 3], V = [6{,}5; 3{,}5; 7]$
2. $\varrho; \varrho \perp\!\!\!\leftrightarrow SV \wedge S \in \varrho$
3. $e'; e' \parallel \nu \wedge S \in e'$
4. $f'; f' \parallel \mu \wedge S \in f'$
5. $|S'A'|$ viz postup 4.12
6. $l; l(S, |S'P|)$
7. $A, C; \{A, C\} = l \cap e'$
8. $B, D; \{B, D\} = l \cap f'$
9. AV, BV, CV, DV – hrany jehlanu
10. $ABCDV$ pravidelný čtyřboký jehlan

4.5.1 Řešení v Mongeově promítání

Doplnění zadání pro Mongeovo promítání: Mějme pravotočivou kartézskou soustavu souřadnic v E_3. (Kladná část osy $x_{1,2}$ směřuje doleva)

Při rýsování na papír volíme polohu papíru na výšku. Počátek soustavy souřadnic má polohu vůči papíru $O = [13, 15]_p$.

Řešení: Nejdříve sestrojíme zadání, tj. body S a V a ve sklopení sestrojíme skutečnou vzdálenost bodů S, V, která je ze zadání rovná délce strany podstavného čtverce. Sklopení je popsáno v oddíle 2.2.

Podstava jehlanu leží v rovině ϱ, která je kolmá na úsečku SV. Tuto rovinu kolmou k úsečce sestrojíme, resp. budeme mít dánu, pomocí dvou přímek. Platí, že rovina je kolmá k přímce, je-li každá přímka této roviny kolmá na přímku, a pravý úhel se při rovnoběžném promítání zobrazí jako pravý, pokud jedno z jeho ramen je rovnoběžné s průmětnou. Proto můžeme sestrojit hlavní přímky této roviny, procházející bodem S.

Díky tomu, že máme hlavní přímky roviny procházející bodem S, máme i hledané úhlopříčky podstavy e a f. Délku úhlopříčky sestrojíme podle postupu 4.12. Pomocí vzdálenosti $|A'S'|$, kterou naneseme ve sklopení na úhlopříčky, sestrojíme vrcholy A, B, C a D podstavného čtverce a doplníme chybějící hrany a získáváme hledaný jehlan $ABCDV$ zobrazený na obr. A.17.

4.5.2 Řešení v kosoúhlém promítání

Doplnění zadání pro kosoúhlé promítání: Mějme pravotočivou kartézskou soustavu souřadnic v E_3. (Kladná část osy y směřuje doprava.) Kosoúhlé promítání je dáno krácením $q = \frac{3}{4}$ a $\omega = 50°$.

Při rýsování na papír volíme polohu papíru na šířku. Počátek soustavy souřadnic v kosoúhlém promítání má souřadnice $0 = [11, 8]_p$.

Řešení: Sestrojíme zadání, body S a V. Podstavu sestrojíme v přiřazeném Mongeově promítání, viz předchozí řešení v Mongeově promítání (jen toto Mongeovo promítání je na bokorysnu a půdorysnu). Body pomocí afinity zobrazíme v kosoúhlém promítání a získáváme hledaný jehlan $ABCDV$, který je zobrazený na obr. A.18.

4.5.3 Řešení v pravoúhlé axonometrii

Doplnění zadání pro pravoúhlou axonometrii: Mějme pravotočivou soustavu souřadnic v E_3 s počátkem 0. Axonometrie je dána axonometrickým trojúhelníkem. Délky stran trojúhelníka jsou $|XY| = 8,6, |YZ| = 7,8$ a $|ZX| = 9,2$.

Polohu papíru volíme na výšku. Souřadnice bodu $X = [4, 8]_p$ a spojnice bodů XY je rovnoběžná se spodním okrajem papíru.

Řešení: Nejdříve sestrojíme zadání, body S a V, a ve sklopení do axonometrické průmětny nalezneme jejich skutečnou vzdálenost, nalezení vzdálenosti bodů od průmětny pro sklopení viz postup 4.7. Úhlopříčky e, f jsou hlavní přímky roviny ϱ rovnoběžné s průmětnami ν a μ procházející bodem S. Tyto hlavní přímky jsou kolmé na úsečku SV, neboť hlavní přímky jsou rovnoběžné s průmětnou a tudíž pravý úhel, který svírají s úsečkou SV, se zobrazí jako pravý.

Délku úhlopříčky sestrojíme stejně jako v obecném řešení podle postupu 4.7.

Ve sklopení naneseme na úhlopříčky e, f nalezenou vzdálenost a sestrojíme vrcholy podstavy A, B, C a D. Po doplnění hran získáváme jehlan $ABCDV$ zobrazený na obr. A.19.

4.5.4 Řešení v lineární perspektivě

Doplnění zadání pro lineární perspektivu: Mějme pravotočivou soustavu souřadnic v $\overline{E_3}$ s počátkem 0. Lineární perspektiva je dána distancí $d = 7$, základnice z splývá s osou x, průmětna splývá s nárysnou. Výška středu promítání, resp. vzdálenost $|HZ|$ je rovna 5.

Při rýsování na papír volíme polohu papíru na šířku. Počátek splývá s bodem $Z = [15, 5]_p$, osa x splývá se základnící, která je rovnoběžná se spodní hranou papíru.

Řešení: Nejdříve sestrojíme zadání, tj. body S a V. Pomocí dělicího bodu sestrojíme skutečnou vzdálenost těchto bodů. Nejdříve sestrojíme úběžník půdorysu přímky s, nazveme jej U^s, jedná se tedy o úběžník přímky s_1^p, postup viz oddíl 3.3.4. Dělicí bod je pak průsečík kružnice $k(U^s, |U^s D^d|)$ s horizontem.

Pomocí dělicího bodu přímky s D^s promítneme úsečku $S_1^p V_1^p$ na základnici, dostáváme úsečku $S_1' V_1'$, kterou nyní sklopíme. Abychom mohli sklopit, musíme sestrojit výšku těchto bodů (tj. z-ovou souřadnici), kterou můžeme nalézt opačným postupem, než při vynášení výšky, viz postup 3.6. Zde ale máme práci usnadněnou, neboť máme tyto body zadané pomocí souřadnic.

Sklopíme tedy úsečku $S_1' V_1'$ a ve sklopení nalezneme skutečnou délku úsečky SV.

Postup konstrukce 4.14. Konstrukce skutečné velikosti vzdálenosti

1. $k; k(U^s, |U^s D^d|)$
2. $D^s; D^s = k \cap h$ dělicí bod
3. $p_S; D^s \in p_S \wedge S_1^p \in p_S$
4. $S_1'; S_1' = p_S \cap z$
5. $p_V; D^s \in p_V \wedge S_1^p \in p_V$
6. $V_1'; V_1' = p_V \cap z$
7. $|S_1' V_1'|$ je skutečná velikost půdorysu úsečky SV
8. Sklopením úsečky $|S_1' V_1'|$ (vynášíme z-ovou souřadnici) získáváme skutečnou vzdálenost úsečky SV

Dalším krokem postupu je konstrukce úhlopříček e a f, které jsou rovnoběžné s průmětnami ν a μ.

Rovnoběžky s nárysnou ν nemají nárysný stopník (nárysnu neprotínaji) a nemají ani úběžník, jsou tedy rovnoběžné s nárysnou stopou a úběžnicí roviny, ve které leží. Proto i hlavní přímka roviny ϱ procházející bodem S je v perspektivním průmětu rovnoběžná s n^ϱ. Otočený půdorys je nutně rovnoběžný se základnicí. Dostáváme tedy přímku e.

Přímka f je rovnoběžná s rovinou μ, která je kolmá na nárysnu i na půdorysnu. Její otočený půdorys je tedy kolmý na základnici. Perspektivní průmět je pak dán bodem S^p a nárysným stopníkem, který leží na průsečíku jejího otočeného půdorysu a nárysné stopy roviny n^ϱ.

Nyní podle postupu 4.12 sestrojíme polovinu délky úhlopříčky, tj. vzdálenost $|S'A'|$, kterou pomocí dělicího bodu, viz předchozí postup 4.14, přeneseme na úhlopříčky a nalezneme vrcholy A, B, C a D, resp. jejich perspektivní průměty. Poslední krok je doplnění chybějících hran, získáváme tedy jehlan $ABCDV$ zobrazený na obr. A.20.

4.6 Kosý jehlan

Zadání: Mějme dánu pravotočivou kartézskou soustavu souřadnic v E_3. Sestrojte kosý pětiboký jehlan s podstavou v rovině ϱ, jehož výška $v = 6$. Navíc je dán bod V', což je kolmý průmět vrcholu V do roviny ϱ. Podstava je dána středem S a vrcholem podstavy A.

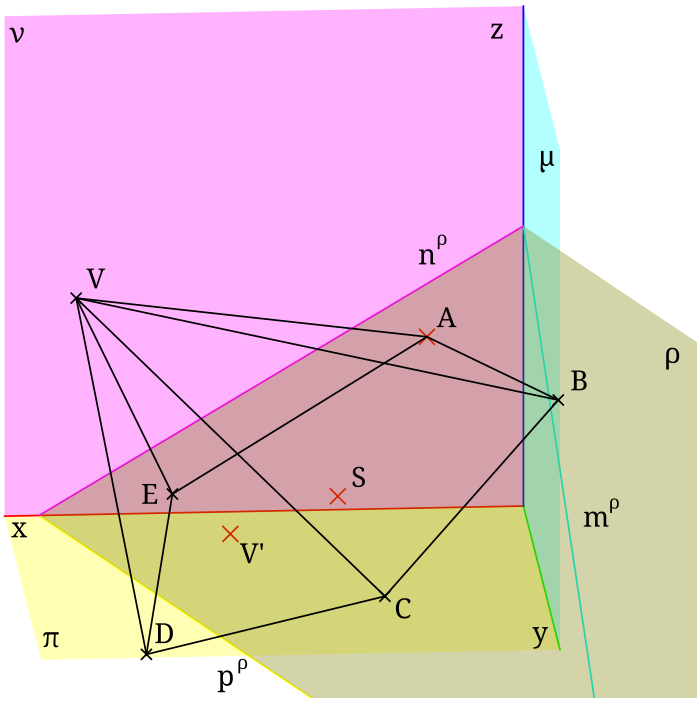
Souřadnice bodů:

$$S = [4, 6, 2]$$

$$A = [2, 2, 4]$$

$$V' = [6, 5, 1]$$

V souboru `Animace/Priklad_4.6/4.6_kosy_jehlan.obr` lze nalézt animaci k tomuto příkladu.



Obrázek 4.8: Jehlan $ABCDEV$ z příkladu 4.6.

Obecné řešení v prostoru: Rovina ϱ je dána třemi body A, S a V'. Body A, S nám určují podstavu, která je tvořena pravidelným pětiúhelníkem ležícím v rovině ϱ. Konstrukci pravidelného pětiúhelníka naleznete v postupu 1.2.

Vrchol V nalezneme na kolmici k k rovině ϱ bodem V', protože bod V' je kolmým průmětem právě vrcholu V. Výška v jehlanu je 6, výška kosého jehlanu je definována jako vzdálenost vrcholu V od roviny průmětny. V našem případě tedy platí, že vzdálenost $|VV'| = v = 6$. Naneseme na kolmici vzdálenost 6 a získáme tak bod V.

Vzdálenost však můžeme vynášet na obě poloroviny určené rovinou ϱ, dostáváme tedy dva vrcholy V a W. Dále budeme uvažovat bod V takový, aby jehlan ležel nad rovinou podstavy ϱ. Sestrojíme chybějící hrany dané vrcholy podstavy a vrcholem V. Máme tedy sestrojen jehlan $ABCDEV$, viz obr 4.8.

Postup konstrukce 4.15. Konstrukce kosého jehlanu

1. $A, S, V'; A = [2, 2, 4], S = [4, 6, 2], V' = [6, 5, 1]$
2. $\varrho; A \in \varrho \wedge S \in \varrho \wedge V' \in \varrho$
3. $ABCDE; ABCDE$ je pravidelný pětiúhelník se středem S
4. $k; k \perp \varrho \wedge V' \in k$
5. $V, W; |VV'| = |WV'| = v = 6$
6. $ABCDEV$ jehlan

4.6.1 Řešení v Mongeově promítání

Doplnění zadání pro Mongeovo promítání: Mějme pravotočivou kartézskou soustavu souřadnic v E_3. (Kladná část osy $x_{1,2}$ směřuje doleva)

Při rýsování na papír volíme polohu papíru na výšku. Počátek soustavy souřadnic má polohu vůči papíru $0 = [15, 16]_p$.

Řešení: Nejdříve sestrojíme zadání příkladu, tj. body A, S a bod V', který je kolmým průmětem vrcholu V do roviny podstavy. Tyto body tedy tvoří rovinu podstavy ϱ, pomocí libovolných přímek z bodů A, S, V' nalezneme půdorysnou a nárysnou stopu roviny ϱ, viz oddíl 3.3.1. Jelikož rovina ϱ je obecná, tedy nemá speciální polohu vůči žádné průmětně, pro sestrojení podstavy musíme tuto rovinu otočit např. do půdorysny π. V otočení sestrojíme pravidelný pětiúhelník se středem S^o a vrcholem A^o. Následně nalezneme oba průměty vrcholů B, C, D a E.

Dalším krokem konstrukce je sestrojení kolmice k k rovině ϱ bodem V', na které leží vrchol V, konstrukce kolmice 4.5. Odpovídající průměty kolmice k jsou kolmé na příslušné stopy roviny ϱ. Ve sklopení na přímku k naneseme výšku tělesa $v = 6$ a získáme tak vrchol jehlanu V.

Narýsujeme chybějící hrany jehlanu a dostáváme výsledek, tj. jehlan $ABCDEV$, viz obr. A.21.

4.6.2 Řešení v kosoúhlém promítání

Doplnění zadání pro kosoúhlé promítání: Mějme pravotočivou kartézskou soustavu souřadnic v E_3. (Kladná část osy y směřuje doprava.) Kosoúhlé promítání je dáno krácením $q = \frac{1}{2}$ a $\omega = 135°$.

Při rýsování na papír volíme polohu papíru na výšku. Počátek soustavy souřadnic v kosoúhlém promítání má souřadnice $0 = [5, 7]_p$.

Řešení: Nejdříve sestrojíme body A, S a V', které tvoří rovinu ϱ. Nalezeme stopy této roviny ϱ, postup konstrukce stop roviny nalezneme v oddíle 3.3.2, Pomocí otočení roviny ϱ do průmětny sestrojíme podstavu, kterou tvoří pravidelný pětiúhelník. Otočit můžeme buď v bokorysně, nebo v přiřazeném Mongeově promítání v půdorysně. V otočení zkonstruujeme chybějící vrcholy B, C, D a E. Pomocí vrácení otočení nalezneme průměty vrcholů, dostáváme tedy podstavu.

Nyní je potřeba nalézt vrchol V, jehož kolmým průmětem do roviny ϱ je bod V' a výška tělesa, tj. vzdálenost bodů V a V', je rovna 6. Sestrojíme tedy kolmici k k rovině ϱ procházející bodem V', nalezneme ji v přiřazeném Mongeově promítání, viz předchozí řešení v Mongeově promítání. Vrchol V nalezneme ve sklopení přímky k v bokorysně, od sklopeného bodu V' naneseme $v = 6$.

Nyní pouze doplníme zbylé hrany tělesa a dostáváme jehlan $ABCDEV$, viz obr. A.22.

4.6.3 Řešení v pravoúhlé axonometrii

Doplnění zadání pro pravoúhlou axonometrii: Mějme pravotočivou soustavu souřadnic v E_3 s počátkem 0. Axonometrie je dána axonometrickým trojúhelníkem. Délky stran trojúhelníka jsou $|XY| = 9{,}2, |YZ| = 10{,}6$ a $|ZX| = 10$.

Polohu papíru volíme na výšku. Souřadnice bodu $X = [12, 11]_p$ a spojnice bodů XY je rovnoběžná se spodním okrajem papíru.

Řešení: Sestrojíme body A, S a V' a sestrojíme stopy roviny ϱ, která je těmito body dána, postup konstrukce stop roviny nalezneme v oddíle 3.3.3. Jelikož je rovina ϱ obecná, musíme pro sestrojení pravidelného pětiúhelníka otočit tuto rovinu do půdorysny. V otočení sestrojíme podstavu a pomocí afinity vrátíme zpět do průmětu.

Nyní je potřeba sestrojit kolmici k k rovině ϱ bodem V', na které leží bod V. Tuto kolmici nalezneme pomocí postupu 4.6. Pomocí sklopení přímky k do axonometrické průmětny naneseme na tuto přímku vzdálenost 6, postup nalezení vzdálenosti od axonometrické průmětny je uveden v postupu 4.7.

Nyní stačí doplnit chybějící hrany a dostáváme jehlan $ABCDEV$, viz obr. A.23.

4.6.4 Řešení v lineární perspektivě

Doplnění zadání pro lineární perspektivu: Mějme pravotočivou soustavu souřadnic v $\overline{E_3}$ s počátkem 0. Lineární perspektiva je dána distancí $d = 8$, základnice z splývá s osou x, průmětna splývá s nárysnou. Výška středu promítání, resp. vzdálenost $|HZ|$ je rovna 5.

Při rýsování na papír volíme polohu papíru na šířku. Počátek splývá s bodem $Z = [15, 4]_p$, osa x splývá se základnící, která je rovnoběžná se spodní hranou papíru.

Řešení: Nejdříve sestrojíme zadání příkladu, tj. body A, S a V', tyto body leží v rovině podstavy ϱ, jejíž stopu a úběžnici nalezneme stejně jako v postupu 3.3.4.

Dalším krokem je konstrukce kolmice k na právě sestrojenou rovinu ϱ bodem V', neboť na této přímce k leží vrchol jehlanu V. Tuto kolmici nalezneme podle postupu 4.9 a pomocí konstrukce 4.14 naneseme výšku tělesa $v = 6$. Získáme tak vrchol jehlanu V.

Doplníme chybějící hrany a získáváme jehlan $ABCDEV$, viz obr. A.24.

Závěr

Tato práce je především sbírkou řešených úloh z deskriptivní geometrie. Na začátku však byla uvedena i všechna základní teorie potřebná pro řešení uvedených příkladů. Zadání příkladů jsou původní a jsou zvoleny tak, aby pokryly více základních konstrukcí, aby byly zajímavé a netradiční a v neposlední řadě aby vycházely pěkně ve všech promítáních.

Důležitým přínosem práce je to, že jeden příklad je vždy řešen ve více promítáních, což v jiné literatuře není běžné, přitom je to však velmi užitečné pro správné pochopení všech souvislostí mezi jednotlivými promítáními.

Ke správnému pochopení promítacích metod dále přispívá to, že ke všem příkladům byla vytvořena i animace pro program Lisa Viewer, umožňující interaktivně prohlížet jednotlivé kroky řešení, a to nejen situaci v průmětně, tedy to, co se rýsuje na papír, ale i náhled na situaci v prostoru.

Případnému využití ve výuce mohou dále pomoci verze příkladů určené pro tisk, které lze použít například jako zadání písemných prací.

V blízké budoucnosti plánuji v rámci své druhé diplomové práce dokončit systém Lisa, což bude program umožňující rýsování v různých promítáních, animace tedy bude možné nejen prohlížet, ale i snadno vytvářet (nyní se soubory s animacemi musí psát ručně). V souvislosti s tím pak plánuji tuto sbírku úloh výrazně rozšířit i o příklady z dalších odvětví deskriptivní geometrie.

Seznam použité literatury

[1] Drábek, Karel, Harant, František, Setzer, Ota. *Deskriptivní geometrie I.* Praha: SNTL–Nakladatelství technické literatury a Alfa, Vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, 1978.

[2] Kadeřávek, František, Klíma, Josef, Kounovský, Josef. *Deskriptivní geometrie I.* Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1929.

[3] Kounovský, Josef, Vyčichlo, František. *Deskriptivní geometrie.* Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1956.

[4] Bečvář, Jindřich. *Hrdinský věk řecké matematiky.* In: Historie matematiky. I. Seminář pro vyučující na středních školách, Jevíčko, sborník. Brno: Jednota českých matematiků a fyziků, 1993.

[5] Hejlová, Eliška. *Systém Lisa: Deskriptivní geometrie na počítači.* SVOČ 2013.

[6] Hejlová, Eliška. *Zobrazujeme elementární tělesa správně?* SVOČ 2012.

[7] Polák, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*, 7. vydání. Praha: Prometheus, 1991.

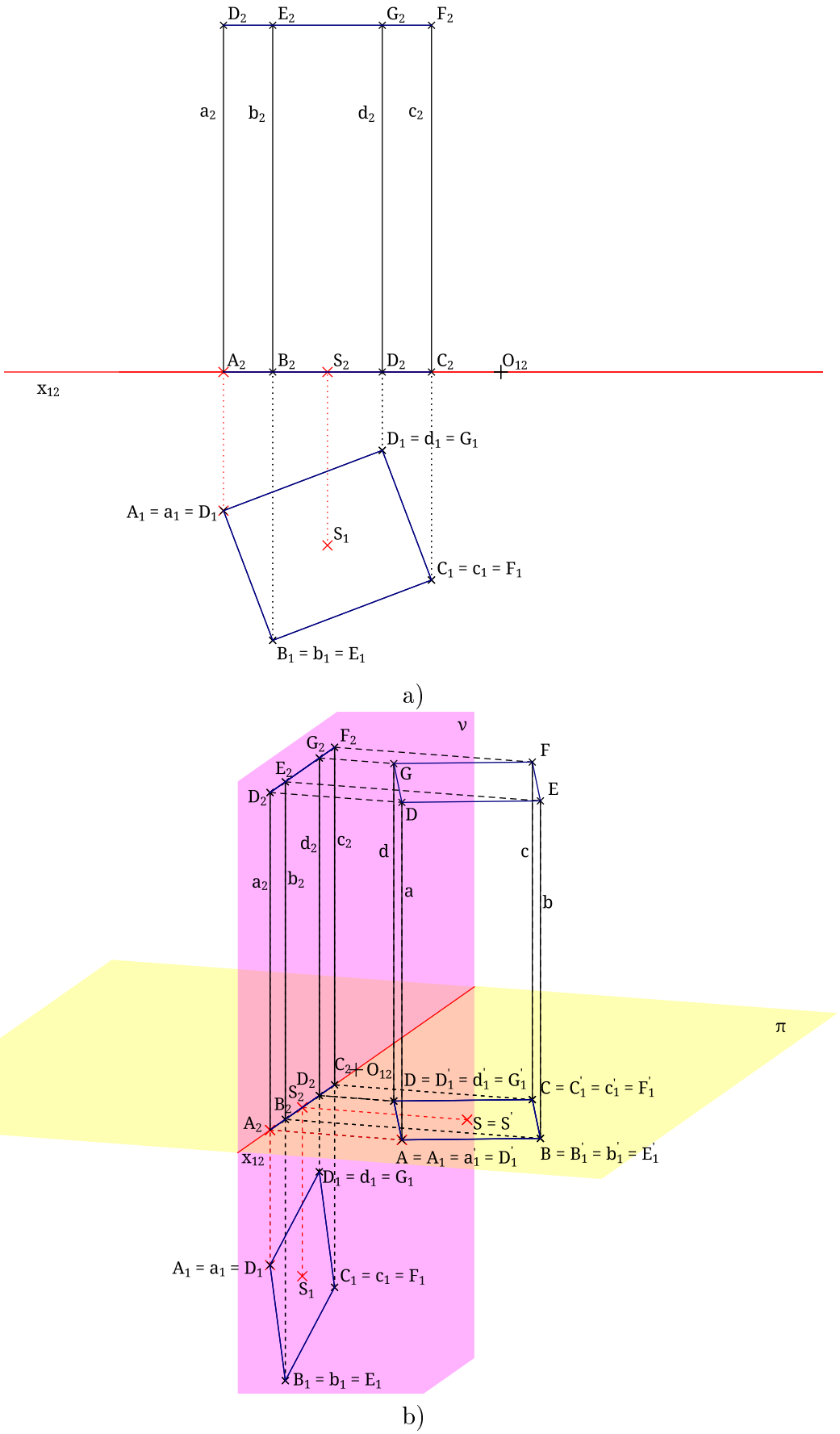
[8] Pomykalová, Eva. *Deskriptivní geometrie pro střední školy.* Praha: Prometheus, 2000.

[9] Pomykalová, Eva. *Matematika pro gymnázia: Planimetrie*, 4. vydání. Praha: Prometheus, 2004.

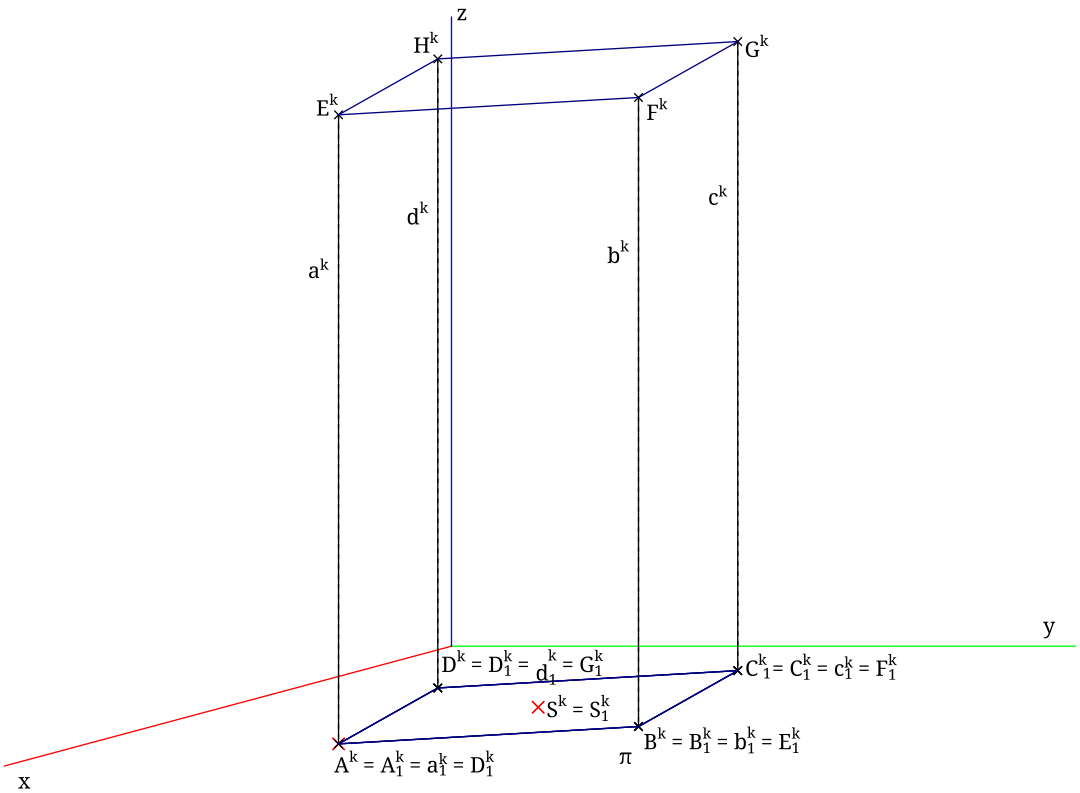
[10] Urban, Alois. *Deskriptivní geometrie I.* Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1965.

A. Obrázky k příkladům z kap. 4

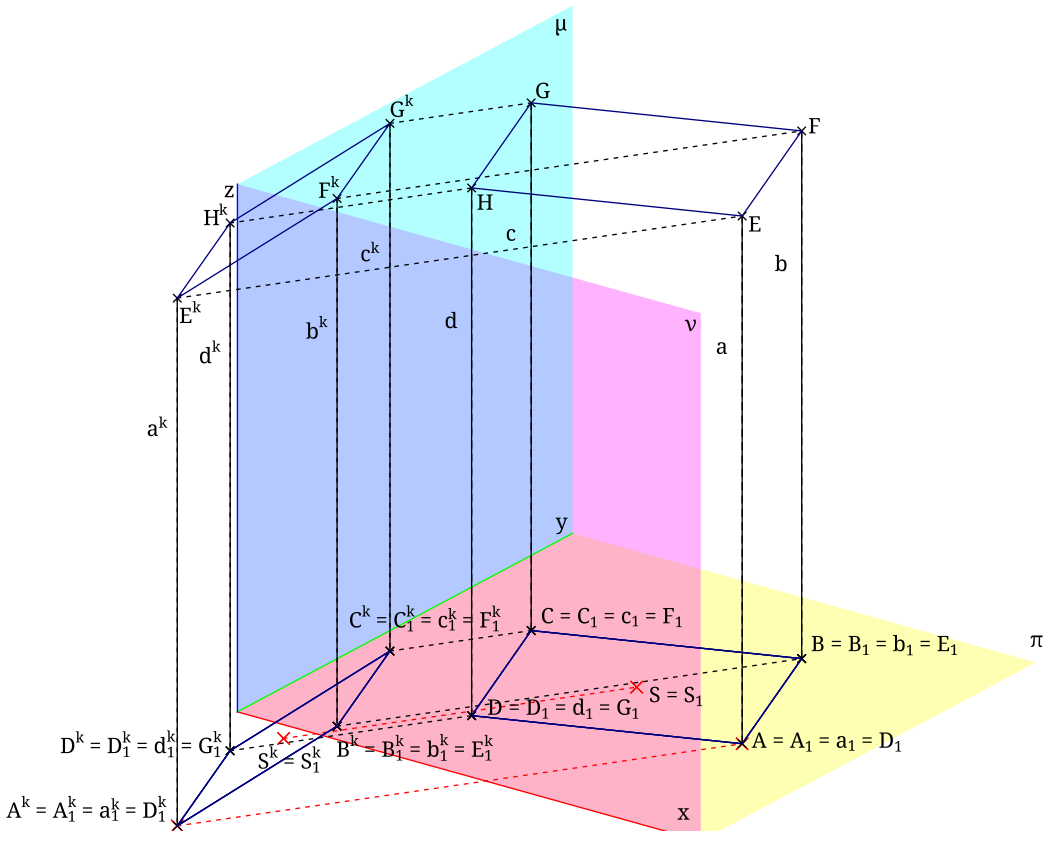
Tato příloha obsahuje řešení příkladů ze čtvrté kapitoly. Obrázky jsou generovány z animací v programu Lisa Viewer. Každý příklad je zde zobrazen jak v situaci v průmětně, tak i v náhledu na prostorovou situaci. Obrázky jsou exportovány v co největší velikosti a mírně upraveny pro větší přehlednost. Přesto je však, především u prostorových náhledů, mnohem lepší prohlížet si je přímo v programu Lisa Viewer, který navíc umožňuje modelem otáčet, přibližovat a další funkce, které přispívají k větší názornosti.



Obrázek A.1: Řešení příkladu 4.1. v Mongeově promítání a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru

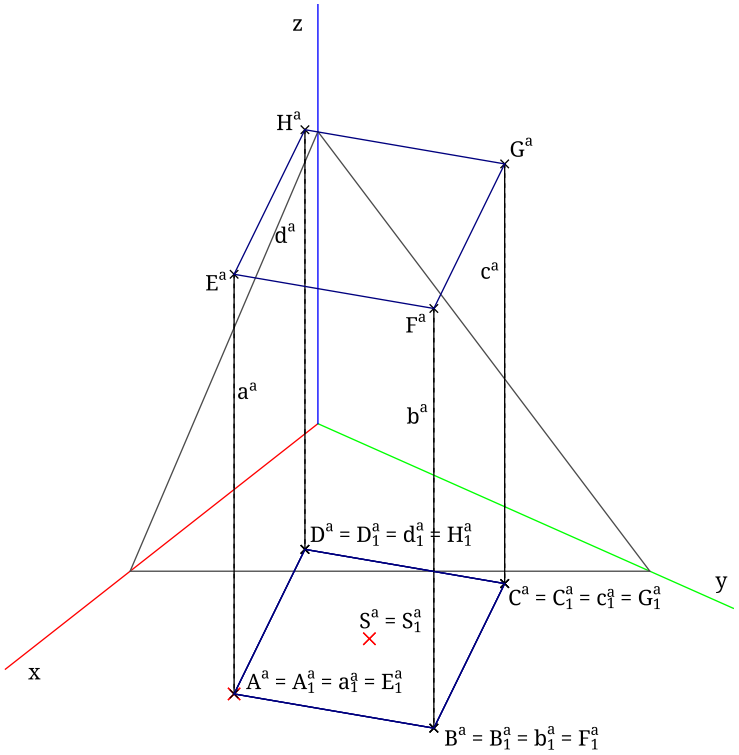


a)

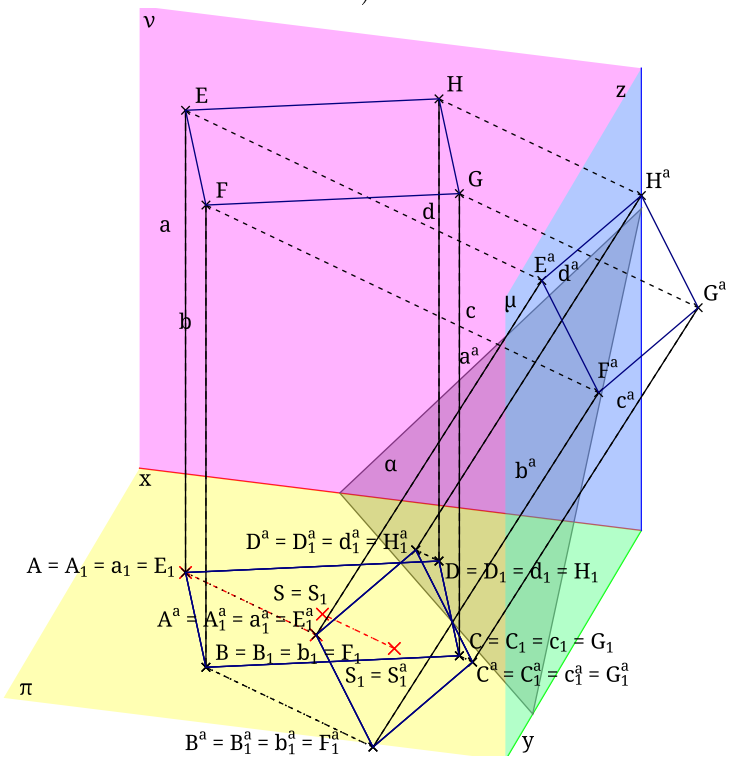


b)

Obrázek A.2: Řešení příkladu 4.1. v kosoúhlém promítání a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru

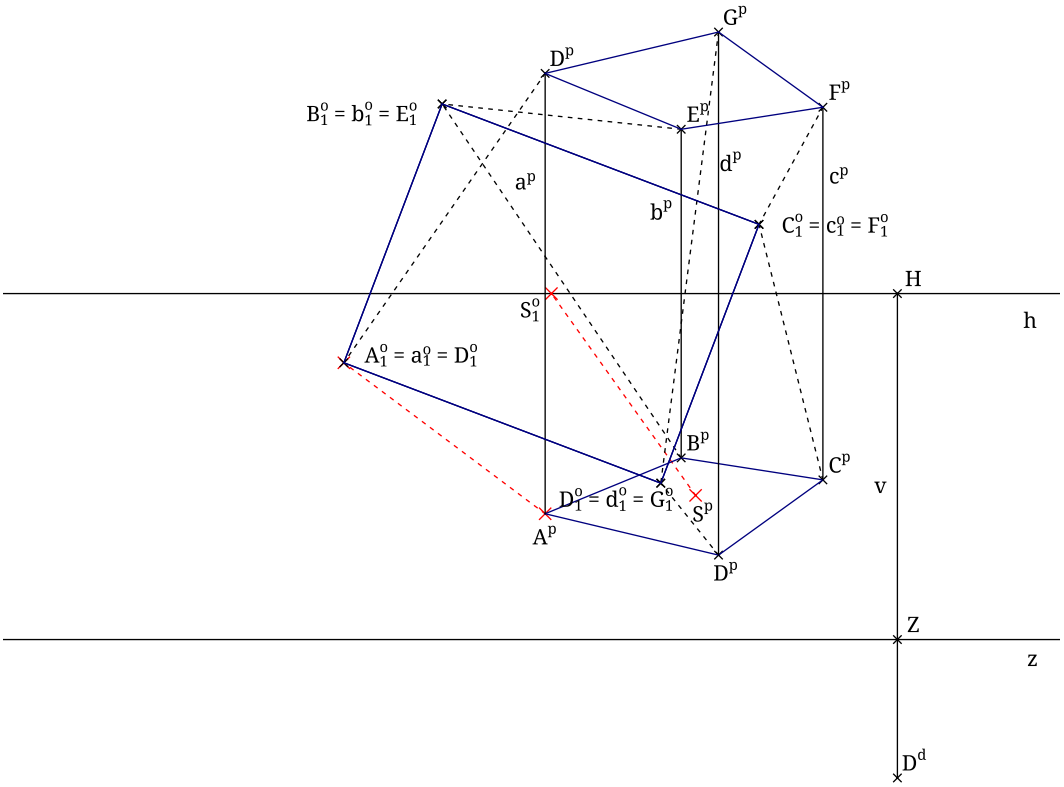


a)

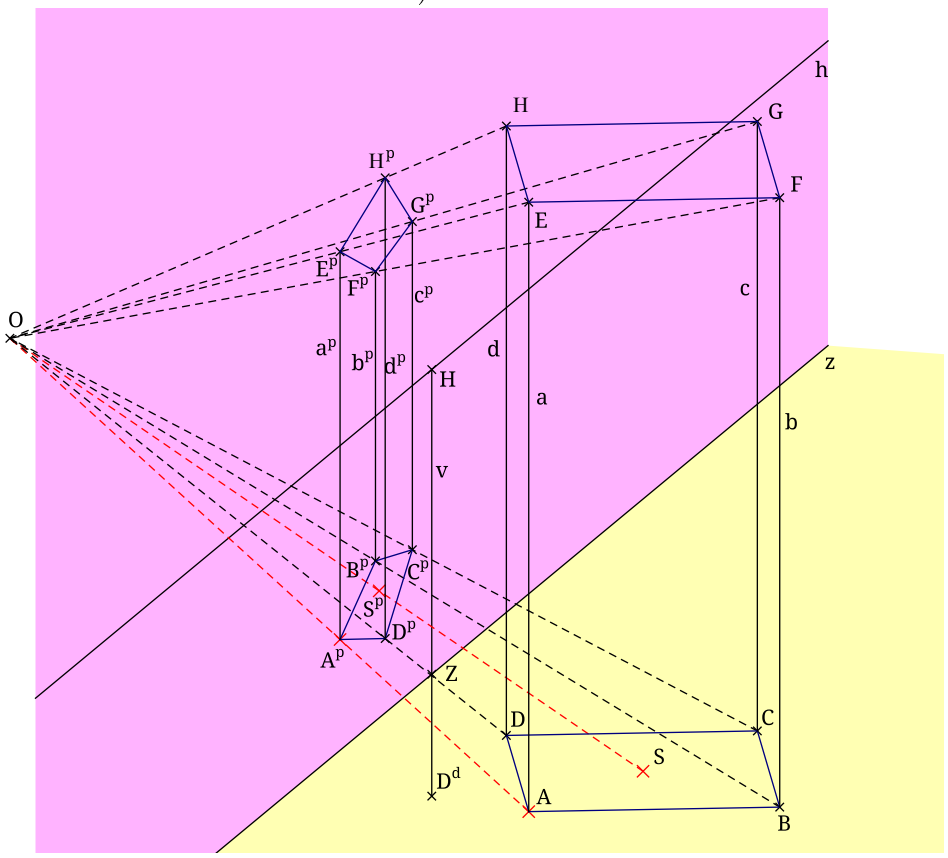


b)

Obrázek A.3: Řešení příkladu 4.1. v pravoúhlé axonometrii a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru

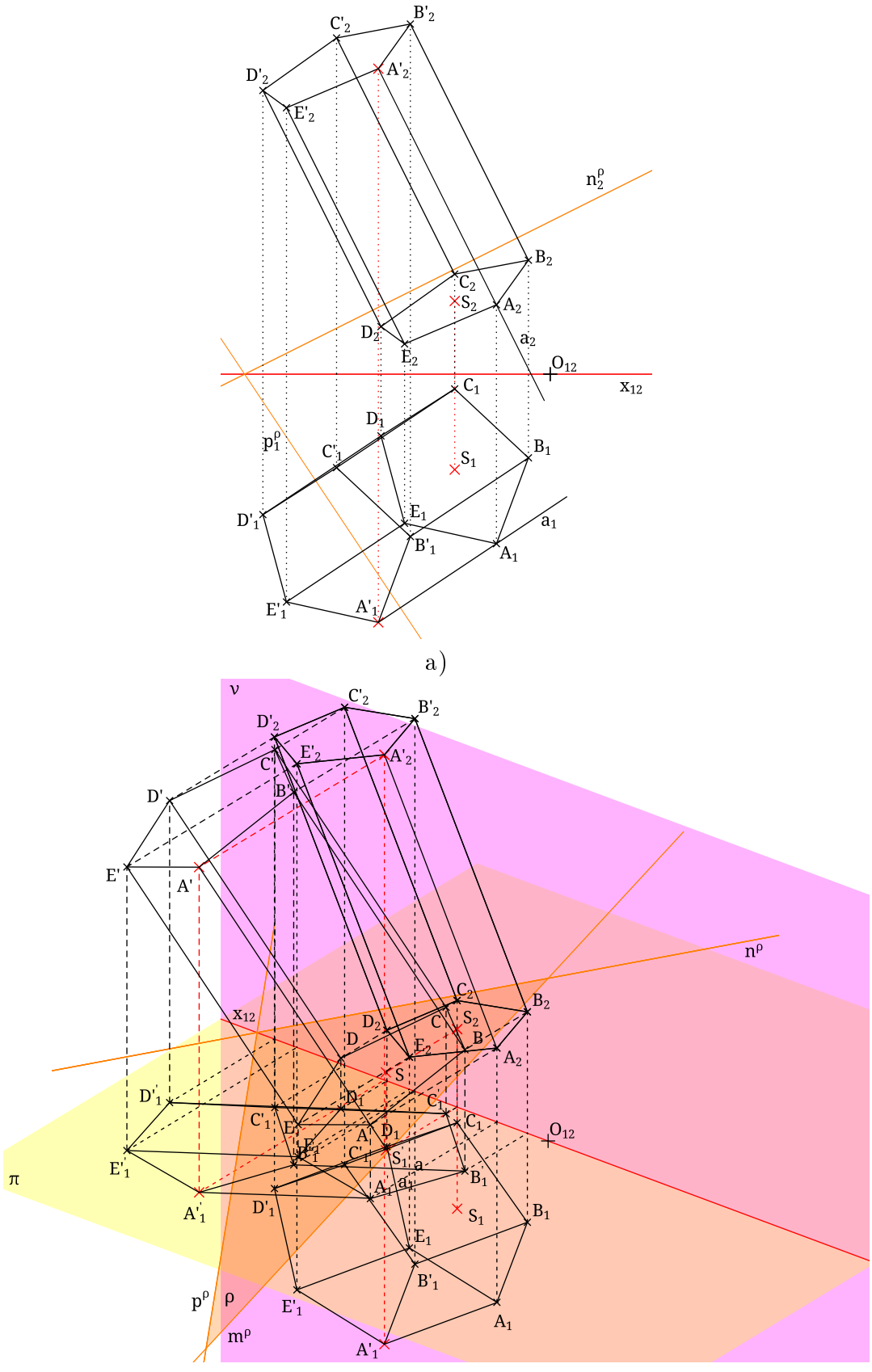


a)

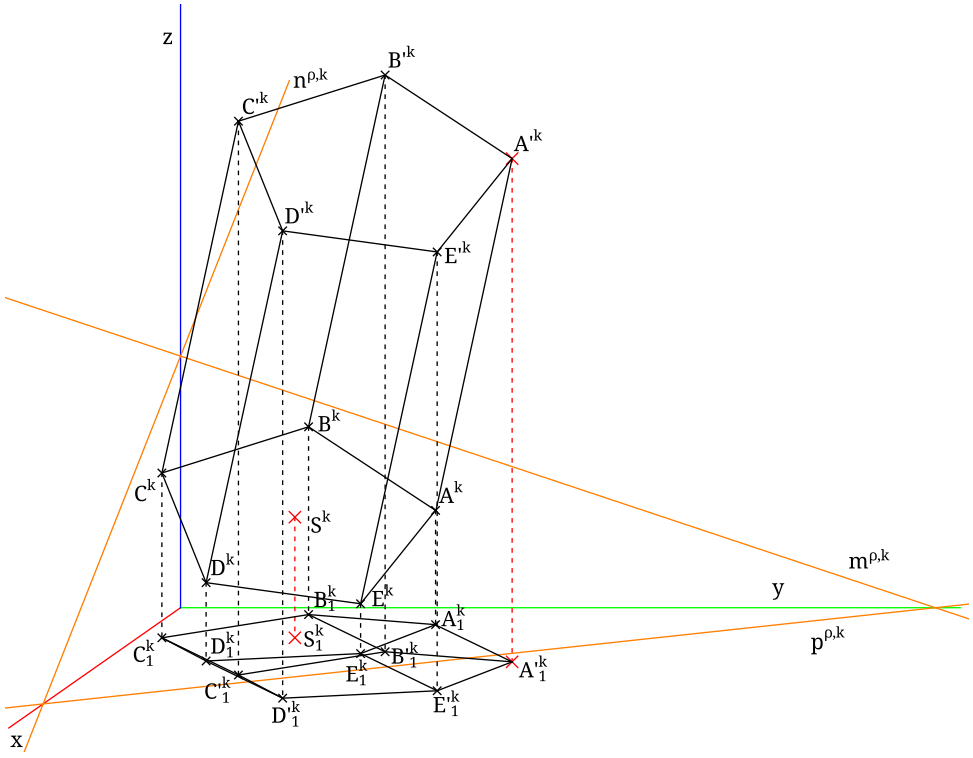


b)

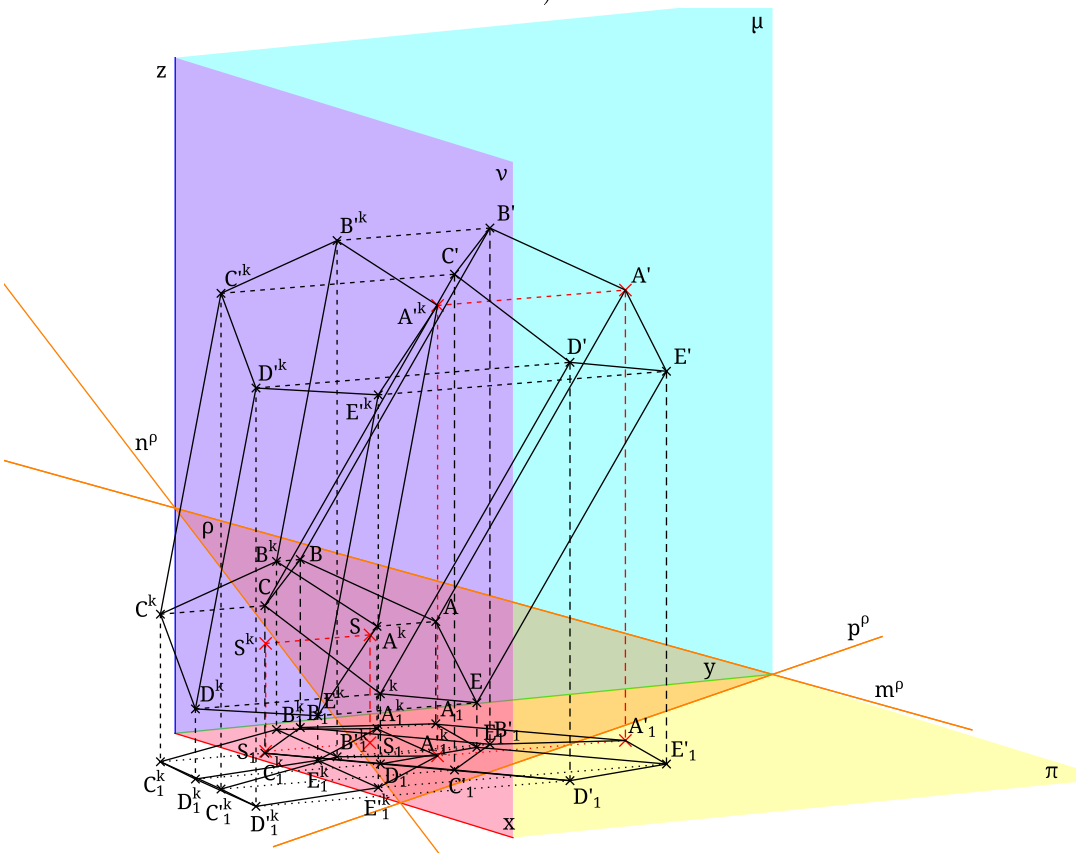
Obrázek A.4: Řešení příkladu 4.1. v lineární perspektivě a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru



Obrázek A.5: Řešení příkladu 4.2. v Mongeově promítání a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru

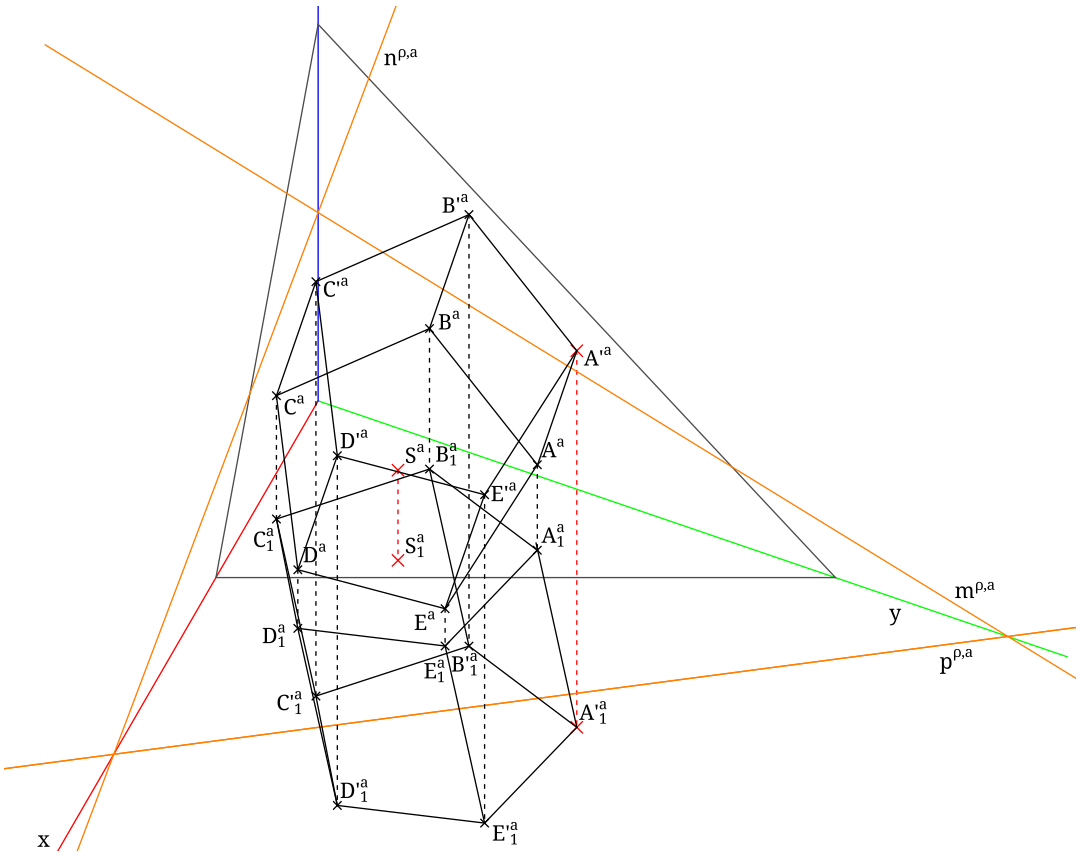


a)

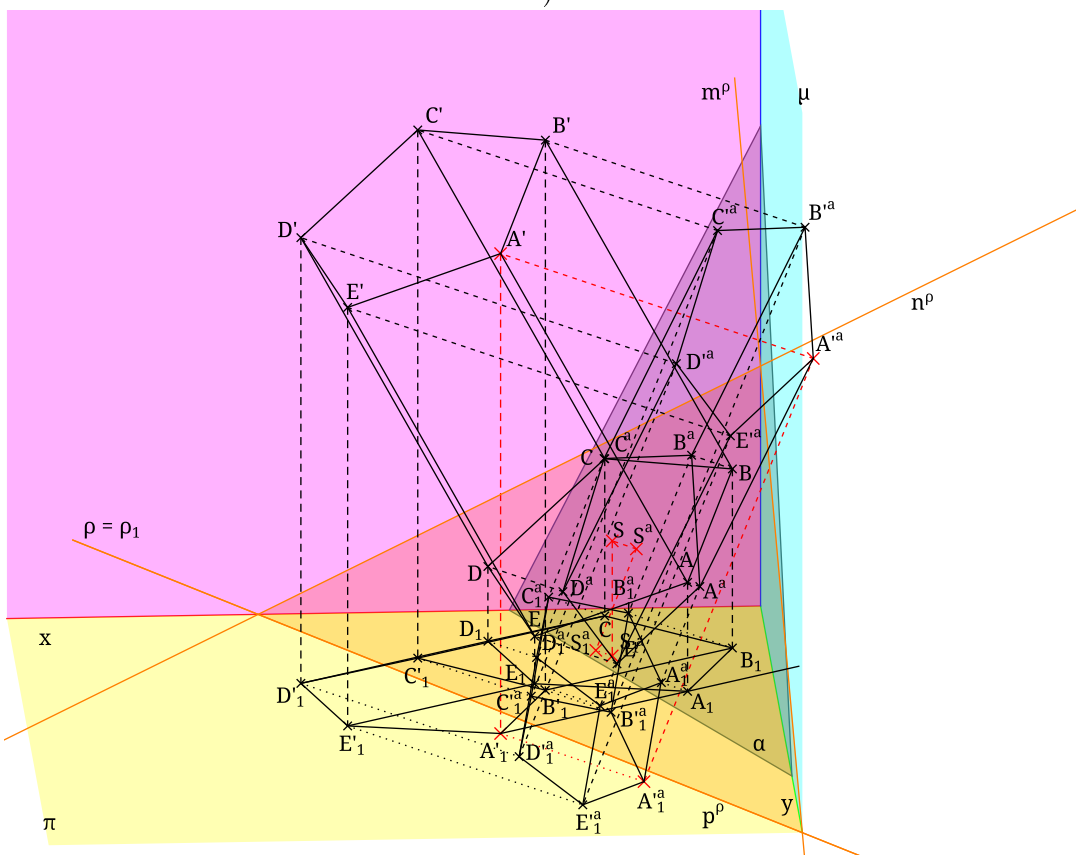


b)

Obrázek A.6: Řešení příkladu 4.2. v kosoúhlém promítání a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru

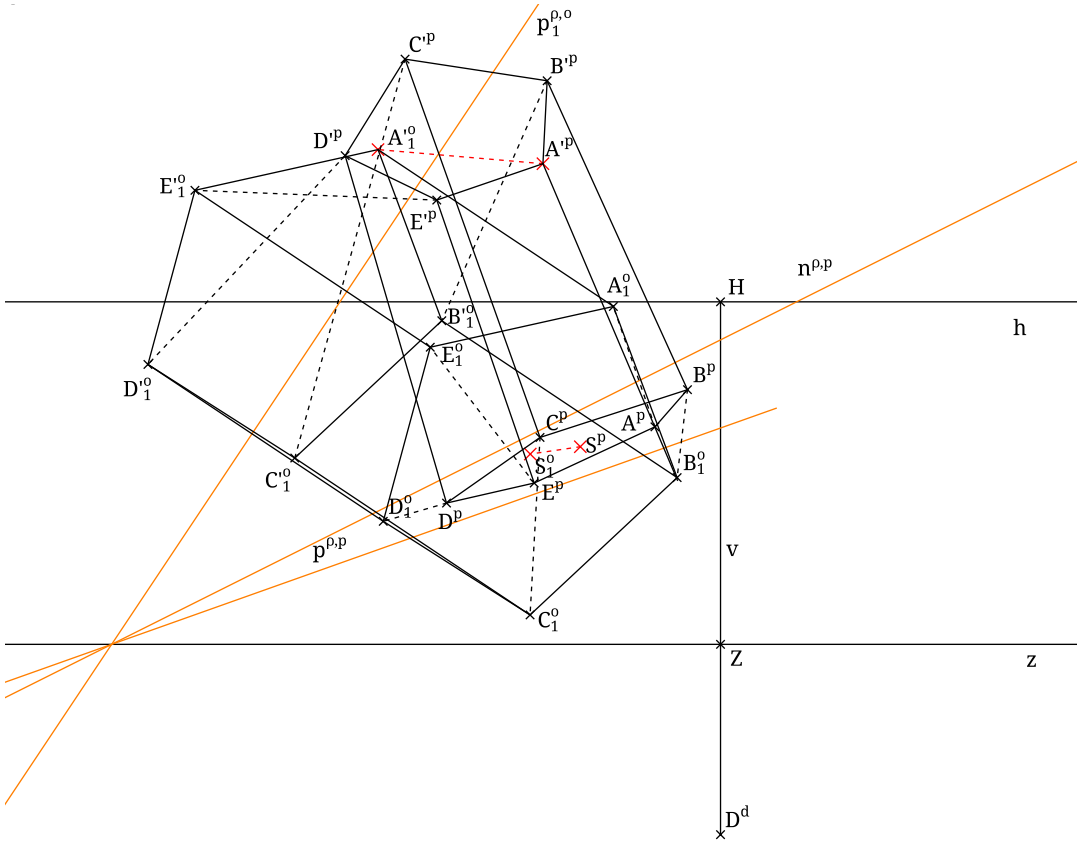


a)

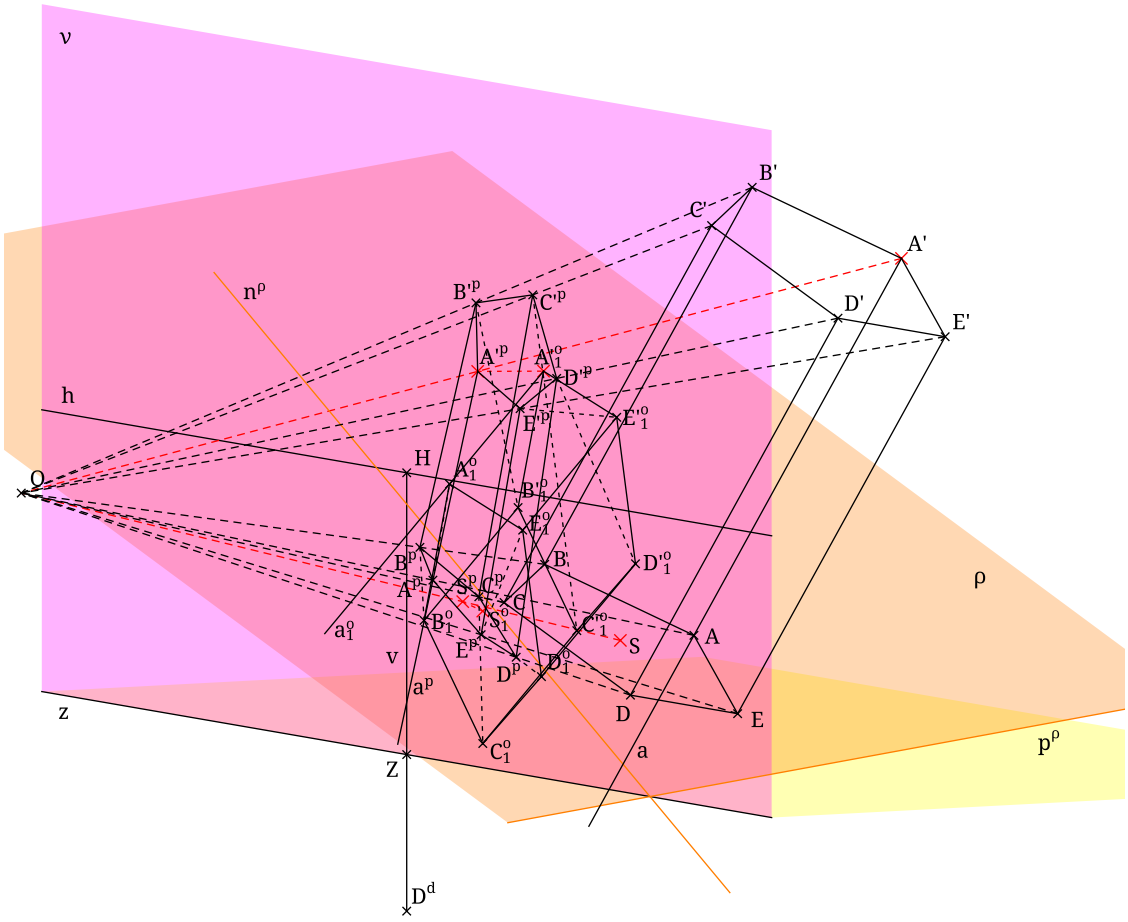


b)

Obrázek A.7: Řešení příkladu 4.2. v pravoúhlé axonometrii a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru

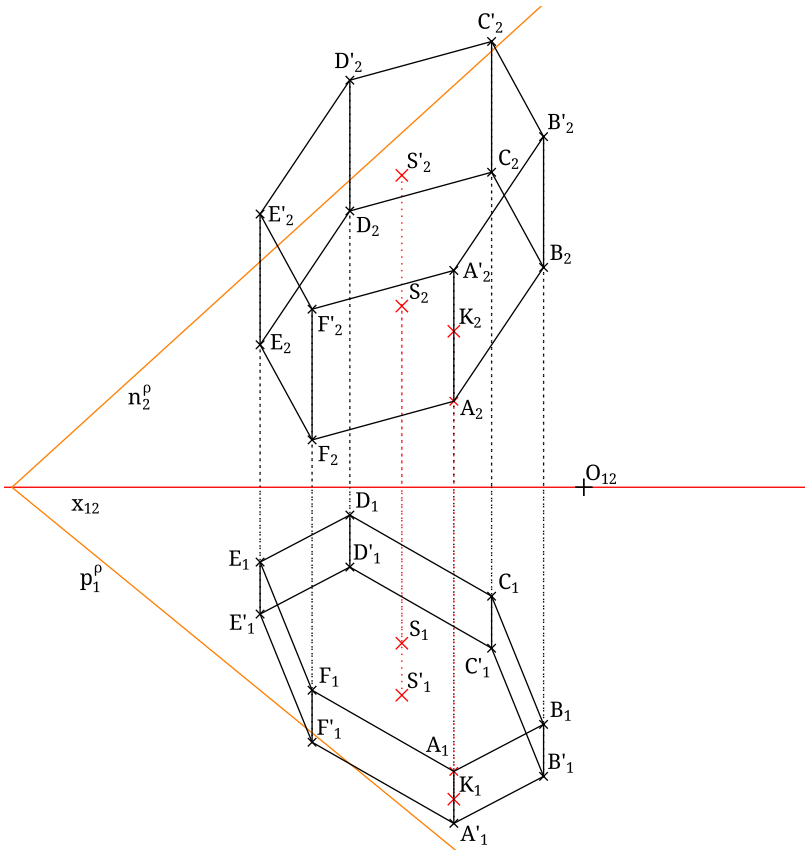


a)

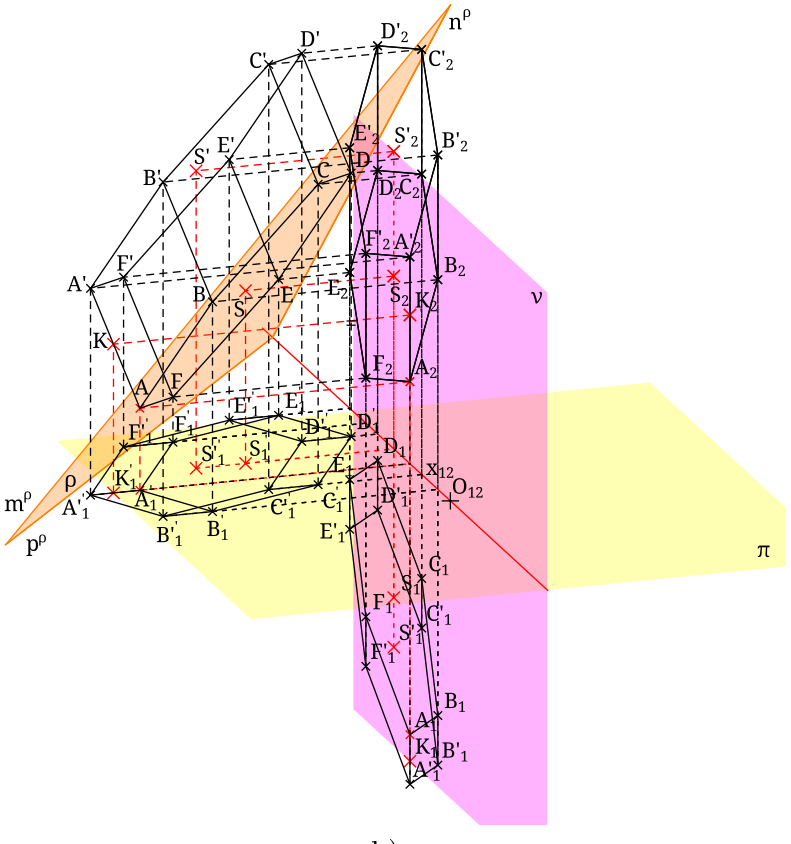


b)

Obrázek A.8: Řešení příkladu 4.2. v lineární perspektivě a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru

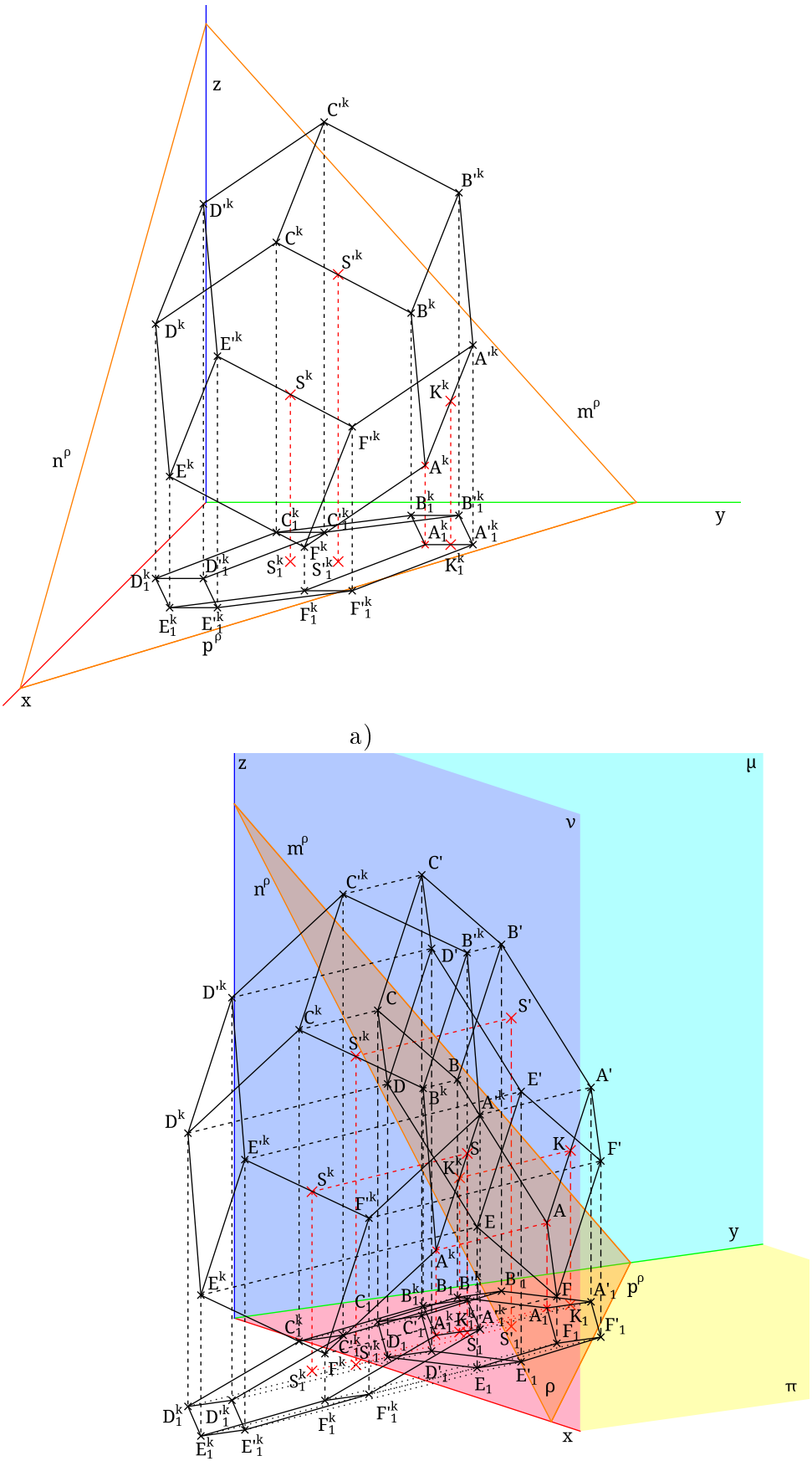


a)

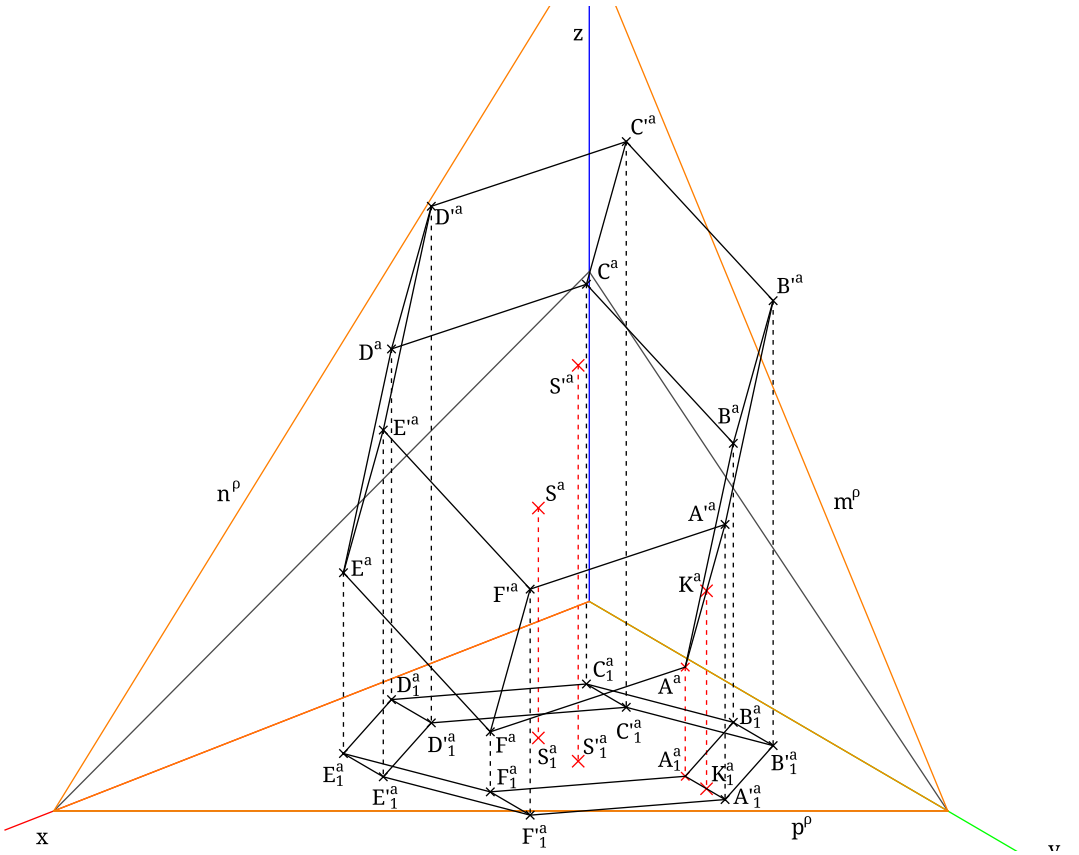


b)

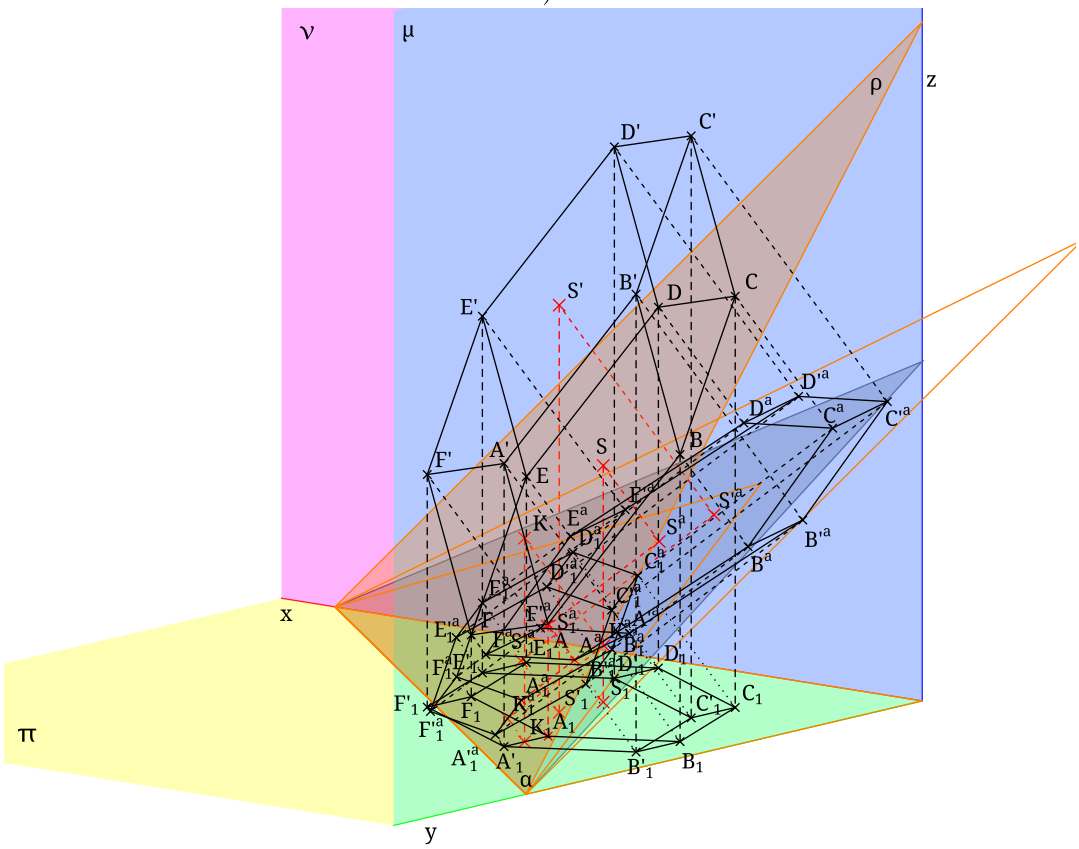
Obrázek A.9: Řešení příkladu 4.3. v Mongeově promítání a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru



Obrázek A.10: Řešení příkladu 4.3. v kosoúhlém promítání a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru

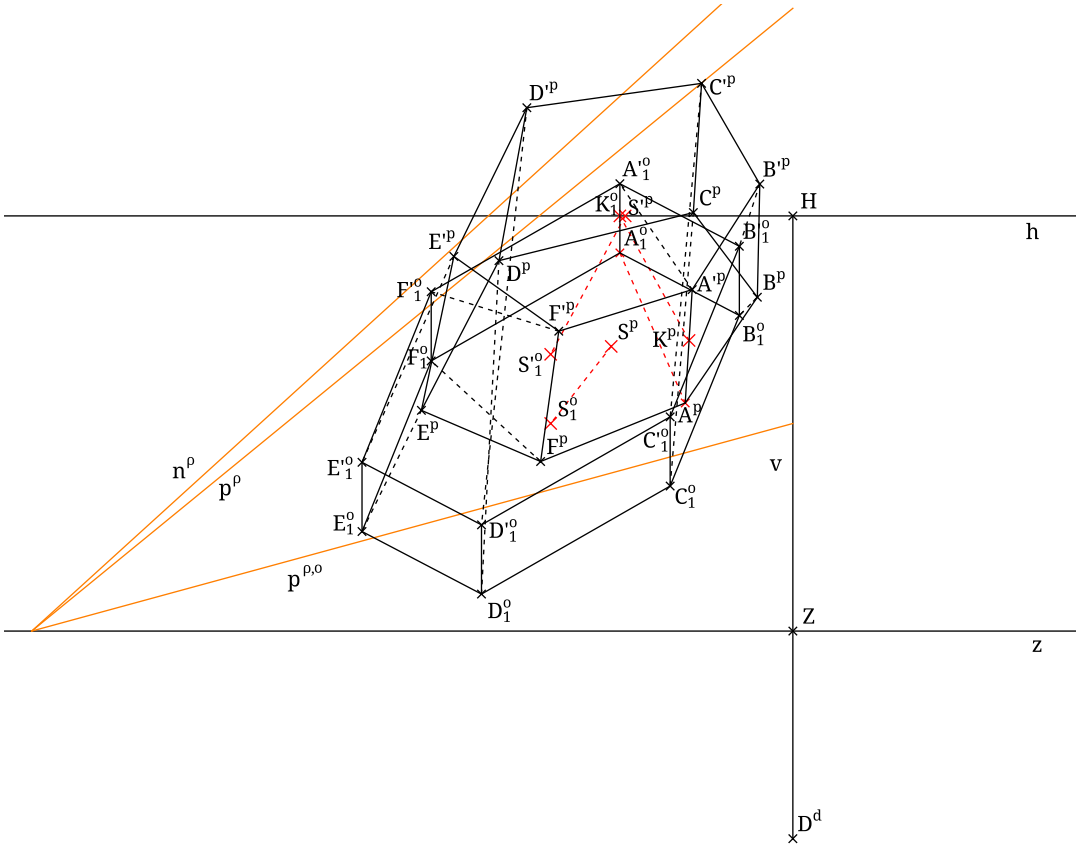


a)

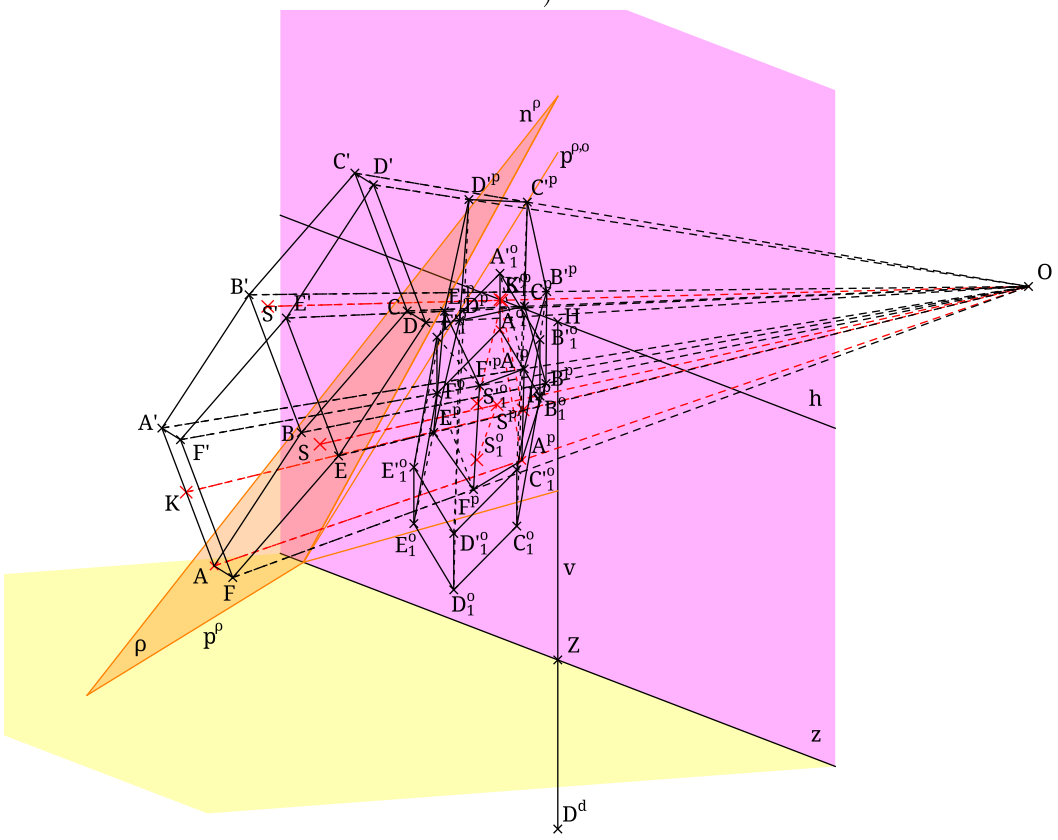


b)

Obrázek A.11: Řešení příkladu 4.3. v pravoúhlé axonometrii a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru

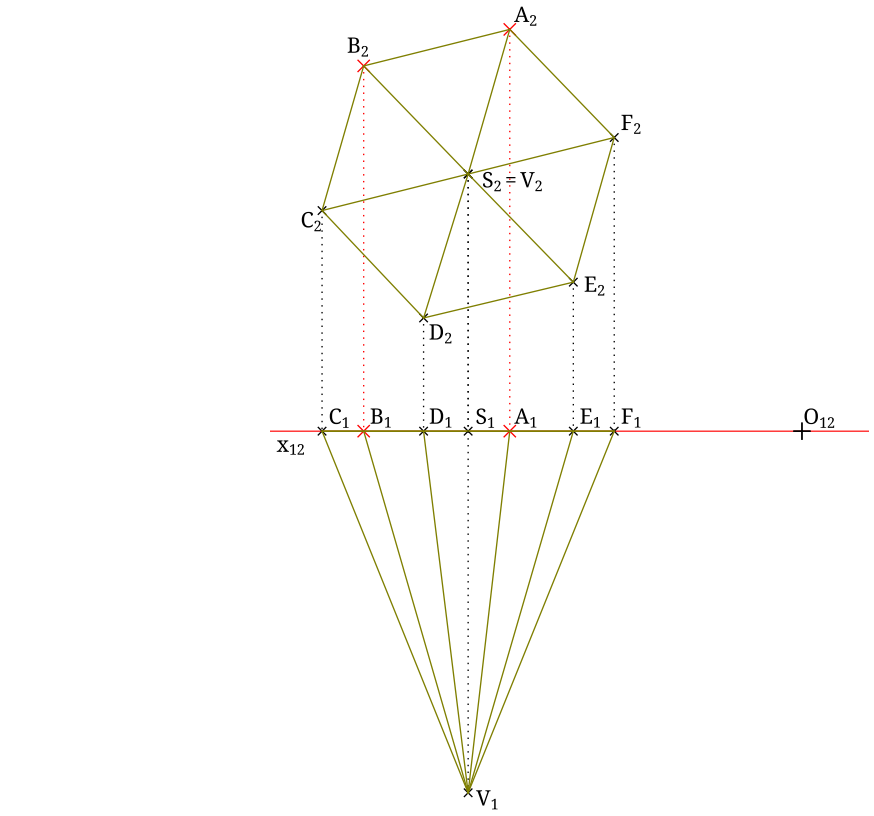


a)

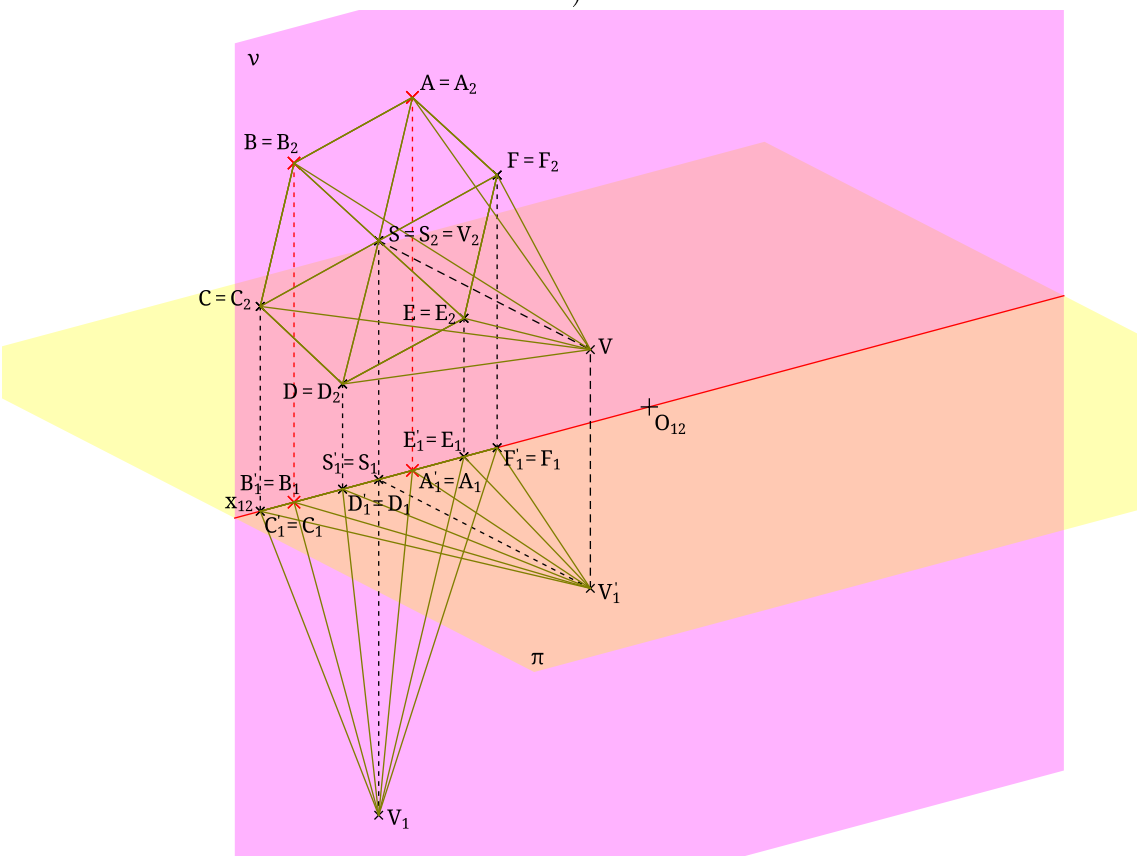


b)

Obrázek A.12: Řešení příkladu 4.3. v lineární perspektivě a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru

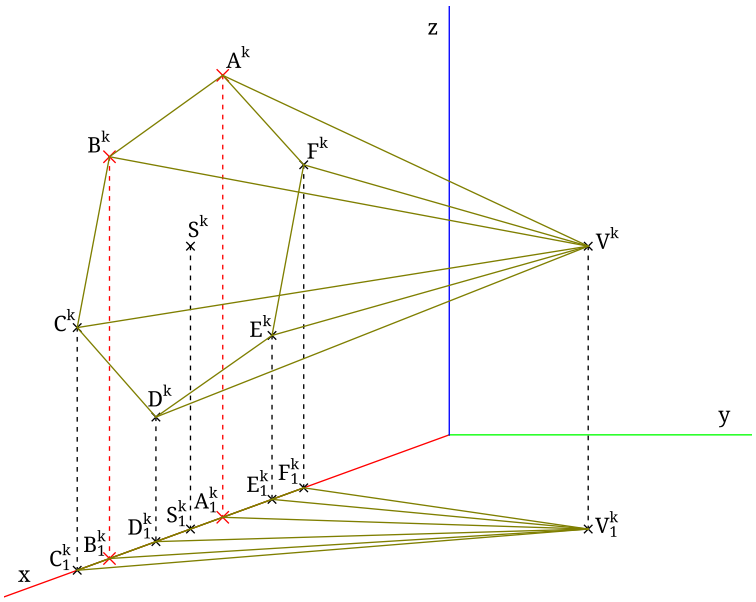


a)

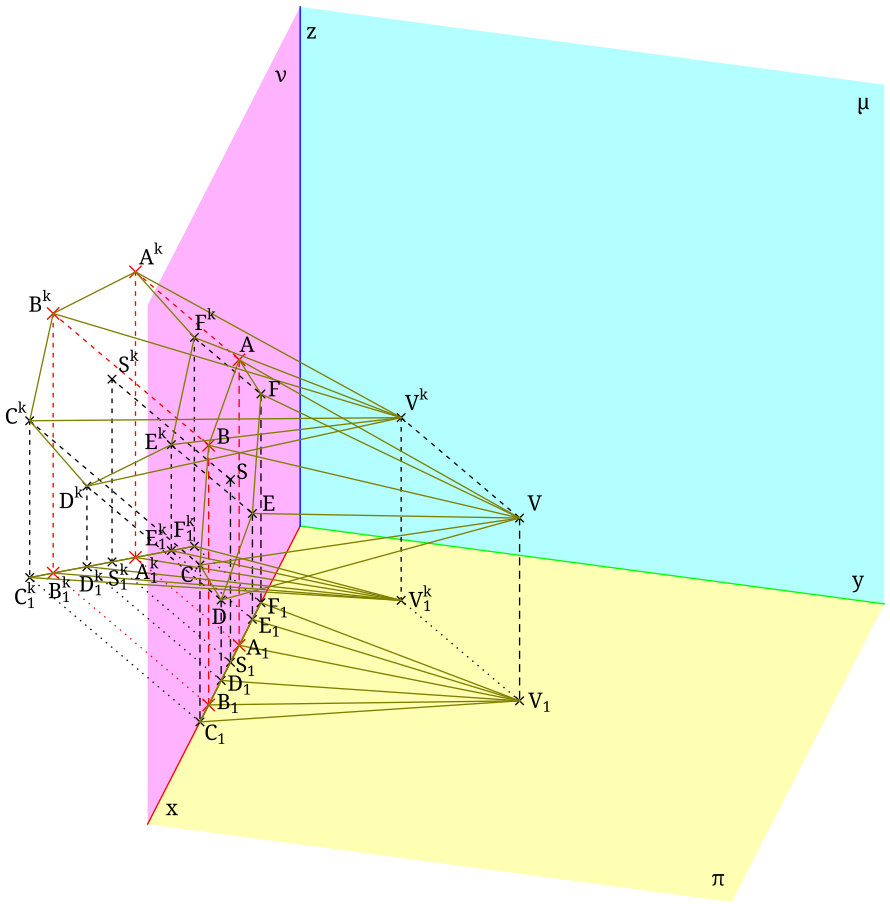


b)

Obrázek A.13: Řešení příkladu 4.4. v Mongeově promítání a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru

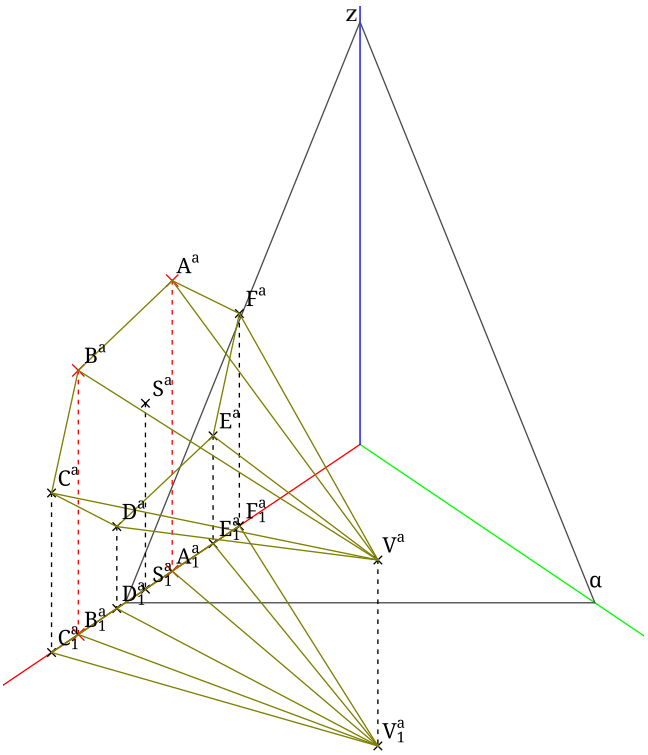


a)

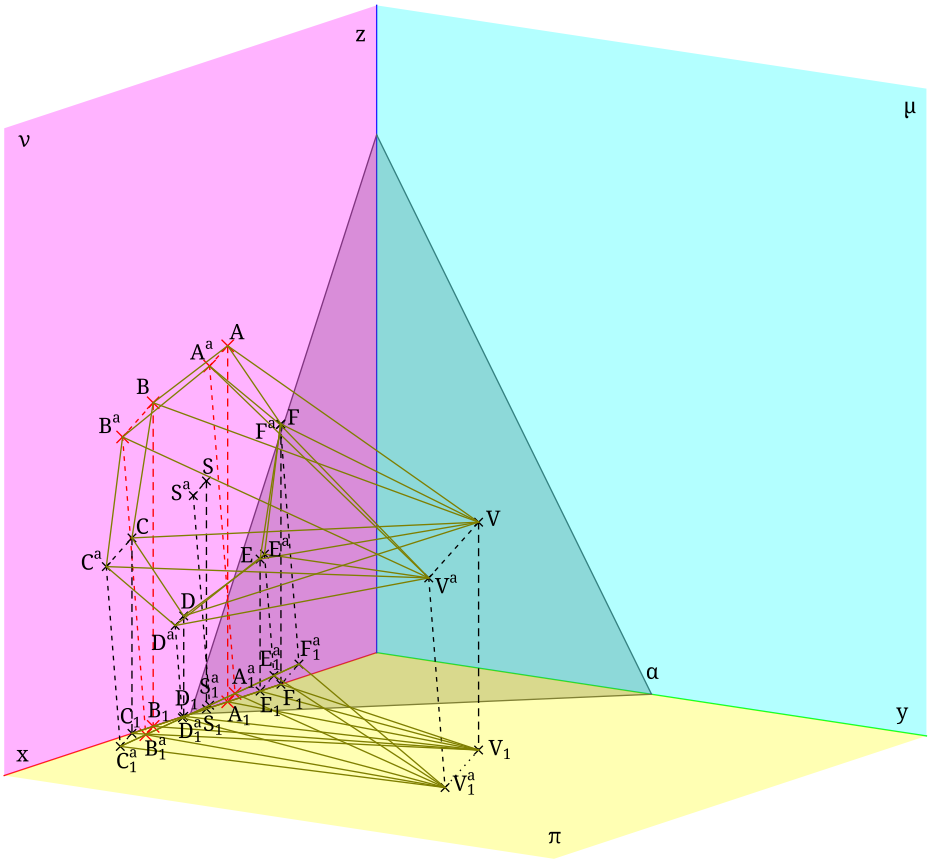


b)

Obrázek A.14: Řešení příkladu 4.4. v kosoúhlém promítání a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru

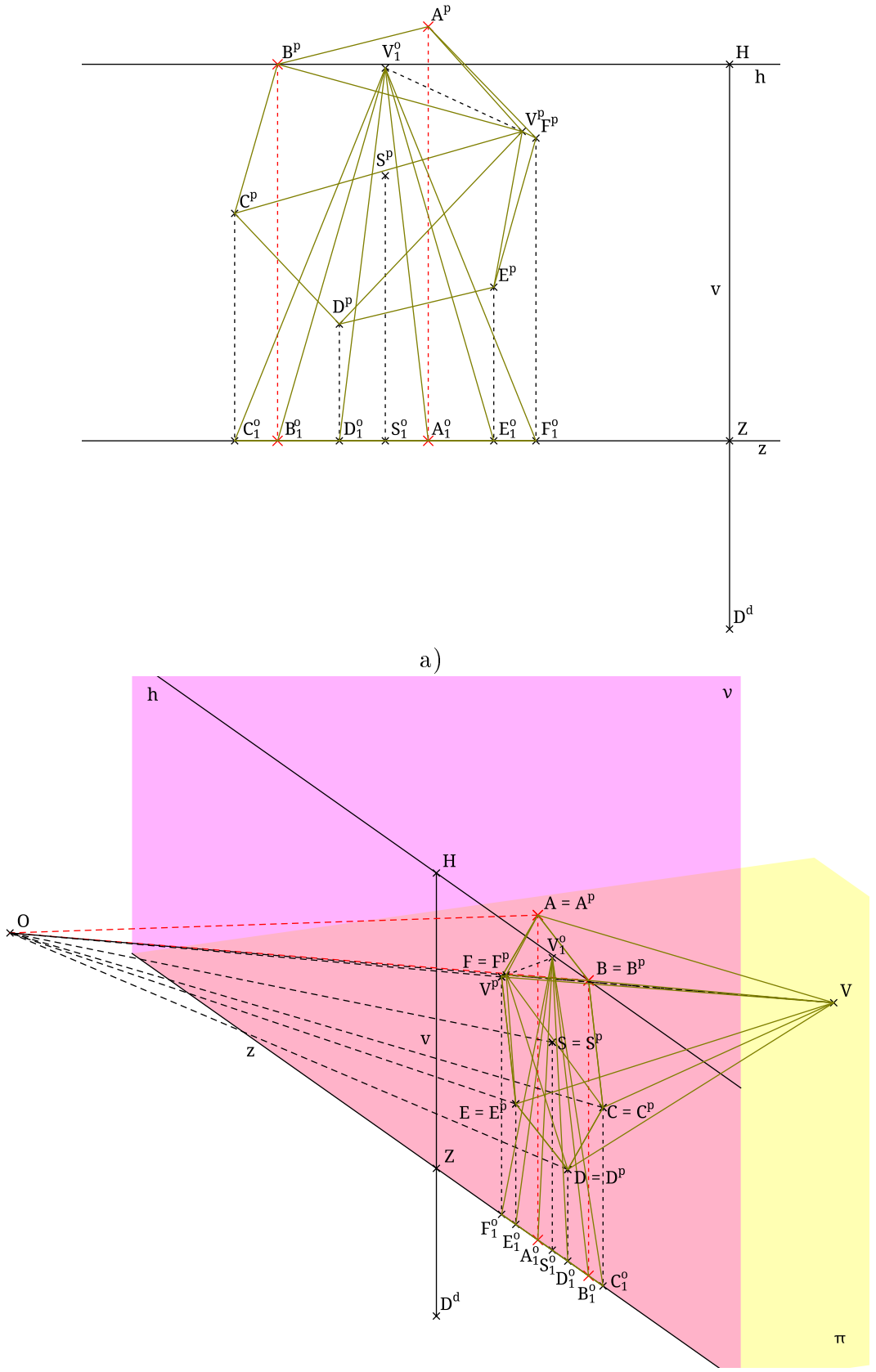


a)

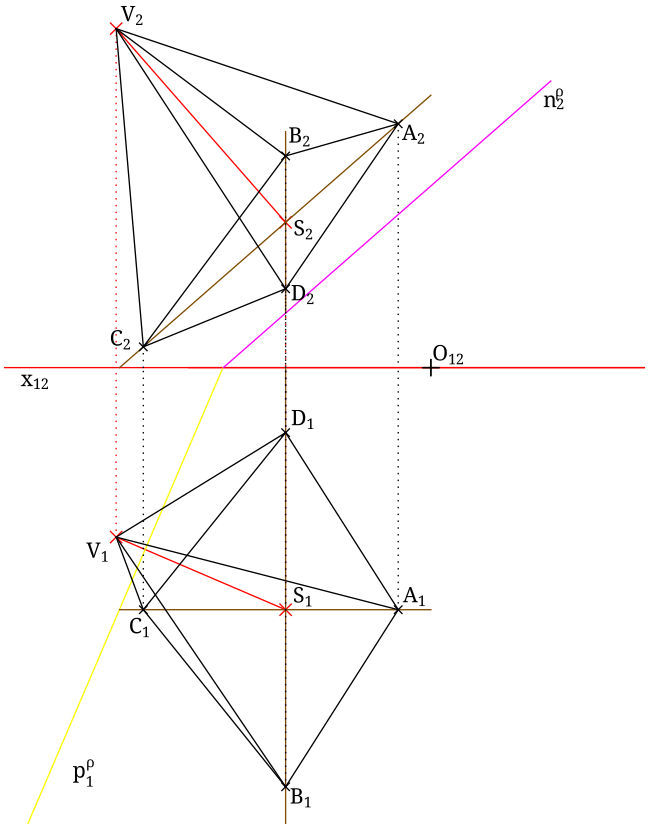


b)

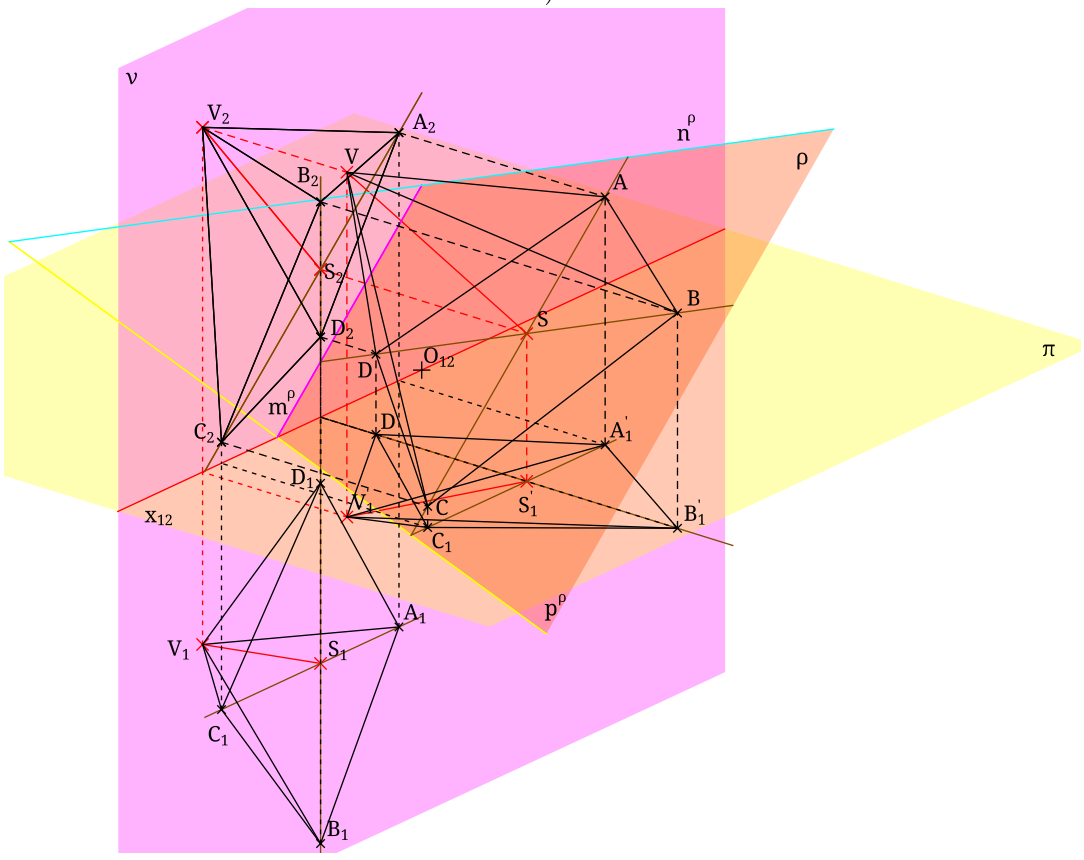
Obrázek A.15: Řešení příkladu 4.4. v pravoúhlé axonometrii a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru



Obrázek A.16: Řešení příkladu 4.4. v lineární perspektivě a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru

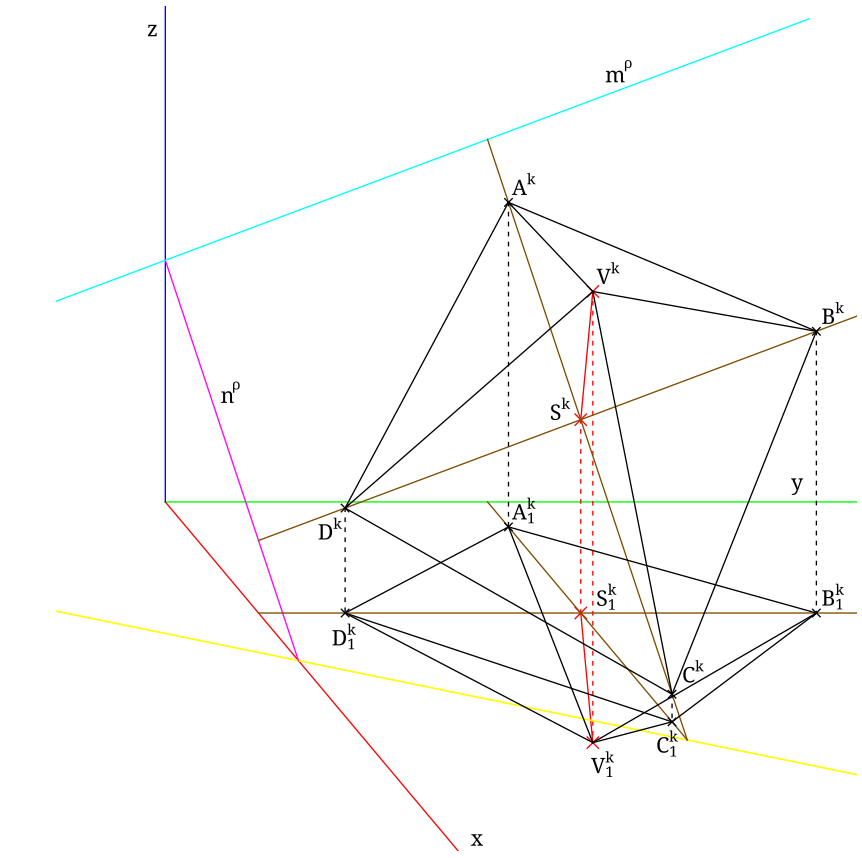


a)

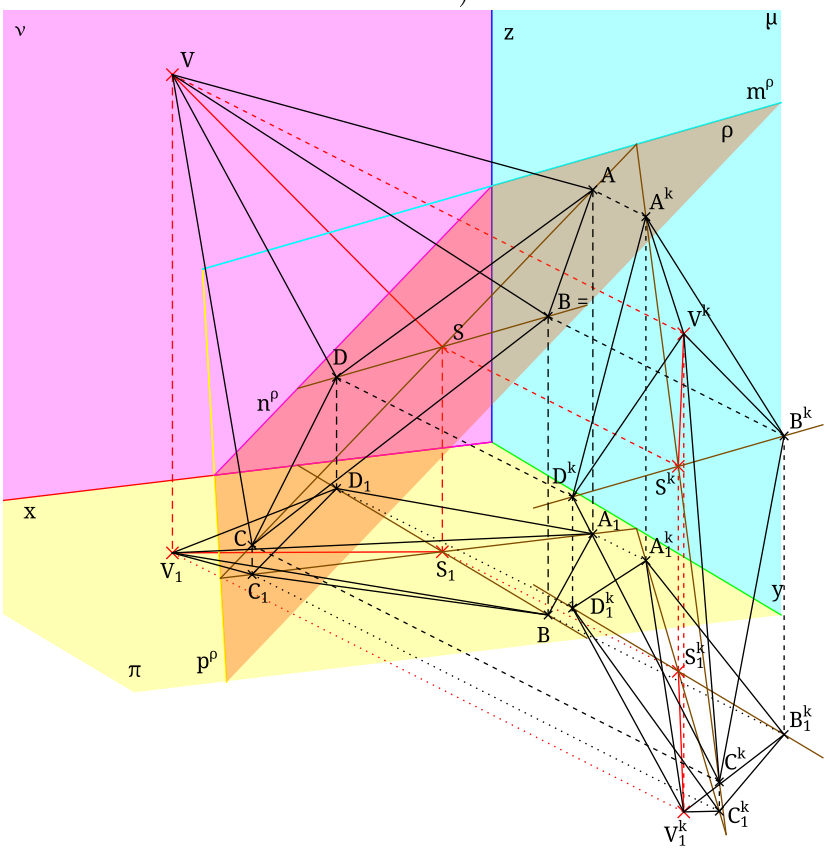


b)

Obrázek A.17: Řešení příkladu 4.5. v Mongeově promítání a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru

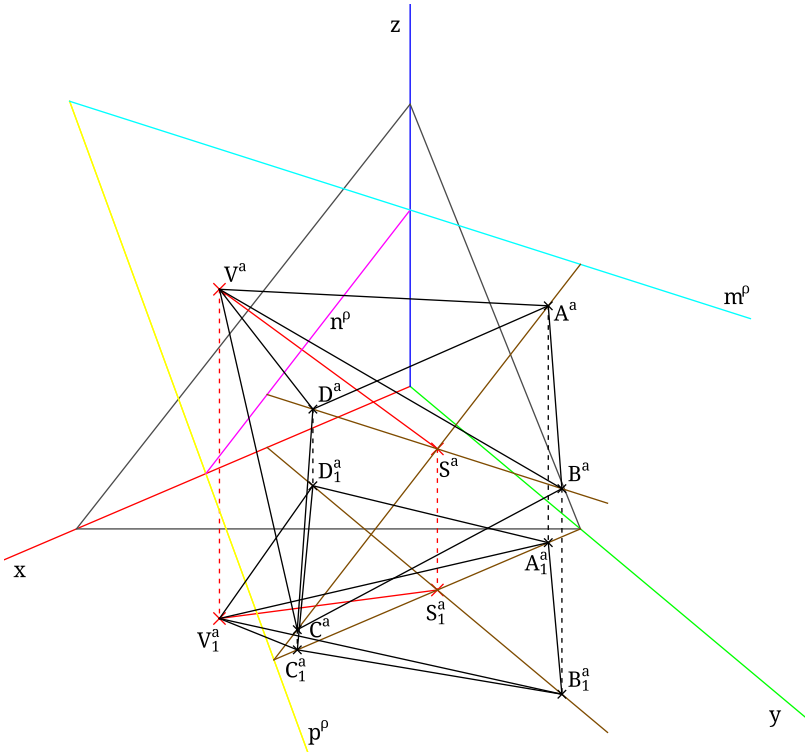


a)

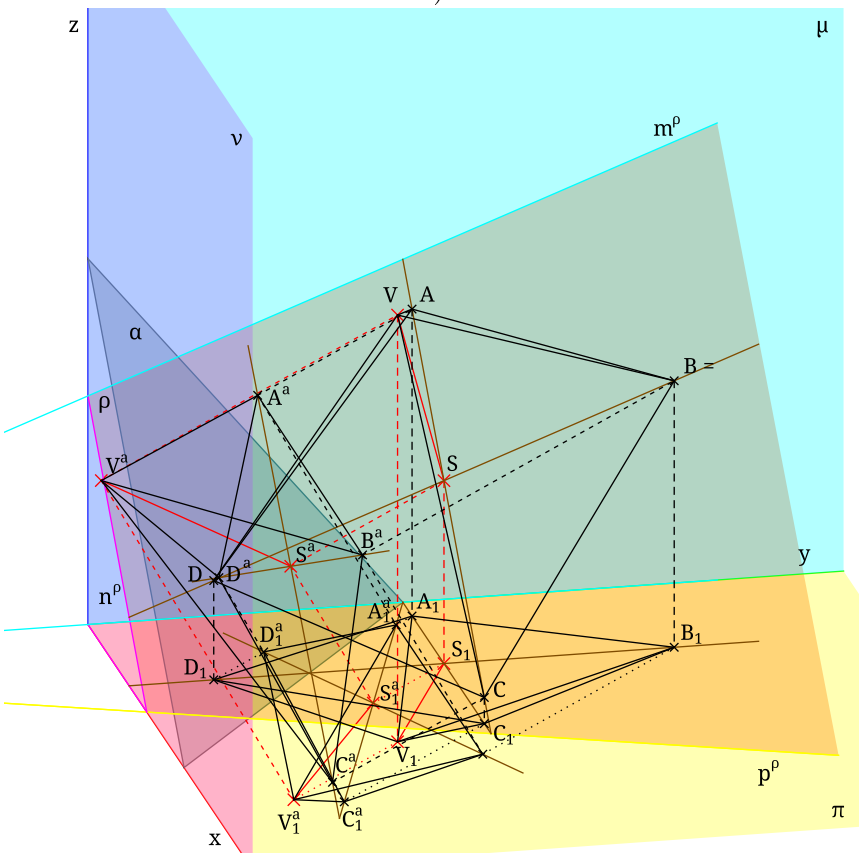


b)

Obrázek A.18: Řešení příkladu 4.5. v kosoúhlém promítání a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru

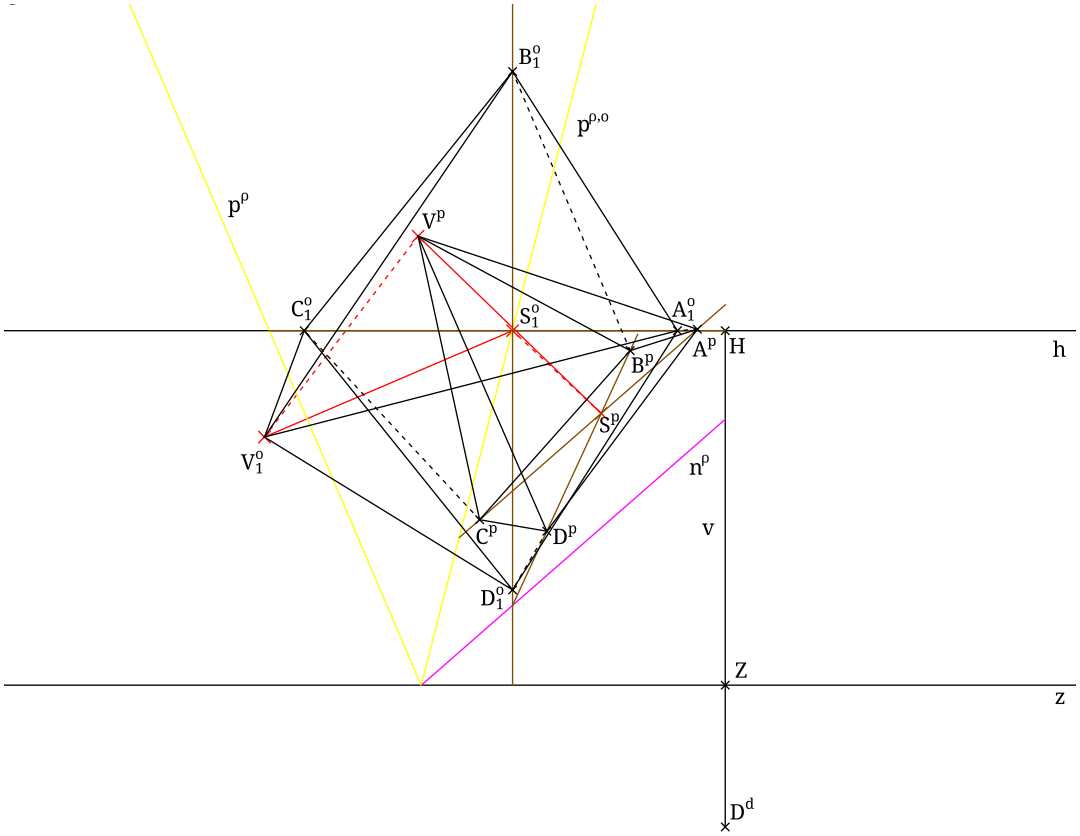


a)

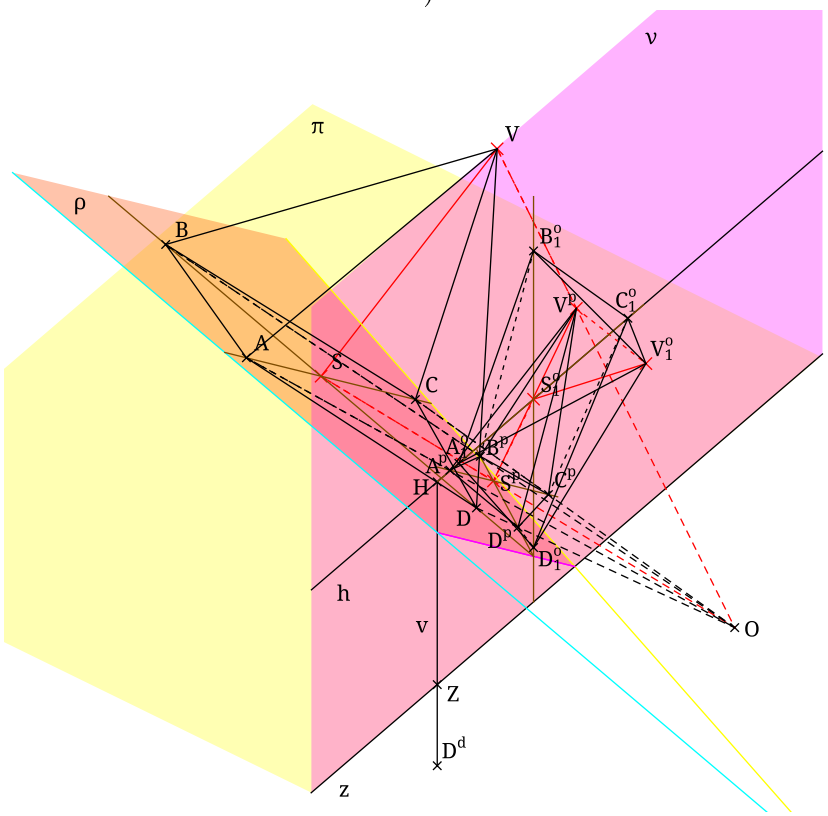


b)

Obrázek A.19: Řešení příkladu 4.5. v pravoúhlé axonometrii a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru

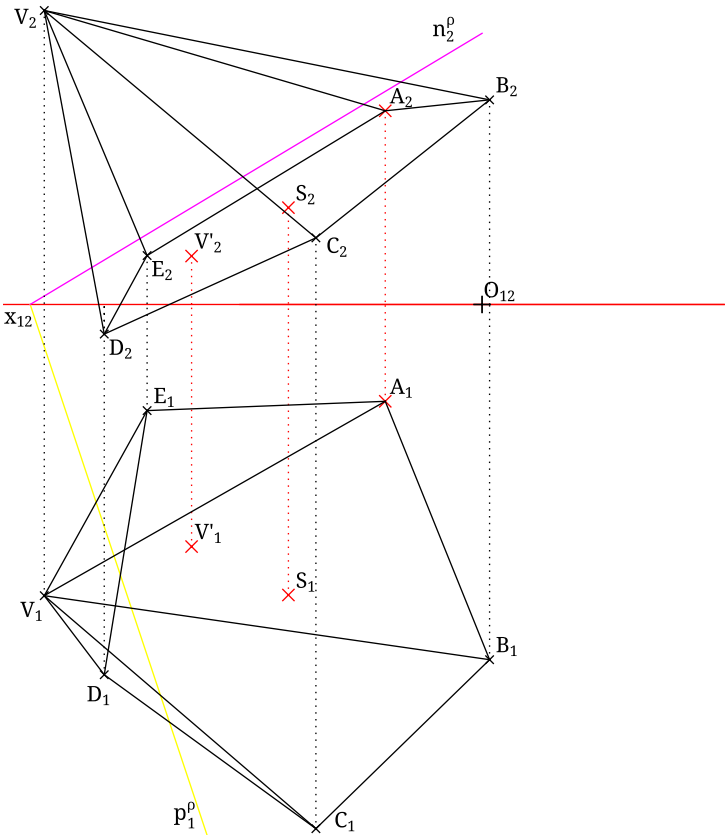


a)

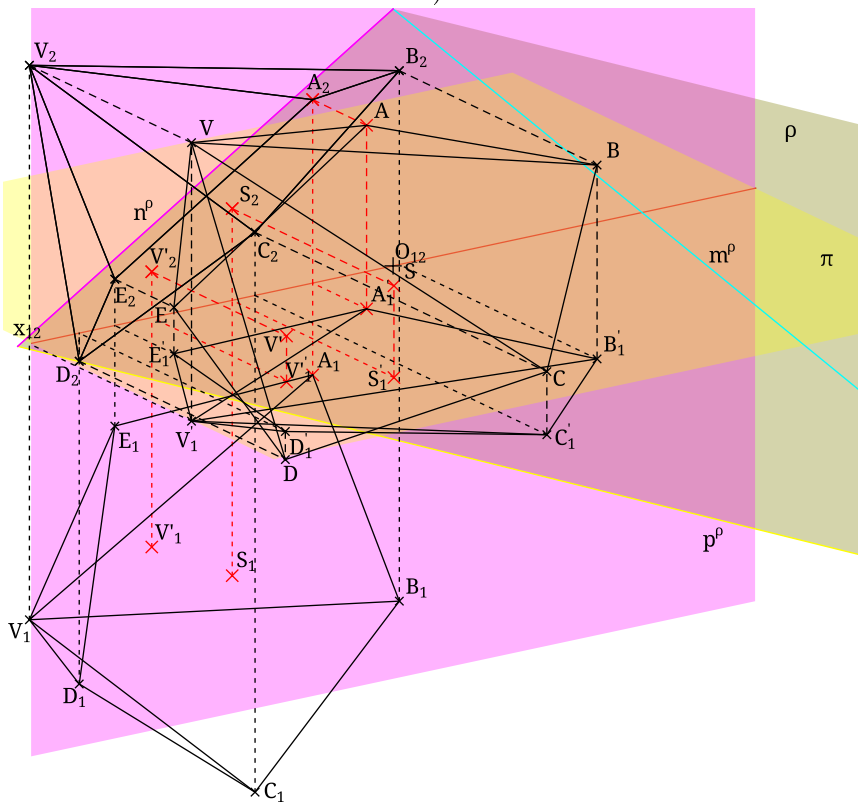


b)

Obrázek A.20: Řešení příkladu 4.5. v lineární perspektivě a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru

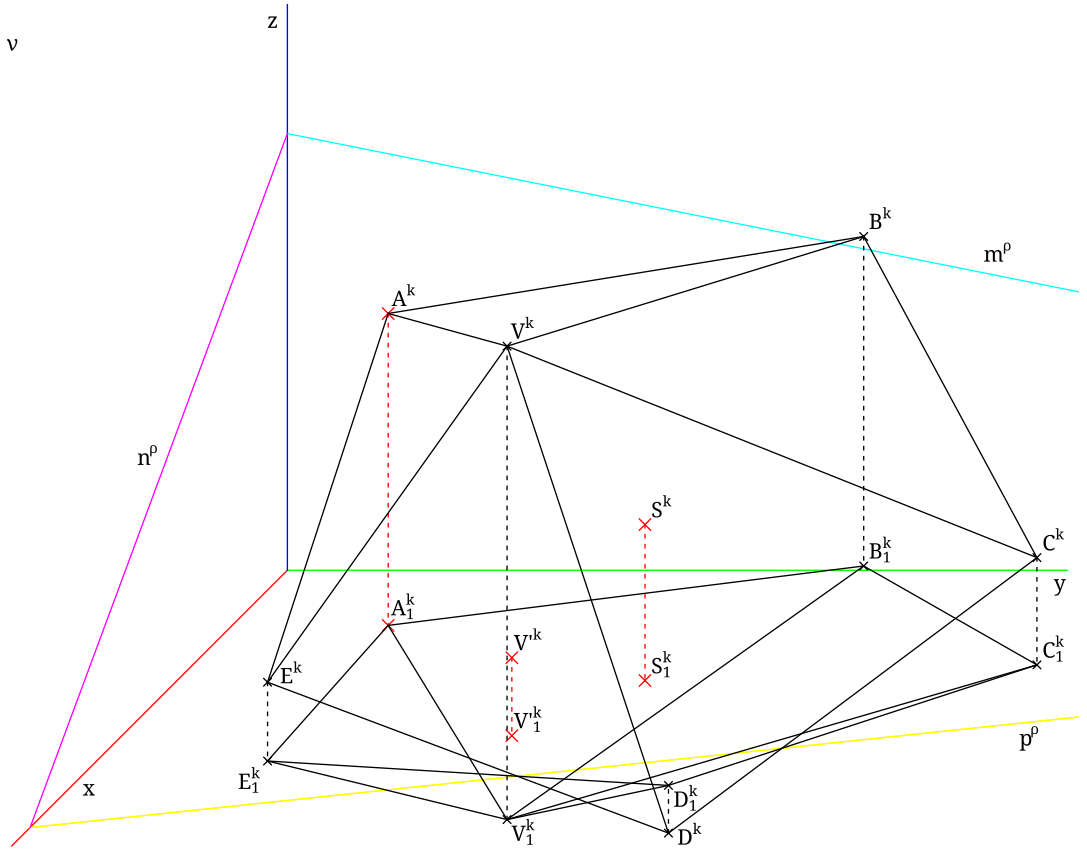


a)

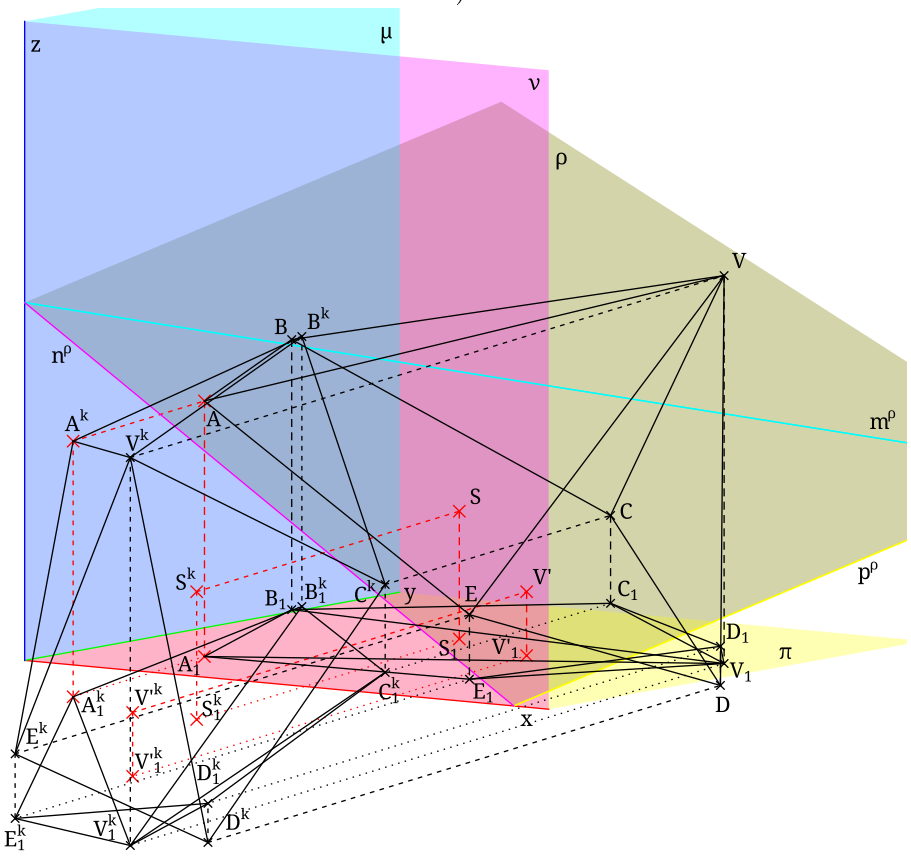


b)

Obrázek A.21: Řešení příkladu 4.6. v Mongeově promítání a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru

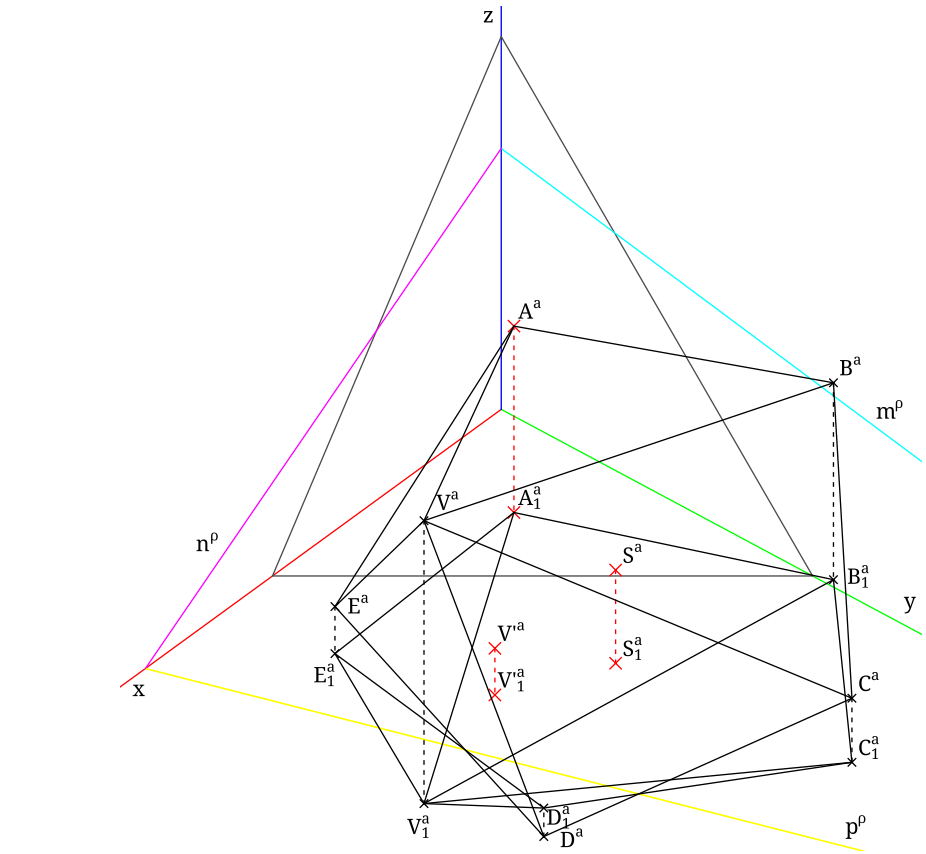


a)

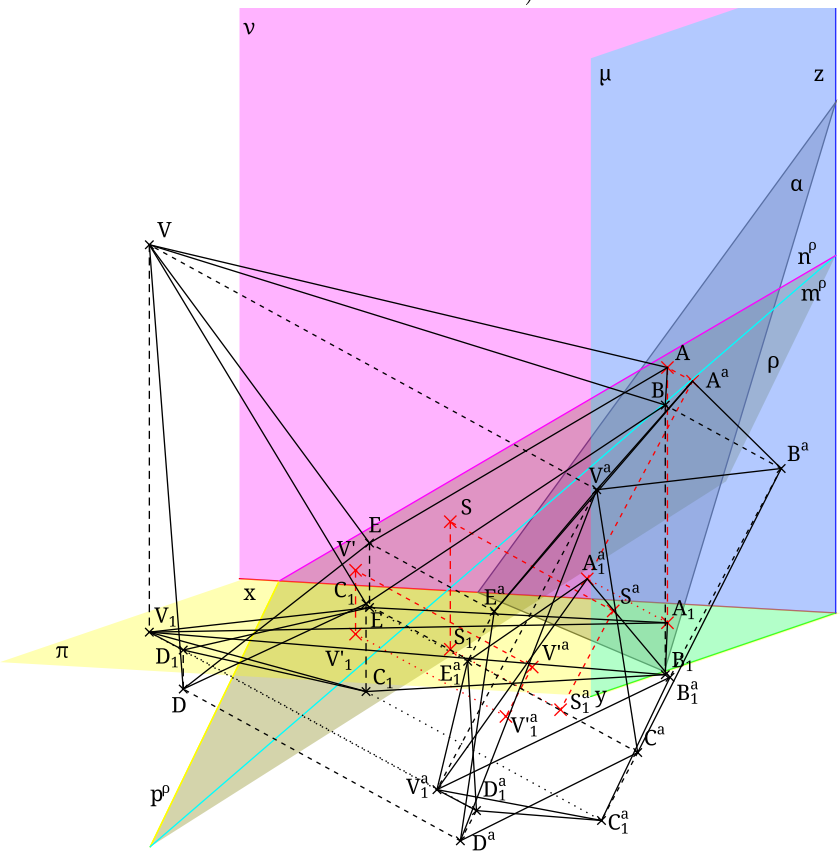


b)

Obrázek A.22: Řešení příkladu 4.6. v kosoúhlém promítání a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru

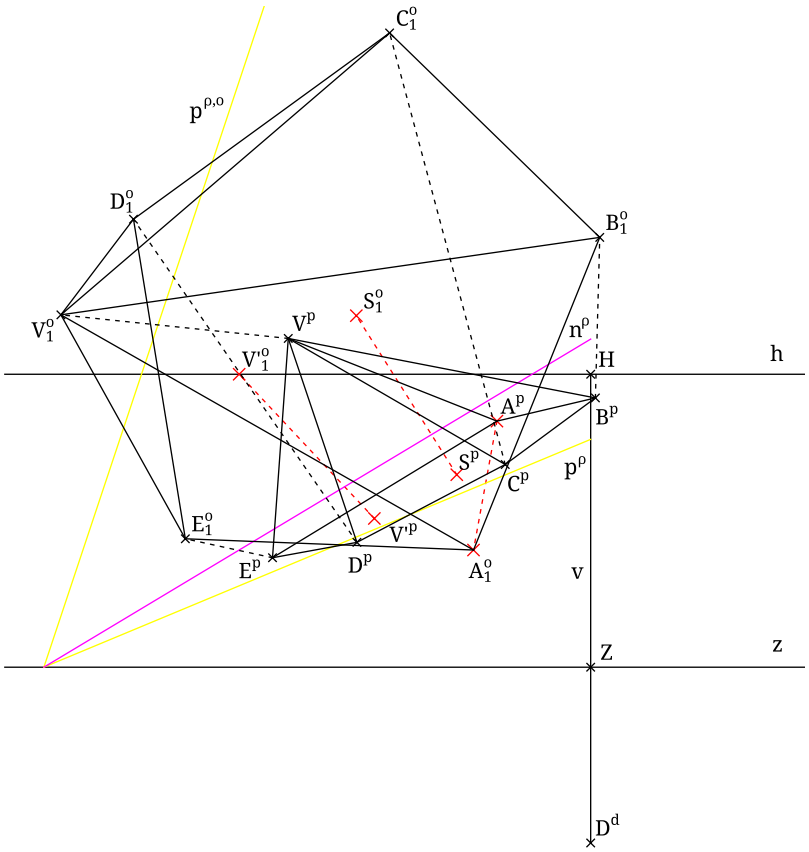


a)

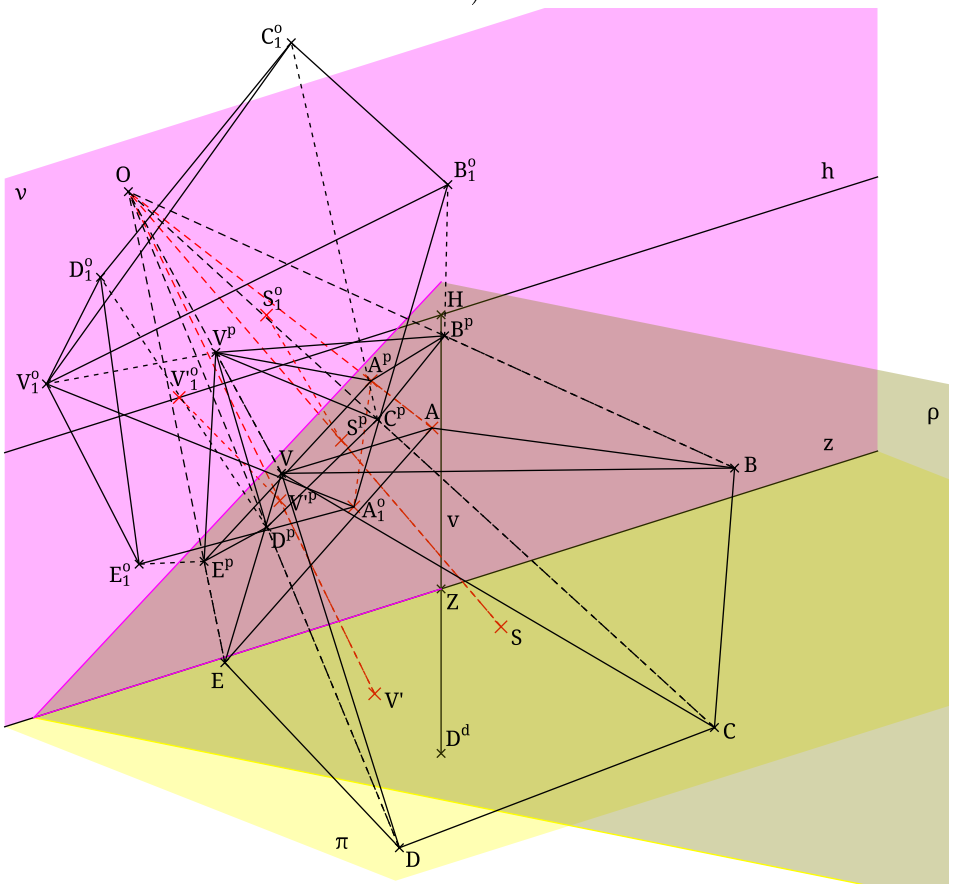


b)

Obrázek A.23: Řešení příkladu 4.6. v pravoúhlé axonometrii a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru



a)



b)

Obrázek A.24: Řešení příkladu 4.6. v lineární perspektivě a) situace v průmětně b) náhled na situaci v prostoru