Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

**DIPLOMOVÁ PRÁCE**

Ing. Bc. Jana Klůjová

# Stínové ceny a řízení portfolia s proporcionálními transakčními náklady

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Petr Dostál, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Praha 2013

Na tomto místě bych chtěla poděkovat vedoucímu mé diplomové práce Mgr. Petru Dostálovi, Ph.D., za věnovaný čas a cenné rady v průběhu tvorby práce. Dále děkuji svým rodičům, kteří mě podporovali psychicky i finančně po celou dobu mých studií, a také svému příteli za podporu a trpělivost.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 24. 7. 2013 Podpis autora

Název práce: Stínové ceny a řízení portfolia s proporcionálními transakčními náklady

Autor: Ing. Bc. Jana Klůjová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Petr Dostál, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Diplomová práce pojednává o řízení portfolia s proporcionálními transakčními náklady. Cílem je popsat nástroj stínových cen, který slouží k nalezení optimální strategie spočívající ve stanovení mezí pro poměr bohatství investora investovaného do rizikového aktiva tak, aby při investici této části bohatství do akcií dosáhl maximální asymptotické míry geometrického růstu bohatství. Popsaný poměr nazveme optimální proporce. Nákup a prodej akcií na reálném trhu je zatížen transakčními poplatky a aplikací stínových cen převedeme tuto situaci na model bez transakčních poplatků. Poté, co nalezneme optimální strategii, vrátíme se zpět k původním cenám zatíženým poplatky.

Samotné řešení popsaného problému, tj. hledání optimální strategie, je založeno na aplikaci Itôovy formule a teorie martingalů. Ceny akcií jsou modelovány jako geometrický Brownův pohyb.

Klíčová slova: Stínová cena, Itôova formule, geometrický Brownův pohyb, optimální proporce, optimální strategie

Title: Shadow prices and portfolio management with proportional transaction costs

Author: Ing. Bc. Jana Klůjová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Petr Dostál, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: The diploma thesis describes portfolio management with proportional transaction costs. The main aim is to describe using of shadow prices to find the optimal Markov policies keeping the proportion of the investor's wealth invested in the risky asset within the corresponding interval in order to maximize the long run geometric growth rate. On the real market, the investor must pay transaction costs when he buys/sells shares. In the diploma thesis we transform these prices into the shadow price; when trading in the shadow price there are no transaction costs.

The solution itself is based on Itô formula and the martingal theory. The prices of shares are modeled as geometric Brownian motion.

Keywords: Shadow price, Itô formula, Geometric Brownian motion, Optimal proportion, Optimal strategy

# Obsah

**Úvod** 6

**1 Mertonův problém** 7

1.1 Důležité pojmy . . . 7
1.2 Martingal . . . 8
1.3 Itôova formule . . . 8
1.4 Box kalkulus . . . 9
1.5 Itôova formule pro dva procesy . . . 10
1.6 Silný zákon velkých čísel pro martingaly . . . 11
1.7 Skorochodův problém . . . 12

**2 Optimální strategie pro obchodování s akciemi** 14

2.1 Nástin problému . . . 14
2.2 Řízení portfolia bez transakčních nákladů . . . 15
2.3 Řízení portfolia s transakčními náklady . . . 15
2.4 Stínové ceny . . . 17
2.5 Funkce $g$ . . . 21
2.6 Optimální strategie investora . . . 27
2.7 Shrnutí . . . 33

**3 Appendix** 35

3.1 Vyjádření $dS_t$ pomocí Itôovy formule . . . 35
3.2 Řešení SDE $d\mathcal{W}_t = \pi_t \mathcal{W}_t(\mu dt + \sigma dW_t)$ . . . 35
3.3 Odvození tvaru funkce $g$ . . . 36
3.4 Funkce $f$ a vyjádření $\widetilde{C}_t = f(\widetilde{\theta}_t)$ . . . 39
3.5 Odvození ODE pro funkci $f$ . . . 43

**Appendix** 43

**Závěr** 44

**Seznam použité literatury** 45

**Seznam použitých zkratek** 47

# Úvod

Jak již název napovídá, diplomová práce se zabývá řízením portfolia na trhu, kde se v případě jednotlivých transakcí s akciemi platí proporcionální transakční náklady. Přirozeným cílem investora, který se na takovém trhu pohybuje, je dosáhnout co největšího zisku. Na počátku investování vlastní investor určité bohatství a musí se správně rozhodnout, jakou jeho část vloží do akcií a jakou do bezrizikového aktiva, tedy například do banky.

V celé práci předpokládáme, že vklady v bance se neúročí. Proto, chce-li investor rozmnožit své bohatství, může tak učinit jedině nákupem a prodejem akcií.

Na reálném trhu jsou za každý nákup nebo prodej akcií placeny transakční poplatky. Jinými slovy řečeno, investor akcii nakupuje za vyšší a prodává za nižší hodnotu, než je její tržní cena. Cílem práce je využít model stínové ceny, abychom určili optimální strategii pro investora. Převedeme tedy situaci, kdy jsou placeny transakční poplatky, na situaci bez nich; cena, za kterou budou v takovém případě akcie nakupovány či prodávány, se nazývá právě stínová cena.

Poté, co najdeme optimální proporci, tedy poměr bohatství vložený do akcií k celkovému bohatství investora tak, aby byla maximalizována asymptotická míra geometrického růstu bohatství, provedeme tzv. „odstínování“; tj. vrátíme se zpět k situaci, kdy stínovou cenu neuvažujeme. Takto najdeme interval, ve kterém by se měl pohybovat zmíněný poměr bohatství, ale tentokrát pro případ obchodování na reálném trhu.

V práci je ukázáno, že nalezená strategie je skutečně optimální. Pokud bychom tedy uvažovali libovolný jiný způsob investování, pak dosažená míra růstu nikdy nebude větší než v případě optimální strategie.

# 1. Mertonův problém

Teorie portfolia s proporcionálními transakčními náklady úzce souvisí s tzv. Mertonovým problémem. Jedná se o situaci, kdy investor v čase 0 vlastní určité bohatství a je postaven před rozhodnutí, jak dále postupovat. Část svého majetku spotřebuje a zbytek rozdělí mezi riziková a bezriziková aktiva, tedy akcie a dluhopisy nebo vklad do banky. Cílem investora je maximalizace asymptotické míry geometrického růstu bohatství, kterého dosáhne vhodným prodejem a nákupem akcií.

Cenu akcií budeme považovat za proces, který lze modelovat jako geometrický Brownův pohyb. Jeho definici uvedeme v následující části Důležité pojmy.

## 1.1 Důležité pojmy

Abychom se mohli věnovat teorii portfolia s proporcionálními transakčními náklady, je nutné nejprve definovat několik základních pojmů. Jako první uvedeme definici pravděpodobnostního prostoru, která je převzata z [5], strana 7.

**Definice 1.1.** Trojice $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se nazývá pravděpodobnostní prostor, pokud $\mathcal{A}$ je $\sigma$-algebra na $\Omega$ a množinová funkce $P$ definovaná na $\sigma$-algebře $\mathcal{A}$ je pravděpodobnostní míra, tzn. platí pro ni:

- $P(\emptyset) = 0$;
- $P(A) \geq 0$ pro všechna $A \in \mathcal{A}$;
- Pro $A_i \in \mathcal{A}$, kde $A_i \cap A_j = \emptyset$, je-li $i \neq j$, platí $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Abychom mohli korektně definovat Brownův pohyb, je nutné nejprve definovat náhodný proces se stacionárními a nezávislými přírustky[1]. Takový totiž bude i Brownův pohyb[2].

**Definice 1.2.** Nechť $\{X_t, 0 \leq t < \infty\}$ je náhodný proces a nechť $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n$, $n \in \mathbb{N}$, je libovolné dělení intervalu $[0, t_n]$. Potom se jedná o *proces s nezávislými přírustky*, pokud pro všechna $n \in \mathbb{N}$ jsou náhodné veličiny

$$X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

vzájemně nezávislé.

**Definice 1.3.** Nechť $\{X_t, 0 \leq t < \infty\}$ je náhodný proces a mějme $0 < s < t < \infty$. Potom $X_t$ je *náhodný proces se stacionárními přírustky*, pokud náhodné veličiny $X_{t+s} - X_s$ a $X_t - X_0$ mají stejné rozdělení.

**Definice 1.4.** Reálný náhodný proces $\{W_t; t \geq 0\}$ na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se nazývá *Brownův pohyb* nebo také *Wienerův proces*, jestliže platí:

[1] Převzato z [4], strana 11, 12
[2] Definice převzata z [4], strana 12

- $W_0 = 0$;
- každá trajektorie Wienerova procesu je spojitá, tzn. funkce $t \to W_t$ je spojitá;
- jedná se o proces s nezávislými a stacionárními přírustky;
- mějme $0 \leq s \leq t < \infty$; pak pro každé takové $s$ a $t$ platí, že $W_t - W_s$ má normální rozdělení se střední hodnotou 0 a s rozptylem $t - s$.

## 1.2 Martingal

Abychom mohli definovat pojem martingalu, nejprve je nutné znát pojmy filtrace a adaptovaný proces. Následující definice jsou převzaty z [8].

**Definice 1.5.** *Nechť $\mathcal{F}$ je $\sigma$-algebra a $\{\mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ je systém pod-$\sigma$-algeber $\mathcal{F}$ takový, že pro všechna $s \leq t$ platí $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$. Potom se množina $\{\mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ nazývá* filtrace.

**Definice 1.6.** *Řekneme, že reálný proces $\{X_t; 0 \leq t < \infty\}$ je* adaptovaný *vzhledem k filtraci $\{\mathcal{F}_t\}$, pokud pro všechna $t \geq 0$ platí, že $X_t$ je $\mathcal{F}_t$-měřitelná náhodná veličina.*

Nyní můžeme přejít k definici samotného martingalu.

**Definice 1.7.** *Nechť $\{X_t; 0 \leq t < \infty\}$ je proces adaptovaný vzhledem k filtraci $\{\mathcal{F}_t\}$. Potom $\{X_t\}$ je* martingal*, pokud splňuje následující podmínky:*

- $E\left(|X_t|\right) < \infty,\ 0 \leq t < \infty$
- $E\left(X_t|\mathcal{F}_s\right) \overset{\text{s.j.}}{=} X_s,\ 0 \leq s \leq t < \infty.$

## 1.3 Itôova formule

Dalším pojmem, který bude v diplomové práci hojně využívaný, je Itôova formule[3]. Abychom ho mohli korektně zapsat, je nejprve nutné definovat *Itôův proces.* Označme $\mathcal{F}_t^W$ zúplněnou kanonickou filtraci vzhledem k Wienerovu procesu $\{W_t, t \geq 0\}$. Veškeré filtrační vlastnosti v diplomové práci jsou vztahovány právě k této filtraci.

**Definice 1.8.** *Řekneme, že proces $\{X_t; t \geq 0\}$ je* Itôův*, pokud je možné ho zapsat ve tvaru*

$$X_t = x_o + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dW_s, \quad t \geq 0, \tag{1.1}$$

*kde $a(s)$ a $b(s)$ jsou progresivně měřitelné procesy, které splňují podmínky*

$$P\left(\int_0^T |a(s)|ds < \infty\right) = 1 \tag{1.2}$$

*a*

$$P\left(\int_0^T |b(s)|^2 ds < \infty\right) = 1. \tag{1.3}$$

[3]Pojmy týkající se Itôovy formule a Itôova procesu jsou převzaty z [8].

Nyní máme definovaný Itôův proces a můžeme přejít k Itôově formuli v jejím obecném tvaru.

**Tvrzení 1.1.** (Itôova formule) *Nechť* $f \in C^{2,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ *a* $\{X_t; t \geq 0\}$ *je Itôův proces, který splňuje*

$$dX_t = a(s)ds + b(s)dW_s. \tag{1.4}$$

*Potom* $Y_t = f(t, X_t)$ *je opět Itôův proces s diferenciálem*

$$df(t,X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X_t)b^2(t)dt.^{4} \tag{1.5}$$

## 1.4 Box kalkulus

*Box kalkulus* je soubor pravidel, který výrazně zjednodušuje práci s formálními symboly $dt$ a $dW_t$. Můžeme říct, že se jedná o algebru na množině $\mathcal{A}$, kterou tvoří všechny lineární kombinace symbolů $dt$ a $dW_t$. Funkce příslušející k $dt$ a $dW_t$ považujeme v rámci popisované algebry za skalární veličiny. Pro násobení prvků množiny $\mathcal{A}$ platí asociativita a transitivita a násobení členů $dt$ a $dW_t$ je vyjádřeno následující tabulkou:

| $\cdot$ | $dt$ | $dW_t$ |
|---|---|---|
| $dt$ | 0 | 0 |
| $dW_t$ | 0 | $dt$ |

Tabulka 1.1: Násobení členů $dt$ a $dW_t$ pro dva procesy.

Pro ilustraci uvedeme příklad využití Box kalkulu. Nechť $X_t$ a $Y_t$ jsou dva procesy, pro které platí:

$$dX_t = \alpha dt + \beta dW_t,$$

$$dY_t = \gamma dt + \delta dW_t.$$

Potom součin $dX_t \cdot dY_t$ lze zapsat ve tvaru:

$$\begin{aligned} dX_t \cdot dY_t &= (\alpha dt + \beta dW_t)(\gamma dt + \delta dW_t) \\ &= \beta\delta dt \end{aligned} \tag{1.6}$$

Box kalkulus je možné rozšířit pro případ, kdy máme více než jeden proces. Předpokládejme nezávislost Wienerových procesů $W_t^1$ a $W_t^2$. Pak je možné uvedenou tabulku přepsat do následujícího tvaru:

[4] Itôova formule platí i pro procesy, které vzniknou součtem Itôova procesu a spojitého adaptovaného procesu s lokálně konečnou variací.

| $\cdot$ | $dt$ | $dW_t^1$ | $dW_t^2$ |
|---|---|---|---|
| $dt$ | 0 | 0 | 0 |
| $dW_t^1$ | 0 | $dt$ | 0 |
| $dW_t^2$ | 0 | 0 | $dt$ |

Tabulka 1.2: Násobení členů $dt$ a $dW_t$ pro více procesů.

## 1.5 Itôova formule pro dva procesy

Definujme také Itôovu formuli pro dva Itôovy procesy.

**Tvrzení 1.2.** (Itôova formule pro dva Itôovy procesy) *Nechť $f \in C^{2,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ a $\{X_t; t \geq 0\}$ a $\{Y_t; t \geq 0\}$ jsou Itôovy procesy, které splňují*

$$dX_t = a(t)dt + b(t)dW_t$$

*a*

$$dY_t = \alpha(t)dt + \beta(t)dW_t.$$

*Potom platí:*

$$\begin{aligned} df(X_t, Y_t) = &\frac{\partial f}{\partial x}(X_t, Y_t)dX_t + \frac{\partial f}{\partial y}(X_t, Y_t)dY_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, Y_t)b^2(t)dt \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_t, Y_t)b(t)\beta(t)dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_t, Y_t)\beta^2(t)dt. \end{aligned} \tag{1.7}$$

S využitím Box kalkulu pro dva Itôovy procesy lze uvedenou rovnost zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} df(X_t, Y_t) = &\frac{\partial f}{\partial x}(X_t, Y_t)dX_t + \frac{\partial f}{\partial y}(X_t, Y_t)dY_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, Y_t)dX_t dX_t \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_t, Y_t)dX_t dY_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_t, Y_t)dY_t dY_t, \end{aligned} \tag{1.8}$$

protože platí následující:

$$\begin{aligned} dX_t dX_t &= (a(t)dt + b(t)dW_t)(a(t)dt + b(t)dW_t) \\ &= b^2(t)dt, \\ dX_t dY_t &= (a(t)dt + b(t)dW_t)(\alpha(t)dt + \beta(t)dW_t) \\ &= b(t)\beta(t)dt, \\ dY_t dY_t &= (\alpha(t)dt + \beta(t)dW_t)(\alpha(t)dt + \beta(t)dW_t) \\ &= \beta^2(t)dt. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Další důležitou definicí je *kvadratická variace.*

**Definice 1.9.** *Nechť $\{X_t, t \geq 0\}$ a $\{Y_t, t \geq 0\}$ jsou spojité procesy. Označme*

$$[X]_t^T = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(X_{t \wedge t_k} - X_{t \wedge t_{k-1}}\right)^2$$

*elementární kvadratickou variaci procesu $X_t$ vzhledem k lokálně konečnému dělení $T = \{0 = t_0 < t_1 < \dots t_n, n \in \mathbb{N}\}$, kde $t_n \to \infty$ pro $n \to \infty$. Pokud pro každou posloupnost dělení $T_n \subseteq T_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, takových, že $\cup_n T_n$ je hustá podmnožina $[0, \infty)$, platí, že pro každé $t \geq 0$ máme následující konvergenci v pravděpodobnosti*

$$\sup_{s \leq t} |[X]_s^{T_n} - Y_s| \to 0 \quad \textit{pro} \quad n \to \infty,$$

*pak řekneme, že $Y$ je* kvadratická variace *procesu $X$ a budeme ji značit $\langle X \rangle_t$.*

**Tvrzení 1.3.** (Kvadratická variace Itôova procesu) Nechť $\{X_t\}$ je Itôův proces, pro který platí

$$dX_t = a(t)dt + b(t)dW_t.$$

Potom existuje kvadratická variace procesu $\{X_t\}$ a je dána vztahem

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t b^2(s)ds, \quad t \geq 0.$$

*Důkaz.* Důkaz Tvrzení 1.3 je možné nalézt v [8]. □

**Tvrzení 1.4.** *Nechť $W_t$ je Wienerův proces. Pak platí $\langle W \rangle_t \overset{\text{s.j.}}{=} t$, kde $t > 0$.*

*Důkaz.* Důkaz plyne z Tvrzení 1.3. □

## 1.6 Silný zákon velkých čísel pro martingaly

K důkazu Silného zákona velkých čísel pro martingaly využijeme tzv. Doobovy nerovnosti.

**Lemma 1.5.** (Doobovy nerovnosti)[5] Nechť $X$ je zprava spojitý martingal nebo nezáporný submartingal. Potom platí

(a) $p \geq 1 \quad \Rightarrow \quad P\left[\sup_{0 \leq s \leq t} |X(s)| \geq a\right] \leq a^{-p} E|X(t)|^p,\ t \in \mathbb{R}_+, a > 0,$

(b) $p > 1 \quad \Rightarrow \quad E \sup_{0 \leq s \leq t} |X(s)|^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E|X(t)|^p.$

**Věta 1.6. (Silný zákon velkých čísel pro martingaly)** *Nechť $M_t$ je spojitý martingal, jehož kvadratická variace má maximálně lineární růst*

$$\langle M \rangle_t \leq Kt + L,$$

*kde $K > 0$, $L \geq 0$ jsou konstanty, a $M_0 = 0$. Potom*

$$\frac{M_t}{t} \overset{\text{s.j.}}{\to} 0, \qquad t \to \infty. \tag{1.10}$$

[5] Doobovy nerovnosti převzaty z [2], str. 243.

*Důkaz.* Na základě Lemmatu 1.5 a z předpokladu linearity vyplývá, že

$$E\left(\sup_{s\leq t}|M_s|\right)^2 \leq 4E\langle M\rangle_t \leq 4(Kt+L),$$

a tedy musí platit

$$E\sum_n\left(\frac{1}{n^2}\sup_{s\leq n^2}|M_s|\right)^2 \leq 4\sum_n\frac{Kn^2+L}{n^4} < \infty.$$

Označme $T=\{n^2, n\in\mathbb{N}\}$. Pak také platí

$$\frac{|M_t|}{t} \leq \sup_{s\leq t}\frac{|M_s|}{t} \leq \sup_{s\leq\lceil t\rceil_T}\frac{|M_s|}{t} \leq \frac{\sup_{s\leq\lceil t\rceil_T}|M_s|}{\lceil t\rceil_T}\frac{\lceil t\rceil_T}{t} \overset{\text{s.j.}}{\to} 0, \qquad t\to\infty,$$

kde $\lceil t\rceil_T = \inf\{x\in T; x\geq t\}$, protože pokud $\lceil t\rceil_T = (n_t+1)^2$, $n_t\in\mathbb{N}_0$, pak $n_t\to\infty$ pro $t\to\infty$ a

$$1\leq\frac{\lceil t\rceil_T}{t}\leq\frac{(n_t+1)^2}{n_t^2}\to 1$$

pro $t\to\infty$. □

## 1.7 Skorochodův problém

**Věta 1.7.** *Buďte $-\infty<a<b<\infty$, $W_t$ buď $\mathcal{F}_t$-Wienerův proces a $B,S:[a,b]\to\mathbb{R}$ buďte reálné lipschitzovsky spojité funkce. Pak existuje až na nerozlišitelnost*[6] *právě jedna trojice spojitých $\mathcal{F}_t$-semimartingalů $\left(X_t, X_t^{\uparrow}, X_t^{\downarrow}\right)$ taková, že platí:*

- $dX_t = B(X_t)dt + S(X_t)dW_t + dX_t^{\uparrow} - dX_t^{\downarrow}$
- *procesy $X_t^{\uparrow}$, $X_t^{\downarrow}$ jsou neklesající, splňující*

  $$\mathbb{1}_{[X_t\neq a]}dX_t^{\uparrow}=0, \qquad \mathbb{1}_{[X_t\neq b]}dX_t^{\downarrow}=0,$$

  *tedy diferenciál $dX_t^{\uparrow}$ je soustředěn na množině $[X_t=a]$ a diferenciál $dX_t^{\downarrow}$ na množině $[X_t=b]$.*

*Důkaz.* Důkaz Věty 1.7 lze nalézt v [6] či [7]. □

**Definice 1.10.** *Proces $X_t$ ze znění Věty 1.7 nazveme $(B,S)$*-difúzním procesem *s odrážecími bariérami v bodech $a$, $b$, $a<b$. Na procesy $X_t^{\uparrow}$, $X_t^{\downarrow}$ se pak budeme odkazovat jako na příslušné* intervenční procesy *a na $dX_t^{\uparrow}$, $dX_t^{\downarrow}$ jako na* intervenční diferenciály.

Intervenční procesy $X_t^{\uparrow}$, resp. $X_t^{\downarrow}$ rostou jen na množině $[X_t=a]$, resp. $[X_t=b]$ a jsou zodpovědné za udržení procesu $X_t$ v intervalu $[a,b]$.

[6] Procesy $X_t$ a $Y_t$ nazveme nerozlišitelné, pokud $X_t \overset{\text{s.j.}}{=} Y_t$, $t\geq 0$.

**Poznámka 1.8.** *Nechť $X_t$ je $(B,S)$-difúzní proces s bariérami v $\underline{x} < \overline{x}$. Pokud $Z_t = f(X_t)$, kde $f : [\underline{x}, \overline{x}] \to [\underline{y}, \overline{y}]$ je rostoucí bijekce třídy $\mathcal{C}^2$, pak také $Z_t$ je $(\widetilde{B}, \widetilde{S})$-difúzní proces s bariérami v bodech $\underline{z}$, $\overline{z}$, kde*

$$\begin{aligned} \underline{z} &= f(\underline{x}), \\ \overline{z} &= f(\overline{x}), \end{aligned}$$

*a pro $\widetilde{S}$ a $\widetilde{B}$ platí*

$$\begin{aligned} \widetilde{S}(z) &= f'(x)S(x), \\ \widetilde{B}(z) &= f'(x)B(x) + \tfrac{f''(x)S^2(x)}{2}, \quad \text{kde} \quad z = f(x). \end{aligned}$$

*Jeli $(X_t, X_t^{\uparrow}, X_t^{\downarrow})$ řešení prvního problému, pak*

$$dX_t = B(X_t)dt + S(X)dW_t + dX_t^{\uparrow} - dX_t^{\downarrow},$$

*kde $X_t^{\uparrow}$ roste jen na $[X_t = \underline{x}] = [Z_t = \underline{z}]$ a $X_t^{\downarrow}$ jen na $[X_t = \overline{x}] = [Z_t = \overline{z}]$. Pak $Z_t = f(X_t)$ je opět spojitý semimartingal s diferenciálem, který získame z Itôovy formule s diferenciálem*

$$dZ_t = df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{f''(X_t)d\langle X\rangle_t}{2} = \widetilde{B}(Z_t)dt + \widetilde{S}(Z_t)dW_t + f'(X_t)dX_t^{\uparrow} - f'(X_t)^{\downarrow}.$$

*Protože $X_t^{\uparrow}$ roste pouze na $[X_t = \underline{x}]$ a $X_t^{\downarrow}$ pouze na $[X_t = \overline{x}]$, platí, že $(Z_t, Z_t^{\uparrow}, Z_t^{\downarrow})$ řeší $(\widetilde{B}, \widetilde{S})$-Skorochodův problém s bariérami v bodech $[\underline{z}, \overline{z}]$, kde*

$$\begin{aligned} Z_t^{\uparrow} &:= f'(\underline{x})X_t^{\uparrow} \\ Z_t^{\downarrow} &:= f'(\overline{x})X_t^{\downarrow}. \end{aligned}$$

**Věta 1.9.** (Doléans Equation) Nechť $U$ a $V$ jsou spojité $\mathcal{F}_t$-semimartingaly a nechť $\xi$ je reálná $\mathcal{F}_0$-měřitelná náhodná veličina. Položme

$$Z := \exp\left\{V - V_0 - \frac{1}{2}\langle V\rangle\right\}, \qquad Y := \xi + \int Z^{-1} d(U - \langle U, V\rangle).$$

Potom $X := YZ$ je skoro jistě jednoznačným řešením rovnice

$$X \overset{\text{s.j.}}{=} \xi + U + \int X dV.$$

*Důkaz.* Důkaz tvrzení je možné nalézt v [2] na straně 292. □

# 2. Optimální strategie pro obchodování s akciemi

## 2.1 Nástin problému

Předpokládejme opět, že investor má možnost investovat část svého bohatství do bezrizikového aktiva a část do akcií, tedy do aktiva rizikového. Za každou transakci, tedy každý nákup nebo prodej akcie, platí investor transakční poplatky. Ty vznikají, protože investor prodává každou akcii za nižší (a nakupuje za vyšší) cenu, než je její cena tržní.

Označme $\mathcal{W}_t$ celkové bohatství investora v čase $t$, $\varphi_t$ počet akcií v portfoliu investora a $\psi_t$ množství peněz vložených do bezrizikového aktiva, např. uložených v bance. Pro bohatství platí vyjádření

$$\mathcal{W}_t = \psi_t + \varphi_t S_t. \tag{2.1}$$

Pro jednoduchost budeme uvažovat situaci, kdy se finanční prostředky v bezrizikovém aktivu v průběhu času neúročí. Tento předpoklad lze odstranit (viz Poznámka 2.1).

Cenu akcie v čase $t \geq 0$ lze modelovat pomocí Brownova procesu následujícím způsobem:

$$S_t = s_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t\right\}, \qquad s_0 > 0, \tag{2.2}$$

jedná se tedy o hodnotu s náhodnými multiplikativními fluktuacemi v ceně. Zde $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma > 0$ jsou konstanty, které vyjadřují míru návratnosti a volatilitu ceny.

Jak už bylo řečeno v předchozí kapitole, cílem investora je maximalizovat asymptotickou míru geometrického růstu portfolia (na základě tzv. Kellyho kritéria).

**Poznámka 2.1.** *V práci budeme uvažovat nulovou diskontní sazbu $\delta$. V případě, že $\delta \neq 0$ bude pevná deterministická úroková míra, pak je možné situaci řešit následujícím způsobem. Označme $\ddot{S}_t$ diskontovanou cenu akcie, tedy*

$$\ddot{S}_t = e^{-\delta t} S_t = s_0 \exp\left\{\left(\mu - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t\right\};$$

*pak*

$$d\ddot{S}_t = \ddot{S}_t \left(\ddot{\mu} dt + \sigma dW_t\right), \qquad kde \qquad \ddot{\mu} = \mu - \delta.$$

*Pro bohatství investora*[1] *v situaci zahrnující nenulovou diskontní sazbu platí*

$$\ddot{\mathcal{W}}_t = e^{-\delta t}\mathcal{W}_t \qquad a \qquad d\ddot{\mathcal{W}}_t = \ddot{S}_t \varphi_t \left(\ddot{\mu} dt + \sigma dW_t\right),$$

*a tedy*

$$\frac{1}{t}\log \ddot{\mathcal{W}}_t = -\delta + \frac{1}{t}\log \mathcal{W}_t.$$

*Maximalizujeme-li* $\limsup \frac{1}{t}\log \mathcal{W}_t$, *pak současně maximalizujeme i* $\limsup \frac{1}{t}\log \ddot{\mathcal{W}}_t$ *pro $t \to \infty$; budeme-li řešit situaci s nenulovou diskontní sazbou $\delta$, pak stačí uvažovat $\ddot{\mu}$ místo $\mu$.*

[1]Odvození tvaru bohatství investora je uvedeno v následující části.

## 2.2 Řízení portfolia bez transakčních nákladů

Nejprve odvodíme optimální chování investora na trhu s akcií v případě, že neexistují transakční náklady. Uvažujme strategii $(\varphi_t, \psi_t)$ takovou, že odpovídající bohatství (2.1) je neustále kladné. Označme

$$\pi_t = \frac{\varphi_t S_t}{\mathcal{W}_t} = \frac{\varphi_t S_t}{\psi_t + \varphi_t S_t} \tag{2.3}$$

jako poměr bohatství investora vloženého do akcií k jeho celkovému bohatství. V celé práci se poměr $\pi_t$ bude pohybovat v intervalu $(0, 1)$. Nebudeme uvažovat případ $\pi_t = 0$, tedy situaci, kdy investor uchovává veškeré své prostředky v bezrizikovém aktivu, nebo $\pi_t = 1$, což znamená, že investor investoval celé bohatství do akcií.

Protože finanční prostředky vložené na bankovní účet se neúročí, pro celkové bohatství investora platí rovnost

$$d\mathcal{W}_t = \varphi_t dS_t, \tag{2.4}$$

to znamená, že jediná změna v bohatství investora může nastat díky obchodování s akciemi. Použitím Itôovy formule dostáváme s pomocí (2.2) $dS_t$. Podrobnější výpočet je proveden v Appendixu, výsledkem je

$$dS_t = S_t \left(\mu dt + \sigma dW_t\right). \tag{2.5}$$

Dosadíme-li do (2.4), dostaneme

$$d\mathcal{W}_t = \varphi_t S_t (\mu dt + \sigma dW_t). \tag{2.6}$$

Uvedenou rovnici lze s využitím vztahu $\pi_t = \frac{\varphi_t S_t}{\mathcal{W}_t}$ přepsat jako

$$d\mathcal{W}_t = \pi_t \mathcal{W}_t (\mu dt + \sigma dW_t). \tag{2.7}$$

Řešení rovnice (2.7) získáme opět aplikací Itôovy formule[2]; výsledkem je bohatství ve tvaru

$$\mathcal{W}_t \overset{\text{s.j.}}{=} \mathcal{W}_0 \exp\Big\{ \int_0^t (\mu\pi_s - \frac{1}{2}\sigma^2\pi_s^2) ds + \int_0^t \sigma\pi_s dW_s \Big\}. \tag{2.8}$$

Označme

$$\theta = \frac{\mu}{\sigma^2} \qquad \text{a} \qquad \rho = \theta - \frac{1}{2}. \tag{2.9}$$

V další části ukážeme, že pro maximalizaci míry návratnosti je nutné, aby pro podíl $\pi_t$ bohatství investora vloženého do akcií platilo $\pi_t = \theta$.

## 2.3 Řízení portfolia s transakčními náklady

Nyní budeme uvažovat nákup a prodej akcií s transakčními poplatky. Tyto náklady tvoří určitý (konstatní) podíl z celkové ceny obchodovaného aktiva, pro nákup

[2]Nástin odvození je uveden v Appendixu.

se jedná o $\lambda^\uparrow \in (0,\infty)$ a pro prodej o $\lambda^\downarrow \in (0,1)$. Pomocí těchto poměrů lze jednoduše zapsat cenu akcie v případě nákupu, resp. prodeje jako

$$\overline{S}_t = (1+\lambda^\uparrow)S_t \qquad \text{resp.} \qquad \underline{S}_t = (1-\lambda^\downarrow)S_t. \tag{2.10}$$

Označme dále $\varphi_t^\uparrow$ jako počet akcií koupených do okamžiku $t$ a $\varphi_t^\downarrow$ počet akcií prodaných do okamžiku $t$. Pak můžeme psát

$$\varphi_t = \varphi_0 + \varphi_t^\uparrow - \varphi_t^\downarrow, \tag{2.11}$$

kde $\varphi_0$ je počet akcií na počátku, a tedy $\varphi_t$ je změna počtu akcií do času $t$. Předpokládáme, že nedochází k prodeji a nákupu akcií ve stejný časový okamžik. Pak (2.11) představuje minimální rozklad na neklesající procesy startující z nuly.

**Poznámka 2.2.** Nyní můžeme určit, v jakém intervalu se musí pohybovat poměr bohatství vloženého do akcií, aby investor mohl odejít z trhu s kladným zůstatkem. Jsme schopní zapsat, jak se změní bohatství investora při transakci v důsledku placení transakčních nákladů. Nechť $\triangle\varphi_t^\downarrow$, resp. $\triangle\varphi_t^\uparrow$ označuje počet akcií prodaných, resp. nakoupených v $t$, pak změna bohatství investora v důsledku transakčních nákladů je

$$\triangle\mathcal{W}_t = -\lambda^\downarrow S_t \triangle\varphi_t^\downarrow,$$

pokud investor prodává akcie, a

$$\triangle\mathcal{W}_t = -\lambda^\uparrow S_t \triangle\varphi_t^\uparrow,$$

pokud je nakupuje. $\triangle\mathcal{W}_t$ je vždy záporné, protože bohatství investora při nákupu i prodeji klesne o transakční poplatky.

Hodnota $\mathcal{W}_t + \lambda^\uparrow S_t\varphi_t$ pro nákup, resp. $\mathcal{W}_t - \lambda^\downarrow S_t\varphi_t$ pro prodej, je stejná před i po transakci. Ukážeme tuto skutečnost nejprve pro případ nákupu akcií, následně pro prodej.

$$\triangle(\mathcal{W}_t + \lambda^\uparrow S_t\varphi_t) = \triangle\mathcal{W}_t + \lambda^\uparrow S_t\triangle\varphi_t = \triangle\mathcal{W}_t + \lambda^\uparrow S_t\triangle\varphi_t^\uparrow = 0.$$

Poslední uvedenou rovnost dostaneme, když za $\triangle\mathcal{W}_t$ dosadíme tuto hodnotu uvedenou pro nákup akcie. $\triangle\varphi_t = \triangle\varphi_t^\uparrow$, protože v daný časový okamžik dochází pouze k nákupu akcií.

Analogicky je možné odvodit $\triangle(\mathcal{W}_t - \lambda^\downarrow S_t\varphi_t) = 0$ i pro prodej:

$$\triangle(\mathcal{W}_t - \lambda^\downarrow S_t\varphi_t) = \triangle\mathcal{W}_t - \lambda^\downarrow S_t\triangle\varphi_t = \triangle\mathcal{W}_t - \lambda^\downarrow S_t(-\triangle\varphi_t^\downarrow) = 0.$$

$\triangle\varphi_t = -\triangle\varphi_t^\downarrow$, protože v daný časový okamžik dochází k prodeji akcií a tudíž klesá jejich počet držený investorem.

Nyní ukážeme, že poměr bohatství drženého v akciích $\pi_t$ musí být v intervalu

$$\pi_t \in \left(-\frac{1}{\lambda^\uparrow}, \frac{1}{\lambda^\downarrow}\right), \qquad t \geq 0. \tag{2.12}$$

Jinak by platilo následující: pokud by $\pi_t \leq -\frac{1}{\lambda^\uparrow}$, pak při nákupu by

$$\triangle\mathcal{W}_t(1+\lambda^\uparrow\pi_t) \leq \triangle\mathcal{W}_t\left(1+\lambda^\uparrow\left(-\frac{1}{\lambda^\uparrow}\right)\right) = 0,$$

což znamená, že by investor zbankrotoval. Analogicky, bude-li $\pi_t \geq \frac{1}{\lambda^\downarrow}$, můžeme pro prodej akcií psát

$$\triangle\mathcal{W}_t(1-\lambda^\downarrow\pi_t) \leq \triangle\mathcal{W}_t\left(1-\lambda^\downarrow\left(\frac{1}{\lambda^\downarrow}\right)\right) = 0.$$

Bude-li tedy investor držet poměr bohatství vloženého do akcií v tomto intervalu, znamená to, že může z trhu odejít s kladným zůstatkem.

## 2.4 Stínové ceny

Naším cílem je převést situaci, kdy máme cenu akcie $S_t$ a transakční poplatky dané $\lambda^\uparrow$, $\lambda^\downarrow$, na případ bez transakčních poplatků. Bude se jednat o situaci, kdy cena $S_t$ bude nahrazena *stínovou cenou* $\widetilde{S}_t$.

Jak je uvedeno ve vztahu (2.2), cenu akcie v čase $t$ lze zapsat pomocí Brownova pohybu. Předpokládejme nyní, že lze stínovou cenu $\widetilde{S}_t$ zapsat jako

$$\widetilde{S}_t = S_t \exp\{\widetilde{C}_t\}, \tag{2.13}$$

kde $\widetilde{C}_t$ je Itôův proces. Víme, že $\underline{S}_t \leq \widetilde{S}_t \leq \overline{S}_t$ a současně platí (2.10). Potom musí platit

$$\begin{aligned}(1-\lambda^\downarrow)S_t \leq S_t \exp\{\widetilde{C}_t\} &\leq (1+\lambda^\uparrow)S_t \\ 1-\lambda^\downarrow \leq \exp\{\widetilde{C}_t\} &\leq 1+\lambda^\uparrow \\ \log(1-\lambda^\downarrow) \leq \widetilde{C}_t &\leq \log(1+\lambda^\uparrow).\end{aligned} \tag{2.14}$$

**Lemma 2.3.** *Nechť $\mathcal{W}_t$, resp. $\widetilde{\mathcal{W}_t}$ je nominální, resp. stínové bohatství investora, odpovídající optimální strategii a nechť platí*

$$\mathcal{W}_t^\uparrow = \varphi_t\overline{S}_t + \psi_t > 0, \qquad \mathcal{W}_t^\downarrow = \varphi_t\underline{S}_t + \psi_t > 0, \qquad t \geq 0. \tag{2.15}$$

*Pak $\widetilde{\mathcal{W}_t} > 0$ platí pro každé $t \geq 0$. Pokud navíc $\pi_t \in [\alpha,\beta] \subseteq (-1/\lambda^\uparrow, 1/\lambda^\downarrow)$, potom $\log\frac{\widetilde{\mathcal{W}_t}}{\mathcal{W}_t}$ je omezený proces. Z toho plyne, že*

$$\frac{1}{t}E\log\frac{\widetilde{\mathcal{W}_t}}{\mathcal{W}_t} \to 0 \qquad a \qquad \frac{1}{t}\log\frac{\widetilde{\mathcal{W}_t}}{\mathcal{W}_t} \overset{\text{s.j.}}{\to} 0, \qquad pro \qquad t\to\infty.$$

**Poznámka 2.4.** *Předpokládáme, že nominální bohatství je kladné a nominální pozice je v intervalu $\left(-\frac{1}{\lambda^\uparrow}, \frac{1}{\lambda^\downarrow}\right)$. Podmínka (2.15) je postačující podmínkou pro to, aby jakékoliv stínové bohatství odpovídající strategii $(\varphi_t, \psi_t)$ bylo kladné.*

*Důkaz.* (Lemmatu 2.3)

Protože platí $\mathcal{W}_t^\uparrow = \mathcal{W}_t(1+\lambda^\uparrow\pi_t) > 0$ a $\mathcal{W}_t^\downarrow = \mathcal{W}_t(1-\lambda^\downarrow\pi_t) > 0$, dostáváme

$$\min\{1+\lambda^\uparrow\pi_t, 1-\lambda^\downarrow\pi_t\} \leq \frac{\mathcal{W}_t^\uparrow \wedge \mathcal{W}_t^\downarrow}{\mathcal{W}_t} \leq \frac{\widetilde{\mathcal{W}_t}}{\mathcal{W}_t} \leq \frac{\mathcal{W}_t^\uparrow \vee \mathcal{W}_t^\downarrow}{\mathcal{W}_t} = \max\{1+\lambda^\uparrow\pi_t, 1-\lambda^\downarrow\pi_t\}.$$

Z omezenosti hodnot $\pi_t$ plyne závěr lemmatu.

$\square$

**Poznámka 2.5.** *Stínové transakční poplatky můžeme také definovat následujícím způsobem:*

$$\widetilde{\lambda}_t^{\uparrow} = \frac{\overline{S}_t}{\widetilde{S}_t} - 1 \geq 0, \qquad \widetilde{\lambda}_t^{\downarrow} = 1 - \frac{\underline{S}_t}{\widetilde{S}_t} \geq 0, \tag{2.16}$$

*na základě (2.10). Dále se budeme zabývat optimální strategií odpovídající stínové ceně $\widetilde{S}_t$ splňující*

$$\widetilde{\lambda}_t^{\uparrow} d\varphi_t^{\uparrow} = 0 \qquad \widetilde{\lambda}_t^{\downarrow} d\varphi_t^{\downarrow} = 0. \tag{2.17}$$

*Výhodou této strategie je skutečnost, že zde není třeba při nákupu a prodeji uvažovat žádné transakční poplatky, neboť v tomto případě platí*

$$d\widetilde{C}_t = (\overline{S}_t - \widetilde{S}_t)d\varphi_t^{\uparrow} + (\widetilde{S}_t - \underline{S}_t)d\varphi_t^{\downarrow} = \widetilde{S}_t(\widetilde{\lambda}_t^{\uparrow} d\varphi_t^{\uparrow} + \widetilde{\lambda}_t^{\downarrow} d\varphi_t^{\downarrow}) = 0.$$

**Tvrzení 2.6.** *Uvažujme strategii $(\varphi_t, \psi_t)$ splňující (2.15) a stínovou cenu $\widetilde{S}_t$, která splňuje (2.17) a*

$$d\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_t \left(\widetilde{\sigma}_t^2 \widetilde{\pi}_t dt + \widetilde{\sigma}_t dW_t\right) \tag{2.18}$$

*pro nějaký omezený, progresivně měřitelný proces $\widetilde{\sigma}_t$. Dále nechť $(\bar{\varphi}_t, \bar{\psi}_t)$ je libovolná jiná strategie splňující (2.15) se stínovým bohatstvím*

$$\bar{\mathcal{W}}_t = \bar{\varphi}_t \widetilde{S}_t + \bar{\psi}_t > 0, \quad t \geq 0.$$

*Potom máme následující asymptotické srovnání stínového bohatství*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \frac{\bar{\mathcal{W}}_t}{\widetilde{\mathcal{W}}_t} \overset{\text{s.j.}}{\leq} 0, \qquad a \qquad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} E \log \frac{\bar{\mathcal{W}}_t}{\widetilde{\mathcal{W}}_t} \leq 0. \tag{2.19}$$

**Poznámka 2.7.** *V následujícím důkazu, popřípadně i dále, budeme využívat následující značení zkracující formule. Budeme místo (2.18) psát*

$$d\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_t d\widetilde{F}_t,$$

*kde $\widetilde{F}_t$ označuje spojitý semimartingal s diferenciálem*

$$d\widetilde{F}_t = \widetilde{\sigma}_t^2 \widetilde{\pi}_t dt + \widetilde{\sigma}_t dW_t.$$

*Důkaz.* Protože platí $d\widetilde{C}_t = 0$, dostáváme

$$\widetilde{W_t} = \varphi_t d\widetilde{S}_t - d\widetilde{C}_t = \varphi_t \widetilde{S}_t d\widetilde{F}_t = \widetilde{\pi}_t \widetilde{\mathcal{W}}_t d\widetilde{F}_t,$$

a tak $\widetilde{\mathcal{W}_t} = \widetilde{\mathcal{W}_0} \widetilde{\mathcal{E}}_t$, kde

$$\widetilde{\mathcal{E}}_t = \exp\left\{ \int_0^t (\widetilde{\pi}_s d\widetilde{F}_s - \frac{1}{2} \widetilde{\pi}_s^2 \widetilde{\sigma}_s^2 ds) \right\}.$$

Následně celkové transakční náklady, které přísluší ke strategii $(\bar{\varphi}_t, \bar{\psi}_t)$, označené $\bar{C}_t$, splňují

$$d\bar{C}_t = (\overline{S}_t - \widetilde{S}_t)d\bar{\varphi}_t^{\uparrow} + (\widetilde{S}_t - \underline{S}_t)d\bar{\varphi}_t^{\downarrow} = \widetilde{S}_t(\widetilde{\lambda}_t^{\uparrow} d\bar{\varphi}_t^{\uparrow} + \widetilde{\lambda}_t^{\downarrow} d\bar{\varphi}_t^{\downarrow}) \geq 0.$$

Nyní podobně jako v případě strategie $(\varphi_t, \psi_t)$ odvodíme velikost stínového bohatství tentokrát pro strategii $\left(\bar{\varphi}_t, \bar{\psi}_t\right)$, která však již čelí výše zmíněným ne nutně nenulovým transakčním poplatkům. Nejprve sestavíme Doléans SDE pro bohatství v následujícím tvaru

$$d\bar{\mathcal{W}}_t = \bar{\varphi}_t d\widetilde{S}_t - d\bar{C}_t = \bar{\varphi}_t \widetilde{S}_t d\widetilde{F}_t - d\bar{C}_t = \bar{\pi}_t \widetilde{\mathcal{W}}_t d\widetilde{F}_t - d\bar{C}_t.$$

Zde $\bar{\pi}_t = \frac{\bar{\varphi}_t \widetilde{S}_t}{\widetilde{\mathcal{W}}_t}$.

Podle Věty 1.9 má Doléans SDE právě jedno řešení jednoznačné až na nerozlišitelnost, které je tvaru

$$\bar{\mathcal{W}}_t = \bar{\mathcal{E}}_t \cdot (\bar{\mathcal{W}}_0 - \int_0^t \widetilde{\mathcal{E}}_s^{-1} d\bar{C}_t), \qquad \text{kde} \qquad \bar{\mathcal{E}}_t = \exp\{\int_0^t (\bar{\pi}_s d\widetilde{F}_s - \frac{1}{2}\bar{\pi}_s^2 \widetilde{\sigma}_s^2 ds)\}.$$

Protože $\bar{C}_t$ je neklesající proces, získáme $\bar{\mathcal{W}}_t \leq \bar{\mathcal{E}}_t \bar{\mathcal{W}}_0$ a

$$\log \frac{\bar{\mathcal{W}}_t}{\widetilde{\mathcal{W}}_t} \leq \log \frac{\bar{\mathcal{W}}_0}{\widetilde{\mathcal{W}}_0} + L_t - \frac{1}{2}\langle L \rangle_t, \qquad \text{kde} \qquad L_t = \int_0^t \widetilde{\sigma}_s (\bar{\pi}_s - \widetilde{\pi}_s) dW_s,$$

protože $\frac{\bar{\mathcal{W}}_t}{\widetilde{\mathcal{W}}_t} = \frac{\bar{\mathcal{W}}_0}{\widetilde{\mathcal{W}}_0}\frac{\bar{\mathcal{E}}_t}{\widetilde{\mathcal{E}}_t}$ a

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\mathcal{E}}_t}{\widetilde{\mathcal{E}}_t} &= \exp\left\{ \int_0^t (\bar{\pi}_s - \widetilde{\pi}_s)\, d\widetilde{F}_s - \tfrac{1}{2}\int_0^t \widetilde{\sigma}_s^2 \left(\bar{\pi}_s^2 - \widetilde{\pi}_s^2\right) ds \right\} \\ &= \exp\left\{ -\tfrac{1}{2}\int_0^t \widetilde{\sigma}_s^2 \left(\bar{\pi}_s - \widetilde{\pi}_s\right)^2 ds + \int_0^t \widetilde{\sigma}_s \left(\bar{\pi}_s - \widetilde{\pi}_s\right) dW_s \right\}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Jelikož $\widetilde{\sigma}_t, \widetilde{\pi}_t, \bar{\pi}_t$ jsou také omezené procesy, platí, že $L_t$ je lokální martingal startující v $L_0 = 0$ s K-lipschitzovskou spojitou kvadratickou variací $\langle L \rangle_t$, $K \in (0, \infty)$. Potom $L_t$ je martingal a na základě Věty 1.6 platí

$$EL_t = 0 \quad \text{a} \quad \frac{1}{t}L_t \overset{\text{s.j.}}{\to} 0 \quad \text{pro} \quad t \to \infty.$$

Protože $\log(\frac{\widetilde{\mathcal{W}}_0}{\bar{\mathcal{W}}_0})$ je omezená náhodná veličina, dostáváme

$$\frac{1}{t} E \log \frac{\widetilde{\mathcal{W}}_t}{\bar{\mathcal{W}}_t} \leq \frac{1}{t} E \log \frac{\widetilde{\mathcal{W}}_0}{\bar{\mathcal{W}}_0} \to 0, \qquad \frac{1}{t} \log \frac{\widetilde{\mathcal{W}}_t}{\bar{\mathcal{W}}_t} \leq \frac{1}{t} \log \frac{\widetilde{\mathcal{W}}_0}{\bar{\mathcal{W}}_0} + \frac{1}{t} L_t \overset{\text{s.j.}}{\to} 0.$$

□

**Tvrzení 2.8.** *Je-li $\widetilde{C}_t$ Itôův proces s diferenciálem*

$$d\widetilde{C}_t = \widetilde{\mu}_C(\widetilde{C}_t)dt + \widetilde{\sigma}_C(\widetilde{C}_t)dW_t, \tag{2.21}$$

*kde $\widetilde{\mu}_C$ a $\widetilde{\sigma}_C$ jsou omezené borelovské funkce na $\left[\log\left(1 - \lambda^{\downarrow}\right), \log\left(1 + \lambda^{\uparrow}\right)\right]$. Pak stínová cena $\widetilde{S}_t$ je také Itôův proces s diferenciálem*

$$d\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_t \left[\widehat{\mu}(\widetilde{C}_t)dt + \widehat{\sigma}(\widetilde{C}_t)dW_t\right], \tag{2.22}$$

*kde*

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}(x) &= r + \widetilde{\mu}_C(x) + \tfrac{1}{2}\left(\sigma + \widetilde{\sigma}_C(x)\right)^2, \\ \widehat{\sigma}(x) &= \sigma + \widetilde{\sigma}_C(x). \end{aligned} \tag{2.23}$$

**Poznámka 2.9.** *Pro důkaz uvedeného tvrzení ještě zavedeme značení*

$$F_t = rt + \sigma W_t, \qquad \text{kde} \qquad r = \rho\sigma^2. \tag{2.24}$$

*Důkaz.* Protože $S_t = S_0 \exp\{F_t\}$, můžeme stínovou cenu přepsat následovně:

$$\widetilde{S}_t = S_0 \exp\{F_t + \widetilde{C}_t\}. \tag{2.25}$$

Z Itôovy formule plyne, že

$$d\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_t d(F_t + \widetilde{C}_t) + \frac{1}{2}\widetilde{S}_t d\left\langle F + C\right\rangle_t. \tag{2.26}$$

Položme

$$M_t = F_t + \widetilde{C}_t + \frac{1}{2}\left\langle F + C\right\rangle_t. \tag{2.27}$$

Z (2.24) plyne, že $dF_t = \sigma dW_t + rdt$. Potom platí, že

$$d(F_t + \widetilde{C}_t) = dF_t + d\widetilde{C}_t = \left(r + \widetilde{\mu}_C(\widetilde{C}_t)\right)dt + \left(\sigma + \widetilde{\sigma}_C(\widetilde{C}_t)\right)dW_t \tag{2.28}$$

a

$$d\left\langle F + C\right\rangle_t = \left(\sigma + \widetilde{\sigma}_C(\widetilde{C}_t)\right)^2 dt. \tag{2.29}$$

Dosazením do (2.27) dostaneme

$$\begin{aligned} dM_t &= \left(r + \widetilde{\mu}_C(\widetilde{C}_t)\right)dt + \left(\sigma + \widetilde{\sigma}_C(\widetilde{C}_t)\right)dW_t + \tfrac{1}{2}\left(\sigma + \widetilde{\sigma}_C(\widetilde{C}_t)\right)^2 dt \\ &= \left[r + \widetilde{\mu}_C(\widetilde{C}_t) + \tfrac{1}{2}\left(\sigma + \widetilde{\sigma}_C(\widetilde{C}_t)\right)^2\right]dt + \left(\sigma + \widetilde{\sigma}_C(\widetilde{C}_t)\right)dW_t. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Z (2.26) plyne

$$\begin{aligned} d\widetilde{S}_t &= \widetilde{S}_t\left[\left(r + \widetilde{\mu}_C(\widetilde{C}_t) + \tfrac{1}{2}\left(\sigma + \widetilde{\sigma}_C(\widetilde{C}_t)\right)^2\right)dt + \left(\sigma + \widetilde{\sigma}_C(\widetilde{C}_t)\right)dW_t\right] \\ &= \widetilde{S}_t\left[\widehat{\mu}(\widetilde{C}_t)dt + \widehat{\sigma}(\widetilde{C}_t)dW_t\right]. \end{aligned} \tag{2.31}$$

□

Porovnáme-li požadavek (2.18) s (2.22), pak platí

$$\widetilde{\pi}_t = \frac{\widehat{\mu}(\widetilde{C}_t)}{\widehat{\sigma}^2(\widetilde{C}_t)} = \frac{1}{2} + \frac{r + \widetilde{\mu}_C(\widetilde{C}_t)}{\left(\sigma + \widetilde{\sigma}_C(\widetilde{C}_t)\right)^2}. \tag{2.32}$$

Nyní potřebujeme vyjádřit funkce $\widetilde{\mu}_C$ a $\widetilde{\sigma}_C$. Opět předpokládejme, že $\widetilde{\pi} \in (0,1)$. Položme

$$\widetilde{\beta}_t = \log\left(\frac{\widetilde{\pi}_t}{1 - \widetilde{\pi}_t}\right); \tag{2.33}$$

pak platí

$$\widetilde{\beta}_t = \log\left(\frac{\varphi_t \widetilde{S}_t}{\psi_t}\right) = \log\varphi_t + \log\widetilde{S}_t - \log\psi_t. \tag{2.34}$$

Chce-li investor obchodovat podle optimální strategie, pak nakupuje jen tehdy, když se stínová cena rovná ceně nabídky a prodává, pokud se rovná ceně poptávky. To znamená, že dokud stínová cena nedosáhne jedné z těchto hodnot, investor neprovádí žádné transakce. Skutečnost, že se stínová cena rovná ceně nabídky, resp. ceně poptávky, lze vyjádřit následovně:

$$\widetilde{S}_t = \overline{S}_t, \qquad \text{resp.} \qquad \widetilde{S}_t = \underline{S}_t. \tag{2.35}$$

Uvažujme $C^{\uparrow}, C^{\downarrow} \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\overline{S}_t = S_t \exp\{C^{\uparrow}\}, \tag{2.36}$$

$$\underline{S}_t = S_t \exp\{C^{\downarrow}\}. \tag{2.37}$$

Ze vztahu (2.14) plyne, že

$$\begin{array}{rcl} C^{\uparrow} & = & \log\left(1+\lambda^{\uparrow}\right) \\ C^{\downarrow} & = & \log\left(1-\lambda^{\downarrow}\right). \end{array} \tag{2.38}$$

Označme rozdíl mezi $C^{\uparrow}$ a $C^{\downarrow}$ jako $\lambda$:

$$\lambda = C^{\uparrow} - C^{\downarrow}. \tag{2.39}$$

Potom můžeme (2.38) vyjádřit jako

$$\lambda = \log\left(\frac{1+\lambda^{\uparrow}}{1-\lambda^{\downarrow}}\right). \tag{2.40}$$

Nyní označme

$$\tau = \inf\left\{t > 0, \widetilde{C}_t \in \{C^{\downarrow}, C^{\uparrow}\}\right\}; \tag{2.41}$$

lze tedy říct, že investor neobchoduje do času $\tau$ a tudíž $\varphi_t$ je konstantní na $[0, \tau)$. Protože platí $d\psi_t = \underline{S_t} d\varphi_t^{\downarrow} - \overline{S_t} d\varphi_t^{\uparrow}$, pak také $d\log(\psi_t) = 0$ do času $\tau$. S využitím rovnice (2.34) získáme následující vztah pro $\beta_t$:

$$d\beta_t = \widehat{\sigma}(\widetilde{C}_t)dW_t + \left(\widehat{\mu}(\widetilde{C}_t) - \frac{1}{2}\widehat{\sigma}^2(\widetilde{C}_t)\right)dt \quad \text{do času } \tau. \tag{2.42}$$

## 2.5 Funkce $g$

**Poznámka 2.10.** *Nechť $g \in \mathcal{C}^2\left[\underline{\beta}, \overline{\beta}\right]$ je spojitá funkce, splňující obyčejnou diferenciální rovnici*

$$g''(y) = \left(-2\theta + \frac{2}{1+e^{-y}}\right) + \left(4\theta - \frac{2}{1+e^{-y}} - 1\right) g'(y) + (1-2\theta)\left(g'(y)\right)^2, \tag{2.43}$$

*s okrajovými podmínkami*

$$\begin{array}{ll} g\left(\underline{\beta}\right) = C^{\uparrow}, & g\left(\overline{\beta}\right) = C^{\downarrow} \\ g'\left(\underline{\beta}\right) = 0, & g'\left(\overline{\beta}\right) = 0. \end{array} \tag{2.44}$$

*Potom předpokládejme, že pomocí Itôva procesu $\widetilde{\beta}_t$ lze vyjádřit proces $\widetilde{C}_t$ jako*

$$\widetilde{C}_t = g(\widetilde{\beta}_t). \tag{2.45}$$

Předtím, než uvedeme následující věty a tvrzení, ještě provedeme variaci proměnných. Nechť $\widetilde{\sigma} : \left[\underline{\beta}, \overline{\beta}\right] \to \mathbb{R}$ a $\widetilde{r} : \left[\underline{\beta}, \overline{\beta}\right] \to \mathbb{R}$ jsou funkce definované předpisem:

$$\begin{aligned} \widetilde{\sigma}(x) &= \widehat{\sigma}(g(x)) \\ \widetilde{r}(x) &= \widehat{r}(g(x)), \end{aligned} \tag{2.46}$$

kde

$$\widehat{r}(x) = \widehat{\mu}(x) - \frac{1}{2}\widehat{\sigma}^2(x). \tag{2.47}$$

Potom platí rovnosti

$$\begin{aligned} \widetilde{\sigma}(\widetilde{\beta}_t) &= \widehat{\sigma}(\widetilde{C}_t) \\ \widetilde{r}(\widetilde{\beta}_t) &= \widehat{r}(\widetilde{C}_t) \\ \widetilde{\mu}(\widetilde{\beta}_t) &= \widehat{\mu}(\widetilde{C}_t). \end{aligned} \tag{2.48}$$

**Poznámka 2.11.** *K popisovanému problému lze přistupovat také prostřednictvím Itôova procesu $\widetilde{\theta}_t$, pro který platí*

$$\widetilde{\theta}_t = \frac{\widetilde{\mu}(\widetilde{\beta}_t)}{\widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t)}, \tag{2.49}$$

*a funkce $f \in \mathcal{C}^2\left[\underline{\theta}, \overline{\theta}\right]$, která je řešením obyčejné diferenciální rovnice*

$$x - \frac{1}{2} = \rho\left[1 - x\left(1 - x\right) f'(x)\right]^2 + \frac{1}{2}x^2\left(1 - x\right)^2 f''(x) \tag{2.50}$$

*s počátečními podmínkami*

$$\begin{aligned} f\left(\underline{\theta}\right) = C^{\uparrow}, \quad & f\left(\overline{\theta}\right) = C^{\downarrow} \\ f'\left(\underline{\theta}\right) = 0, \quad & f'\left(\overline{\theta}\right) = 0. \end{aligned} \tag{2.51}$$

*V tomto případě bychom kladli*

$$\widetilde{C}_t = f(\widetilde{\theta}_t). \tag{2.52}$$

*Důkaz existence a tvar řešení obyčejné diferenciální rovnice pro funkci $f$ je uveden v Appendixu.*

Pro důkaz následujícího tvrzení definujeme logaritmickou derivaci. Odvození řešení rovnice (2.56) je uvedené v Appendixu.

**Definice 2.1.** *Nechť $f(y)$ je funkce na $\mathbb{R}$. Potom* logaritmickou derivaci *funkce $f$ definujeme jako*

$$\frac{d\log}{dy} f(y) = \frac{\frac{d}{dy} f(y)}{f(y)}. \tag{2.53}$$

**Tvrzení 2.12.** *Označme*

$$g(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{2\rho}\log\left(\frac{\kappa_1}{1+e^{-y}} + \kappa_2\right) & \rho \neq 0, \\ y - K_1\frac{1}{1+e^{-y}} + K_2 & \rho = 0 \end{cases} \tag{2.54}$$

*a*

$$h(y) = \kappa_1\frac{e^{2\rho y}}{1 + e^{-y}} + \kappa_2 e^{2\rho y}, \tag{2.55}$$

*kde $\kappa_1$, $\kappa_2$, $K_1$ a $K_2$ jsou konstanty.*

*Potom $g(y)$ řeší obyčejnou diferenciální rovnici*

$$g''(y) = \left(-2\theta + \frac{2}{1+e^{-y}}\right) + \left(4\theta - \frac{2}{1+e^{-y}} - 1\right) g'(y) + (1-2\theta)\left(g'(y)\right)^2 \quad (2.56)$$

*a $h(y)$ obyčejnou diferenciální rovnici*

$$h''(y) - \left(4\theta - \frac{2}{1+e^{-y}} - 1\right) h'(y) - 4\rho\left(\frac{1}{1+e^{-y}} - \theta\right) h(y) = 0. \quad (2.57)$$

*Důkaz.* Označme $k_1(y) = \frac{e^{2\rho y}}{1+e^{-y}}$ a $k_2(y) = e^{2\rho y}$. Potom $h(y) = \kappa_1 k_1(y) + \kappa_2 k_2(y)$ a $k_1(y)$ a $k_2(y)$ tvoří fundamentální systém rovnice (2.57), což ověříme za pomoci logaritmické derivace.

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{d}{dy}k_1(y)}{k_1(y)} &= \frac{d}{dy}\log(k_1(y)) \\
&= \frac{d}{dy}\left(2\rho y + \log\left(\tfrac{1}{1+e^{-y}}\right)\right) \\
&= 2\rho + \tfrac{1}{1+e^{y}} \\
\frac{\frac{d^2}{dy^2}k_1(y)}{k_1(y)} &= \left(\tfrac{d\log}{dy}k_1(y)\right)^2 + \tfrac{d}{dy}\tfrac{d\log}{dy}k_1(y) \\
&= \tfrac{(2\rho(1+e^y)+1)^2-e^y}{(1+e^y)^2} \\
\frac{\frac{d}{dy}k_2(y)}{k_2(y)} &= \frac{d}{dy}\log(k_2(y)) \\
&= \frac{d}{dy}(2\rho y) = 2\rho \\
\frac{\frac{d^2}{dy^2}k_1(y)}{k_1(y)} &= \left(\tfrac{d\log}{dy}k_1(y)\right)^2 + \tfrac{d}{dy}\tfrac{d\log}{dy}k_1(y) \\
&= 4\rho^2
\end{aligned} \quad (2.58)$$

Nyní protože se jedná o fundamentální systém rovnice (2.57), musí $k_1(y)$ i $k_2(y)$ tuto rovnici řešit. To ověříme dosazením logaritmických derivací do rovnice (2.57) v následujícím tvaru:

$$\frac{h''(y)}{h(y)} - \left(4\theta - \frac{2}{1+e^{-y}} - 1\right)\frac{h(y)'}{h(y)} - 4\rho\left(\frac{1}{1+e^{-y}} - \theta\right) = 0 \quad (2.59)$$

Následující dosazení ukazuje, že $k_1(y)$ je řešením rovnice (2.57).

$$\begin{aligned}
& \tfrac{(2\rho(1+e^y)+1)^2-e^y}{(1+e^y)^2} - \left(4\theta - \tfrac{2}{1+e^{-y}} - 1\right)\left(2\rho + \tfrac{1}{1+e^y}\right) - 4\rho\left(\tfrac{1}{1+e^{-y}} - \theta\right) \\
= & \tfrac{4\rho^2(1+e^y)^2+4\rho(1+e^y)+1-e^y}{(1+e^y)^2} - \tfrac{1+4\rho}{(1+e^y)} + \tfrac{4\rho-4\rho}{1+e^{-y}} + \tfrac{2}{(1+e^{-y})(1+e^y)} - 2\rho - 8\rho^2 + 2\rho + 4\rho^2 \\
= & \tfrac{-\left(1+e^{-y}\right)(1+e^y)+\left(1+e^{-y}\right)(1-e^y)+2(1+e^y)}{(1+e^{-y})(1+e^y)^2} \\
= & 0
\end{aligned} \quad (2.60)$$

Obdobně lze ukázat, že také $k_2(y)$ řeší (2.57).

$$\begin{aligned}
& 4\rho^2 - \left(4\theta - \tfrac{2}{1+e^{-y}} - 1\right)2\rho - 4\rho\left(\tfrac{1}{1+e^{-y}} - \theta\right) \\
= & 4\rho^2 - 8\rho^2 - 2\rho + 4\rho^2 + 2\rho + \tfrac{4\rho}{1+e^{-y}} - \tfrac{4\rho}{1+e^{-y}} \\
= & 0
\end{aligned} \quad (2.61)$$

Nyní jsme ověřili, že $k_1(y)$ a $k_2(y)$ tvoří fundamentální systém rovnice (2.57), z čehož plyne, že

$$\kappa_1 k_1(y) + \kappa_2 k_2(y)$$

danou rovnici řeší.

Ověření, že $g(y)$ je řešením rovnice (2.56), provedeme zderivováním a dosazením. Nejprve ukážeme pro případ, kdy $\rho \neq 0$. První a druhá derivace $g(y)$ mají následující tvar:

$$\begin{aligned} g'(y) &= 1+\tfrac{1}{2\rho}\tfrac{1}{(1+e^y)(1+\frac{\kappa_2}{\kappa_1}(1+e^{-y}))} \\ g''(y) &= \tfrac{1}{2\rho}\tfrac{\kappa_2}{\kappa_1}\tfrac{e^{-y}}{(1+e^y)\left(1+\frac{\kappa_2}{\kappa_1}(1+e^{-y})\right)^2} - \tfrac{1}{2\rho}\tfrac{e^y}{(1+e^y)^2\left(1+\frac{\kappa_2}{\kappa_1}(1+e^{-y})\right)} \end{aligned} \tag{2.62}$$

Jejich dosazením do (2.56) opět ověříme, že $g(y)$ v uvedeném tvaru skutečně danou ODR řeší.

$$\begin{aligned} & \left(-2\theta+\tfrac{2}{1+e^{-y}}\right)+\left(4\theta-\tfrac{2}{1+e^{-y}}-1\right)g'(y)+(1-2\theta)\left(g'(y)\right)^2 \\ = & \left(-2\theta+\tfrac{2}{1+e^{-y}}\right)+\left(4\theta-\tfrac{2}{1+e^{-y}}-1\right)\left(1+\tfrac{1}{2\rho}\tfrac{1}{(1+e^y)(1+\frac{\kappa_2}{\kappa_1}(1+e^{-y}))}\right)+ \\ + & (1-2\theta)\left(1+\tfrac{1}{\rho}\tfrac{1}{(1+e^y)(1+\frac{\kappa_2}{\kappa_1}(1+e^{-y}))}+\tfrac{1}{4\rho^2}\tfrac{1}{(1+e^y)^2(1+\frac{\kappa_2}{\kappa_1}(1+e^{-y}))^2}\right) \\ = & \tfrac{1}{2\rho}\tfrac{1}{1+e^y}\tfrac{1}{1+\frac{\kappa_2}{\kappa_1}(1+e^{-y})}\left(1-\tfrac{2}{1+e^{-y}}-\tfrac{1}{1+e^y}\tfrac{1}{1+\frac{\kappa_2}{\kappa_1}(1+e^{-y})}\right) \\ = & g''(y)+\tfrac{1}{2\rho}\tfrac{1}{1+e^y}\tfrac{1}{1+\frac{\kappa_2}{\kappa_1}(1+e^{-y})}\left(1-\tfrac{1}{1+e^{-y}}-\tfrac{1}{1+e^y}\tfrac{1}{1+\frac{\kappa_2}{\kappa_1}(1+e^{-y})}-\tfrac{\kappa_2}{\kappa_1}\tfrac{e^{-y}}{1+\frac{\kappa_2}{\kappa_1}(1+e^{-y})}\right) \end{aligned} \tag{2.63}$$

Nyní stačí ukázat, že

$$1-\frac{1}{1+e^{-y}}-\frac{1}{1+e^y}\frac{1}{1+\frac{\kappa_2}{\kappa_1}(1+e^{-y})}-\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\frac{e^{-y}}{1+\frac{\kappa_2}{\kappa_1}(1+e^{-y})}=0,$$

což získáme úpravou předchozího výrazu:

$$\frac{(1+e^y)\left(1+\frac{\kappa_2}{\kappa_1}(1+e^{-y})\right)-e^y\left(1+\frac{\kappa_2}{\kappa_1}(1+e^{-y})\right)-1-\frac{\kappa_2}{\kappa_1}e^{-y}(1+e^y)}{(1+e^y)\left(1+\frac{\kappa_2}{\kappa_1}(1+e^{-y})\right)}=0. \tag{2.64}$$

Nyní ukážeme, že $g(y)$ řeší rovnici (2.56) také pro $\rho = 0$. V tomto případě je $\theta = \frac{1}{2}$ a rovnice (2.54) má tvar

$$g''(y)=\left(\frac{2}{1+e^{-y}}-1\right)+\left(1-\frac{2}{1+e^{-y}}\right)g'(y). \tag{2.65}$$

Zderivováním $g(y)$ dostáváme

$$\begin{aligned} g'(y) &= 1-K_1\tfrac{1}{2+e^y+e^{-y}} \\ g''(y) &= K_1\tfrac{e^y-e^{-y}}{(2+e^y+e^{-y})^2}. \end{aligned} \tag{2.66}$$

Nyní derivace dosadíme do (2.65):

$$\begin{aligned} g''(y) &= \left(\tfrac{2}{1+e^{-y}}-1\right)+\left(1-\tfrac{2}{1+e^{-y}}\right)\left(1-K_1\tfrac{1}{2+e^y+e^{-y}}\right) \\ &= K_1\tfrac{1}{2+e^y+e^{-y}}\left[-1+\tfrac{2}{1+e^{-y}}\right] \\ &= K_1\tfrac{e^y-e^{-y}}{(2+e^y+e^{-y})^2}. \end{aligned} \tag{2.67}$$

Tím je tvrzení dokázáno. □

**Věta 2.13.** *Existuje řešení rovnice*

$$g''(y) = \left(-2\theta + \frac{2}{1+e^{-y}}\right) + \left(4\theta - \frac{2}{1+e^{-y}} - 1\right) g'(y) + (1-2\theta)\left(g'(y)\right)^2 \quad (2.68)$$

*ve tvaru*

$$g(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{2\rho}\log\left(\frac{\kappa_1}{1+e^{-y}} + \kappa_2\right) & \rho \neq 0, \\ y - K_1 \frac{1}{1+e^{-y}} + K_2 & \rho = 0, \end{cases} \quad (2.69)$$

*kde $\kappa_1$, $\kappa_2$, $K_1$ a $K_2$ jsou konstanty, splňující počáteční podmínky*

$$g(\underline{\beta}) = C^{\uparrow}, \qquad g(\overline{\beta}) = C^{\downarrow}, \quad (2.70)$$

$$g'(\underline{\beta}) = 0, \qquad g'(\overline{\beta}) = 0. \quad (2.71)$$

*Navíc platí $g'(y) < 0$ pro $y \in (\underline{\beta}, \overline{\beta})$, a tedy funkce $g$ je na intervalu $(\underline{\beta}, \overline{\beta})$ klesající.*

Pro důkaz existence řešení využijeme následující lemma.

**Lemma 2.14.** *Funkce $v : (0,\infty) \to (-\infty, 0)$, $v(y) = 2y + e^{-y} - e^{y}$ je klesající bijekce.*

*Důkaz.* Derivace funkce $v$ ve tvaru $2 - e^{-y} - e^{y}$ je záporná pro kladná $y$, tudíž se jedná o klesající funkci. Dále platí

$$\lim_{y\to 0_+} v(y) = 0, \qquad \lim_{y\to\infty} v(y) = -\infty$$

a ze spojitosti plyne, že funkce $v$ nabývá hodnot v intervalu $(-\infty, 0)$. □

Nyní přistoupíme k samotnému důkazu Věty 2.13.

*Důkaz.* (Věta 2.13)

$\underline{\rho = 0:}$

Ukážeme, že $g$ je klesající bijekce z $(0,\infty)$ do $(-\infty, 0)$. Pro tento účel označme

$$w(y) = g'(y), \quad (2.72)$$

takže počáteční prodmínky pro funkci $g$ lze přepsat jako

$$w(\overline{\beta}) = 0, \qquad w(\underline{\beta}) = 0, \quad (2.73)$$

$$\int_{\underline{\beta}}^{\overline{\beta}} w(y)dy = C^{\downarrow} - C^{\uparrow} = -\lambda. \quad (2.74)$$

Na základě okrajových podmínek pro první derivaci, kterou tentokrát uvedeme ve tvaru

$$g'(y) = 1 - K_1 \frac{1}{4\cosh^2(\frac{y}{2})}, \quad (2.75)$$

platí:

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - K_1 \tfrac{1}{4\cosh^2(\frac{\overline{\beta}}{2})} \\ 0 &= 1 - K_1 \tfrac{1}{4\cosh^2(\frac{\underline{\beta}}{2})}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Pro $\underline{\beta}$ a $\overline{\beta}$ můžeme psát

$$\begin{aligned} \overline{\beta} &= 2 \operatorname{arccosh}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{K_1}\right) \\ \underline{\beta} &= -2 \operatorname{arccosh}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{K_1}\right). \end{aligned} \tag{2.77}$$

Vidíme, že $\overline{\beta} = -\underline{\beta}$. Pro jednoduchost označme

$$\beta = \overline{\beta} = -\underline{\beta}. \tag{2.78}$$

Z podmínek pro první derivaci dále určíme hodnotu konstanty $K_1$ jako

$$K_1 = 2 + e^{\beta} + e^{-\beta} \tag{2.79}$$

a vyjádříme $\int_{\underline{\beta}}^{\overline{\beta}} w(y)dy = C^{\downarrow} - C^{\uparrow}$:

$$-\lambda = \int_{-\beta}^{\beta} 1 - \frac{K_1}{2 + e^{y} + e^{-y}} dy = 2\beta - e^{\beta} + e^{-\beta}. \tag{2.80}$$

Vidíme, že toto vyjádření splňuje podmínky Lemmatu 2.14 a tudíž se jedná o klesající bijekci. Potom musí existovat právě jedno $\beta > 0$ takové, že

$$v(\beta) = -\lambda,$$

a tedy existuje řešení rovnice (2.68) splňující uvedené počáteční podmínky.

Na základě (2.75) a (2.79) pro první derivaci funkce $g$ platí

$$g'(y) = 1 - \frac{\cosh^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\cosh^2\left(\frac{y}{2}\right)} < 0 \quad \text{pro} \quad |y| < \beta.$$

Funkce $g$ je tedy klesající pro $\rho = 0$ na intervalu $\left(\underline{\beta}, \overline{\beta}\right)$.

Pro úplnost ještě uvedeme tvar konstanty $K_2$. Z okrajových podmínek pro funkci $g$ plyne

$$\begin{aligned} C^{\uparrow} &= -\beta - K_1 \tfrac{1}{1+e^{-\beta}} + K_2 \\ C^{\downarrow} &= \beta - K_1 \tfrac{1}{1+e^{\beta}} + K_2. \end{aligned} \tag{2.81}$$

Po sečtení rovnic (2.81) dostáváme

$$C^{\uparrow} + C^{\downarrow} = 2K_2 - K_1 \left(\tfrac{1}{1+e^{-\beta}} + \tfrac{1}{1+e^{\beta}}\right), \tag{2.82}$$

tedy

$$K_2 = \frac{K_1}{2} + \frac{C^{\uparrow} + C^{\downarrow}}{2}.$$

$\underline{\rho \neq 0:}$

Pro důkaz existence řešení ODE pro funkci $g$ využijeme existenci řešení ODE pro funkci $f$, která je uvedená v Appendixu. Nejprve vyjádříme funkci $g$ pomocí funkce $f$ prostřednictvím

$$\pi(\beta) = \frac{1}{1 + e^{-\beta}}. \tag{2.83}$$

Pro funkci $g$ platí
$$g(\beta) = f(\pi(\beta)) \tag{2.84}$$
a tedy
$$g(y) = f\left(\frac{1}{1+e^{-y}}\right) = y + \frac{1}{2\rho}\log\left(\frac{K_1}{K_2} + \frac{1}{1+e^{-y}}\right) + \frac{1}{2\rho}\log K_2. \tag{2.85}$$
Vidíme, že funkce $g$ je určena jednoznačně až na aditivní konstantu. Na základě (3.55) platí, že $\frac{K_1}{K_2} = \frac{\omega^2-\theta^2}{2\rho}$ a porovnáme-li derivace obou vyjádření funkce $g(y)$, vidíme, že také nutně
$$\frac{\kappa_2}{\kappa_1} = \frac{\omega^2-\theta^2}{2\rho}. \tag{2.86}$$
Nyní ověříme, že jsou splněny počáteční podmínky
$$g'(\underline{\beta}) = 0, \qquad g'(\overline{\beta}) = 0.$$
Na základě (3.56) vyjádříme nejprve $\underline{\beta}$, resp. $\overline{\beta}$ jako
$$\underline{\beta} = \log\frac{\theta+\omega}{1-\theta-\omega}, \qquad \text{resp.} \qquad \overline{\beta} = \log\frac{\theta-\omega}{1-\theta+\omega}. \tag{2.87}$$
Dosazení poměru $\frac{\kappa_2}{\kappa_1}$ ve tvaru (2.86) do $g'(\underline{\beta})$, resp. $g'(\overline{\beta})$ ukáže, že derivace v těchto bodech jsou skutečně nulové a počáteční podmínky jsou splněny.

Ryzí monotonii funkce $g$ pro $\rho \neq 0$ ukážeme také pomocí funkce $f$. Derivace funkce $f$ je ve tvaru
$$f'(x) = \frac{1}{x(1-x)} + \frac{1}{2\rho x - (\theta^2-\omega^2)} = \frac{2\rho x - (\theta^2-\omega^2) + x(1-x)}{(2\rho x - (\theta^2-\omega^2))(x(1-x))}, \tag{2.88}$$
a protože
$$2\rho x - (\theta^2-\omega^2) + x(1-x) = \omega^2 - (\theta-x)^2 < 0 \quad \text{pro} \quad |x-\theta| < \omega,$$
derivace funkce $f$ je záporná pro daná $x$. Potom podle věty o derivaci složené funkce také derivace funkce $g(y)$ je záporná pro $y \in \left(\underline{\beta}, \overline{\beta}\right)$, což odpovídá podmínce $|x-\theta| < \omega$. Funkce $g$ je tedy klesající na $\left(\underline{\beta}, \overline{\beta}\right)$. $\square$

## 2.6 Optimální strategie investora

**Věta 2.15.** *Buď $\widetilde{\beta}_t$ difúzní proces s reflexními bariérami v bodech $-\infty < \underline{\beta} < \overline{\beta} < \infty$ a intervenčními procesy $\widetilde{\beta}_t^{\uparrow}$, $\widetilde{\beta}_t^{\downarrow}$ splňující následující SDE*
$$d\widetilde{\beta}_t = \widetilde{r}(\widetilde{\beta}_t)dt + \widetilde{\sigma}(\widetilde{\beta}_t)dW_t + d\widetilde{\beta}_t^{\uparrow} - d\widetilde{\beta}_t^{\downarrow}, \tag{2.89}$$
*tedy předpokládáme, že trojice $\left(\widetilde{\beta}_t, \widetilde{\beta}_t^{\uparrow}, \widetilde{\beta}_t^{\downarrow}\right)$ je řešením odpovídajícího Skorochodova problému z Věty 1.7. Pokud $g$ je funkce definovaná ve Větě 2.13, striktně monotónní na intervalu $\left(\underline{\beta}, \overline{\beta}\right)$, pak*
$$\widetilde{C}_t = g(\widetilde{\beta}_t) \tag{2.90}$$

*je Itôův proces s diferenciálem*

$$d\widetilde{C}_t = \left[\widetilde{r}(\widetilde{\beta}_t) - r\right] dt + \left[\widetilde{\sigma}(\widetilde{\beta}_t) - \sigma\right] dW_t, \tag{2.91}$$

*kde*

$$\widetilde{\sigma}(y) = \begin{cases} -2\rho\sigma\,(1+e^y)\left(1+\frac{\kappa_2}{\kappa_1}(1+e^{-y})\right) & \rho \neq 0, \\ \frac{\sigma}{K_1}(1+e^y)(1+e^{-y}) & \rho = 0 \end{cases} \tag{2.92}$$

$$\widetilde{r}(y) = \begin{cases} 2\rho^2\sigma^2\,(1+e^y)(e^y-1)\left(1+\frac{\kappa_2}{\kappa_1}(1+e^{-y})\right)^2 & \rho \neq 0, \\ \frac{\sigma^2}{2K_1^2}(e^y-1)(1+e^y)(1+e^{-y})^2 & \rho = 0 \end{cases} \tag{2.93}$$

*a následně stínová cena* $\widetilde{S}_t = S_t \exp\{\widetilde{C}_t\}$ *je také Itôův proces s diferenciálem*

$$d\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_t\left[\left(\frac{1}{2}\widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t) + \widetilde{r}(\widetilde{\beta}_t)\right) dt + \widetilde{\sigma}(\widetilde{\beta}_t) dW_t\right]. \tag{2.94}$$

*Důkaz.* Aplikujeme-li Itôovu formuli na rovnost $\widetilde{C}_t = g(\widetilde{\beta}_t)$, potom spolu s (2.89) dostáváme, že $\widetilde{C}_t$ je Itôův proces s diferencálem

$$d\widetilde{C}_t = dg(\widetilde{\beta}_t) = g'(\widetilde{\beta}_t)\widetilde{r}(\widetilde{\beta}_t)dt + g'(\widetilde{\beta}_t)\widetilde{\sigma}(\widetilde{\beta}_t)dW_t + \frac{1}{2}g''(\widetilde{\beta}_t)\widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t)dt. \tag{2.95}$$

Máme tedy (2.21) s $\widetilde{\mu}_C$ a $\widetilde{\sigma}_C$ jednoznačně dané na intervalu $\{g(x); \underline{\beta} \leq x \leq \overline{\beta}\}$ následujícími rovnostmi:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mu}_C(g(x)) &= g'(x)\widetilde{r}(x) + \tfrac{1}{2}g''(x)\widetilde{\sigma}^2(x) \\ \widetilde{\sigma}_C(g(x)) &= g'(x)\widetilde{\sigma}(x). \end{aligned} \tag{2.96}$$

Z Tvrzení 2.8 pak dostaneme, že $\widetilde{S}_t$ je také Itôův proces s diferenciálem (2.22). K ověření platnosti Věty 2.15 pak stačí ukázat následující rovnosti:

$$\begin{aligned} \widetilde{r}(\widetilde{\beta}_t) - r &= \widetilde{\mu}_C(\widetilde{C}_t) \\ \widetilde{\sigma}(\widetilde{\beta}_t) - \sigma &= \widetilde{\sigma}_C(\widetilde{C}_t) \end{aligned} \tag{2.97}$$

a

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t) + \widetilde{r}(\widetilde{\beta}_t) &= \widehat{\mu}(\widetilde{C}_t) \\ \widetilde{\sigma}(\widetilde{\beta}_t) &= \widehat{\sigma}(\widetilde{C}_t). \end{aligned} \tag{2.98}$$

Dále víme z Tvrzení 2.8, že $d\widetilde{C}_t$ lze zapsat ve tvaru

$$d\widetilde{C}_t = \widetilde{\mu}_C(\widetilde{C}_t) + \widetilde{\sigma}_C(\widetilde{C}_t)dW_t.$$

Dosadíme-li (2.98) do (2.47), vidíme, že $\widehat{r}(\widetilde{C}_t) = \widehat{\mu}(\widetilde{C}_t) + r$, tedy

$$\widetilde{\mu}_C(\widetilde{C}_t) = \widehat{r}(\widetilde{C}_t) - r, \tag{2.99}$$

a pro $\widetilde{\sigma}_C$ platí

$$\widetilde{\sigma}_C(\widetilde{C}_t) = \widehat{\sigma}(\widetilde{C}_t) - \sigma. \tag{2.100}$$

S využitím předchozích vztahů dostáváme $d\widetilde{C}_t$ v požadovaném tvaru

$$d\widetilde{C}_t = \left[\widetilde{r}(\widetilde{\beta}_t) - r\right] dt + \left[\widetilde{\sigma}(\widetilde{\beta}_t) - \sigma\right] dW_t.$$

Nyní položíme do rovnosti (2.91) a (2.95) a budeme porovnávat členy u $dt$ a $dW_t$. Pro $dW_t$ platí

$$\begin{aligned} g'(\widetilde{\beta}_t)\widetilde{\sigma}(\widetilde{\beta}_t) &= \widetilde{\sigma}(\widetilde{\beta}_t) - \sigma \\ \widetilde{\sigma}(\widetilde{\beta}_t) &= \tfrac{\sigma}{1-g'(\widetilde{\beta}_t)}, \end{aligned} \tag{2.101}$$

pro $dt$ dostáváme

$$\begin{aligned} g'(\widetilde{\beta}_t)\widetilde{r}(\widetilde{\beta}_t) + \tfrac{1}{2}g''(\widetilde{\beta}_t)\widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t) &= \widetilde{r}(\widetilde{\beta}_t) - r \\ \widetilde{r}(\widetilde{\beta}_t) &= \tfrac{\frac{1}{2}g''(\widetilde{\beta}_t)\widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t)+r}{1-g'(\widetilde{\beta}_t)} \end{aligned} \tag{2.102}$$

Parametry $\widetilde{\sigma}(y)$ a $\widetilde{r}(y)$ uvedené v (2.92), resp. (2.93), získáme dosazením $g'(y)$ do vztahů (2.101) a (2.102); konkrétní tvary derivace $g'(y)$ a $g''(y)$ jsou uvedeny v důkazu Tvrzení 2.12 pro $\rho = 0$ a $\rho \neq 0$.

Nyní odvodíme diferenciál pro stínovou cenu $\widetilde{S}_t$. Víme, že

$$\widetilde{S}_t = S_t \exp\{\widetilde{C}_t\} \tag{2.103}$$

a z (2.24)

$$S_t = S_0 \exp\{\sigma W_t + \rho\sigma^2 t\}; \tag{2.104}$$

kombinací předchozích vztahů dostáváme, že

$$\begin{aligned} \widetilde{S}_t &= S_0 \exp\{\textstyle\int_0^t \widetilde{r}(\widetilde{\beta}_s)ds + \int_0^t \widetilde{\sigma}(\widetilde{\beta}_s)dW_s - \sigma W_t - rt\} \exp\{(\sigma W_t + rt)\} \\ &= S_0 \exp\{\textstyle\int_0^t \widetilde{r}(\widetilde{\beta}_s)ds + \int_0^t \widetilde{\sigma}(\widetilde{\beta}_s)dW_s\}. \end{aligned} \tag{2.105}$$

Použitím Itôovy formule získáme tvar diferenciálu stínové ceny $\widetilde{S}_t$:

$$d\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_t \left[ \left( \widetilde{r}(\widetilde{\beta}_t) + \frac{1}{2}\widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t) \right) dt + \widetilde{\sigma}(\widetilde{\beta}_t)dW_t \right] \tag{2.106}$$

□

V dalším odstavci odvodíme tvar stínového bohatství. K jeho odvození potřebujeme kromě diferenciálu stínové ceny opět optimální proporci $\widetilde{\pi}_t$.

Z (2.4) plyne, že

$$d\widetilde{\mathcal{W}}_t = \varphi_t \widetilde{S}_t \left[ \left( \widetilde{r}(\widetilde{\beta}_t) + \frac{1}{2}\widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t) \right) dt + \widetilde{\sigma}(\widetilde{\beta}_t)dW_t \right] \tag{2.107}$$

a s využitím optimální proporce dostáváme vztah pro diferenciál stínového bohatství:

$$d\widetilde{\mathcal{W}}_t = \widetilde{\pi}_t \widetilde{\mathcal{W}}_t \left[ \left( \widetilde{r}(\widetilde{\beta}_t) + \frac{1}{2}\widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t) \right) dt + \widetilde{\sigma}(\widetilde{\beta}_t)dW_t \right]. \tag{2.108}$$

**Tvrzení 2.16.** *Buďte $\widetilde{\beta}_t$ a $\widetilde{S}_t$ jako ve Větě 2.15 a buď $\widetilde{\pi}_t$ daný předpisem*

$$\widetilde{\pi}_t = \frac{1}{1 + e^{-\widetilde{\beta}_t}}$$

*na základě (2.33). Pak následující procesy*

$$\varphi_t = \frac{\widetilde{\pi}_t \widetilde{\mathcal{W}}_t}{\widetilde{S}_t} \tag{2.109}$$

*a*

$$\psi = \widetilde{\mathcal{W}}_t \left(1 - \widetilde{\pi}_t\right) \tag{2.110}$$

*jsou procesy s lokálně konečnou variací s následujícími diferenciály*

$$d\varphi_t = \frac{\varphi_t}{1+e^{\widetilde{\beta}_t}} \left(d\widetilde{\beta}_t^{\uparrow} - d\widetilde{\beta}_t^{\downarrow}\right) \tag{2.111}$$

*a*

$$d\psi_t = \frac{\widetilde{\mathcal{W}}_t}{\left(1+e^{\widetilde{\beta}_t}\right)\left(1+e^{-\widetilde{\beta}_t}\right)} \left(d\widetilde{\beta}_t^{\downarrow} - d\widetilde{\beta}_t^{\uparrow}\right). \tag{2.112}$$

*Důkaz.* Tvrzení dokážeme s využitím Itôovy formule. Nejprve odvodíme diferenciál $\psi_t$, který následně využijeme pro odvození diferenciálu $\varphi_t$. Protože pro $\psi_t$ platí (2.110), můžeme psát

$$\psi_t = \widetilde{\mathcal{W}}_t \left(1 - \frac{1}{1+e^{-\widetilde{\beta}_t}}\right) = \frac{\widetilde{\mathcal{W}}_t}{1+e^{\widetilde{\beta}_t}}. \tag{2.113}$$

Pro využití Itôovy formule zvolíme funkci

$$f(x,y) = \frac{x}{1+e^y}, \tag{2.114}$$

jejíž první a druhé derivace jsou ve tvaru:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+e^y} \\ -\frac{x}{2+e^y+e^{-y}} \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2+e^y+e^{-y}} \\ -\frac{1}{2+e^y+e^{-y}} & \frac{x\left(e^y-e^{-y}\right)}{\left(2+e^y+e^{-y}\right)^2} \end{pmatrix}$$

Použitím Itôovy formule dostáváme

$$d\psi_t = \frac{1}{1+e^{\widetilde{\beta}_t}} d\widetilde{\mathcal{W}}_t - \frac{\widetilde{\mathcal{W}}_t}{2+e^{\widetilde{\beta}_t}+e^{-\widetilde{\beta}_t}} d\widetilde{\beta}_t - \frac{1}{2+e^{\widetilde{\beta}_t}+e^{-\widetilde{\beta}_t}} d\widetilde{\beta}_t d\widetilde{\mathcal{W}}_t + \frac{1}{2} \frac{\widetilde{\mathcal{W}}_t \left(e^{\widetilde{\beta}_t} - e^{-\widetilde{\beta}_t}\right)}{\left(2+e^{\widetilde{\beta}_t}+e^{-\widetilde{\beta}_t}\right)^2} d\widetilde{\beta}_t d\widetilde{\beta}_t. \tag{2.115}$$

Pro vyjádření $d\widetilde{\beta}_t d\widetilde{\mathcal{W}}_t$ a $d\widetilde{\beta}_t d\widetilde{\beta}_t$ použijeme Box kalkulus a získáme následující tvary:

$$\begin{aligned} d\widetilde{\beta}_t d\widetilde{\mathcal{W}}_t &= \widetilde{\pi}_t \widetilde{\mathcal{W}}_t \left[\left(\tfrac{1}{2}\widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t) + \widetilde{r}(\widetilde{\beta}_t)\right) dt + \widetilde{\sigma}(\widetilde{\beta}_t) dW_t\right] \left[\widetilde{r}(\widetilde{\beta}_t) dt + \widetilde{\sigma}(\widetilde{\beta}_t) dW_t + d\widetilde{\beta}_t^{\uparrow} - d\widetilde{\beta}_t^{\downarrow}\right] \\ &= \widetilde{\pi}_t \widetilde{\mathcal{W}}_t \widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t) dt, \end{aligned} \tag{2.116}$$

$$\begin{aligned} d\widetilde{\beta}_t d\widetilde{\beta}_t &= \left[\widetilde{r}(\widetilde{\beta}_t) dt + \widetilde{\sigma}(\widetilde{\beta}_t) dW_t + d\widetilde{\beta}_t^{\uparrow} - d\widetilde{\beta}_t^{\downarrow}\right] \left[\widetilde{r}(\widetilde{\beta}_t) dt + \widetilde{\sigma}(\widetilde{\beta}_t) dW_t + d\widetilde{\beta}_t^{\uparrow} - d\widetilde{\beta}_t^{\downarrow}\right] \\ &= \widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t) dt. \end{aligned} \tag{2.117}$$

Dosadíme-li tato vyjádření do (2.115), dostaneme diferenciál $d\psi_t$

$$d\psi_t = \frac{1}{1+e^{\widetilde{\beta}_t}}\widetilde{\pi}_t\widetilde{\mathcal{W}}_t\left[\left(\frac{1}{2}\widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t)+\widetilde{r}(\widetilde{\beta}_t)\right)dt+\widetilde{\sigma}(\widetilde{\beta}_t)dW_t\right] \tag{2.118}$$

$$-\frac{\widetilde{\mathcal{W}}_t}{2+e^{\widetilde{\beta}_t}+e^{-\widetilde{\beta}_t}}\left[\widetilde{r}(\widetilde{\beta}_t)dt+\widetilde{\sigma}(\widetilde{\beta}_t)dW_t+d\widetilde{\beta}_t^{\uparrow}-d\widetilde{\beta}_t^{\downarrow}\right]$$

$$-\frac{1}{2+e^{\widetilde{\beta}_t}+e^{-\widetilde{\beta}_t}}\widetilde{\pi}_t\widetilde{\mathcal{W}}_t\widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t)dt+\frac{1}{2}\frac{\widetilde{\mathcal{W}}_t\left(e^{\widetilde{\beta}_t}-e^{-\widetilde{\beta}_t}\right)}{2+e^{\widetilde{\beta}_t}+e^{-\widetilde{\beta}_t}}\widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t)dt. \tag{2.119}$$

Nyní ukážeme, že koeficienty u členů $dt$ a $dW_t$ jsou nulové. Využijeme k tomu vztah

$$\widetilde{\mu}(\widetilde{\beta}_t)=\widetilde{r}(\widetilde{\beta}_t)+\frac{1}{2}\widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t). \tag{2.120}$$

Potom pro koeficienty členu $dt$ platí

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\widetilde{\pi}_t\widetilde{\mathcal{W}}_t}{1+e^{\widetilde{\beta}_t}}\widetilde{\mu}(\widetilde{\beta}_t)-\tfrac{\widetilde{\mathcal{W}}_t}{2+e^{\widetilde{\beta}_t}+e^{-\widetilde{\beta}_t}}\widetilde{r}(\widetilde{\beta}_t)-\tfrac{\widetilde{\pi}_t\widetilde{\mathcal{W}}_t}{2+e^{\widetilde{\beta}_t}+e^{-\widetilde{\beta}_t}}\widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t)+\tfrac{1}{2}\tfrac{\widetilde{\mathcal{W}}_t\left(e^{\widetilde{\beta}_t}-e^{-\widetilde{\beta}_t}\right)}{\left(2+e^{\widetilde{\beta}_t}+e^{-\widetilde{\beta}_t}\right)^2}\widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t)\\
=\;&\tfrac{\widetilde{\mathcal{W}}_t}{(1+e^{\widetilde{\beta}_t})(1+e^{-\widetilde{\beta}_t})}\left(\widetilde{r}(\widetilde{\beta}_t)+\tfrac{1}{2}\widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t)\right)-\tfrac{\widetilde{\mathcal{W}}_t}{2+e^{\widetilde{\beta}_t}+e^{-\widetilde{\beta}_t}}\widetilde{r}(\widetilde{\beta}_t)-\\
-\;&\tfrac{\widetilde{\pi}_t\widetilde{\mathcal{W}}_t}{2+e^{\widetilde{\beta}_t}+e^{-\widetilde{\beta}_t}}\widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t)+\tfrac{1}{2}\tfrac{\widetilde{\mathcal{W}}_t\left(e^{\widetilde{\beta}_t}-e^{-\widetilde{\beta}_t}\right)}{\left(2+e^{\widetilde{\beta}_t}+e^{-\widetilde{\beta}_t}\right)^2}\widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t)\\
=\;&\tfrac{\widetilde{\mathcal{W}}_t\widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t)}{(1+e^{\widetilde{\beta}_t})(1+e^{-\widetilde{\beta}_t})}\left[\tfrac{(1+e^{\widetilde{\beta}_t})(1+e^{-\widetilde{\beta}_t})-2(1+e^{\widetilde{\beta}_t})+e^{\widetilde{\beta}_t}-e^{-\widetilde{\beta}_t}}{2(1+e^{\widetilde{\beta}_t})(1+e^{-\widetilde{\beta}_t})}\right]\\
=\;&0,
\end{aligned} \tag{2.121}$$

podobně pro koeficienty u členu $dW_t$ máme

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\widetilde{\pi}_t\widetilde{\mathcal{W}}_t\widetilde{\sigma}(\widetilde{\beta}_t)}{1+e^{\widetilde{\beta}_t}}-\tfrac{\widetilde{\mathcal{W}}_t\widetilde{\sigma}(\widetilde{\beta}_t)}{2+e^{\widetilde{\beta}_t}+e^{-\widetilde{\beta}_t}}\\
=\;&\widetilde{\mathcal{W}}_t\widetilde{\sigma}(\widetilde{\beta}_t)\left[\tfrac{1}{(1+e^{\widetilde{\beta}_t})(1+e^{-\widetilde{\beta}_t})}-\tfrac{1}{2+e^{\widetilde{\beta}_t}+e^{-\widetilde{\beta}_t}}\right]\\
=\;&0.
\end{aligned} \tag{2.122}$$

Nyní už zbývají jen koeficienty u členů $d\widetilde{\beta}_t^{\uparrow}$, resp. $d\widetilde{\beta}_t^{\downarrow}$, které vypadají následovně:

$$-\frac{\widetilde{\mathcal{W}}_t}{2+e^{\widetilde{\beta}_t}+e^{-\widetilde{\beta}_t}},\qquad \text{resp.}\qquad \frac{\widetilde{\mathcal{W}}_t}{2+e^{\widetilde{\beta}_t}+e^{-\widetilde{\beta}_t}}. \tag{2.123}$$

Diferenciál $\psi_t$ má tedy výsledný tvar

$$d\psi_t=\frac{\widetilde{\mathcal{W}}_t}{(1+e^{\widetilde{\beta}_t})(1+e^{-\widetilde{\beta}_t})}\left(-d\widetilde{\beta}_t^{\uparrow}+d\widetilde{\beta}_t^{\downarrow}\right). \tag{2.124}$$

S využitím diferenciálu $\psi_t$ odvodíme také diferenciál $\varphi_t$; nejprve vyjádříme $\varphi_t$ pomocí $\psi_t$.

$$\varphi_t=\frac{\widetilde{\pi}_t\widetilde{\mathcal{W}}_t}{\widetilde{S}_t}=\frac{\varphi_t\widetilde{S}_t}{\widetilde{S}_t}=\left(\widetilde{\mathcal{W}}_t-\psi_t\right)\widetilde{S}_t^{-1} \tag{2.125}$$

Využijeme-li (2.106), můžeme vyjádřit $\widetilde{S}_t^{-1}$ jako

$$\widetilde{S}_t^{-1}=\widetilde{S}_0^{-1}\exp\Big\{-\int_0^t\widetilde{\sigma}(\widetilde{\beta}_s)dW_s-\int_0^t\widetilde{r}(\widetilde{\beta}_s)ds\Big\} \tag{2.126}$$

a diferenciál má potom z Itôovy formule tvar

$$\begin{aligned} d\widetilde{S}_t^{-1} &= \widetilde{S}_t^{-1}\left[-\widetilde{\sigma}(\widetilde{\beta}_t)dW_t + \left(-\widetilde{r}(\widetilde{\beta}_t) + \tfrac{1}{2}\widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t)\right)dt\right] \\ &= \widetilde{S}_t^{-1}\left[-\widetilde{\sigma}(\widetilde{\beta}_t)dW_t + \left(-\widetilde{\mu}(\widetilde{\beta}_t) + \widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t)\right)dt\right]. \end{aligned} \tag{2.127}$$

Pro Itôovu formuli využijeme funkci

$$f(x,y,z) = (x-y)z, \tag{2.128}$$

jejíž první a druhé derivace mají tvar:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} z \\ -z \\ x-y \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Z Itôovy formule dostaneme

$$d\varphi_t = \widetilde{S}_t^{-1}d\widetilde{\mathcal{W}}_t - \widetilde{S}_t^{-1}d\psi_t + \left(\widetilde{\mathcal{W}}_t - \psi_t\right)d\widetilde{S}_t^{-1} + d\widetilde{\mathcal{W}}_t\widetilde{S}_t^{-1} - d\widetilde{S}_t^{-1}d\psi_t. \tag{2.129}$$

Stejně jako v předchozím případě vyjádříme diferenciály $d\widetilde{\mathcal{W}}_t d\widetilde{S}_t^{-1}$ a $d\widetilde{S}_t^{-1}d\psi_t$.

$$\begin{aligned} d\widetilde{\mathcal{W}}_t d\widetilde{S}_t^{-1} &= \widetilde{\pi}_t\widetilde{\mathcal{W}}_t\left[\left(\tfrac{1}{2}\widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t) + \widetilde{r}(\widetilde{\beta}_t)\right)dt + \widetilde{\sigma}(\widetilde{\beta}_t)dW_t\right] \\ &\quad \cdot\widetilde{S}_t^{-1}\left[\left(-\widetilde{\mu}(\widetilde{\beta}_t) + \widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t)\right)dt - \widetilde{\sigma}(\widetilde{\beta}_t)dW_t\right] \\ &= -\widetilde{\pi}_t\widetilde{\mathcal{W}}_t\widetilde{S}_t^{-1}\widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t)dt \end{aligned} \tag{2.130}$$

$$\begin{aligned} d\widetilde{S}_t^{-1}d\psi_t &= \widetilde{S}_t^{-1}\left[\left(-\widetilde{\mu}(\widetilde{\beta}_t) + \widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t)\right)dt - \widetilde{\sigma}(\widetilde{\beta}_t)dW_t\right] \\ &\quad \cdot\left[-\tfrac{\widetilde{\mathcal{W}}_t}{(1+e^{\widetilde{\beta}_t})(1+e^{-\widetilde{\beta}_t})}d\widetilde{\beta}_t^{\uparrow} + \tfrac{\widetilde{\mathcal{W}}_t}{(1+e^{\widetilde{\beta}_t})(1+e^{-\widetilde{\beta}_t})}d\widetilde{\beta}_t^{\downarrow}\right] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.131}$$

Dosazením do (2.129) dostaneme $d\varphi_t$ v následujícím tvaru a ukážeme, že koeficienty u $dt$ a $dW_t$ jsou opět nulové.

$$d\varphi_t = \widetilde{S}_t^{-1}\widetilde{\pi}_t\widetilde{\mathcal{W}}_t\left[\left(\frac{1}{2}\widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t) + \widetilde{r}(\widetilde{\beta}_t)\right)dt + \widetilde{\sigma}(\widetilde{\beta}_t)dW_t\right] \tag{2.132}$$

$$-\widetilde{S}_t^{-1}\left[-\frac{\widetilde{\mathcal{W}}_t}{(1+e^{\widetilde{\beta}_t})(1+e^{-\widetilde{\beta}_t})}d\widetilde{\beta}_t^{\uparrow} + \frac{\widetilde{\mathcal{W}}_t}{(1+e^{\widetilde{\beta}_t})(1+e^{-\widetilde{\beta}_t})}d\widetilde{\beta}_t^{\downarrow}\right] \tag{2.133}$$

$$+\left(\widetilde{\mathcal{W}}_t - \psi_t\right)\widetilde{S}_t^{-1}\left[\left(-\widetilde{\mu}(\widetilde{\beta}_t) + \widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t)\right)dt - \widetilde{\sigma}(\widetilde{\beta}_t)dW_t\right] \tag{2.134}$$

$$-\widetilde{\pi}_t\widetilde{\mathcal{W}}_t\widetilde{S}_t^{-1}\widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t)dt. \tag{2.135}$$

Koeficienty u $dt$ členu jsou ve tvaru

$$\begin{aligned} &\tfrac{\widetilde{\pi}_t\widetilde{\mathcal{W}}_t}{\widetilde{S}_t}\left(\widetilde{\mu}(\widetilde{\beta}_t) - \widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t)\right) - \tfrac{\widetilde{\mathcal{W}}_t - \psi_t}{\widetilde{S}_t}\left(\widetilde{\mu}(\widetilde{\beta}_t) - \widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t)\right) \\ =\ &\varphi_t\left(\widetilde{\mu}(\widetilde{\beta}_t) - \widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t) - \widetilde{\mu}(\widetilde{\beta}_t) + \widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t)\right) \\ =\ &0, \end{aligned} \tag{2.136}$$

pro $dW_t$ platí

$$\frac{\widetilde{\pi}_t\widetilde{\mathcal{W}}_t}{\widetilde{S}_t}\widetilde{\sigma}(\widetilde{\beta}_t) - \frac{\widetilde{\mathcal{W}}_t - \psi_t}{\widetilde{S}_t}\widetilde{\sigma}(\widetilde{\beta}_t) = 0. \tag{2.137}$$

Odtud plyne, že $d\varphi_t$ můžeme vyjádřit jako

$$\begin{aligned} d\varphi_t &= \tfrac{\widetilde{\pi}_t\widetilde{\mathcal{W}}_t}{\widetilde{S}_t}\tfrac{1}{(1+e^{\widetilde{\beta}_t})}d\widetilde{\beta}_t^{\uparrow} - \tfrac{\widetilde{\pi}_t\widetilde{\mathcal{W}}_t}{\widetilde{S}_t}\tfrac{1}{(1+e^{\widetilde{\beta}_t})}d\widetilde{\beta}_t^{\downarrow} \\ &= \tfrac{\varphi_t}{1+e^{\widetilde{\beta}_t}}\left(d\widetilde{\beta}_t^{\uparrow} - d\widetilde{\beta}_t^{\downarrow}\right). \end{aligned} \tag{2.138}$$

$\square$

**Poznámka 2.17.** (Optimální proporce) *Nechť $\widetilde{\beta}_t$ je jako ve Větě 2.15. To nám dává stínovou cenu $\widetilde{S}_t$ splňující (2.34). Analogicky zavedeme nominální ekvivalent procesu $\widetilde{\beta}_t$ předpisem*

$$\widehat{\beta}_t = \log\varphi_t - \log\psi_t + \log S_t = \widetilde{\beta}_t - \widetilde{C}_t = \widetilde{\beta}_t - g(\widetilde{\beta}_t). \tag{2.139}$$

*Z Věty 2.13 máme, že $\mathcal{C}^2$-funkce $x \to x - g(x)$ je na intervalu $\left[\underline{\beta}, \overline{\beta}\right]$ rostoucí. Dle Poznámky 1.8 bude proces $\widehat{\beta}_t$ difúzním procesem s odrážecími bariérami v bodech*

$$\underline{\beta} - \log(1+\lambda^{\uparrow}) \quad a \quad \overline{\beta} - \log(1-\lambda^{\downarrow}).$$

*Podobně z Poznámky 1.8 dostaneme, že nominální pozice $\widehat{\pi}_t = \frac{1}{1+e^{-\widehat{\beta}_t}}$ je difúzní proces s odrážecími bariérami v bodech*

$$\frac{1}{1+e^{-\underline{\beta}}(1+\lambda^{\uparrow})} \quad a \quad \frac{1}{1+e^{-\overline{\beta}}(1-\lambda^{\downarrow})}. \tag{2.140}$$

## 2.7 Shrnutí

Věta 1.7 nám říká, že kdykoli si předepíšeme lipschitzovské funkce $B$, $S$ na kompaktním intervalu, pak existuje trojice procesů $(X_t, X_t^{\uparrow}, X_t^{\downarrow})$ takové, že proces $X_t$ se chová jako difúzní proces unvitř intervalu a na hranicích je odrážen pomocí intervenčních neklesajících procesů $X_t^{\uparrow}$, $X_t^{\downarrow}$ tak, aby ze zvoleného kompaktního intervalu nevypadl.

Existují dva ekvivalentní přístupy; buď tento postup použijeme na stínovou pozici $\widetilde{\pi}_t$ nebo na transformovaný proces, který značíme $\widetilde{\beta}_t$. V druhém případě v souladu s (2.89) roli $B$ bude hrát funkce $\widetilde{r}$ a roli $S$ funkce $\widetilde{\sigma}$.

Věta 1.7 nám pak říká, že je možno matematicky zkonstruovat model, na který je možné aplikovat Větu 2.15. Zde je uvedeno, jak zkonstruovat stínovou cenu $\widetilde{S}_t$. Prostřednictvím vztahu mezi $\widetilde{\beta}$ a $\widetilde{\pi}_t$ je dána stínová pozice, která jednoznačně určuje stínovou strategii a to následujícími rovnostmi

$$\begin{aligned} \varphi_t &= \tfrac{\widetilde{\pi}_t\widetilde{\mathcal{W}}_t}{\widetilde{S}_t} \\ \psi_t &= \widetilde{\mathcal{W}}_t(1-\widetilde{\pi}_t). \end{aligned} \tag{2.141}$$

Abychom mohli vůbec uvažovat dvojici $(\varphi_t, \psi_t)$ jako strategii obchodování v popisovaném modelu, musí být splněna podmínka samofinancovatelnosti, která je zde ve tvaru

$$\begin{aligned} 0 &= d\psi_t^{\uparrow} + \overline{S}_t d\varphi_t^{\uparrow} \\ 0 &= d\psi_t^{\downarrow} + \underline{S}_t d\varphi_t^{\downarrow}. \end{aligned}$$

V našem případě dle Tvrzení 2.16 platí

$$0 = d\varphi_t + \widetilde{S}_t d\varphi_t.$$

Odpovídající stínové bohatství a stínová pozice jsou pak dány vztahem

$$\widetilde{\mathcal{W}}_t = \psi_t + \varphi_t \widetilde{S}_t > 0, \quad \widetilde{\pi}_t = \frac{\varphi_t \widetilde{S}_t}{\widetilde{\mathcal{W}}_t}.$$

Podle Lemmatu 2.3 lze úlohu maximalizace dlouhodobé míry geometrického růstu portfolia přeformulovat tak, že nominální bohatství nahradíme stínovým. Tvrzení 2.6 pak říká, že stínově optimální strategii máme, pokud je splněna podmínka (2.17) a podmínka, že stínová pozice má odpovídat log-optimální proporci ve stínovém modelu. Podmínka (2.17) uvádí, že stínové transakční polatky mají být nulové, kdykoli z hlediska uvažované stínové strategie vstupují do hry, což nastává, dochází-li k nákupu či k prodeji akcií. Značíme-li $\widetilde{\theta}_t$ příslušnou log-optimální stínovou pozici, pak v kontextu Věty 2.15 je výše zmíněná podmínka tvaru

$$\widetilde{\pi}_t = \widetilde{\theta}_t = \frac{1}{2} + \frac{\widetilde{r}(\widetilde{\beta}_t)}{\widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t)}.$$

Na základě (2.92) a (2.93) dostáváme

$$\frac{\widetilde{r}(y)}{\widetilde{\sigma}^2(y)} = -\frac{1}{2}\frac{1-e^y}{1+e^y}.$$

Přičtením jedné poloviny máme

$$\frac{1}{2} + \frac{\tilde{r}(y)}{\tilde{\sigma}^2(y)} = \frac{1}{1+e^{-y}},$$

čímž získáme následující rovnost požadovanou jako předpoklad v Tvrzení 2.6:

$$\widetilde{\theta}_t = \frac{1}{2} + \frac{\widetilde{r}(\widetilde{\beta}_t)}{\widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t)} = \frac{1}{1+e^{-\widetilde{\beta}_t}} = \widetilde{\pi}_t.$$

Podmínku (2.17) ověříme výpočtem s tím, že je třeba mít na mysli, že $\varphi_t$ roste právě tehdy, když roste $\widetilde{\beta}^{\uparrow}$ a klesá právě tehdy, když roste $\widetilde{\beta}^{\downarrow}$, což nastává po řadě na množinách $[\widetilde{\beta}_t = \underline{\beta}]$ a $[\widetilde{\beta}_t = \overline{\beta}]$. Potom

$$\widetilde{S}_t = S_t e^{\widetilde{C}_t} = \begin{cases} S_t \exp\{\log(1+\lambda^{\uparrow})\} = \overline{S}_t & \text{pokud} \quad \widetilde{\beta}_t = \underline{\beta} \\ S_t \exp\{\log(1-\lambda^{\downarrow})\} = \underline{S}_t & \text{pokud} \quad \widetilde{\beta}_t = \overline{\beta} \end{cases}. \tag{2.142}$$

# 3. Appendix

Odvození v částech 3.1 a 3.2 vychází z Doléans Equations uvedených ve Větě 1.9.

## 3.1 Vyjádření $dS_t$ pomocí Itôovy formule

Chceme vyjádřit diferenciál ceny akcie $S_t$ pomocí Itôovy formule. Funkci $f$ v Itôově formuli zvolíme následovně:

$$f(t, W_t) = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t\right\}. \tag{3.1}$$

Pak platí

$$\nabla f(t, W_t) = S_t \begin{pmatrix} \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \\ \sigma \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

$$\nabla^2 f(t, W_t) = S_t \begin{pmatrix} \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 & \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\sigma \\ \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\sigma & \sigma^2 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Odtud dostáváme

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t \sigma dW_t + S_t \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \tfrac{1}{2} S_t \sigma^2 dt \\ &= S_t \left(\mu dt + \sigma dW_t\right), \end{aligned} \tag{3.4}$$

protože pro Wienerův proces platí Tvrzení 1.4.

## 3.2 Řešení SDE $d\mathcal{W}_t = \pi_t \mathcal{W}_t(\mu dt + \sigma dW_t)$

Řešení rovnice (2.7) získáme s využitím Itôovy formule pro funkci $f(t, x) = \log(x)$. Ta říká, že pro řešení stochastické diferenciální rovnice

$$d\mathcal{W}_t = \alpha(t, \mathcal{W}_t)dt + \beta(t, \mathcal{W}_t)dW_t$$

platí:

$$d\log(\mathcal{W}_t) = \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\alpha(t, \mathcal{W}_t)dt + \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\beta(t, \mathcal{W}_t)dW_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2}(\beta(t, \mathcal{W}_t))^2 dt.$$

V našem případě máme $\alpha(t, \mathcal{W}_t) = \mu\pi_t\mathcal{W}_t$ a $\beta(t, \mathcal{W}_t) = \sigma\pi_t\mathcal{W}_t$ a dále

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Dohromady tedy dostáváme

$$\begin{aligned} d\log(\mathcal{W}_t) &= \tfrac{1}{\mathcal{W}_t}\mu\pi_t\mathcal{W}_t dt + \tfrac{1}{\mathcal{W}_t}\sigma\pi_t\mathcal{W}_t dW_t - \tfrac{1}{2(\mathcal{W}_t)^2}(\sigma\pi_t\mathcal{W}_t)^2 dt \\ &= (\mu\pi_t - \tfrac{1}{2}\sigma^2\pi_t^2)dt + \sigma\pi_t dW_t. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Integrací získáme

$$\log(\mathcal{W}_t) = \log(\mathcal{W}_0) + \int_0^t (\mu\pi_s - \frac{1}{2}\sigma^2\pi_s^2)ds + \int_0^t \sigma\pi_s dW_s \tag{3.6}$$

a odlogaritmování dá

$$\mathcal{W}_t = \mathcal{W}_0 \exp\Big\{ \int_0^t (\mu\pi_s - \frac{1}{2}\sigma^2\pi_s^2)ds + \int_0^t \sigma\pi_s dW_s \Big\}. \tag{3.7}$$

## 3.3 Odvození tvaru funkce $g$

Řešení rovnice (2.56) odvodíme nejprve pro speciální případ, kdy $\rho = 0$ a poté obecně.

$\rho = 0:$

Pro $\rho = 0$ máme $\theta = \frac{1}{2}$ a tedy (2.56) má tvar:

$$\begin{aligned} g''(y) &= 2\left(\tfrac{1}{1+e^{-y}} - \theta\right) + \left(4\theta - \tfrac{2}{1+e^{-y}} - 1\right)g'(y) \\ &= \tfrac{1-e^{-y}}{1+e^{-y}} - \tfrac{1-e^{-y}}{1+e^{-y}}g'(y) \\ &= \tfrac{1-e^{-y}}{1+e^{-y}}(1 - g'(y)) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Provedeme-li substituci

$$p(y) = 1 - g'(y), \tag{3.9}$$

dostaneme rovnici (3.8) ve tvaru

$$-\frac{p'(y)}{p(y)} = \frac{1-e^{-y}}{1+e^{-y}}, \tag{3.10}$$

nebo-li

$$-\frac{d}{dy}\log p(y) = \frac{1-e^{-y}}{1+e^{-y}}. \tag{3.11}$$

Řešením obyčejné diferenciální rovnice (3.11) potom je

$$p(y) = K \exp\Big\{ - \int \frac{1-e^{-y}}{1+e^{-y}}dy \Big\}, \tag{3.12}$$

kde $K$ je konstanta a

$$\int \frac{1-e^{-y}}{1+e^{-y}}dy = -y - 2\log\left(1+e^{-y}\right). \tag{3.13}$$

Vzhledem k (3.9) nyní máme diferenciální rovnici

$$1 - g'(y) = K \exp\Big\{ -y - 2\log\left(1+e^{-y}\right) \Big\}, \tag{3.14}$$

jejímže řešením je

$$g(y) = y + K_1 \frac{1}{1+e^{-y}} + K_2, \tag{3.15}$$

kde $K_1$ a $K_2$ jsou konstanty.

$\underline{\rho \neq 0:}$
Nechť $\rho \neq 0$. Nyní budeme uvažovat funkci

$$h(y) = e^{2\rho g(y)}; \tag{3.16}$$

první a druhá derivace této funkce mají tvar

$$h'(y) = 2\rho h(y) g'(y), \tag{3.17}$$

$$h''(y) = h(y) \cdot 2\rho \left[ g''(y) + 2\rho \left[ g'(y) \right]^2 \right]. \tag{3.18}$$

S využitím rovnice (3.17) a (2.56) ve tvaru

$$g''(y) + 2\rho \left( g'(y) \right)^2 = 2 \left( \frac{1}{1+e^{-y}} - \theta \right) + \left( 4\theta - \frac{2}{1+e^{-y}} - 1 \right) g'(y)$$

můžeme (3.18) zapsat jako

$$\frac{h''(y)}{2\rho h(y)} = 2 \left( \frac{1}{1+e^{-y}} - \theta \right) + \left( 4\theta - \frac{2}{1+e^{-y}} - 1 \right) \frac{h'(y)}{2\rho h(y)} \tag{3.19}$$

$$h''(y) - \left( 4\theta - \frac{2}{1+e^{-y}} - 1 \right) h'(y) - 4\rho \left( \frac{1}{1+e^{-y}} - \theta \right) h(y) = 0, \tag{3.20}$$

což je opět homogenní diferenciální rovnice. Pak $h_0(y) = e^{2\rho y}$ je řešením (3.20), protože $g(y) = y$ řeší rovnici (2.56). Hledáme tedy řešení rovnice (3.20) ve tvaru

$$h(y) = d(y) e^{2\rho y}.$$

Dosazením do (3.20) získáme

$$\begin{aligned} 0 &= d''(y)h_0(y) + d'(y)h_0'(y) + d'(y)h_0'(y) + d(y)h_0''(y) - \\ &\quad - \left(4\theta - \tfrac{2}{1+e^{-y}} - 1\right)\left[d'(y)h_0(y) + d(y)h_0'(y)\right] - 4\rho\left(\tfrac{1}{1+e^{-y}} - \theta\right) d(y)h_0(y) \\ 0 &= d''(y)h_0(y) + d'(y)\left[h_0'(y) + h_0'(y) - \left(4\theta - \tfrac{2}{1+e^{-y}} - 1\right)h_0(y)\right] + \\ &\quad + d(y)\left[h_0''(y) - \left(4\theta - \tfrac{2}{1+e^{-y}} - 1\right)h_0'(y) - 4\rho\left(\tfrac{1}{1+e^{-y}} - \theta\right)h_0(y)\right] \end{aligned} \tag{3.21}$$

a protože $h_0(y)$ řeší (3.20), tak

$$h_0''(y) - \left( 4\theta - \frac{2}{1+e^{-y}} - 1 \right) h_0'(y) - 4\rho \left( \frac{1}{1+e^{-y}} - \theta \right) h_0(y) = 0.$$

Odtud plyne

$$d''(y)h_0(y) + d'(y) \left[ 2h_0'(y) - \left( 4\theta - \frac{2}{1+e^{-y}} - 1 \right) h_0(y) \right] = 0. \tag{3.22}$$

Pro zjednodušení provedeme přeznačení

$$\begin{aligned} A(y) &= h_0(y) \\ B(y) &= 2h_0'(y) - \left(4\theta - \tfrac{2}{1+e^{-y}} - 1\right) h_0(y) \end{aligned} \tag{3.23}$$

a

$$w(y) = d'(y); \tag{3.24}$$

nyní máme rovnici (3.22) ve tvaru

$$A(y)w'(y) + B(y)w(y) = 0. \tag{3.25}$$

Jedná se o homogenní rovnici, jejímž řešením je

$$w(y) = C \cdot \exp\Big\{ - \int \frac{B(y)}{A(y)} dy \Big\}, \tag{3.26}$$

kde $C$ je konstanta. Z (3.23) vidíme, že

$$\frac{B(y)}{A(y)} = \frac{2h_0'(y) - \left(4\theta - \frac{2}{1+e^{-y}} - 1\right) h_0(y)}{h_0(y)} \tag{3.27}$$

a po vyřešení příslušného integrálu získáme

$$w(y) = C \left(h_0(y)\right)^{-2} \cdot \exp\Big\{4\theta y - 3y - 2\log(1 + e^{-y})\Big\} \tag{3.28}$$

Protože $w(y) = d'(y)$, máme

$$\begin{array}{rcl} d'(y) & = & C \left(h_0(y)\right)^{-2} \cdot \exp\Big\{4\theta y - 3y - 2\log(1+e^{-y})\Big\} \\ d(y) & = & C \int \left(h_0(y)\right)^{-2} \cdot \exp\Big\{4\theta y - 3y - 2\log(1+e^{-y})\Big\} dy \\ & = & C \int \left(\exp\{2\rho y\}\right)^{-2} \cdot \exp\{4\theta y - 3y - 2\log(1+e^{-y})\} dy \\ & = & C \int e^{y(-4\rho+4\theta-3)} \frac{1}{1+2e^{-y}+e^{-2y}} dy \end{array} \tag{3.29}$$

Nyní vidíme, že funkce $h(y)$ má tvar

$$h(y) = C \cdot e^{2\rho y} \left[ \int e^{-x(4\rho-4\theta+3)} \frac{1}{1+2e^{-y}+e^{-2y}} dy \right] \tag{3.30}$$

Vyřešení příslušného integrálu dává $h(y)$ ve tvaru

$$h(y) = C \cdot e^{2\rho y} \left( \frac{1}{1+e^{-y}} + c \right), \tag{3.31}$$

kde $C$, $c$ jsou konstanty. Pro další použití zapíšeme $h(y)$ v konečném tvaru

$$h(y) = \kappa_1 \frac{e^{2\rho y}}{1+e^{-y}} + \kappa_2 e^{2\rho y}, \tag{3.32}$$

kde $\kappa_1$, $\kappa_2$ jsou konstanty. Využijeme-li vztah (3.16), potom předpis pro funkci $g(y)$ získáme z

$$e^{2\rho g(y)} = \kappa_1 \frac{e^{2\rho y}}{1+e^{-y}} + \kappa_2 e^{2\rho y}; \tag{3.33}$$

odtud

$$g(y) = y + \frac{1}{2\rho} \log\left( \frac{\kappa_1}{1+e^{-y}} + \kappa_2 \right). \tag{3.34}$$

## 3.4 Funkce $f$ a vyjádření $\widetilde{C}_t = f(\widetilde{\theta}_t)$

**Tvrzení 3.1.** *Nechť $f \in \mathcal{C}^2\left[\underline{\theta}, \overline{\theta}\right]$ je spojitá funkce, splňující obyčejnou diferenciální rovnici*

$$x - \frac{1}{2} = \rho\left[1 - x\left(1-x\right)f'(x)\right]^2 + \frac{1}{2}x^2\left(1-x\right)^2 f''(x), \tag{3.35}$$

*s okrajovými podmínkami*

$$\begin{array}{ll} f\left(\underline{\theta}\right) = C^{\uparrow}, & f\left(\overline{\theta}\right) = C^{\downarrow} \\ f'\left(\underline{\theta}\right) = 0, & f'\left(\overline{\theta}\right) = 0. \end{array} \tag{3.36}$$

*Potom taková funkce $f$ existuje a má tvar*

$$f(x) = \begin{cases} \log\frac{x}{1-x} + \frac{1}{2\rho}\log\left(K_1 + K_2 x\right), & \rho \neq 0 \\ \log\frac{x}{1-x} + K_1 x + K_2, & \rho = 0, \end{cases} \tag{3.37}$$

*kde $K_1$ a $K_2$ jsou konstanty.*

**Poznámka 3.2.** *Předpokládejme, že pro pomocí Itôva procesu $\widetilde{\theta}_t$, pro který platí*

$$\widetilde{\theta}_t = \frac{\widetilde{\mu}(\widetilde{\beta}_t)}{\widetilde{\sigma}^2(\widetilde{\beta}_t)}, \tag{3.38}$$

*lze vyjádřit proces $\widetilde{C}_t$, pro který platí*

$$\widetilde{C}_t = f(\widetilde{\theta}_t). \tag{3.39}$$

*Důkaz.* Nejprve vyřešíme případ pro $\rho \neq 0$ a následně jednodušší variantu, kdy $\rho = 0$.

$\underline{\rho \neq 0}$**:**

**Tvar funkce $f$:**

Zvolme pomocnou funkci $h(x)$, pro kterou platí

$$h(x) = \exp\{2\rho f(x)\}. \tag{3.40}$$

První a druhá derivace funkce $h$ tedy mají tvar

$$h'(x) = h(x)2\rho f'(x), \qquad h''(x) = h(x)2\rho\left[2\rho f'(x)^2 + f''(x)\right]. \tag{3.41}$$

Potom můžeme rovnici (3.35) přepsat pomocí funkce $h$ do tvaru

$$2\rho h(x)\left(x - \theta\right) = -2\rho\left(1-x\right)h'(x) + \frac{1}{2}x^2\left(1-x\right)^2 h''(x).$$

Tuto rovnici řeší například

$$\begin{array}{rcl} h_0(x) & = & x^{2\rho}\left(1-x\right)^{-2\rho} \\ h_1(x) & = & x^{2\theta}\left(1-x\right)^{-2\rho}; \end{array} \tag{3.42}$$

pomocí variace konstant získáme obecné řešení rovnice (3.35) ve tvaru

$$h(x) = \left[K_1 + K_2 x\right]x^{2\rho}\left(1-x\right)^{-2\rho}. \tag{3.43}$$

Potom tvar funkce $f$ na základě (3.40) je

$$f(x) = \log x - \log(1-x) + \frac{1}{2\rho}\log(K_1 + K_2 x)\,. \tag{3.44}$$

Správnost řešení ověříme dosazením funkce $f$ a jejích derivací do (3.35).

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2\rho}\frac{K_2}{K_1+K_2x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{2\rho}\frac{K_2^2}{(K_1+K_2x)^2}, \tag{3.45}$$

dostaneme tedy

$$\begin{aligned}
&\rho\left[1 - x(1-x)f'(x)\right]^2 + \tfrac{1}{2}x^2(1-x)^2 f''(x)\\
&= \rho\left[1 - x(1-x)\left(\tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{1-x} + \tfrac{1}{2\rho}\tfrac{K_2}{K_1+K_2x}\right)\right]^2 + \tfrac{1}{2}x^2(1-x)^2\left(-\tfrac{1}{x^2} + \tfrac{1}{(1-x)^2} - \tfrac{1}{2\rho}\tfrac{K_2^2}{(K_1+K_2x)^2}\right)\\
&= \tfrac{K_2^2}{(K_1+K_2x)^2}\tfrac{1}{4\rho}x^2(1-x)^2 + x - \tfrac{1}{2} - \tfrac{K_2^2}{4\rho}\tfrac{x^2(1-x)^2}{(K_1+K_2x)^2}\\
&= x - \tfrac{1}{2},
\end{aligned} \tag{3.46}$$

čímž je ověřena správnost tvaru funkce $f$.

**Existence funkce $f$:**

Budeme vycházet z okrajových podmínek pro funkci $f$, nejprve vezmeme v úvahu

$$f'(\underline{\theta}) = 0, \qquad f'(\overline{\theta}) = 0.$$

Z tvaru první derivace funkce $f$ dostáváme

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{\underline{\theta}(1-\underline{\theta})} + \tfrac{1}{2\rho}\tfrac{1}{\frac{K_1}{K_2}+\underline{\theta}} &= 0 = \tfrac{1}{\overline{\theta}(1-\overline{\theta})} + \tfrac{1}{2\rho}\tfrac{1}{\frac{K_1}{K_2}+\overline{\theta}}\\
2\rho\left(\underline{\theta} + \tfrac{K_1}{K_2}\right) + \underline{\theta}(1-\underline{\theta}) &= 2\rho\left(\overline{\theta} + \tfrac{K_1}{K_2}\right) + \overline{\theta}\left(1-\overline{\theta}\right).
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Nyní provedeme substituci

$$\overline{\rho} = \overline{\theta} - \frac{1}{2}, \qquad \underline{\rho} = \underline{\theta} - \frac{1}{2}; \tag{3.48}$$

potom $\underline{\theta}(1-\underline{\theta})$, resp. $\overline{\theta}(1-\overline{\theta})$, má tvar $\frac{1}{4}-\underline{\rho}^2$, resp. $\frac{1}{4}-\overline{\rho}^2$. Dosazením do předchozí rovnice dostáváme

$$\begin{aligned}
2\rho\left(\underline{\rho} + \tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{1}{4} - \underline{\rho}^2 &= 2\rho\left(\overline{\rho} + \tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{1}{4} - \overline{\rho}^2\\
\underline{\rho}^2 - 2\rho\underline{\rho} - \rho &= \overline{\rho}^2 - 2\rho\overline{\rho} - \rho.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Přičteme-li k oběma stranám rovnice $\rho^2$, potom máme vyjádření

$$\begin{aligned}
\underline{\rho}^2 - 2\rho\underline{\rho} + \rho^2 &= \overline{\rho}^2 - 2\rho\overline{\rho} + \rho^2\\
\left(\underline{\rho} - \rho\right)^2 &= \left(\overline{\rho} - \rho\right)^2\\
\left|\underline{\rho} - \rho\right|^2 &= \left|\overline{\rho} - \rho\right|^2
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Předpokládejme, že $\underline{\rho}$ a $\overline{\rho}$ mají tvar

$$\underline{\rho} = \rho - \omega, \qquad \overline{\rho} = \rho + \omega \tag{3.51}$$

a vyjádřeme tvar $\omega$.

Opět budeme vycházet z okrajových podmínek pro první derivaci funkce $f$. Platí následující:

$$\begin{array}{rcl} 2\rho\left(\underline{\theta}+\frac{K_1}{K_2}\right)+\underline{\theta}\,(1-\underline{\theta}) & = & 0 \\ 2\rho\left(\underline{\rho}+\frac{1}{2}+\frac{K_1}{K_2}\right)+\frac{1}{4}-\underline{\rho}^2 & = & 0 \\ \rho\,(1+\rho)-\left(\rho-\underline{\rho}\right)^2+\frac{1}{4}+2\rho\frac{K_1}{K_2} & = & 0. \end{array} \tag{3.52}$$

Na základě (3.51) máme

$$\rho\,(1+\rho)-\omega^2+\frac{1}{4}+2\rho\frac{K_1}{K_2}=0 \tag{3.53}$$

a tedy

$$\omega^2=\rho\,(1+\rho)+\frac{1}{4}+2\rho\frac{K_1}{K_2}=\theta^2+2\rho\frac{K_1}{K_2}. \tag{3.54}$$

Na základě vztahu (3.54) můžeme vyjádřit poměr $\frac{K_1}{K_2}$ jako

$$\frac{K_1}{K_2}=\frac{\omega^2-\theta^2}{2\rho}. \tag{3.55}$$

Nyní se budeme věnovat okrajovým podmínkám funkce $f$

$$f(\underline{\theta})=C^{\uparrow}, \qquad f(\overline{\theta})=C^{\downarrow}.$$

Zde je podstatný rozdíl $f(\overline{\theta})-f(\underline{\theta})$, který je konstatní a závisí na transakčních poplatcích. Víme, že definiční obor funkce $f$ je interval $\mathcal{D}_f=\left[\underline{\theta},\overline{\theta}\right]$, tedy pro $x\in\mathcal{D}_f$ platí:

$$\begin{array}{rcl} \underline{\theta} & \leq x \leq & \overline{\theta} \\ \underline{\rho}+\frac{1}{2} & \leq x \leq & \overline{\rho}+\frac{1}{2} \\ \rho-\omega+\frac{1}{2} & \leq x \leq & \rho+\omega+\frac{1}{2} \\ \theta-\omega & \leq x \leq & \theta+\omega. \end{array} \tag{3.56}$$

Nyní můžeme vyjádřit rozdíl $f(\overline{\theta})-f(\underline{\theta})$ jako $f(\theta+\omega)-f(\theta-\omega)$; využijeme-li (3.37) a (3.55), dostaneme následující:

$$\begin{array}{rcl} f(\theta+\omega)-f(\theta-\omega) & = & \log\left(\frac{\theta+\omega}{1-\theta-\omega}\frac{1-\theta+\omega}{\theta-\omega}\right)+\frac{1}{2\rho}\log\left(\frac{K_1+K_2(\theta+\omega)}{K_1+K_2(\theta-\omega)}\right) \\ & = & \log\left(\frac{\theta+\omega}{1-\theta-\omega}\frac{1-\theta+\omega}{\theta-\omega}\right)+\frac{1}{2\rho}\log\left(\frac{\omega^2-\theta^2+2\rho(\theta+\omega)}{\omega^2-\theta^2+2\rho(\theta-\omega)}\right) \\ & = & \log\left(\frac{\theta+\omega}{1-\theta-\omega}\frac{1-\theta+\omega}{\theta-\omega}\right)+\frac{1}{2\rho}\log\left(\frac{\omega+\theta}{\omega-\theta}\frac{\omega+\theta-1}{\omega-\theta+1}\right). \end{array} \tag{3.57}$$

Abychom ověřili existenci, musí být předchozí vztah roven $\int_{\theta-\omega}^{\theta+\omega} f'(x)dx$. To ukážeme pomocí rozkladu na parciální zlomky.

$$\begin{array}{rcl} \int_{\theta-\omega}^{\theta+\omega} f'(x)dx & = & \int_{\theta-\omega}^{\theta+\omega} \frac{\omega^2-(\theta-x)^2}{x(1-x)[2\rho x-(\theta^2-\omega^2)]}dx \\ & = & \int_{\theta-\omega}^{\theta+\omega} \frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2\rho x-(\theta^2-\omega^2)}dx \\ & = & \left[\log\frac{x}{1-x}+\frac{1}{2\rho}\log\left(2\rho x-(\theta^2-\omega^2)\right)\right]_{\theta-\omega}^{\theta+\omega} \\ & = & \log\left(\frac{\theta+\omega}{1-\theta-\omega}\frac{1-\theta+\omega}{\theta-\omega}\right)+\frac{1}{2\rho}\log\left(\frac{(\omega+\rho)^2-(\theta-\rho)^2}{(\omega-\rho)^2-(\theta-\rho)^2}\right). \end{array} \tag{3.58}$$

Vidíme, že obě vyjádření se shodují. Využijeme Lemma 3.3, které říká, že pokud se obě výše popsaná vyjádření rovnají, pak existuje řešení obyčejné diferenciální rovnice (3.35).

$\underline{\rho = 0}$**:**
**Tvar funkce f:**
Ještě zbývá případ, kdy $\rho = 0$, řešíme tedy rovnici

$$x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x^2(1-x)^2 f''(x). \tag{3.59}$$

Využijeme-li rozklad na parciální zlomky, dostaneme řešení obyčejné diferenciální rovnice ve tvaru

$$f(x) = \log\frac{x}{1-x} + K_1 x + K_2, \tag{3.60}$$

kde $K_1$, $K_2$ jsou konstanty.

**Existence funkce f:**
Nyní se věnujme okrajovým podmínkám. Z $f'(\underline{\theta}) = 0$, $f'(\overline{\theta}) = 0$ a následné substituce

$$\underline{\rho} = \underline{\theta} - \frac{1}{2}, \qquad \overline{\rho} = \overline{\theta} - \frac{1}{2}$$

vyplývá rovnost:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{1}{\underline{\theta}(1-\underline{\theta})} + K_1 & = 0 = & \frac{1}{\overline{\theta}(1-\overline{\theta})} + K_1 \\
\underline{\theta}(1-\underline{\theta}) & = & \overline{\theta}(1-\overline{\theta}) \\
\underline{\rho} + \frac{1}{2} - \left(\underline{\rho} + \frac{1}{2}\right)^2 & = & \overline{\rho} + \frac{1}{2} - \left(\overline{\rho} + \frac{1}{2}\right)^2 \\
\left(\frac{1}{2} + \underline{\rho}\right)\left(\frac{1}{2} - \underline{\rho}\right) & = & \left(\frac{1}{2} + \overline{\rho}\right)\left(\frac{1}{2} - \overline{\rho}\right) \\
\frac{1}{4} - \underline{\rho}^2 & = & \frac{1}{4} - \overline{\rho}^2 \\
\left|\underline{\rho}\right| & = & \left|\overline{\rho}\right|,
\end{array} \tag{3.61}$$

a protože $\underline{\theta} < \overline{\theta}$, tak

$$\overline{\rho} = -\underline{\rho} \qquad \text{a} \qquad \underline{\rho} < \overline{\rho}. \tag{3.62}$$

Na základě první rovnosti v (3.61) ještě vyjádříme konstantu $K_1$.

$$\begin{array}{rcl}
\frac{1}{\overline{\theta}(1-\overline{\theta})} + K_1 & = & 0 \\
K_1 & = & \frac{1}{\overline{\rho} - \frac{1}{4}}.
\end{array} \tag{3.63}$$

Nyní opět porovnáme přírustek $f(\overline{\theta}) - f(\underline{\theta})$ s určitým integrálem $\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} f'(x)dx$.

$$\begin{array}{rcl}
f(\overline{\theta}) - f(\underline{\theta}) & = & \log\frac{\frac{1}{2}+\overline{\rho}}{\frac{1}{2}-\overline{\rho}} - \log\frac{\frac{1}{2}+\underline{\rho}}{\frac{1}{2}-\underline{\rho}} + K_1\left(\frac{1}{2}+\overline{\rho}\right) + K_2 - K_1\left(\frac{1}{2}+\underline{\rho}\right) - K_2 \\
& = & \log\left(\frac{\frac{1}{2}+\overline{\rho}}{\frac{1}{2}-\overline{\rho}}\right)^2 + 2K_1\overline{\rho} \\
& = & \log\left(\frac{\frac{1}{2}+\overline{\rho}}{\frac{1}{2}-\overline{\rho}}\right)^2 + \frac{2\overline{\rho}}{\overline{\rho}-\frac{1}{4}}.
\end{array} \tag{3.64}$$

Dále

$$\begin{array}{rcl}
\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} f'(x)dx & = & \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} + K_1 dx \\
& = & \log\frac{\overline{\theta}}{1-\overline{\theta}} + K_1\overline{\theta} + K_2 - \left(\log\frac{\underline{\theta}}{1-\underline{\theta}} + K_1\underline{\theta} + K_2\right) \\
& = & \log\left(\frac{\frac{1}{2}+\overline{\rho}}{\frac{1}{2}-\overline{\rho}}\right)^2 + \frac{2\overline{\rho}}{\overline{\rho}-\frac{1}{4}},
\end{array} \tag{3.65}$$

tedy řešení existuje i pro případ, kdy $\rho = 0$. □

**Lemma 3.3.** *Nechť* $\theta \in (0,1)$ *a*

$$\xi_+(x) = x\frac{1+\lambda^{\uparrow}}{1+\lambda^{\uparrow}x}, \quad \xi_-(x) = x\frac{1-\lambda^{\downarrow}}{1-\lambda^{\downarrow}x}.$$

*Označíme-li* $\widetilde{\omega} := |\theta| \wedge |1-\theta| \wedge \sup\{\omega \geq 0 : \sup \mathbb{D}_\omega < 0\} > 0$, *kde* $\mathbb{D}_\omega = \{x \in [\theta-\omega, \theta+\omega] \to 2\rho - (\theta^2 - \omega^2)\}$, *pak existuje právě jedno* $\omega \in (0, \widetilde{\omega})$ *tak, že*

$$\int_{\theta-\omega}^{\theta+\omega} \frac{\omega^2 - (\theta - x)^2}{x(1-x)\left[2\rho x - (\theta^2 - \omega^2)\right]} dx + \log\frac{1+\lambda^{\uparrow}}{1-\lambda^{\downarrow}} = 0.$$

*Důkaz.* Důkaz je možné nalézt v [1], strana 241. □

## 3.5 Odvození ODE pro funkci $f$

Budeme vycházet z předpokladu, že $\widetilde{C}_t$ lze vyjádřit jako $f(\widetilde{\theta}_t)$ a na základě toho odvodíme obyčejnou diferenciální rovnici pro funkci $f$. Víme, že platí

$$\widetilde{S}_t = S_t \exp\{\widetilde{C}_t\} = \exp\{\widetilde{C}_t + \log S_t\}. \tag{3.66}$$

Vyjádříme diferenciál $d\log S_t$ a z Itôovy formule také diferenciál $d\widetilde{C}_t$:

$$\begin{aligned} d\log S_t &= rdt + \sigma dW_t \\ d\widetilde{C}_t &= f'(\widetilde{\theta}_t)d\widetilde{\theta}_t + \tfrac{1}{2}f''(\widetilde{\theta}_t)d\langle\widetilde{\theta}\rangle_t. \end{aligned} \tag{3.67}$$

Poměr $\frac{d\widetilde{S}_t}{d\widetilde{\mathcal{W}}_t}$ můžeme psát ve tvaru

$$\frac{d\widetilde{S}_t}{d\widetilde{\mathcal{W}}_t} = \frac{\widetilde{S}_0}{\widetilde{\mathcal{W}}_0}\exp\left\{\int_0^t \widetilde{\sigma}_s(1-\widetilde{\pi}_t)dW_s + \int_0^t \widetilde{\sigma}_s^2(1-\widetilde{\pi}_s)\left[\widetilde{\theta}_s - \frac{1}{2} - \frac{\widetilde{\pi}_s}{2}\right]ds\right\}. \tag{3.68}$$

Pokud v čase $t$ neobchodujeme, pak nedochází ke změně počtu akcií a $\varphi_t$ je konstantní. Potom diferenciál $d\widetilde{\pi}_t$ vyjádříme jako

$$\begin{aligned} d\widetilde{\pi}_t &= \varphi_t\frac{\widetilde{S}_t}{\widetilde{\mathcal{W}}_t}\left[\widetilde{\sigma}_t(1-\widetilde{\pi}_t)dW_t + \widetilde{\sigma}_t^2(1-\widetilde{\pi}_t)\left[\widetilde{\theta}_s - \tfrac{1}{2} - \tfrac{\widetilde{\pi}_s}{2}\right]dt + \tfrac{1}{2}\widetilde{\sigma}_t^2(1-\widetilde{\pi}_t)^2dt\right] \\ &= \widetilde{\pi}_t(1-\widetilde{\pi}_t)\left[\widetilde{\sigma}_t dW_t + \widetilde{\sigma}_t^2(\widetilde{\theta}_t - \widetilde{\pi}_t)dt\right]. \end{aligned} \tag{3.69}$$

Z důvodu log-optimality volíme $\widetilde{\theta}_t = \widetilde{\pi}_t$. Potom platí

$$d\widetilde{\theta}_t = \widetilde{\theta}_t(1-\widetilde{\theta}_t)\widetilde{\sigma}_t dW_t. \tag{3.70}$$

Nyní vyjádříme $d\widetilde{C}_t + d\log S_t$ jako

$$\begin{aligned} d\widetilde{C}_t + d\log S_t &= f'(\widetilde{\theta}_t)d\widetilde{\theta}_t + \tfrac{1}{2}f''(\widetilde{\theta}_t)d\langle\widetilde{\theta}\rangle_t + rdt + \sigma dW_t \\ &= \left(\tfrac{1}{2}f''(\widetilde{\theta}_t)\widetilde{\theta}_t^2(1-\widetilde{\theta}_t)^2\widetilde{\sigma}_t^2 + r\right)dt + \left(f'(\widetilde{\theta}_t)\widetilde{\theta}_t(1-\widetilde{\theta}_t)\widetilde{\sigma}_t + \sigma\right)dW_t \end{aligned} \tag{3.71}$$

a současně

$$\begin{aligned} d\widetilde{C}_t + d\log S_t &= d\log\widetilde{S}_t \\ &= \left(\widetilde{\mu}_t - \tfrac{1}{2}\widetilde{\sigma}_t^2\right)dt + \widetilde{\sigma}_t dW_t. \end{aligned} \tag{3.72}$$

Porovnáním koeficientů u členů $dt$ a $dW_t$ dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici pro funkci $f$ ve tvaru

$$x - \frac{1}{2} = \rho\left[1 - x(1-x)f'(x)\right]^2 + \frac{1}{2}x^2(1-x)^2 f''(x).$$

# Závěr

Cílem diplomové práce bylo seznámit se s řízením portfolia s proporcionálními transakčními náklady a popsat využití nástroje stínových cen k nalezení optimální strategii pro investora s takovým portfoliem.

Pro účely diplomové práce předpokládáme trh, kde investor vlastní určité počáteční bohatství a má pouze dvě možnosti, jak investovat - buď může peníze vložit do banky, tedy investovat do bezrizikového aktiva, nebo může nakupovat a prodávat akcie. Za každý nákup a prodej platí investor transakční poplatky; navíc předpokládáme, že peníze vložené do banky se neúročí. Z toho plyne, že jediným způsobem, jak investor může své bohatství rozmnožit, je investice do akcií. Diplomová práce ukazuje, jaké množství svého bohatství by měl investor do akcií vložit, aby dosáhl maximální asymptotické míry geometrického růstu bohatství.

Samotný způsob hledání optimální strategie je založen na stínových cenách. Nejprve jsme převedli ceny, za které investor nakupuje či prodává, na cenu jedinou; jedná se právě o zmíněnou stínovou cenu. Při transakcích za tuto cenu nejsou placeny transakční poplatky, investor nakupuje tehdy, kdy se stínová cena rovná ceně nabídky a prodává, pokud se rovná ceně poptávky.

S využitím Itôova procesu a teorie martingalů jsme odvodili interval, ve kterém se musí pohybovat tzv. optimální proporce, tj. poměr bohatství investora vloženého do akcií k celkovému bohatství. Potom jsme celou situaci založenou na stínových cenách převedli zpět na případ, kdy je obchodování zatíženo transakčními poplatky a získali jsme interval pro optimální proporci na reálném trhu.

V práci je také dokázáno, že aplikací jakékoliv jiné strategie než optimální by investor na trhu dosáhl menší míry růstu bohatství; strategie popisovaná v diplomové práci tedy skutečně ukazuje, jak investovat nejefektivněji.

# Seznam použité literatury


[1] DOSTÁL, Petr. Investment strategies in the long run with proportional transaction costs and a HARA utility function. Quantitative Finance. 2009, vol. 9, issue 2, s. 231-242. DOI: 10.1080/14697680802039873. Dostupné z: http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/14697680802039873

[2] DUPAČOVÁ, Jitka, Jan HURT a Josef ŠTĚPÁN. Stochastic Modeling in Econoimics and Finance. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002, 386 s. ISBN 14-020-0840-6.

[3] KALLSEN, Jan a Johannes MUHLE-KARBE. On Using Shadow Prices in Portfolio Optimalization with Transaction Costs.

[4] KŘIVÁNKOVÁ, Lenka. Wienerův proces. Brno, 2009. Diplomová práce. Masarykova Univerzita v Brně. Vedoucí práce Martin Kolář.

[5] KOLÁŘOVÁ, Edita. Stochastické diferenciální rovnice v elektrotechnice. Brno, 2005. Disertační práce. Vysoké učení technické v Brně. Vedoucí práce Jan Franců.

[6] SKOROCHOD, Anatoli. Stochastic equations for diffusion processes in a bounded region. Theory of Probability and its Applications. 1961, 264 - 274.

[7] SKOROCHOD, Anatoli. Stochastic equations for diffusion processes in a bounded region II. Theory of Probability and its Applications. 1962, 3 - 23.

[8] STEELE, Michael J. Stochastic Calculs and Financial Applications. New York: Springer, 2001, 300 s. ISBN 03-879-5016-8.

# Seznam tabulek

1.1 Násobení členů $dt$ a $dW_t$ pro dva procesy. . . . . . . . . . . . . . . . . 9
1.2 Násobení členů $dt$ a $dW_t$ pro více procesů. . . . . . . . . . . . . . . . 10

# Seznam použitých zkratek

ODE - Ordinary Differential Equation (Obyčejná diferenciální rovnice)
SDE - Stochastic Differential Equation (Stochastická diferenciální rovnice)