

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Pokročilé metody kalibrace modelů úrokových sazeb

Dominika Holotňáková

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Jiří Witzany, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Praha 2013

Tento priestor by som chcela využiť na pod'akovanie sa vedúcemu mojej diplomovej práce Doc. RNDr. Jiřímu Witzanymu, Ph.D., konzultantovi Mgr. Jakubovi Černému za jeho pripomienky, návrhy, odborné rady a množstvo trpežlivosti a času. Zároveň by som rada pod'akovala svojim rodičom a kamarátom za neustálu podporu počas písania tejto práce.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Prahe dne 31.7.2013

Dominika Holotňáková

Názov práce: Pokročilé metody kalibrace modelů úrokových sazeb

Autor: Dominika Holotňáková

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci diplomovej práce: Doc. RNDr. Jiří Witzany, Ph.D.

Abstrakt: Práca je zameraná na štúdium pokročilých metód kalibrácie modelov úrokových mier. Teoretická časť oboznamuje so základnou terminológiou z finančnej matematiky, finančných, konkrétnie úrokových derivátov. Predstavuje modely úrokových mier, pričom sa zameriava na HJM rámec a podrobne popisuje Libor market model, potom približuje použitie bayesovského princípu pri výpočte pravdepodobnosti v metódach MCMC. V závere tejto časti sú popísané metódy kalibrácie volatility na tržné dátu. Poslednú kapitolu tvorí praktická aplikácia rôznych metód kalibrácie LIBOR market modelu a následne ocenenia úrokovej swapcie. V úvode je popísaný postup úpravy vstupných údajov a spôsob ocenenia úrokového derivátu. Ten je následne použitý pri ohodnotení derivátového obchodu podľa spomínaných metód.

Kľúčové slová: HJM rámec, LIBOR market model, Swap market model, Stochastic volatility, Bayesovské metody, MCMC algoritmy

Title: Advanced methods of interest rate models calibration

Author: Dominika Holotňáková

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Doc. RNDr. Jiří Witzany, Ph.D.

Abstract: This thesis is focused on the study of advanced methods of interest rate models calibration. The theoretical part provides introduction to basic terminology of financial mathematics, financial, concretely interest rate derivatives. It presents interest rate models, it is mainly aimed at HJM approach and describes in detail the Libor market model, then introduces the use of Bayesian principle in calculating the probability of MCMC methods. At the end of this section the methods of calibration of volatility to market data are described. The last chap-

ter consists of the practical application of different methods of calibration Libor market model and consequently pricing od interest rate swaption. The introduction describes procedure of arrangement of input data and process of pricing of interest rate derivatives. It is consequently used for the valuation of derivative contract according to mentioned methods.

Keywords: HJM Framework, LIBOR market model, Swap market model, Stochastic volatility, Bayesian methods, MCMC algorithms

Obsah

Úvod	1
1 Základné pojmy	2
1.1 Finančné deriváty	4
1.2 Úrokové deriváty	5
2 Modely úrokovej miery	8
2.1 Modely okamžitej spotovej úrokovej miery	8
2.1.1 Vašíčkov model	9
2.1.2 Ho-Leeho model	10
2.1.3 Hull-Whitov model	11
2.2 Modely okamžitej forwardovej úrokovej miery	12
2.3 Tržné modely	15
2.3.1 LIBOR tržný model (LIBOR market model - LMM)	16
2.3.2 Swapový tržný model (Swap market model - SMM)	20
3 Kalibrácia volatility	22
3.1 Pomocou volatility capov	22
3.2 Pomocou volatility swapcií a capov	24
4 Bayesovský prístup	29
4.1 Bayesovské metódy	29

4.2	Markov Chain Monte Carlo algoritmy	30
4.2.1	Metropolis-Hastingsov algoritmus	31
4.2.2	Gibbsov algoritmus	32
4.2.3	Všeobecný Metropolisov algoritmus	34
4.2.4	Kalibrácia MCMC prístupom	34
5	Analytická časť	39
5.1	Vstupné dátá a ich úprava	40
5.2	Oceňovanie	43
5.2.1	Ocenenie pomocou volatilít capov	44
5.2.2	Historická volatilita	46
5.2.3	Ocenenie pomocou volatility swapcií a capov	46
5.2.4	MCMC	49
5.2.5	Porovnanie cien swapcie	53
Záver		54
Literatúra		55
Zoznam obrázkov		56
Zoznam tabuliek		57
Príloha		58

Úvod

Úroková miera je jednou z najzákladnejších veličín vo svete financií. Vplyva na zmenu výmenných kurzov, je stabilizujúcim faktorom štátnej meny a nepochybne podstatnou časťou pri rozhodovaní a uzatváraní finančných obchodov.

Vplyvom rôznych faktorov je jej vývoj neistý, preto predstavuje isté riziko. V súvislosti s tým začali od 70. rokov postupne vznikať finančné deriváty, ktorých podstatou bolo akési zabezpečenie sa proti spomínanému riziku. V dnešnom svete financií už pojem "finančný derivát" nie je žiadnou novinkou. Naplno sa využívajú a to nie len vo forme zaistenia, ale taktiež ako spôsob k získaniu bohatstva.

Dôsledkom krízy bol nárast volatility úrokových sadzieb, čo podnietilo obchodníkov zaoberať sa derivátm založenými práve na zmene úrokových mier. Postupne vznikli rôzne modely, ktoré popisujú vývoj sadzieb stochastickými procesmi.

Theoretická časť tejto práce je v úvode venovaná stručnej charakteristike derivátov a spôsobu ich delenia. Ďalej sa zaoberá jednotlivými modelmi úrokových mier, pričom popisuje najznámejšie jednofaktorové modely spotovej sadzby. Hlavným cieľom je oboznámenie sa s pokročilými metódami, medzi ktoré patria modely založené na HJM rámci, konkrétnie jeho diskretizovanú verziu - LIBOR market model. Stal sa prvým modelom, ktorý je konzistentný so vzťahmi, ktoré sa využívali na ocenenie derivátov. Práca detailne popisuje rôzne spôsoby kalibrácie na tržné dátá, predovšetkým metódu Monte Carlo simulácií s využitím bayesovského prístupu a markovskej vlastnosti.

Praktická časť je venovaná oceneniu úrokovej swapcie použitím rôznych metód kalibrácie LIBOR market modelu. Jej cieľom je oceniť daný kontrakt z hľadiska kupujúcej strany a porovnať výsledky jednotlivých postupov. Množstvo štúdií ukázalo, že volatilitná štruktúra nie je časovo konštantná. Preto sa v MCMC simuláciách bude pracovať so stochastickou volatilitou, konkrétnie s Hestonovým modelom. Pre numerické výpočty a grafické výsledky bol použitý program R a Mathematica.

1. Základné pojmy

Definície jednotlivých pojmov čerpáme z [2].

Úrok - peňažná čiastka, ktorú je dlžník povinný zaplatiť veriteľovi za dočasné poskytnutie úveru.

Úroková sadzba - percentuálne vyjadrenie úroku.

Spotová úroková miera $R(t, T)$ - miera výnosnosti do času T bezkupónového dlohopisu s nominálnou čiastkou N a hodnotou $P(t, T)$ v čase t , $0 \leq t \leq T$.

$$P(t, T) = Ne^{-R(t, T)(T-t)}, \quad (1.1)$$

pre zjednodušenie budeme uvažovať $N = 1$. Z (1.1) vyjadríme

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \log P(t, T),$$

$$R(t, t + \Delta t) = -\frac{1}{\Delta t} \log P(t, t + \Delta t). \quad (1.2)$$

Okamžitá spotová úroková miera - limitné vyjadrenie spotovej mieres $R(t, t + \Delta t)$ pre $\Delta t \rightarrow 0_+$.

Forwardová úroková miera $f(t, T_1, T_2)$ - v čase t na dobu od T_1 do T_2 , $t \leq T_1 \leq T_2$, je definovaná ako riešenie rovnice

$$e^{R(t, T_2)(T_2-t)} = e^{R(t, T_1)(T_1-t)} \cdot e^{f(t, T_1, T_2)(T_2-T_1)}.$$

Platí:

$$\frac{1}{P(t, T_2)} = \frac{1}{P(t, T_1)} \cdot e^{f(t, T_1, T_2)(T_2-T_1)}. \quad (1.3)$$

Z (1.3) vyjadríme vzťah pre forwardovú úrokovú mieru:

$$f(t, T_1, T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1} [\log P(t, T_1) - \log P(t, T_2)]. \quad (1.4)$$

Okamžitá forwardová úroková miera - limitné vyjadrenie forwardovej mieres $f(t, T_1, T_2)$ pre $T_2 \rightarrow T_1$.

Definícia (Bankový účet). Definujme $B(t)$ ako hodnotu bankového účtu v čase $t \geq 0$. Predpokladáme $B(0) = 1$ a jeho vývoj podľa nasledujúcej diferenciálnej rovnice:

$$dB(t) = r_t B(t) dt,$$

kde r_t je nezáporná funkcia času. Z predošlého vzťahu plynie:

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right). \quad (1.5)$$

Táto definícia hovorí, že investovanie jednotkovej čiastky v čase 0 dáva výnos (1.5) v čase t , pričom r_t je okamžitá miera príslušná bankovému účtu.

Definícia (Stochastický diskontný faktor). (Stochastický) diskontný faktor $D(t, T)$, medzi dvoma časovými okamžikmi t a T , je čiastka v čase t , ktorá je "ekvivalentná" peňažnej jednotke platenej v čase T :

$$D(t, T) = \frac{B(t)}{B(T)} = \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right).$$

Definícia (Bezkupónový dlhopis). Bezkupónový dlhopis s maturitou T je kontrakt, ktorý držiteľovi zaručuje platbu peňažnej jednotky v čase T bez medziplatieb. Hodnotu kontraktu v čase $t < T$ označujeme $P(t, T)$. Platí $P(T, T) = 1$ pre všetky T .

Definícia (Kalendárne štandardy (Day-count convention)). Ak predpokladáme časovú jednotku jeden rok, a počet períoď nie je celé číslo, existuje niekolko spôsobov na výpočet počtu dní medzi dvoma dátumami. Medzi najčastejšie patria:

Kalendár Euro 30/360 Podľa tohto postupu má každý mesiac 30 dní a každý rok 360 dní. Počet períoď n je rovný vyjadreniu

$$\frac{1}{360}(360(YYYY_2 - YYYY_1) + 30(MM_2 - MM_1) + \min(DD_2, 30) - \min(DD_1, 30)),$$

kde $YYYY$ označuje rok, MM mesiac a DD deň s indexom podľa príslušného dátumu

Kalendár US 30/360 Každý mesiac, ktorý má 31 dní je skrátený na 30 dní s výnimkou, ak $DD_1 < 30$ a $DD_2 = 31$, potom druhý dátum sa zmení na prvý deň

v ďalšom mesiaci.

Kalendár Actual/Actual *Predpokladá skutočný počet dní medzi dvoma dátumami a skutočný počet dní v roku*

Kalendár Actual/360 *Aktuálny počet dní v mesiaci a 360 dní v roku.*

Kalendár Actual/365 *Aktuálny počet dní v mesiaci a 365 dní v roku (platí i pre priestupné roky).*

1.1 Finančné deriváty

Primárnym dôvodom pre vznik derivátov bola snaha o zaistenie sa proti riziku vyplývajúceho z negatívnej zmeny hodnoty podkladového inštrumentu. Vďaka tomuto efektu sa neskôr začali využívať k špekuláciam na kapitálových trhoch, určeným k zbohatnutiu. S tým súvisí taktiež tretí motív užívania derivátov, a to arbitráž - inými slovami - snaha dosiahnuť zisk bez rizika, čo deriváty vďaka termínovosti umožňujú.

Základná definícia vymedzuje pojem derivát ako finančný inštrument, ktorého hodnota je závislá na cene nejakého aktíva.

Finančné deriváty môžeme roztriediť do skupín podľa rôznych kritérií.

Spôsob obchodovania

- *burzovné* - deriváty obchodované na burzách, ktoré sú sprostredkovateľom jednotlivých transakcií medzi stranami.
- *mimoburzovné* (OTC - Over the counter) - deriváty obchodovateľné bez sprostredkovateľa, obchod prebieha priamo medzi dvoma stranami.

Typ kontraktu

- *forwardy* - termínový obchod medzi dvoma stranami, ktorý dnes fixuje podmienky zmeny podkladového aktíva, ktorá prebehne k určitému budúcemu dátumu. S týmito derivátmi sa obchoduje výlučne na OTC trhoch.
- *futures* - štandardizovaný forward, určený pre obchodovanie na burzách.

- *swapy* - dohoda o zmene daného finančného toku (napr. úrokové platby vzťahujúce sa k rovnakej nominálnej čiastke, ale definované iným spôsobom).
- *opcie* - kontrakt, pri ktorom má držiteľ právo (nie povinnosť!) kúpiť (call opcia) alebo predať (put opcia) podkladové aktívum. Za toto právo je povinný platiť predávajúcemu opčnú prémiu.

Typ podkladového aktíva

Toto delenie závisí na voľbe podkladového aktíva. V závislosti na tom ich delíme na:

úrokové - odvájajúce sa od výšky úrokovej miery,

menové - súvisiace so zmenou výmenných kurzov,

akciové - závisiace na cene akcií.

Potom poznáme ešte *komoditné* a *úverové* deriváty.

1.2 Úrokové deriváty

Úrokovými derivátmami nazývame finančné inštrumenty, ktorých hodnota priamo súvisí s výškou úrokovej miery. Základom ich ohodnotenia je znalosť vývoja úrokovej miery. Podrobnejší popis sme prebrali z [9].

FRA - forward rate agreement

Mimoburzovný nástroj vytvorený tak, aby presne zodpovedal nárokom klienta. Umožňuje zaistenie pevnej úrokovej sadzby (FRA sadzba) v budúcom období pre úver alebo vklad úročený pohyblivou sadzbou (referenčná sadzba). Je používaný k odstráneniu rizika spojeného so zmenou úrokovej miery vzťahujúcej sa k danému dátumu. U FRA nedochádza k skutočnej výmene jednotlivých sadzieb, ale ku kompenzácií úrokového rozdielu.

FRA je kontrakt obsahujúci tri časové okamžiky. Súčasný čas t , dátum počiatku $T > t$ a konca obdobia $S > T$, na ktoré sa FRA sadzba vzťahuje. Kontrakt zaistuje držiteľovi platby pevnej úrokovej miery pre časové obdobie medzi T a S . V čase S je teda fixná platba založená na pevnej miere K vymenená za varia-

bilnú sadzbu založenej na spotovej miere $L(T, S)$ obnovenej v T s maturitou v S . Formálne v čase S dostane jedna strana $\tau(T, S)KN$ peňažných jednotiek a platí $\tau(T, S)L(T, S)N$, kde N je nominálna hodnota kontraktu. Hodnota kontraktu v S je $N\tau(T, S)(K - L(T, S))$, za predpokladu zhodnej day-count convention. Celková hodnota kontraktu v čase t :

$$FRA(t, T, S, \tau(T, S), N, K) = N [P(t, S)\tau(T, S)K - P(t, T) + P(t, S)].$$

Úrokový swap (IRS - interest rate swap)

Spočíva v dohode medzi dvoma stranami o budúcich vzájomných platbách úrokových sadzieb, vzťahujúcich sa k rovnakej istine. Jeden účastník platí úroky určené na základe pevnej sadzby (výška je určená pri uzavretí kontraktu a platí po celu dobu trvania swapu). Druhý účastník je platcom variabilnej sadzby. Nedochádza k výmene nominálnej čiastky ani úrokových platieb, podobne ako u FRA sa to rieší vyplatením úrokového rozdielu. Platcovský IRS je kontrakt, ktorý vymieňa platby medzi dvoma časovými okamžikmi začínajúcimi v budúcom čase. V každom okamihu T_i z dopredu stanoveného súboru dátumov $T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta$, jedna strana platí čiastku $N\tau_i K$, kde K je fixná miera, N nominálna čiastka a τ_i je časť roku medzi T_{i-1} a T_i . Druhá strana platí čiastku $N\tau_i L(T_{i-1}, T_i)$ s pohyblivou sadzbou. Predpokladáme, že miery sa vzťahujú k rovnakému dátumu a podľa rovnakej day-count convention.

Ak je platená fixná miera a obdržaná pohyblivá miera, jedná sa o platcovský IRS (PFS). Diskontovaná výplata tohto kontraktu v čase $t < T_\alpha$:

$$PFS : \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(t, T_i) N \tau_i (L(T_{i-1}, T_i) - K).$$

V opačnom prípade sa jedná o príjemcovský IRS (RFS), ktorého diskontovaná výplata v čase $t < T_\alpha$ je:

$$RFS : \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(t, T_i) N \tau_i (K - L(T_{i-1}, T_i)).$$

Úrokové opcie

Dáva možnosť zaistenia maximálnej alebo minimálnej sadzby v budúcom období. Pokiaľ kupujúci svoje právo využije, predavajúci je povinný uskutočniť daný kontrakt. Úrokové opcie sa delia v závislosti na použití:

- *Strop (Cap)* - Zaistenie garanciou maximálnej referenčnej sadzby. Kupujúcemu zaručuje právo na plnenie úrokového rozdielu v prípade, kedy referenčná sadzba stúpne nad maximálnu hranicu. Tento kontrakt vzniká spojením klasických call opcíí (tzv. caplets).
- *Dno (Floor)* - opak capu, zaistenie teda prebieha garanciou minimálnej referenčnej sadzby. Pokiaľ referenčná sadzba klesne pod minimálnu hranicu, držiteľ obdrží od upisovateľa vyrovnávaciu platbu. Floor vzniká súčasným nákupom klasických put opcíí (tzv. floorlets).

Swapcie

V tomto odstavci spomenieme ešte ďalší typ opcií, ktorý budeme využívať v praktickej časti práce. Predstavuje právo držiteľa na uzavretie úrokového swapu k nejakému budúcemu obdobiu. Podstatou tohto kontraktu je možnosť kúpiť alebo predať swapový kontrakt v budúcnosti za dnes dohodnutých podmienok, a tým sa zaistiť proti nepriaznivému vývoju sadzieb. Tieto deriváty, nazývané tiež opcie na IRS, sa delia na dva hlavné typy, a to platcovská a príjemcovská verzia. Európska platcovská swapcia je opcia dávajúca právo vstúpiť do platcovskej IRS v danom čase v budúcnosti, ktorý sa nazýva swapová maturita (maturita opcie). Zvyčajne sa tento čas zhoduje v prvém obnovujúcim dátumom podkladového swapu. Dĺžku tohto swapu ($T_\beta - T_\alpha$) nazývame *tenor* swapcie. Diskontovaná výplata platcovskej swapcie v čase T_α je:

$$N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i) \tau_i (F(T_\alpha; T_{i-1}, T_i) - K).$$

Opcia sa uskutoční iba v prípade, že táto hodnota bude kladná. Diskontovaná výplata platcovskej swapcie diskontovaná z času T_α do súčasnosti je:

$$ND(t, T_\alpha) \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i) \tau_i (F(T_\alpha; T_{i-1}, T_i) - K).$$

2. Modely úrokovej miery

Teoretické poznatky v tejto kapitole čerpáme z [1].

2.1 Modely okamžitej spotovej úrokovej miery

Okamžitú mieru chápeme ako mieru určenú pre nekonečne krátky časový okamih. Jej nevýhodou je však fakt, že je nemožné ju priamo sledovať na trhu, preto ako jej approximáciu zväčša považujeme jednodennú úrokovú sadzbu. Výsledné modely následne využívame taktiež pre miery vzťahujúce sa k dlhšiemu obdobiu. Do tejto skupiny modelov úrokových mier patria jednofaktorové a viacfaktorové modely. Faktorom rozumieme zdroj neistoty, ktorý je určený pomocou spojitého Wienerovho procesu. Spojitosť v tomto prípade označuje proces so spojitými trajektóriami.

Definícia (Wienerov proces). *Štandardný Wienerov proces $W(t), t \geq 0$ je spojitý stochastický proces splňujúci:*

- $W(0) = 0$ s pravdepodobnosťou 1,
- $W(t)$ má nezávislé prírastky s rozdelením $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ pre $0 \leq s < t$.

V množstve modelov, ktoré boli navrhnuté sa predpokladá len jedna stochastická premenná, takže proces pre r má formu

$$dr(t) = m(r(t))dt + s(r(t))dW(t), \quad (2.1)$$

kde m je okamžitý drift, s je okamžitá volatilita a predpokladáme, že sú funkiami času. Hodnota úrokového derivátu je daná vzťahom

$$E \left[e^{-\bar{r}(T-t)} f_T \right], \quad (2.2)$$

kde \bar{r} označuje spojitý priemer r v časovom intervale (t, T) a E je očakavaná hodnota. Nech $P(t, T)$ je cena diskontovaného dlhopisu v čase t s výplatou 1 v

čase T , potom z (2.1) plynie vzťah

$$P(t, T) = E [e^{-\bar{r}(T-t)}]. \quad (2.3)$$

Ak predpokladáme, že $R(t, T)$ je spojito úročená miera v čase t pre dobu $T - t$,

$$\begin{aligned} P(t, T) &= e^{R(t, T)(T-t)}, \\ R(t, T) &= -\frac{1}{T-t} \ln P(t, T), \end{aligned}$$

z rovnice (2.3) potom plynie

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln E [e^{\bar{r}(T-t)}].$$

Uvedieme len niektoré modely, ich rozšírenia a odhady parametrov môžeme nájsť v [4].

2.1.1 Vašíčkov model

Predpokladom pre tento model je, že okamžitá sadzba sa vzhľadom k skutočnej rizikovej mieri odvíja z Ornstein-Uhlenbeckovho procesu s konštantnými parametrami. Môžeme teda predpokladať, že sa miera r riadi týmto procesom. Vašíčkov model opisuje vývoj okamžitej spotovej miery, kde $m(r(t)) = k[\theta - r(t)]$ a $s(r(t)) = \sigma$:

$$dr(t) = k[\theta - r(t)]dt + \sigma dW(t), r(0) = r_0,$$

kde r_0 , k , θ , σ sú kladné konštandy. Z tohto vzťahu získame vyjadrenie $r(t)$ pre každé $s \leq t$:

$$r(t) = r(s)e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-k(t-u)} dW(u).$$

Nezanedbateľnou nevýhodou tohto modelu je fakt, že úroková miera $r(t)$ môže s kladnou pravdepodobnosťou nadobúdať i záporné hodnoty. Analytické vyjadrenie pre cenu diskontovaného dlhopisu s výplatou 1 v čase T je dané rovnicou:

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)},$$

kde pre $a \neq 0$

$$\begin{aligned} B(t, T) &= \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}, \\ A(t, T) &= \exp \left[\frac{(B(t, T)-T+t)(a^2 b - \sigma^2/2)}{a^2} - \frac{\sigma^2 B(t, T)^2}{4a} \right], \end{aligned}$$

pre $a = 0$

$$\begin{aligned} B(t, T) &= T - t, \\ A(t, T) &= \exp [\sigma^2(T - t)^3 / 6]. \end{aligned}$$

2.1.2 Ho-Leeho model

Ho a Lee navrhli prvý bezarbitrážny model úrokových mier vo forme binomického stromu, obsahujúceho dva parametre. Jeden, týkajúci sa volatility a druhý, ktorý súvisí s tržnou cenou rizika. Tento model je prvým, ktorý zahŕňa i forwardové sadzby. Vývoj je daný predpisom

$$dr(t) = a(t)dt + \sigma dW(t),$$

kde $a(t) = \frac{\partial f(0,t)}{\partial t} + \sigma^2 t$ a σ je okamžitá volatilita krátkodobej miery. Hodnota diskontovaného dlhopisu v čase t je vyjadrená vzťahom

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-r(t)(T-t)},$$

kde $\ln A(t, T) = \ln \frac{P(0,T)}{P(0,t)} - (T-t)\frac{\partial \ln P(0,t)}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 t(T-t)^2$.

Výhodou tohto modelu je jeho markovská tvárnosť, ľahko sa aplikuje na presné vyhľadenie súčasnej časovej štruktúry úrokových mier. Avšak dáva len malú voľnosť vo voľbe volatility, pretože všetky sadzby majú rovnakú okamžitú odchýlku σ . Ďalšou nevýhodou je, že model nemá tzv. "mean reversion", čo značí návrat k strednej hodnote.

2.1.3 Hull-Whitov model

Vašíčkov model mal popri možnej zápornosti úrokovej sadzby aj ďalšiu nevýhodu a to nezávislosť volatility na výške úrokovej miery. V snahe o presnejšie vyrovnanie modelovanej výnosovej krivky bolo potrebné zaviesť do Vašíčkovho modelu parametre, ktoré sú zavislé na čase. S týmto rozšírením vznikol model Johna Hullu a Alana Whitea, ktorý je dodnes používaný v návrhoch risk-managementu. Ich model je definovaný predpisom:

$$dr(t) = [\vartheta(t) - ar(t)]dt + \sigma dW(t),$$

kde ϑ je deterministická funkcia času, a a σ sú konštandy. Úpravou získame vzťah pre $r(t)$:

$$r(t) = r(s)e^{-a(t-s)} + \int_s^t e^{-a(t-u)}\vartheta(u)du + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)}dW(u).$$

Cena dlhopisu odvodená z tohto modelu má tvar

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)},$$

kde

$$\begin{aligned} B(t, T) &= \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}, \\ \ln A(t, T) &= \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} - B(t, T) \frac{\partial \ln P(0, t)}{\partial t} - \frac{1}{4a^3}\sigma^2 (e^{-aT} - e^{-at})^2 (e^{2at} - 1). \end{aligned}$$

Volatilita v tomto modele je daná ako parametrom σ , tak i funkciou $a(t)$, preto dáva širšiu možnosť pre jej štruktúru v porovnaní s Ho-Leeho modelom. Volatilita v čase t pre dlhopis so splatnosťou v čase T je

$$\frac{\sigma}{a} [1 - e^{-a(T-t)}].$$

Okamžitá volatilita v čase t pre urokovú mieru platnú v čase T je

$$\frac{\sigma}{a(T-t)} [1 - e^{-a(T-t)}]$$

a okamžitá volatilita pre forwardovú mieru je $\sigma e^{-a(T-t)}$. Parameter σ určuje odchýlku krátkodobej sadzby, zatiaľ čo a určuje zakrivenosť časovej štruktúry. Pri voľbe $a = 0$ dostávame volatilitu ako lineárnu funkciu maturity a okamžitej odchýlky.

2.2 Modely okamžitej forwardovej úrokovej miery

Najzásadnejšou nevýhodou modelov spotovej úrokovej miery je fakt, že nedokážu presne zachytiť aktuálny priebeh časovej štruktúry. Poskytujú síce primeraný poľad o tejto štruktúre, ale v jednotlivých situáciach môže dôjsť k nepresnostiam. Nakoľko sa tvrdí, že i malá chyba v cene podkladového aktíva môže zapríčiniť výraznú chybu v hodnote opcie, množstvo odborníkov sa začalo zaoberať modelmi, ktoré by boli konzistentné s časovou štruktúrou. Tieto modely sú známe pod názvom bezarbitrážne. Vychádzajú z tzv. HJM model. Tieto modely bližšie popisuje [5].

Heath - Jarrow - Morton

Heath, Jarrow a Morton previedli myšlienku modelu Ho-Lee do spojitého času. Vyvinuli všeobecný prístup pre modelovanie dynamiky úrokových mier. Spočíval v tom, že za základ modelu zvolili okamžitú forwardovú mieru, z ktorej odvodili rámec pre vývoj celej výnosovej krivky, v ktorom dynamika forwardových mier je plne určená pomocou okamžitej volatility. Podľa tohto prístupu, drift môže byť vyjadrený ako funkcia volatility a vzájomných korelácií, teda samotný drift nie je nutné odhadovať. Významnosť tohto rámca spočíva v skutočnosti, že akýkoľvek model úrokových mier môžeme byť takto odvodený.

Veta 1 (Itôovo lemma). *Nech $X(t)$ je stochastický proces v tvare $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$ a f je deterministická, dvakrát diferencovateľná funkcia. Potom $Y_t = f(X_t)$ je stochastický proces a platí*

$$dY_t = (\mu_t f'(X_t) + \frac{1}{2} \sigma_t^2 f''(X_t))dt + (\sigma_t f'(X_t))dW_t.$$

Odvodenie modelu

Zvolíme pevné T , predpokladáme, že dynamika hodnoty bezrizikového bezkupónového dlhopisu sa riadi procesom

$$dP(t, T) = r(t)P(t, T)dt + s(t, T)P(t, T)dW(t),$$

volatilita $s(t, T)$ je závislá na hodnotách okamžitých úrokových sadzieb a na cene dlhopisov. Vzťah (1.4) pre forwardovú mieru následne upravíme:

$$df(t, T_1, T_2) = \frac{d[\log P(t, T_1)] - d[\log P(t, T_2)]}{T_2 - T_1}. \quad (2.4)$$

Použitím Itôovho lemmatu získavame vzťahy:

$$\begin{aligned} d[\log P(t, T_1)] &= [r(t) - \frac{1}{2}s^2(t, T_1)]dt + s(t, T_1)dW(t) \\ d[\log P(t, T_2)] &= [r(t) - \frac{1}{2}s^2(t, T_2)]dt + s(t, T_2)dW(t). \end{aligned}$$

Tieto vzťahy dosadíme do (2.4):

$$df(t, T_1, T_2) = \frac{s^2(t, T_2) - s^2(t, T_1)}{2(T_2 - T_1)}dt + \frac{s(t, T_2) - s(t, T_1)}{T_2 - T_1}dW(t).$$

Pre zjednodušenie si označme $T \equiv T_1$. Potom pre $T_2 \rightarrow T$:

$$df(t, T) = s(t, T) \frac{\partial s(t, T)}{\partial T} dt - \frac{\partial s(t, T)}{\partial T} dW(t).$$

Označme:

$$\begin{aligned} \mu(t, T) &= s(t, T) \frac{\partial s(t, T)}{\partial T} \\ \sigma(t, T) &= -\frac{\partial s(t, T)}{\partial T}. \end{aligned}$$

Vieme, že platí $s(t, t) = 0$, z toho plynie:

$$s(t, T) = s(t, T) - s(t, t) = \int_t^T \frac{\partial s(t, \tau)}{\partial T} d\tau = - \int_t^T \sigma(t, \tau) d\tau.$$

Na základe tohto môžeme upraviť vzťah pre $\mu(t, T)$:

$$\mu(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, \tau) d\tau.$$

Definícia. Nech je daná počiatočná forwardová krivka $f(0, T)$, povieme, že sa forwardová úroková miera $f(t, T)$ riadi HJM modelom, ak vychovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$df(t, T) = \mu(t, T) dt + \sigma(t, T) dW(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\text{kde } \mu(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, \tau) d\tau, \\ \sigma(t, T) = -\frac{\partial s(t, T)}{\partial T}.$$

Predpokladáme, že pre pevnú maturitu T , okamžitá forwardová sadzba je daná difúznym procesom

$$df(t, T) = \alpha(t, T) dt + \sigma(t, T) dW(t), \\ f(0, T) = f^M(0, T),$$

$T \rightarrow f^M(0, T)$ je tržná krivka okamžitej volatility v čase $t = 0$. Výhodou takto modelovanej miery je fakt, že aktuálna krivka je vstupom daného modelu. Dynamika daná predošlým vzťahom nemusí byť nutne bezarbitrážna. V prípade, že dynamika je modelovaná vzhľadom k rizikovo neutrálnej pravdepodobnostnej miere, musí platiť

$$\mu(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s) ds.$$

Úpravou získame predpis pre dynamiku forwardovej sadzby vzhľadom k danej miere:

$$f(t, T) = f(0, T) = \int_0^t \sigma(u, T) \int_u^T \sigma(u, s) ds du + \int_0^t \sigma(s, T) dW(s).$$

Aplikáciou Itôovho lemma dostávame vývoj ceny bezkupónového dlhopisu v tvarе:

$$dP(t, T) = P(t, T) \left[r(t) dt - \left(\int_t^T \sigma(t, s) ds \right) dW(t) \right],$$

kde $r(t)$ je okamžitá sadzba a platí pre ňu vzťah:

$$r(t) = f(t, t) = f(0, t) + \int_0^t \sigma(u, t) \int_u^t \sigma(u, s) ds du + \int_0^t \sigma(s, t) dW(s).$$

Proces pre krátkodobú sadzbu podľa takéhoto HJM modelu nemá markovskú vlastnosť, to znamená, že dynamika pre mieru r v budúcom čase t závisí na celom vývoji až do času t . To je zásadným problémom všeobecného HJM modelu. Ukazuje sa, že vhodnou špecifikáciou volatility σ je možné docieliť, aby miera r splňovala markovskú vlastnosť. Príkladom takejto úpravy môže byť:

$$\sigma(t, T) = \xi(t)\psi(T), \quad (2.5)$$

kde ξ a ψ sú striktne kladné a deterministické funkcie času. Pri takejto špecifikácii pre krátkodobú sadzbu platí predpis

$$\begin{aligned} r(t) &= f(0, t) + \int_0^t \xi(u)\psi(t) \int_u^t \xi(u)\psi(s) ds du + \int_0^t \xi(s)\psi(t) dW(s) \\ &= f(0, t) + \psi(t) \int_0^t \xi^2(u) \int_u^t \psi(s) ds du + \psi(t) \int_0^t \xi(s) dW(s). \end{aligned}$$

Zadefinujeme si deterministickú funkciu A

$$A(t) := f(0, t) + \psi(t) \int_0^t \xi^2(u) \int_u^t \psi(s) ds du.$$

Spolu s predpokladom diferencovateľnosti môžeme vzťah pre $dr(t)$ vyjadriť následovne:

$$\begin{aligned} dr(t) &= A'(t)dt + \psi'(t) \int_0^t \xi(s) dW(s) + \psi(t)\xi(t)dW(t) \\ &= \left[A'(t) + \psi'(t) \frac{r(t)-A(t)}{\psi(t)} \right] dt + \psi(t)\xi(t)dW(t). \end{aligned}$$

2.3 Tržné modely

HJM rámcu rovnako ako aj modely spotovej miery popisujú vývoj pomocou okamžitej úrokovej sadzby, ktorá nie je pozorovateľná priamo na trhu. Ďalším problémom bola náročná aplikovateľnosť na deriváty, ktoré sú na trhu obchodované. To bolo dôvodom pre vznik tržných modelov.

Medzi tieto modely zaradzujeme forwardový-LIBOR model (LFM) určený pre oceňovanie stropov pomocou Black cap formuly na capových trhoch a forwardový-swap model (LSM) oceňujúci swapcie pomocou Black swap formuly na swapčných trhoch. Keďže tieto trhy patria k hlavným, je dôležité, aby existoval model kompatibilný s týmito formulami. Pred odvodným tržných modelov, žiadne dynamiky mier neboli vhodné.

Problémom však stále ostáva nekompatibilita medzi LFM a LSM. Jednoducho povedané, ak LIBOR sadzby sú lognormálne vzhľadom k istej miere, swapové sadzby lognormálne vzhľadom k svojej mieri, v tom istom čase, nie sú. Preto sa v tejto časti budeme zaoberať aj odvodením modelu vzhľadom k iným mieram.

Uvažujme v čase 0 caplet s maturitou T_2 , obnovovacím dňom T_1 ($0 < T_1 < T_2$), strajkom K a nominálnou čiastkou 1. Nech τ označuje časť roku medzi T_1 a T_2 . Tento kontrakt vypláca čiastku $\tau(L(T_1, T_2) - K)^+$ v čase T_2 , kde $L(T_1, T_2)$ je LIBOR miera v čase T_1 s maturitou v čase T_2 .

2.3.1 LIBOR tržný model (LIBOR market model - LMM)

LMM je prvým modelom vývoja úrokových mier, ktorý je zhodný so zaužívanými spôsobmi oceniaja úrokových derivátov. Je založený na HJM rámci, odlišnosť spočíva v tom, že dynamiky pozorovateľných sadzieb modeluje priamo. Prvá verzia bola vytvorená už v roku 1994, avšak do podoby, v akej ho poznáme dnes ju previedli Alan Brace, Dariusz Gatarek a Marek Musiela v roku 1997. Podľa mien týchto autorov sa tiež stretávame s názvom BGM model.

Odvodenie modelu

Nech $t_0 = 0$ a t_1, t_2, \dots, t_N sú obnovovacie časy pre capy, ktoré sa dnes obchodujú na trhu. V našom prípade sú obnovované polročne, tzn. $t_1 = 0.5$, $t_2 = 1$, $t_3 = 1.5$, atď. Nech $\tau_k = t_{k+1} - t_k$. Označme $\{\tau_0, \dots, \tau_M\}$ odpovedajúce časti roku, kde τ_i je časť roku prislúchajúca dvojici (t_{i-1}, t_i) , $i > 0$ a τ_0 je obdobie od začiatku do t_0 . Hodnoty t_i zvyčajne vyjadrujeme v rokoch od súčasného času.

Označme:

$F_k(t) \dots$ forwardová miera pre časový interval t_k a t_{k+1} daná v čase t .

$\zeta_k(t) \dots$ volatilita $F_k(t)$ v čase t .

$m(t) \dots$ index pre nasledujúci obnovovací dátum, v čase t , tzn. $m(t)$ je najmenšie celé číslo, pre ktoré platí $t \leq t_{m(t)}$.

$v_k(t) \dots$ volatilita bezkupónového dlhopisu $P(t, t_k)$ v čase t .

Uvažujme forwardovú mieru $F_k(t) = F(t; t_{k-1}, t_k)$, $k = 1, \dots, M$, ktorá je platná do času t_{k-1} , v ktorom je totožná so spotovou sadzbou: $F_k(t_{k-1}) = L(t_{k-1}, t_k)$.

V prostredí, ktoré je rizikovo neutrálne vzhľadom k cene bezkupónového dlhopisu $P(t, t_k)$, $F_k(t)$ je martingalom, ktorý sleduje proces:

$$dF_k(t) = \zeta_k(t)F_k(t)dW, \quad (2.6)$$

kde dW je Wienerov proces. Výhodnejšie je však pracovať v prostredí, ktoré je forwardové rizikovo neutrálne vzhľadom k bezkupónovým dlhopisom, ktoré majú dobu splnatnosti v nasledujúcim obnovovacom čase capu. Toto prostredie sa nazýva *rolujúce forwardové rizikovo neutrálne prostredie*. V tomto prípade diskontujeme z času t_{k+1} do času t_k pomocou sadzieb bezkupónových dlhopisov obstaraných v čase t_k so splatnosťou v čase t_{k+1} , pričom nás nezaujíma správanie tejto miery medzi danými časmi. V čase t je rolujúce prostredie rizikovo neutrálnym prostredím vzhľadom, k cene dlhopisu $P(t, t_{m(t)})$. Vzťah (2.6) nám poskytuje proces pre $F_k(t)$ v rizikovo neutrálnom prostredí vzhľadom k $P(t, t_{k+1})$. Pre rolujúce prostredie je proces pre $F_k(t)$ vyjadrený vzťahom:

$$dF_k(t) = \zeta_k(t) [v_{m(t)}(t) - v_{k+1}(t)] F_k(t)dt + \zeta_k(t)F_k(t)dW. \quad (2.7)$$

Ako spolu súvisia forwardové miery a cena dlhopisu nám ukazuje vzťah:

$$\frac{P(t, t_i)}{P(t, t_{i+1})} = 1 + \tau_i F_i(t),$$

čo môžeme upraviť do tvaru

$$\ln P(t, t_i) - \ln P(t, t_{i+1}) = \ln [1 + \tau_i F_i(t)].$$

Použitím Itôovho lemma a následným porovaním koeficientov Wienerovho procesu dostávame:

$$v_i(t) - v_{i+1}(t) = \frac{\tau_i F_i(t) \zeta_i(t)}{1 + \tau_i F_i(t)}. \quad (2.8)$$

Vzťah (2.7) upravíme s použitím (2.8):

$$\frac{dF_k(t)}{F_k(t)} = \sum_{i=m(t)}^k \frac{\tau_i F_i(t) \zeta_i(t) \zeta_k(t)}{1 + \tau_i F_i(t)} dt + \zeta_k(t) dW \quad (2.9)$$

Nech Q^k je pravdepodobnostná miera spojená s numeraire $P(\bullet, T_k)$ (príkladom

môže byť cena dlhopisu, ktorého maturita je zhodná s maturitou forwardovej miery). Q^k nazývame *forwardová miera pre maturitu T_k* alebo *forwardovo-prispôsobená miera*. Cena obchodovateľného aktíva je daná vzťahom

$$F_k(t)P(t, T_k) = [P(t, T_{k-1}) - P(t, T_k)] / \tau_k.$$

Ak je vyjadrená vzhľadom k numeraire $P(\bullet, T_k)$, musí platiť, že je to martingál pod pravdepodobnosťnou mierou Q^k asociovaný s danou numeraire. Avšak cena po vydelení $P(\bullet, T_k)$ je samotné $F_k(t)$, z čoho plynie, že $F_k(t)$ je martingál pod Q^k . Z toho plynie bezdriftovosť pod Q^k , ak je $F_k(t)$ namodelované v súlade s difúznym procesom.

Bezdriftová dynamika pre F_k pod Q^k je vyjadrená vzťahom:

$$dF_k(t) = \sigma_k(t)F_k(t)dW_k(t), t \leq T_{k-1}, \quad (2.10)$$

kde $\sigma_k(t)$ je okamžitá volatilita forwardovej LIBOR mieri F_k v čase t , $W_k(t)$ je Brownov pohyb.

Použitím Itôovho lemma:

$$\begin{aligned} d \ln F_k(t) &= -\frac{\sigma_k^2(t)}{2}dt + \sigma_k(t)dW_k(t), t \leq T_{k-1}, \\ \ln F_k(t) &= \ln F_k(0) - \int_0^T \frac{\sigma_k^2(t)}{2}dt + \int_0^T \sigma_k(t)dW_k(t). \end{aligned}$$

Martingál a pravdepodobnosťné miery

Martingály a miery sú dôležitou súčasťou pri oceňovaní v rizikovo-neutrálnom prostredí. Martingál môžeme brať ako bezdriftový stochastický proces.

Definícia (Martingál). *Postupnosť náhodných premenných X_0, X_1, \dots je martingál, ak*

$$\forall i > 0 \quad \mathbf{E}(X_i | X_{i-1}, X_{i-2}, \dots, X_0) = X_{i-1}.$$

Mieru chápeme ako jednotku, v ktorej oceňujeme dané položky. Tržná cena rizika nejakej premennej určuje nárast miery všetkých položiek, ktoré závisia od danej premennej. Výber tejto tržnej ceny rizika sa tiež pokladá za definovanie *pravdepodobnosťnej miery*.

Dynamika forwardových mier pod rôznymi numeraires

Predpokladajme, že máme pravdepodobnosnú mieru Q^i , ktorá je rôzna od Q^k pre $t \leq \min(T_i, T_{k-1})$. Chceme nájsť dynamiky $F_k(t)$ pod touto mierou.

Forwardová pravdepodobnosná miera

Za predpokladu lognormality dostávame vzťahy pre dynamiky F_k pod forwardovo-prispôsobenou mierou Q^i v troch prípadoch:

$$i < k, t \leq T_i : dF_k(t) = \sigma_k(t) F_k(t) \sum_{j=i+1}^k \frac{\rho_{k,j} \tau_j \sigma_j(t) F_j(t)}{1 + \tau_j F_j(t)} dt + \sigma_k(t) F_k(t) dW_k(t),$$

$$i = k, t \leq T_{k-1} : dF_k(t) = \sigma_k(t) F_k(t) dW_k(t),$$

$$i > k, t \leq T_{k-1} : dF_k(t) = -\sigma_k(t) F_k(t) \sum_{j=k+1}^i \frac{\rho_{k,j} \tau_j \sigma_j(t) F_j(t)}{1 + \tau_j F_j(t)} dt + \sigma_k(t) F_k(t) dW_k(t),$$

kde $Z = Z^i$ je Brownov pohyb pod Q^i . Ak koeficienty $\sigma(\cdot)$ sú ohraničené, tak každá rovnica poskytuje jediné riešenie.

Rizikovo neutrálna dynamika

Rizikovo neutrálna dynamika forwardovej LIBOR miery v LIBOR tržnom modele je:

$$dF_k(t) = \mu_k(t) F_k(t) dt + \sigma_k(t) F_k(t) dW_k(t), \quad (2.11)$$

kde

$$\begin{aligned} \mu_k(t) &= \sum_{j=\beta(t)}^k \frac{\tau_j \rho_{j,k} \sigma_j(t) \sigma_k(t) F_j(t)}{1 + \tau_j F_j(t)} + \sigma_k(t) \rho \int_t^{T_{\beta(t)-1}} \sigma_f(t, u)' du \\ &= \sum_{j=\beta(t)}^k \frac{\tau_j \rho_{j,k} \sigma_j(t) \sigma_k(t) F_j(t)}{1 + \tau_j F_j(t)} + \sum_{j=\beta(t)}^k \rho_{k,j} \sigma_k(t) \int_t^{T_{\beta(t)-1}} (\sigma_f)_j(t, u) du. \end{aligned}$$

Drift v (2.11) ma nevhodný tvar. Druhá suma vznikla z vývoja $P(t, T_{\beta(t)-1})$, ktorý nemôže byť odvodnený z forwardových mier nášho druhu. Tento problém môžeme odstrániť zdiskretizovaním numeraire bankového účtu $B(t)$. Uvažujme

$$B_d(t) = \frac{P(t, T_{\beta(t)-1})}{\prod_{j=1}^{\beta(t)-1} P(T_{j-1}, T_j)} = \prod_{j=1}^{\beta(t)-1} (1 + \tau_j F_j(T_{j-1})) P(t, T_{\beta(t)-1}).$$

$B_d(t)$ môžeme interpretovať ako hodnotu v čase t následovne definovaného portfólia. V čase $t = 0$ portfólio je rovné menovej jednotke. Táto jednotka je investovaná v množstve X_0 z T_0 bezkupónových dlhopisov. Ak investujeme menovú jednotku, súčasná hodnota dlhopisov musí byť nutne rovná jednej, takže platí $X_0 P(0, T_0) = 1$, odkiaľ plynne $X_0 = 1/P(0, T_0)$. V čase T_0 dostaneme výplatu X_0 a investujeme ju v množstve $X_1 = X_0 / P(T_0, T_1) = 1/(P(0, T_0) P(T_0, T_1))$ z

T_1 bezkupónových dlhopisov. V tomto algoritme pokračujeme až kým nedosiahneme požadovaný čas $T_{\beta(t)-2}$, predchádzajúci súčasnemu času t , kde investujeme $X_{\beta(t)-1} = 1/\Pi_{j=1}^{\beta(t)-1} P(T_{j-1}, T_j)$ z $T_{\beta(t)-1}$ dlhopisov. Súčasná hodnota v aktuálnom čase t tejto investície je $X_{\beta(t)-1} P(t, T_{\beta(t)-1})$, tj. $B_d(t)$.

Spotová LIBOR miera

Dynamika spotovej LIBOR pravdepodobnostnej miery forwardových LIBOR sazieb v LMM modeli je:

$$dF_k(t) = \sigma_k(t) F_k(t) \sum_{j=\beta(t)}^k \frac{\tau_j \rho_{j,k} \sigma_j(t) F_j(t)}{1 + \tau_j F_j(t)} dt + \sigma_k(t) F_k(t) dW_k(t).$$

Dynamiky spotovej a rizikovo neutrálnej miery neprispôsťajú žiadne známe prechodové hustoty, z toho plynie že v prípade simulovania musia byť rovnice prevedené do diskretného tvaru.

2.3.2 Swapový tržný model (Swap market model - SMM)

Predpokladajme jednotkovú nominálnu čiastku . V každom okamžiku T_j , v súbore $\{T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta\}$, platí jedna strana čiastku zodpovedajúcu fixnej úrokovej miere K : $\tau_j K$, kde τ_j je časť roka medzi T_{j-1} a T_j . Druhá strana vyplatí čiastku zodpovedajúcu pohyblivej úrokovej sadzbe $F_j(T_{j-1})$ určenú v predošлом okamihu T_{j-1} s maturitou danou súčasným platobným okamžikom T_j .

z toho je zrejme, že pohyblivá strana je obnovovaná v časoch $T_\alpha, T_{\alpha+1}, \dots, T_{\beta-1}$ a platená v $T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta$.

Výplata v čase T_α pre platcovskú stranu takéhoto IRS môže byť vyjadrená ako

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(T_\alpha, T_i) \tau_i (F_i(T_{i-1}) - K).$$

Z toho vyplýva vyjadrenie diskontovanej výplaty v $t < T_\alpha$:

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(t, T_i) \tau_i (F_i(T_{i-1}) - K).$$

Hodnota takého kontraktu je:

$$\begin{aligned}
PFS(t, [T_\alpha, \dots, T_\beta], K) &= E_t \left\{ \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(t, T_i) \tau_i (F_i(T_{i-1}) - K) \right\} \\
&= \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) \tau_i E_t (F_i(T_{i-1}) - K) \\
&= \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) \tau_i (F_i(t) - K) \\
&= \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} [P(t, T_{i-1}) - (1 + \tau_i K) P(t, T_i)].
\end{aligned}$$

Môžeme vidieť, že ani volatilita, ani korelácia sadzieb nemajú vplyv na ocenenie tohto produktu. *Forwardová swapová miera* zodpovedajúca kontraktu IRS je hodnota K, ktorá ho robí spravodlivým, to znamená K, pri ktorej je jeho súčasná hodnota rovná nule. Dosiahneme ju, ak posledný výraz v predošej rovnosti položíme nule.

$$\begin{aligned}
S_{\alpha,\beta}(t) &= \frac{P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)} = \frac{1 - FP(t; T_\alpha, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i FP(t; T_\alpha, T_\beta)} \\
&= : \exp(\psi(F_{\alpha+1}(t), F_{\alpha+2}(t), \dots, F_\beta(t))), \\
FP(t; T_\alpha, T_\beta) &= \frac{P(t, T_\beta)}{P(t, T_\alpha)} = \Pi_{j=\alpha+1}^{\beta} FP_j(t), \quad FP_j(t) = \frac{1}{1 + \tau_j F_j(t)},
\end{aligned}$$

kde FP označuje forwardový diskontný faktor. Tento vzťah môžeme prepísať do tvaru:

$$S_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1 - \prod_{j=\alpha+1}^{\beta} \frac{1}{1 + \tau_j F_j(t)}}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i \prod_{j=\alpha+1}^i \frac{1}{1 + \tau_j F_j(t)}}. \quad (2.12)$$

Môžeme to tiež upraviť položením vzťahu (2.3.2) nule, čím dostaneme vyjadrenie:

$$\begin{aligned}
S_{\alpha,\beta}(t) &= \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} w_i(t) F_i(t), \\
w_i(t) &= \frac{\tau_i FP(t, T_\alpha, T_i)}{\sum_{k=\alpha+1}^{\beta} \tau_k FP(t, T_\alpha, T_k)} = \frac{\tau_i P(t, T_i)}{\sum_{k=\alpha+1}^{\beta} \tau_k P(t, T_k)}.
\end{aligned}$$

3. Kalibrácia volatility

Všeobecne, kalibráciou modelu na reálne dáta rozumieme proces nastavenia hodnôt parametrov tak, aby model napodobňoval skutočnosť. Presnejšie, pre LIBOR market model, hľadáme volatilitnú funkciu, tak, aby model zodpovedal hodnotám tržných capov a swapcií. Prvým krokom je vytvorenie funkcie s nízkym počtom parametrov.

3.1 Pomocou volatility capov

Nech $\zeta_k(t)$ je funkciou celých období medzi nasledujúcim obnovovacím dátumom a časom t_k . Označme Λ_i hodnotu $\zeta_k(t)$, kde i vyjadruje počet daných období. Predpokladajme, že σ_k je volatilita capov zodpovedajúcich časovému úseku medzi t_k a t_{k+1} . Forwardové volatility získame zo vzťahu:

$$\sigma_k^2 t_k = \sum_{i=1}^k \Lambda_{k-i}^2 \tau_{i-1} \quad (3.1)$$

Libor market model je najčastejšie implementovaný simuláciami Monte Carlo. Vzťah (2.9) po zahrnutí členov Λ_i vyjadríme

$$\frac{dF_k(t)}{F_k(t)} = \sum_{i=m(t)}^k \frac{\tau_i F_i(t) \Lambda_{i-m(t)} \Lambda_{k-m(t)}}{1 + \tau_i F_i(t)} dt + \Lambda_{k-m(t)} dW$$

alebo inak

$$d \ln F_k(t) = \left[\sum_{i=m(t)}^k \frac{\tau_i F_i(t) \Lambda_{i-m(t)} \Lambda_{k-m(t)}}{1 + \tau_i F_i(t)} - \frac{\Lambda_{k-m(t)}^2}{2} \right] dt + \Lambda_{k-m(t)} dW.$$

Ak predpokladáme, že pre drift $\ln F_k(t)$ platí $F_i(t) = F_i(t_j)$ pre každé $t_j < t < t_{j+1}$, potom

$$F_k(t_{j+1}) = F_k(t_j) \exp \left[\left(\sum_{i=j+1}^k \frac{\tau_i F_i(t_j) \Lambda_{i-j-1} \Lambda_{k-j-1}}{1 + \tau_i F_i(t_j)} - \frac{\Lambda_{k-j-1}^2}{2} \right) \tau_j + \Lambda_{k-j-1} \epsilon \sqrt{\tau_j} \right], \quad (3.2)$$

kde ϵ je náhodný výber z normovaného normálneho rozdelenia.

Našim cieľom je nasimulovať zero krivku pre N období. Začneme od času 0. Hodnoty $F_0(0), F_1(0), \dots, F_N(0)$ máme z počiatočnej krivky. Rovnica (3.2) nám dáva postup ako určiť hodnoty $F_1(t_1), F_2(t_1), \dots, F_{N-1}(t_1)$. Danú rovnosť použijeme znova a znova na dorátanie ďalších hodnôt $F_2(t_2), F_3(t_2), \dots, F_{N-1}(t_2)$ až po údaj $F_{N-1}(t_{N-1})$.

Nech T_0 je čas splatnosti opcie. Ďalej predpokladajme, že platobné dni swapu sú časy T_1, T_2, \dots, T_N . Definujme $\tau_i = T_{i+1} - T_i$ ako rozdiel v časových okamžikoch. Swapová miera v čase t je daná ako

$$s(t) = \frac{P(t, T_0) - P(t, T_N)}{\sum_{i=0}^{N-1} \tau_i P(t, T_{i+1})}. \quad (3.3)$$

Platí tiež

$$\frac{P(t, T_i)}{P(t, T_0)} = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{1}{1 + \tau_j G_j(t)}, \quad (3.4)$$

pre $1 \leq i \leq N$. Výraz $G_j(t)$ značí forwardovú mieru v čase t pre časový interval medzi T_j a T_{j+1} . Aplikujeme Itôovo lemma, po ktorom dostaneme vzťah pre rozptyl $V(t)$ swapovej miery:

$$V(t) = \left[\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\tau_k \beta_k(t) G_k(t) \gamma_k(t)}{1 + \tau_k G_k(t)} \right]^2, \quad (3.5)$$

kde

$$\gamma_k(t) = \frac{\prod_{j=0}^{N-1} [1 + \tau_j G_j(t)]}{\prod_{j=0}^{N-1} [1 + \tau_j G_j(t)] - 1} - \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \prod_{j=i+1}^{N-1} [1 + \tau_j G_j(t)]}{\sum_{i=0}^{N-1} \tau_i \prod_{j=i+1}^N [1 + \tau_j G_j(t)]}$$

a $\beta_j(t)$ je zložka volatility miery $G_j(t)$. Rozptyl $V(t)$ approximujeme položením $G_j(t) = G_j(0)$ pre všetky j a t . Swapová volatilita pre ocenenie swapcie je

$$\sqrt{\frac{1}{T_0} \int_{t=0}^{T_0} V(t) dt} \quad (3.6)$$

alebo inak

$$\sqrt{\frac{1}{T_0} \int_{t=0}^{T_0} \left[\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\tau_k \beta_k(t) G_k(0) \gamma_k(0)}{1 + \tau_k G_k(0)} \right]^2 dt}. \quad (3.7)$$

3.2 Pomocou volatility swapcií a capov

Nech t_0 je súčasný čas. Uvažujme súbor časových okamžikov $\varepsilon = \{T_0, \dots, T_M\}$, z ktorého vyberáme dvojice (T_{i-1}, T_i) . Nech $\{\tau_0, \dots, \tau_M\}$ sú zodpovedajúce časti roku, čo znamená, že τ_i je časť roku medzi dátumami T_{i-1} a T_i . τ_0 je dĺžka časového intervalu od dátumu uzavretia zmluvy do času T_0 . Položme $T_{-1} := 0$. Časy T_i zvyčajne uvažujeme v rokoch.

Uvažujme pravdepodobnosnú mieru Q^k spojenú s numeraire $P(\bullet, T_k)$. Túto mieru nazývame *forwardová miera pre maturitu T_k* . Pri jednoduchom úročení máme

$$F_k(t)P(t, T_k) = [P(t, T_{k-1}) - P(t, T_k)] / \tau_k.$$

Odtiaľ $F_k(t)P(t, T_k)$ je cena obchododovateľného aktíva. Ak je cena vyjadrená vzhľadom k numeraire $P(\bullet, T_k)$, musí to byť martingál pod mierou Q^k . Hodnota $F_k(t)P(t, T_k)$ vydelená týmto numeraire je $F_k(t)$, z čoho plynie, že je to martingál pod mierou Q^k .

Predpokladajme vývoj $F_k(t)$ vzťahom:

$$dF_k(t) = \sigma_k(t)F_k(t)dW(t), t \leq T_{k-1}, \quad (3.8)$$

kde dW je Wienerov proces s okamžitou kovarianciou $\rho = (\rho_{i,j})_{i,j=1,\dots,M}$ a $dW(t)dW(t)' = \rho dt$. Použitím Itôovho lemma, upravíme vzťah (3.8)

$$d \ln F_k(t) = -\frac{\sigma_k(t)^2}{2}dt + \sigma_k(t)dW_k(t), t \leq T_{k-1}.$$

Časová štruktúra volatility

Časovou štruktúrou volatility pre čas $t = T_i$ rozumieme graf tvorený bodmi

$$\{(T_{i+1}, V(T_i, T_{i+1})), (T_{i+2}, V(T_i, T_{i+2})), \dots, (T_{M-1}, V(T_i, T_{M-1}))\},$$

kde

$$V^2(T_i, T_{h-1}) = \frac{1}{\tau_{i,h-1}} \int_{T_i}^{T_{h-1}} \sigma_h^2(t)dt,$$

pre $h > i + 1$, $\tau_{i,h-1} = T_{h-1} - T_i$.

V čase 0 máme body

$$\{(T_0, V(0, T_0)), (T_1, V(0, T_1)), \dots, (T_{M-1}, V(0, T_{M-1}))\}.$$

Platí

$$V^2(0, T_{h-1}) = \frac{1}{\tau_{0,h-1}} \int_0^{T_{h-1}} \sigma_h^2(t) dt = v_{T_{h-1}-capl}^2,$$

takže dostávame sústavu bodov

$$\{(T_0, v_{T_0-capl}^2), \dots, (T_0, v_{T_{M-1}-capl}^2)\}.$$

Často sa predpokladá, že okamžitá volatilita forwardovej miery je po častiach konštantná. Inými slovami, volatilita $F_k(t)$ je konštantou v každom intervale $T_{m-2} < t \leq T_{m-1}$, kde je platná. Pri takomto predpoklade platí nasledujúca tabuľka:

Okamž.vol.	$t \in (0, T_0]$	$t \in (T_0, T_1]$	$t \in (T_1, T_2]$	\dots	$t \in (T_{M-2}, T_{M-1}]$
$F_1(t)$	$\sigma_{1,1}$	—	—	...	—
$F_2(t)$	$\sigma_{2,1}$	$\sigma_{2,2}$	—	...	—
.					
.					
.					
$F_M(t)$	$\sigma_{M,1}$	$\sigma_{M,2}$	$\sigma_{M,3}$...	$\sigma_{M,M}$

Tabuľka 3.1: Okamžitá volatilita forwardovej miery

Budeme predpokladať, že pre okamžitú volatilitu pre každé t platí vzťah

$$\sigma_k(t) := \phi_k \psi_{k-(\beta(t)-1)}, \quad (3.9)$$

kde $\beta(t) = k+1$ pre $T_{k-1} < t < T_k$. Pri takomto predpoklade môžeme predchádzajúcemu tabuľku prepísat nasledovne

Platí, že stredná hodnota forwardovej miery zodpovedá stretnéj hodnote capletu pre časový interval 0 až T_{i-1} . Na základe tohto si vyjadríme hodnotu volatility

$$v_{T_{i-1}-caplet}^2 = \frac{1}{T_{i-1}} \int_0^{T_{i-1}} \sigma_{i,\beta(t)}^2 dt = \frac{1}{T_{i-1}} \sum_{j=1}^i \tau_{j-1} \sigma_{i,j}^2. \quad (3.10)$$

Okamž.vol.	$t \in (0, T_0]$	$t \in (T_0, T_1]$	$t \in (T_1, T_2]$	\dots	$t \in (T_{M-2}, T_{M-1}]$
$F_1(t)$	$\phi_1\psi_1$	—	—	...	—
$F_2(t)$	$\phi_2\psi_2$	$\phi_2\psi_1$	—	...	—
.					
.					
$F_M(t)$	$\phi_M\psi_M$	$\phi_M\psi\psi_{M-1}$	$\phi_M\psi_{M-2}$...	$\phi_M\psi_1$

Tabuľka 3.2: Okamžitá volatilita forwardovej miery po úprave

Vzťah (3.10) si upravíme, aby zodpovedal predpisu pre okamžitú volatilitu (3.9).

$$(v_i^{MKT})^2 = \phi_i^2 \sum_{j=1}^i \tau_{j-1} \psi_{i-j+1}^2, \quad (3.11)$$

kde v_i^{MKT} sú volatility dostupné na trhu, v našom prípade volatility capletov.

Nech M značí dobu, pre ktorú chceme nasimulovať hodnoty forwardových sadzieb.
Upravíme si vyjadrenie pre parameter ϕ_i z rovnice (3.11)

$$\phi_i = \sqrt{\frac{(v_i^{MKT})^2 T_i}{\sum_{j=1}^i \tau_{j-1} \psi_{i-j+1}^2}}. \quad (3.12)$$

Na výpočet volatility swapcie, ktorej podkladový derivát začína v čase T_α a je splatný v čase T_β , použijeme Rebonatov vzťah :

$$(v_{\alpha,\beta}^{LMM})^2 = \frac{1}{T_\alpha} \sum_{i,j=\alpha+1}^\beta \frac{w_i(0)w_j(0)F_i(0)F_j(0)\rho_{i,j}}{S_{\alpha,\beta}(0)^2} \int_0^{T_\alpha} \sigma_i(t)\sigma_j(t)dt, \quad (3.13)$$

kde $S_{\alpha,\beta}$ je swapová sadzba, ktorú vypočítame, ako lineárnu kombináciu forwardových sadzieb

$$\begin{aligned} S_{\alpha,\beta}(t) &= \sum_{i=\alpha+1}^\beta w_i(t)F_i(t), \\ w_i(t) &= \frac{\tau_i FP(t, T_\alpha, T_i)}{\sum_{k=\alpha+1}^\beta \tau_k FP(t, T_\alpha, T_k)}, \\ FP(t, T_\alpha, T_i) &= \prod_{j=\alpha+1}^i \frac{1}{1+\tau_j F_j(t)}. \end{aligned}$$

Pre korelačnú maticu platí, že je symetrická a pozitívne semidefinitná. Vďaka týmto vlastnostiam ju môžeme prepísať v tvare

$$\rho = P H P^T,$$

kde P je ortogonálna matica, $PP^T = I$ a H je diagonálna matica, jej prvky sú vlastné čísla korelačnej matice. Nech Λ je matica obsahujúca druhé mocniny vlastných čísel. Nech $A := P\Lambda$. Potom platí

$$AA^T = \rho, \quad A^T A = H.$$

Rozklad $\rho = AA^T$ nahradíme maticou B typu $M \times n$ tak, že BB^T je matica s hodnotou n . Člen dW z (3.8) nahradíme zložkou BdW . Úpravou získame novú korelačnú maticu:

$$\begin{aligned} dWdW^T &= \rho dt, \\ BdW(BdW)^T &= BdWdW^T B^T = BB^T dt, \\ \rho^B &= BB^T. \end{aligned}$$

Pre získanie parametrov matice B navrhlo Rebonato nasledujúce vzťahy:

$$\begin{aligned} b_{i,1} &= \cos \theta_{i,1} \\ b_{i,k} &= \cos \theta_{i,k} \sin \theta_{i,1} \dots \sin \theta_{i,k-1}, 1 < k < n \\ b_{i,n} &= \sin \theta_{i,1} \dots \sin \theta_{i,n-1}, \end{aligned}$$

pre $i = 1, \dots, M$. Z tohto dostaváme vzťah pre prvky korelačnej matice ρ^B

$$\rho_{i,j}^B = \cos(\theta_i - \theta_j). \quad (3.14)$$

Teraz môžeme upraviť vzťah (3.13) s dosadením (3.14)

$$(v_{\alpha,\beta}^{LMM})^2 = \frac{1}{T_\alpha} \sum_{i,j=\alpha+1}^{\beta} \frac{w_i(0)w_j(0)F_i(0)F_j(0)\rho_{i,j}^B}{S_{\alpha,\beta}(0)^2} \phi_i \phi_j \sum_{h=0}^{\alpha} \psi_{i-h} \psi_{j-h}. \quad (3.15)$$

Podstatou kalibrovania tohto modelu je nastavenie počiatočných parametrov θ_i a ψ_i tak, aby hodnota $v_{\alpha,\beta}^{LMM}$ bola čo najbližšie k volatilite, ktorú máme k dispozícii z trhu $v_{\alpha,\beta}^{MKT}$. To docielime minimalizáciou vzťahu

$$s = \sum_{\beta-\alpha>1} (v_{\alpha,\beta}^{LMM} - v_{\alpha,\beta}^{MKT})^2.$$

Pre forwardovú mieru potom platí vzťah

$$d \ln F_k(t) = \sigma_k(t) \sum_{j=\alpha+1}^k \frac{\rho_{k,j}\tau_j\sigma_j(t)F_j(t)}{1+\tau_jF_j(t)} dt - \frac{\sigma_k(t)^2}{2} dt + \sigma_k(t)dW(t). \quad (3.16)$$

Pri voľbe malého časového rozdielu Δt možeme predošlý vzťah previesť na zdiskretizovaný tvar:

$$\ln F_k(t+\Delta t) = \ln F_k(t) + \sigma_k(t) \sum_{j=\alpha+1}^k \frac{\rho_{k,j}\tau_j\sigma_j(t)F_j(t)}{1+\tau_jF_j(t)} \Delta t - \frac{\sigma_k(t)^2}{2} \Delta t + \sigma_k(t)(W(t+\Delta t) - W(t)), \quad (3.17)$$

kde $(W(t + \Delta t) - W(t))$ má rozdelenie $\sqrt{\Delta t}\mathcal{N}(0, \rho)$.

$$\begin{aligned} F_k(t + \Delta t) &= F_k(t) \exp \left[\sum_{j=\alpha+1}^k \frac{\cos(\theta_k - \theta_j)\tau_j\phi_j\phi_k\psi_{j-\alpha}\psi_{k-\alpha}F_j(t)}{1+\tau_jF_j(t)} \Delta t \right] \\ &\quad \exp \left[-\frac{\phi_k^2\psi_{k-\alpha}^2}{2}\Delta t + \phi_k\psi_{k-\alpha}\sqrt{\Delta t}\varepsilon_k \right] \end{aligned} \quad (3.18)$$

4. Bayesovský prístup

Bayesovské postupy sú založené na základných pravdepodobnostných pravidlách, ktoré využívamé na rozličné úkony, ako napríklad odhady parametrov, porovnávanie dvoch či viacerých modelov, alebo predpovede do budúcnosti. Najzákladnejším pravidlom je Bayesov vzorec.

Definícia (Bayesova veta). *Nech A a B sú náhodné javy s pravdepodobnosťami $P(A)$ a $P(B)$, pričom $P(B) > 0$. Potom platí:*

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)*P(A)}{P(B)}.$$

Apriórna a aposteriórna hustota

Najpodstatnejším rozdielom medzi klasickým a bayesovským prístupom je pohľad na parameter, označme θ . V prípade klasického postupu, skúmame rozdelenie dát pre danú θ , pretože za výsledok experimentu považujeme dátu. Parameter je neznáme číslo. Bayesovský prístup považuje θ za spojité náhodné veličiny, ktoréj určíme pravdepodobnostné rozloženie. Hustotu $\pi(\theta)$, ktorú udáme pred tým, než sú dátu k dispozícii, nazývame *apriórna hustota*. Po obsiahnutí dát máme hustotu *aposteriórnu*.

4.1 Bayesovské metódy

Základnou ideou tejto metódy je zahrnutie apriórnej znalosti, či skúsenosti o hodnote neznámeho parametru vo forme pravdepodobnostného rozdelenia. Na rozdiel od klasického prístupu, kde považujeme parametre za neznáme konštanty a k ich odhadu používame iba rozdelenie pozorovaní, v bayesovskom modeli zahrnieme do záverov informácie, ktoré máme k dispozícii ešte pred realizáciou. Tieto informácie môžu byť subjektívne (na základne nazóru nejakého subjektu) alebo objektívne (vychádzajúce z predoších skúseností). Bayesovský prístup je teda založený na stanovení pravdepodobnostného modelu pre dátu (v popise označené ako *data*), vektor neznámych parametrov Θ , vedúce k vierohodnostnej funkcií $L(\Theta|data)$. Predpokladáme, že Θ je náhodný vektor, ktorý má apriórne

rozdelenie s hustotou $\pi(\Theta)$. Informácie ohľadom parametru Θ následne získame z aposteriórneho rozdelenia daného Bayesovou vetou:

$$\pi(\Theta|data) = \frac{L(\Theta|data)\pi(\Theta)}{\int_{\Omega} L(\Theta|data)\pi(\Theta)d\Theta}, \quad (4.1)$$

kde Ω značí množinu všetkých možných parametrov Θ . Výraz v menovateli je normalizujúcou konštantou aposteriórneho rozdelenia a je nezávislý na Θ . Vzťah (4.1) môžeme upraviť ako proporcionálny súčin viero hodnostnej funkcie a apriórnej hustoty.

$$\pi(\Theta|data) \propto L(\Theta|data)\pi(\Theta).$$

Tento spôsob odhadu parametrov sa stal predmetom kritiky mnohých odborníkov, a to z viacerých dôvodov. Predovšetkým preto, že rozdelenie sa konštruuje na základe apriórnej informácie, ktorej rôzna volba môže viesť k rôznym výsledkom. Ďalším významným dôvodom je to, že neznámy parameter musíme v niektorých prípadoch považovať za náhodnú veličinu, i keď sa môže jednať o konštantu.

4.2 Markov Chain Monte Carlo algoritmy

Bayesovské postupy sa zakladajú na podobe aposteriórneho rozdelenia, ktoré nepoznáme alebo ho môžeme poznať v explicitnom tvare. Často je však vo forme, z ktorej nevieme analyticky odvodiť jeho štatistické charakteristiky. Základnou ideou Monte Carlo metód je mnohopočetné simulovanie daného modelu. Predpokladom je znalosť rozdelenia modelu. Nech parameter θ , ktorý skúmame, má dané aposteriórne rozdelenie. Z neho urobíme n výberov, pomocou ktorých môžeme Monte Carlo spôsobom získať požadovanú charakteristiku parametru.

Zistenie tvaru aposteriórneho rozdelenia je vo väčšine prípadov veľkým problémom. Špeciálnym prípadom, kedy sa tomuto môžeme vyhnúť sú tzv. *konjugované modely*. Apriórne rozdelenie $f(\theta|\mu)$, označujeme za konjugované s modelom $f(D|\theta)$, ak aposteriórne rozloženie $f(\theta|D, \mu)$ náleží do rovnakej distribučnej triedy. Ich výhodou je skutočnosť, že postup od apriórneho k aposteriornemu rozdeleniu spočíva len v zmene parametrov bez toho, aby boli potrebné ďalšie výpočty. Nevýhodou však ostáva malá voľnosť vo výbere apriórneho rozloženia.

Často sa tiež stretávame so situáciou, kedy do modelu vstupujú i rušivé premenné. Typickým príkladom je normálne rozdelenie $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, kde dané parametre sú zvyčajne vzájomne korelované, z čoho plynie, že apriórna hustota má podobu $f(\mu, \sigma)$. Napriek neistote v hodnotách parametru σ , zaujíma nás prvý parameter. V tomto prípade môžeme rušivý prvok odstrániť integráciou - spočítaním marginálnej hustoty parametru μ . Takáto integrácia však často býva nejednoduchá. To bolo dôvodom, prečo sa v minulosti bayesovské metódy neuplatňovali v takom rozsahu ako je to dnes.

Obtiažnosť vyjadrenia aposteriórnej hustoty rastie úmerne s počtom parametrov, ktoré potrebujeme odhadnúť. Tento problém sa odstránil navrhnutím postupu, ktorý simuláciami generoval markovský reťazec, ktorého rozdelenie má tvar aposteriórneho rozdelenia, ktoré hľadáme. Tento postup nazývame Markov Chain Monte Carlo (MCMC) metóda. Výsledkom tohto generovania je vektor, z ktorého je možné napočítať požadované charakteristiky. Pokial' je počet simulácií dostatočne veľký, ich hodnoty sa priblížia k vhodným hodnotám.

Vďaka MCMC algoritmom je možné generovať výbery z akéhokoľvek zložitého mnohorozmerného rozdelenia. V porovnaní s ostatnými metódami odhadu parametrov, má MCMC algoritmus niekoľko zásadných výhod. Prvou je možnosť aplikovať ho na modely s viacerými premennými. Poskytuje taktiež riešenie ohľadom filtrácie a predikcie nepozorovaných faktorov. Týmto modelov sa venuje [6] a [11].

4.2.1 Metropolis-Hastingsov algoritmus

Tento postup bol navrhnutý Metropolisom, ktorý však obsahoval požiadavok na symetriu kandidátskej hustoty. Hastings neskôr tento algoritmus upravil tak, aby požadovaná symetria nebola nutná.

Uvažujme hustotu $q(\Theta, \vartheta)$, ktorú tiež označujeme ako kandidátsku hustotu, tak, že $\int q(\Theta, \vartheta) d\vartheta = 1$. Je nutné si uvedomiť, že výber z kandidátskeho rozdelenia, nie je okamžite výberom aposteriornym. O prijatí, resp. zamietnutí rozhoduje pravdepodobnosť akceptovania $a(\bullet)$.

Nech $R(0, 1)$ je rovnomerné rozdelenie na inervale $(0, 1)$. Potom algoritmus pre aposteriórne rozdelenie $\pi(\Theta, data)$ určíme nasledovným postupom.

Krok 0. Zvolíme vektor počiatočných hodnôt $\Theta_0 = (\theta_{1,0}, \theta_{2,0}, \dots, \theta_{k,0})$.

Krok 1. Položíme $i = 0$.

Krok 2. Generujeme kandidátsky vektor Θ^* z $q(\Theta_i, \bullet)$ a R z $R(0, 1)$.

Krok 3. Položíme $\Theta_{i+1} = \Theta^*$ ak $R \leq a(\Theta_i, \Theta^*)$ a $\Theta_{i+1} = \Theta_i$ inak,

$$a(\Theta, \vartheta) = \min \left\{ \frac{\pi(\vartheta | data) q(\vartheta, \Theta)}{\pi(\Theta | data) q(\Theta, \vartheta)}, 1 \right\}.$$

Krok 4. Položíme $i = i + 1$ a opakujeme Krok 2.

Existujú dva hlavné typy kandidátskej hustoty, a to symetrická a nesymetrická. Medzi jednoduché voľby symetrického rozdelenia patria napríklad normálne a rovnomerné, centrované so stredom v súčasnom stave, v ktorom sa reťazec nachádza.

Uvažujme normálne rozdelenie. Hodnota kandidáta je rovná $\Theta_i + \mathcal{N}(0, \sigma)$. Keďže pre hustotu platí $\mathcal{N}(\Theta^* - \Theta_i; 0, \sigma) = \mathcal{N}(\Theta_i - \Theta^*; 0, \sigma)$, je toto rozdelenie symetrické. Tento typ distribúcie poruší aktuálny stav markovského reťazca a potom na základe pravdepodobnosti $a(\bullet)$ príjme alebo zamietne túto hodnotu. Takto konštruovaný postup sa nazýva *náhodná prechádzka v Metropolisovom algoritme*. Inými slovami, tento algoritmus generuje náhodný výber takým spôsobom, že k poslednej hodnote, priráta hodnotu náhodnej premennej, ktorej rozdelenie je totožné s kandidátskou distribúciou.

Iným postupom je tzv. *nezávislý Metropolisov algoritmus*, ktorý generuje vzorky nezávislé na predošej hodnote. Pravdepodobnosť prijatia bude v tvare:

$$a(\Theta, \vartheta) = \min \left\{ \frac{\pi(\vartheta | data) q(\Theta)}{\pi(\Theta | data) q(\vartheta)}, 1 \right\}.$$

4.2.2 Gibbsov algoritmus

Bayesovský MCMC algoritmus sa stal často používaným nástrojom na odhad modelov s multidimenzionálnym vektorom parametrov. Gibbsov postup je špeciálnym prípadom Metropolis-Hastingsovej metódy, kde akceptujeme každý výber. To znamená, že pravdepodobnosť prijatia $\alpha(\bullet) = 1$.

Krok 0. Zvolíme vektor počiatocných hodnôt $\Theta_0 = (\theta_{1,0}, \theta_{2,0}, \dots, \theta_{k,0})$.

Krok 1. Položíme $i = 0$.

Krok 2. Generujeme $\Theta_{i+1} = (\theta_{1,i+1}, \theta_{2,i+1}, \dots, \theta_{k,i+1})$ nasledujúcim spôsobom:

- Generujeme $\theta_{1,i+1} \sim \pi(\theta_1 | \theta_{2,i}, \dots, \theta_{k,i}, data)$;
- Generujeme $\theta_{2,i+1} \sim \pi(\theta_2 | \theta_{1,i+1}, \theta_{3,i}, \dots, \theta_{k,i}, data)$;
- ...
- Generujeme $\theta_{k,i+1} \sim \pi(\theta_k | \theta_{1,i+1}, \theta_{2,i+1}, \dots, \theta_{k-1,i+1}, data)$.

Krok 3. Položíme $i = i + 1$ a opakujeme Krok 2.

Podmienené rozdelenia $\Theta_i, i = 1, 2, \dots$ úplne charakterizujú združené rozdelenie $\pi(\Theta | data)$. Podmienené pravdepodobnosti získame aplikovaním Bayesovej vety na vierohodnostnú funkciu a apriornu hustotu.

Gibbsov algoritmus je založený na predpoklade, že dokážeme prevádztať simulácie z každého plne podmieneného rozdelenia. Takže aj v prípadoch mnohorozmerného charakteru môžu byť výsledné simulácie jednorozmerné. Výstupom tohto postupu je realizácia markovského reťazca. Algoritmus, ktorý sme popísali sa nazýva tiež *systematický Gibbsov algoritmus*, pretože časti vektoru prechádzajú systematicky od prvej zložky po poslednú.

Tento algoritmus môžeme modifikovať do podoby, kedy zložky vyberáme náhodne, s rovnakou pravdepodobnosťou $1/k$. V takomto prípade sa jedná o *náhodnú prechádzku v Gibbsovom algoritme*.

Krok 0. Zvolíme vektor počiatocných hodnôt $\Theta_0 = (\theta_{1,0}, \theta_{2,0}, \dots, \theta_{k,0})$.

Krok 1. Položíme $i = 0$.

Krok 2. Generujeme m z rovnomerného rozdelenia na množine $\{1, \dots, k\}$.

Simulujeme zložku $\theta_{m,i+1} \sim \pi(\theta_m | \theta_{1,i}, \dots, \theta_{m-1,i}, \theta_{m+1,i}, \dots, \theta_{k,i}, data)$, položíme $\theta_{j,i+1} = \theta_{j,i}$ pre $j \neq m$;

Krok 3. Položíme $i = i + 1$ a opakujeme Krok 2.

Rozdiel medzi Metropolis-Hastingsovým a Gibsovým algoritmom je ten, že v prvom postupe nie je potrebné poznáť normujúcu konštantu u navrhovanej hustoty, ktorú si na rozdiel od druhého prístupu volíme ľubovoľne. To však môže mať vplyv na efektivitu algoritmu a to takým spôsobom, že pri nevhodnej voľbe spomínanej hustoty, môžeme docieľiť nízku pravdepodobnosť prijatia, čo má za dôsledok veľký počet zamietnutí a tým padom sa reťazec len zriedka pohybuje zo svojho stavu.

4.2.3 Všeobecný Metropolisov algoritmus

Tento simulátor sa odlišuje v tom, že jeden parameter sa s časom mení a kandidátske rozdelenie je normálne, ktorého stredná hodnota, bude súčasná hodnota, v ktorej na reťazec nachádza. Pre každý parameter je nutné určiť rozptyl kandidátskej hustoty. Označme si rozptyl pre j-tý parameter σ_j^2 . Tieto hodnoty, spolu s vektorom Θ inicializujeme na začiatku algoritmu. Ich voľba je veľmi dôležitá, pretože ak by rozdiely v rozptyloch boli príliš vysoké, reťazec by sa pohyboval len zriedka. Naopak, ak by boli veľmi malé, reťazec by sa pohyboval často, ale pomalšie. Potrebujeme teda veľký počet simulácií, aby výsledná postupnosť konvergovala. Hlavným problémom je stanovenie parametrov σ_j^2 .

Použitím MCMC algoritmov vo finančnej praxi sa venuje [3] a [7].

4.2.4 Kalibrácia MCMC prístupom

Spôsob kalibrácie MCMC prístupom je uvedený v [8] a [12]. Najpoužívanejším modelom pre cenu nejakého aktíva S je proces sledujúci stochastickú diferenciálnu rovnicu. Predpokladajme, že cena podkladového aktíva v čase t je daná difúznym procesom

$$dS(t) = \mu S dt + \sigma S dW_1, \quad (4.2)$$

kde μ označuje drift a σ značí volatilitu, dW_1 je prírastok Wienerovho procesu. Aplikovaním Itôovho lemma možeme vzťah (4.2) zjednodušiť do tvaru

$$d(\ln S) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW.$$

Pre odhadovanie parametrov sa v praxi používa diskrétny tvar vo forme

$$r_i = \tilde{\mu} + \tilde{\sigma}\varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad (4.3)$$

kde

$$\begin{aligned} r_i &= \ln \frac{S_i}{S_{i-1}}, \\ \tilde{\mu} &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t, \\ \tilde{\sigma} &= \sigma \sqrt{\Delta t}. \end{aligned}$$

LIBOR market model:

Forwardová miera podľa LMM modelu je daná predpisom

$$dF_k(t) = F_k(t) \sum_{i=m(t)}^k \frac{\delta_i F_i(t) \zeta_i(t) \zeta_k}{1 + F_i(t) \delta_i} dt + \zeta_k(t) F_k(t) dW(t),$$

kde $k = 1, \dots, n$.

Po úprave a následnom použití Itôovho lemma získame tvar

$$d \log F_k(t) = \left(\sum_{i=m(t)}^k \frac{\delta_i F_i(t) \zeta_i(t) \zeta_k}{1 + F_i(t) \delta_i} - \frac{\zeta_k^2}{2} \right) dt + \zeta_k(t) dW(t).$$

Potom pre logaritmus podielu forwardových mier dostávame vzťah

$$r_k(t) = \mu_k(t) + \sigma_k(t) \varepsilon(t),$$

kde $\varepsilon(t)$ má normované normálne rozdelenie a pre parametre platí:

$$\begin{aligned} \mu_k(t) &= \left(\sum_{i=m(t)}^k \frac{\delta_i F_i(t) \zeta_i(t) \zeta_k}{1 + F_i(t) \delta_i} - \frac{\zeta_k^2}{2} \right) \Delta t, \\ \sigma_k(t) &= \zeta_k(t) \sqrt{\Delta t}. \end{aligned}$$

Stochastický proces, ako napríklad Hestonov model, mení parameter volatility na stochastickú volatilitu. Predpokladajme, že volatilita \sqrt{V} sleduje Ornstein-Uhlenbeckov proces

$$d\sqrt{V(t)} = -\beta \sqrt{V(t)} dt + \delta dW_2(t),$$

potom z Itôovho lemmatu plynie, že rozptyl $V(t)$ je daný vzťahom

$$dV(t) = \kappa[\theta - V(t)]dt + \sigma\sqrt{V(t)}dW_2(t),$$

pričom $W_1(t)$ a $W_2(t)$ majú koreláciu ρ . Tento vzťah je analógiou CIR modelu úrokových mier. Voľba práve tohto modelu je z dôvodu nezápornosti volatility a jej tendencii k návratu k priemeru. V našom prípade budeme uvažovať logaritmus rozptylu

$$d \ln V(t) = \kappa[\theta - \ln V(t)]dt + \sigma dW_2(t).$$

Označíme $h(t) = \ln V(t)$ a predošlý vzťah prevedieme do diskrétneho tvaru. Do staneme rovnicu, ktorá je vo forme autoregresného modelu AR(1).

$$\begin{aligned} h(t) - h(t-1) &= \kappa[\theta - h(t-1)]\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon_t^V, & \varepsilon_t^V &\sim \mathcal{N}(0, 1) \\ h(t) &= h(t-1) + \alpha + \beta h(t-1) + \gamma\varepsilon_t^V, \end{aligned} \quad (4.4)$$

kde $\alpha = \kappa\theta\Delta t$, $\beta = 1 - \kappa\Delta t$ a $\gamma = \sigma\sqrt{\Delta t}$.

V našom prípade budeme potrebovať volatilitu pre každú splatnosť, to znamená

$$h_k(t) = \alpha_k + \beta_k h_k(t-1) + \gamma_k \varepsilon_t^V.$$

Celkovo dostávame nasledujúce vzťahy:

$$\begin{aligned} r_k(t) &= \mu_k(t) + e^{h_k(t)/2}\varepsilon_t, \\ h_k(t) &= \alpha_k + \beta_k h_k(t-1) + \gamma_k \varepsilon_t^V, \end{aligned}$$

kde $h_k(t)$ je stacionárny proces, tj. $|\beta| < 1$, $E[\varepsilon_t \varepsilon_{t+m}^V] = 0$ pre všetky m a $E[\varepsilon_t \varepsilon_{t+n}] = E[\varepsilon_t^V \varepsilon_{t+n}^V] = 0$ pre všetky $n \neq 0$.

Prvým krokom v MCMC modele je určenie apriórnej informácie. Nech logaritmická volatilita má v čase 0 normálne rozdelenie

$$h_k(0) \sim \mathcal{N}(m_0, A_0).$$

Označme $\xi_k = (\alpha_k, \beta_k)'$, potom platí

$$\begin{aligned}\xi_k | \gamma_k^2 &\sim \mathcal{N}(\xi_0, \gamma_k^2 V_0), \\ \gamma_k^2 &\sim \Gamma^{-1}(n_0/2, n_0 s_0^2/2),\end{aligned}$$

kde $m_0, A_0, \xi_0, V_0, n_0$ a s_0^2 sú hyperparametre.

Existujú dva možné postupy pre generovanie parametrov a volatility. Prvým je blokový prístup, ktorý pracuje s celými vektormi zároveň, druhým je individuálny prístup, ktorý prevádzka generovanie pre každú hodnotu zvlášť. V tejto práci využijeme druhý spôsob.

Generovanie parametrov

$$\xi_k, \gamma_k^2 | h_k(1), \dots, h_k(T), r_k(1), \dots, r_k(T)$$

Z $h_k(t)$ pre $t = 1, \dots, T$ použitím bayesovskej lineárnej regresie určíme autoregresné koeficienty α, β, γ :

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{y} \\ \hat{\mathbf{e}} &= \mathbf{y} - \mathbf{X} \hat{\beta},\end{aligned}$$

kde $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ h_k(1) & \dots & h_k(T-1) \end{pmatrix}$ a $\mathbf{y} = (h_k(2), \dots, h_k(T))'$.

Koeficienty určujeme z nasledujúcich rozdelení:

$$\begin{aligned}\gamma^2 &\propto \Gamma^{-1}\left(\frac{n-2}{2}, \frac{\hat{\mathbf{e}}' \hat{\mathbf{e}}}{2}\right), \\ (\alpha, \beta)' &\propto \varphi\left((\alpha, \beta)'; \hat{\beta}, \gamma^2 (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1}\right).\end{aligned}$$

Ďalšou podstatným krokom je určenie podmieneného apriórneho rozdelenia $h_k(t)$. Máme $h_k(t-1)$, ξ_k a γ_k^2 , pre $t = 1, \dots, T-1$ sa dá ukázať rozdelenie pre $h_k(t)$ a $h_k(t+1)$:

$$\begin{pmatrix} h_k(t) \\ h_k(t+1) \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \alpha_k + \beta_k h_k(t-1) \\ (1 + \beta_k) \alpha_k + \beta_k^2 h_k(t-1) \end{pmatrix}, \gamma_k^2 \begin{pmatrix} 1 & \beta_k \\ \beta_k & (1 + \beta_k^2) \end{pmatrix}\right),$$

takže pre strednú hodnotu $m_k(t) := \text{E}(h_k(t)|h_k(t-1), h_k(t+1), \xi, \gamma_k^2)$
 a volatilitu $s_k^2(t) := \text{var}(h_k(t)|h_k(t-1), h_k(t+1), \xi, \gamma_k^2)$ platia rovnosti:

$$\begin{aligned} m_k(t) &= \left(\frac{1 - \beta_k}{1 + \beta_k^2} \right) \alpha_k + \left(\frac{\beta_k}{1 + \beta_k^2} \right) (h_k(t-1) + h_k(t+1)), \\ s_k^2(t) &= \frac{\gamma_k^2(t)}{(1 + \beta_k^2(t))}. \end{aligned}$$

Metropolisov algoritmus pre volatilitu:

1. Zvolíme inicializačné volatility v čase 0 a položíme $j = 0$.
2. Súčasný stav je $h_k(t)^{(j)}$.
3. Vygenerujeme novú volatilitu $h_k^*(t)$ z rozdelenia $\mathcal{N}(h_k^{(j)}(t), \gamma_k^2(t))$.
4. Vypočítame pravdepodobnosť prijatia

$$\alpha = \min \left\{ 1, \frac{\varphi(h_k^*(t), m_k(t), s_k^2(t)) \varphi(r_k(t), \mu_k(t), e^{h_k^*(t)})}{\varphi(h_k^{(j)}(t), m_k(t), s_k^2(t)) \varphi(r_k(t), \mu_k(t), e^{h_k^{(j)}(t)})} \right\}.$$

5. Dostaneme nový stav

$$h_k^{(j+1)}(t) = \begin{cases} h_k^*(t) & \text{s pravdepodobnosťou } \alpha, \\ h_k^{(j)}(t) & \text{s pravdepodobosťou } 1 - \alpha. \end{cases}$$

Tento postup opakujeme J -krát pre každé $t = 1, \dots, T-1$. Výstupom algoritmu je vektor nasimulovaných volatilít, následne použitý pre ocenenie.

5. Analytická časť

Všeobecné údaje

Dátum uzavretia obchodu	28.6.2004
Dátum nadobudnutia platnosti	23.4.2014
Konečný dátum	23.6.2024
Nominálna čiastka	200 000 000 EUR upravený v súlade s Modified Following Business Day Convention
Kupujúci	strana A
Predávajúci	strana B

Strana A

Platobné dni platcu pohyblivých sadzieb	23.6. a 23.12. každý rok, od 23.12.2014 vrátane do 23.6.2024 vrátane, s úpravou v súlade s Modified Following Business Day Convention
Pohyblivá sadzba	6M EURIBOR
Úroková báza pre výpočet pohyblivej čiastky	Act/360
Resetný deň	1.deň kalkulačného obdobia

Strana B

Platobné dni platcu fixných sadzieb	23.6. každý rok, od 23.6.2015 vrátane do 23.6.2024 vrátane, s úpravou v súlade s Modified Following Business Day Convention
Fixná sadzba	5.62500%
Úroková báza pre výpočet fixnej čiastky	30/360

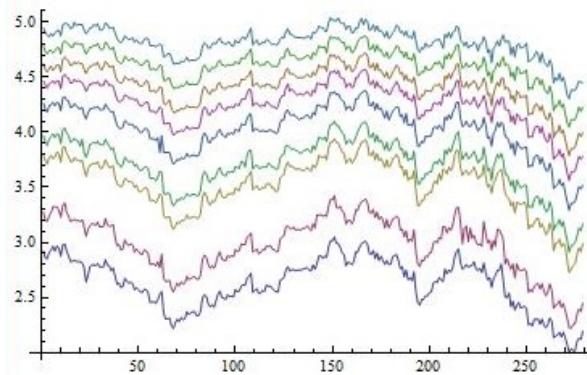
5.1 Vstupné dátá a ich úprava

Pre ocenenie nášho obchodu potrebujeme nasledujúce dátá:

- (1) swapové sadzby so splatnosťou 1Y - 20Y
- (2) 6M Euribor sadzby
- (3) volatility capov
- (4) volatility swapcií

Swapové sadzby, ktoré máme k dispozícii sú kótované na trhu, avšak so splatnosťami 1Y, 2Y, ..., 15Y a 20Y. Sadzby pre ostatné roky a taktiež chýbajúce údaje pri splatnostiach 4Y, 7Y, 9Y, 11Y, 13Y a 14Y dopočítame klasickou lineárnu interpoláciou. Zo zdroja (<http://www.patriaplus.cz>) sme získali historické údaje od dátumu 4. 6. 2003.

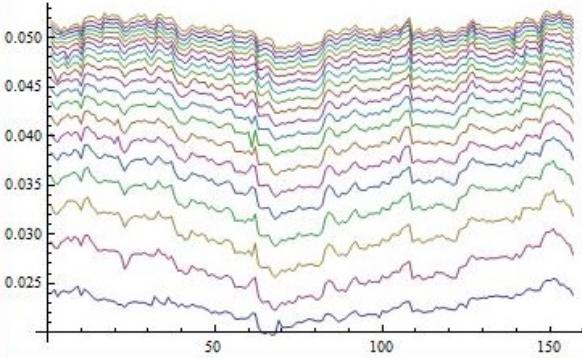
Obr. 5.1: Vývoj swapových sadzieb



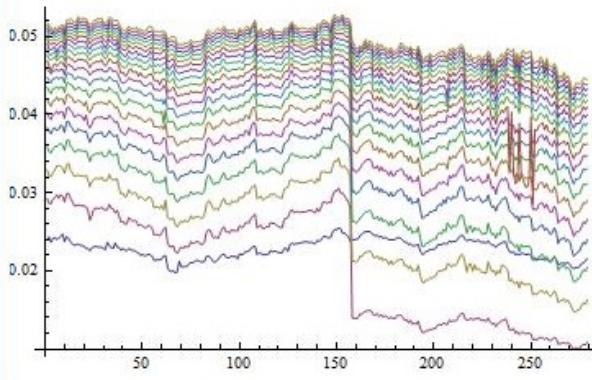
Na ocenenie swapcie potrebujeme výnosy bezkupónových dlhopisov. Tie získame metódou bootstrappingu zo swapových sadzieb.

Dáta nám chýbajú aj pri sadzbách jednorocného swapu. Nakol'ko nie je možné takto priamo použiť bootstrapping, aplikovali sme dva spôsoby výpočtu sadzieb. V prvom postupe sme pomocou neznámej hodnoty 1Y swapovej sadzby (ozn. r) vyjadrili diskontné faktory závislé na tejto hodnote. Riešením rovnice, kde r sme použili ako interpolovanú hodnotu sme získali sadzby, ktoré sme následne bootstrappovali na výnosy bezkúponových dlhopisov.

Obr. 5.2: Výnosy bezkupónových dlhopisov



Obr. 5.3: Bootstrapping - prvý spôsob



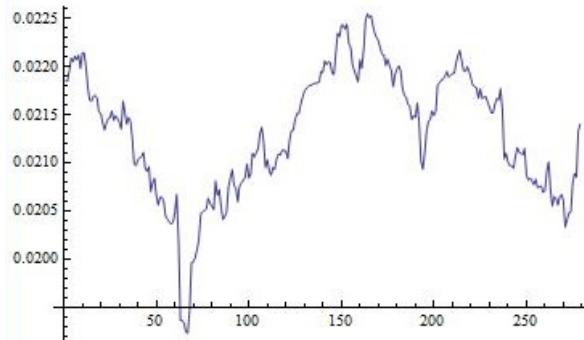
Z grafu vidíme, že takýto postup nezodpovedá správnemu vývoju. Preto budeeme v práci používať výnosy vypočítané druhým spôsobom. Na ten použijeme 6M EURIBOR miery zobrazené na obrázku 5.4, pomocou ktorých interpolujeme hodnoty 1Y swapu a následne bootstrappingom prepočítame všetky sadzby na sadzby bezkupónových dlhopisov. Obrázok 5.5 ukazuje kompletné údaje výnosov so splatnosťami 1Y - 20Y, ktoré použijeme na ocenenie .

Bootstrapping

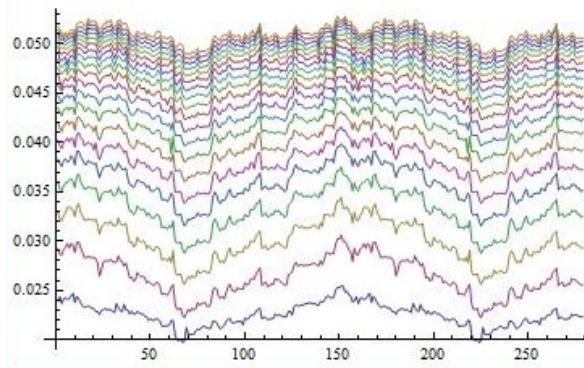
Pomocou tejto metódy vieme zo swapovej výnosovej krivky vyjadriť spotovú výnosovú krivku. Nech R_1 je jednorocná swapová sadzba. Diskontný faktor d_1 z nej odvodíme podľa rovnice

$$1 = (1 + R_1)d_1 \quad \Rightarrow \quad d_1 = \frac{1}{1+R_1}.$$

Obr. 5.4: Vývoj 6M EURIBOR sadzieb



Obr. 5.5: Výnosy bezkupónových dlhopisov - všetky dátá



Ked' máme vypočítaný diskontný faktor, môžeme získať bod $r_{0;1}$ zo vzťahu

$$d_1 = \frac{1}{1+r_{0;1}}.$$

Pre dvojročný swap platí predpis

$$1 = R_2 d_1 + (1 + R_2) d_2 \quad \Rightarrow \quad d_2 = \frac{1 - R_2 d_1}{1 + R_2}.$$

Druhý bod spotovej krivky potom získame zo vzťahu

$$d_2 = \frac{1}{(1+r_{0;2})^2}.$$

Všeobecne pre n -ročný swap máme

$$1 = R_n d_1 + R_n d_2 + \dots + R_n d_{n-1} + (1 + R_n) d_n,$$

odkiaľ

$$d_n = \frac{1 - R_n(d_1 + d_2 + \dots + d_{n-1})}{1 + R_n} = \frac{1 - R_n \sum_{j=1}^{n-1} d_j}{1 + R_n}. \quad (5.1)$$

A pre body spotovej krivky potom platí

$$d_n = \frac{1}{(1+r_{0;n})^n}.$$

5.2 Oceňovanie

Nech s_k označuje swapciovú pevnú sadzbu. Nech s_T je tržná swapová miera v čase T , kedy končí platnosť opcie. Spoločnosť uplatní opciu v prípade, že $s_k < s_T$, inak je výhodnejšie úročiť swapovou mierou s_T . Výplatná miera je $\max(s_T - s_k, 0)$, ktorá je platená po celú dobu trvania swapu, tj. v časoch T_1, \dots, T_N . Hodnota swapcie v čase T je vyjadrená vzťahom

$$f_T = \sum_{i=1}^N P(T, T_i) \tau_i L \max(s_T - s_k, 0), \quad (5.2)$$

kde L značí nominálnu hodnotu obchodu. V tomto prípade uvažujeme odlišné numeraire, a to *anuitu*, danú predpisom

$$A(t) = \sum_{i=1}^N \tau_i P(t, T_i). \quad (5.3)$$

Vzťah (5.2) môžeme upraviť do tvaru

$$f_T = A(T) L \max(s_T - s_k, 0).$$

Predpokladajme, že miera s_T má lognormálne rozdelenie. Swapová miera s_t pri- slúchajúca swapu so začiatkom v čase T a platbami v časoch T_1, \dots, T_N nám plynie zo vzťahu pre súčasnú hodnotu

$$0 = P(t, T_0) - P(t, T_N) - \sum_{i=1}^N P(t, T_i) \tau_i s_t = P(t, T_0) - P(t, T_N) - A(t) s_t,$$

odtiaľ

$$s_t = \frac{P(t, T_0) - P(t, T_N)}{A(t)}. \quad (5.4)$$

Naším cieľom je určiť teoretickú výšku zisku strany B tohto kontraktu, teda kupujúceho swapcie, ktorý je platcom premenlivej swapovej sadzby. Na ocenenie využijeme klasický Blackov model pre swapcie, kde držiteľ má právo zaplatiť pohyblivú mieru s_T :

$$f_0 = A(0) (s_k \mathcal{N}(-d_2) - s_0 \mathcal{N}(-d_1)), \quad (5.5)$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln(s_0/s_k) + \sigma^2 T / 2}{\sigma \sqrt{T}},$$

$$d_2 = \frac{\ln(s_0/s_k) - \sigma^2 T / 2}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T}.$$

5.2.1 Ocenenie pomocou volatilít capov

Po úprave dát môžeme pristúpiť k oceneniu derivátu podľa postupu, ktorý sme popísali v časti 3.1. Vstupom programu sú výnosy dlhopisov a hodnoty volatility capletov. Volatility sú ročné. Náš kontrakt je však úročený polročne, preto si musíme jednotlivé hodnoty prepočítať pomocou vzťahu

$$\sigma_T = \sigma * \sqrt{T}, \quad (5.6)$$

kde σ_T je volatilita pre časové obdobie T a σ je ročná volatilita.

Vzťah (3.1) si upravíme do vhodného tvaru, z ktorého vieme postupne priamo napočítať hodnoty Λ :

$$\Lambda_k^2 = \frac{\sigma_{k+1}^2 t_{k+1} - \sum_{j=1}^k \Lambda_{j-1}^2 \tau_{k-j+1}}{\tau_0}$$

vypočítame forwardové volatility , pričom časové kroky sú v našom prípade polročné.

Pre simuláciu forwardových sadzieb využijeme vzťah (3.2). Tento proces prebieha iteratívne. Z počiatočnej výnosovej krivky, ktorá bola vstupom algoritmu, napočítame sadzby $F_0(0), \dots, F_{20}(0)$.

$$F_{i,j} = \frac{(1+r_j)^j}{(1+r_i)^i} - 1,$$

kde r_i je výnos v čase i a $F_{i,j}$ je forwardová miera na obdobie medzi i a j .

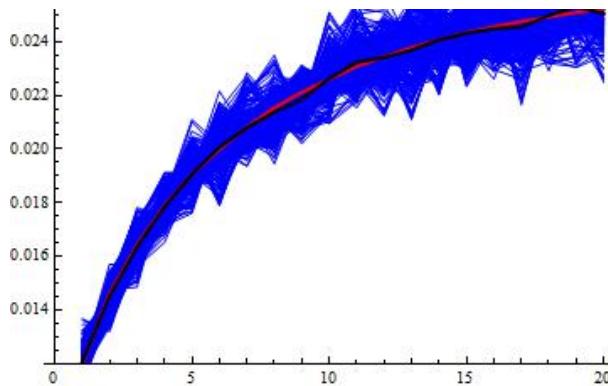
Z nich nasimulujeme miery o rok, ktoré budú mať o jednu splatnosť menej, tzn.

Tabuľka 5.1: Forwardové volatility

Rok	$\sigma_k(\%)$	$\Lambda_{k-1}(\%)$
1	14,4	14,4
2	17,2	19,7
3	16,6	15,3
4	15,5	11,6
5	14,6	10,1
6	13,8	8,55
7	13,1	7,86
8	12,5	7,44
9	12	7,21
10	11,6	6,56
:	:	:

sadzby $F_1(1), \dots, F_{19}(1)$. Z nich nasimulujeme sadzby o dva roky, ktoré budú mať o dve splatnosti menej. Takto postupujeme až po hodnotu $F_{19}(19)$. Prevedieme 1000 simulácií, ktorých priebehy máme znázornené na obrázku 5.6. Časové indexy sú posunuté o jednotku, nakoľko program nevie počítať s indexom 0.

Obr. 5.6: Simulácie forwardových mier



Z obrázku vidíme, že simulované sadzby sa odlišujú od vstupnej krivky. S narastajúcim časom sa odchyľujú pomerne významne, avšak ak vezmeme priemer všetkých modelovaných mier, vidíme, že sa pohybuje v okolí krivky. Pri veľkom počte simulácií môžeme teda prehlásiť, že aritmetický priemer je vierohodným odhadom strednej hodnoty forwardovej krivky.

Samotné forwardové sadzby však nie sú podstatným prvkom pri postupe oceňovania. Do procesu vstupuje len počiatočná krivka. Naším cieľom je vypočítať swapciovú volatilitu, ktorá je potrebná pre použitie Blackovej formuly. Získame ju dosadením

jednotlivých hodnôt do vzorca (3.7).

Oceňujeme swapciu, ktorej nominálna hodnota je 200 miliónov EUR pri fixnej sadzbe 5,625%. Spočítame hodnotu derivátu podľa postupu uvedeného v predošej časti. Tá bola diskontovaná do času, kedy bol obchod uzavretý, teda k dátumu 28.6.2004.

Hodnota volatility pri našich dátach vyšla približne 8.4% a hodnota swapovej sadzby k času uzavretia obchodu 5.7%. Vzťah (5.2) nám dáva výslednú hodnotu nášho derivátu vo výške 2.95 miliónov EUR.

5.2.2 Historická volatilita

Historickou volatilitou rozumieme štandardnú odchýlku výnosov. Tento jednoduchý spôsob spočíva vo výpočte výnosov z forwardových mier a následným použitím vzťahu pre výberovú smerodatnú odchýlku

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (r_i - r_{avg})^2}{n-1}}, \quad (5.7)$$

kde r_i je výnosnosť v čase i , r_{avg} je priemerná hodnota a n je počet období, pre ktoré máme k dispozícii údaje. V našom prípade uvažujeme celú históriu od 4.6.2003 do dátumu uzavretia kontraktu, čo je 279 údajov. Získali sme hodnoty dennej volatility. Tie opäť musíme prepočítať na polročné podľa vzťahu (5.6). Uvažujeme 252 obchodných dní, takže v tomto prípade bude $T = 252/2$.

Znova použijeme Blackov vzťah na ocenenie swapcie. V tomto algoritme nám swapciová volatilita narástla na viac ako 12% a swapová sadzba ostáva rovnaká. Hodnota kontraktu vypočítaná týmto spôsobom je 4,34 miliónov EUR.

5.2.3 Ocenenie pomocou volatility swapcií a capov

V tejto časti nebudem prevádztať praktické výpočty, napokialo sme nemali k dispozícii potrebné dátá. Konkrétnie sa jedná o maticu swapciových volatilít. Algoritmus sme previedli len na teoretických údajoch, ktoré sme čerpali z [1]. Na nich sme porovnali postup z 3.1 a 3.2.

Porovnanie modelov

Vstupom je tabuľka swapciových volatilít,

	1Y	2Y	3Y	4Y	5Y	6Y	7Y	8Y	9Y	10Y
1Y	16.4	15.8	14.6	13.8	13.3	12.9	12.6	12.3	12.	11.7
2Y	17.7	15.6	14.1	13.1	12.7	12.4	12.2	11.9	11.7	11.4
3Y	17.6	15.5	13.9	12.7	12.3	12.1	11.9	11.7	11.5	11.3
4Y	16.9	14.6	12.9	11.9	11.6	11.4	11.3	11.1	11.	10.8
5Y	15.8	13.9	12.4	11.5	11.1	10.9	10.8	10.7	10.5	10.4
7Y	14.5	12.9	11.6	10.8	10.4	10.3	10.1	9.9	9.8	9.6
10Y	13.5	11.5	10.4	9.8	9.4	9.3	9.1	8.8	8.6	8.4

forwardové miery pre splatnosti 1Y - 10Y

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}
0.0501	0.056	0.0584	0.06	0.0613	0.0628	0.0627	0.0629	0.0623	0.063

a capletové volatility

v_1^{cpl}	v_2^{cpl}	v_3^{cpl}	v_4^{cpl}	v_5^{cpl}	v_6^{cpl}	v_7^{cpl}	v_8^{cpl}	v_9^{cpl}	v_{10}^{cpl}
0.180	0.192	0.186	0.177	0.168	0.158	0.153	0.149	0.145	0.141

Chýbajúce hodnoty swapciovnej volatility sme dopočítali lineárnom interpoláciou. Najprv vypočítame forwardové miery podľa postupu popísanom v časti 3.2.

Uvažujme, že okamžitá volatilita spĺňa vzťah (3.9). Potrebujeme teda vhodne odhadnúť parametre θ a ϕ . Pred samotnou kalibráciou musíme vhodne inicializovať tieto parametre. Za vstupné hodnoty pre θ_i zvolíme 1 a pre ψ_i volíme $\pi/2$.

V každom kroku kalibrácie

- určíme hodnoty parametrov ϕ_i podľa vzťahu (3.12), kde za v_i^{MKT} vezmeme výšku capletovej volatility v čase i ,
- podľa predpisu pre $v_{\alpha,\beta}^{LMM}$ (3.15) vypočítame swapcové volatility, ktoré porovnáme s volatilitami dostupnými na trhu.

Tieto kroky opakujeme kým rozdiel tržných a modelových volatilít nebude mi-

nimálny.

Zo získaných parametrov môžeme vypočítať hodnoty forwardových mier podľa vzťahu (3.18).

	$1Y$	$2Y$	$3Y$	$4Y$	$5Y$	$6Y$	$7Y$	$8Y$	$9Y$	$10Y$
$F_1(t)$	5.01	5.60	5.84	6.00	6.13	6.28	6.27	6.29	6.23	6.30
$F_2(t)$		5.66	4.78	6.26	5.36	5.24	5.71	6.01	5.18	5.95
$F_3(t)$			5.656	7.35	5.02	7.37	4.85	7.18	7.99	7.59
$F_4(t)$				5.99	6.66	7.75	6.29	6.48	5.09	9.45
$F_5(t)$					6.07	5.35	4.64	7.18	4.61	8.17
$F_6(t)$						6.29	5.82	4.16	6.9	7.91
$F_7(t)$							6.20	7.31	5.48	6.51
$F_8(t)$								6.27	7.31	6.06
$F_9(t)$									6.21	8.67
$F_{10}(t)$										6.27

Na porovnanie vypočítame tiež hodnoty forwardových sadzieb podľa postupu opísanom v 3.1. Vstupom programu sú opäť forwardová krivka a capletové volatility.

Zo vzťahu (3.9) odvodíme forwardové volatility Λ . Dosadením týchto hodnôt do vzťahu (3.2) môžeme postupne napočítať hodnoty forwardových mier.

	$1Y$	$2Y$	$3Y$	$4Y$	$5Y$	$6Y$	$7Y$	$8Y$	$9Y$	$10Y$
$F_1(t)$	5.01	5.6	5.84	6.00	6.13	6.28	6.27	6.29	6.23	6.30
$F_2(t)$		6.87	4.87	6.49	5.62	5.87	5.92	5.8	5.73	5.65
$F_3(t)$			3.9	5.79	5.83	6.85	5.60	5.32	6.95	6.71
$F_4(t)$				5.65	5.74	6.05	5.28	5.98	6.91	6.79
$F_5(t)$					7.35	5.13	4.78	6.85	8.77	6.62
$F_6(t)$						4.34	5.41	7.37	8.79	5.71
$F_7(t)$							5.53	5.1	6.05	6.07
$F_8(t)$								6.2	7.08	8.28
$F_9(t)$									6.47	7.40
$F_{10}(t)$										6.50

Z predošlých tabuľiek vidíme, že miery vyrátané podľa prvého spôsobu sú stabilnejšie, čo je dôsledkom zahrnutia viacerých tržných parametrov. Avšak aj napriek tomu bolo minimum pri minimalizácii volatiliti pomerne veľké, čo ukazuje, že nasimulované dátá nie sú dosť kalibrované na swapciové volatility.

Oceňovanie sme tentokrát previedli pre nasledovné údaje:
swapcia je zjednaná na sumu 1 000 EUR pri pevnej sazbe 5.625%. Platnosť opcie je 5 rokov a maturita podkladového swapu je určená na 10 rokov.

Nasledujúca tabuľka porovnáva jednotlivé údaje pre oba postupy oceňovania:

Tabuľka 5.2: Porovnanie modelov - výsledné údaje

	Brigo-Mercurio	Hull
swapová sazdba k času 0	5.92%	5.94%
diskontný člen	7.31	7.31
hodnota derivátu (EUR)	433	434

Vidíme, že oba tieto postupy pri teoretický hodnotách dávajú približne totožné výsledky ocenia. Môžeme teda konštatovať, že sú zhodné. Postup pre oceňovanie je uvedený v prílohe.

5.2.4 MCMC

Všeobecný postup Markov Chain Monte Carlo metódy sme popísali v kapitole 4.2. Nakol'ko volatilita je nepozorovateľná premenná a v tomto modele nemáme na vstupe žiadne informácie o nej, je potrebné, aby bol k dispozícii dostatočný počet historických údajov pre odhad.

Počiatočné hodnoty sme zvolili nasledovne:

$$- T = 278$$

$$- h_k(0) = 0$$

$$- \alpha_k = -1$$

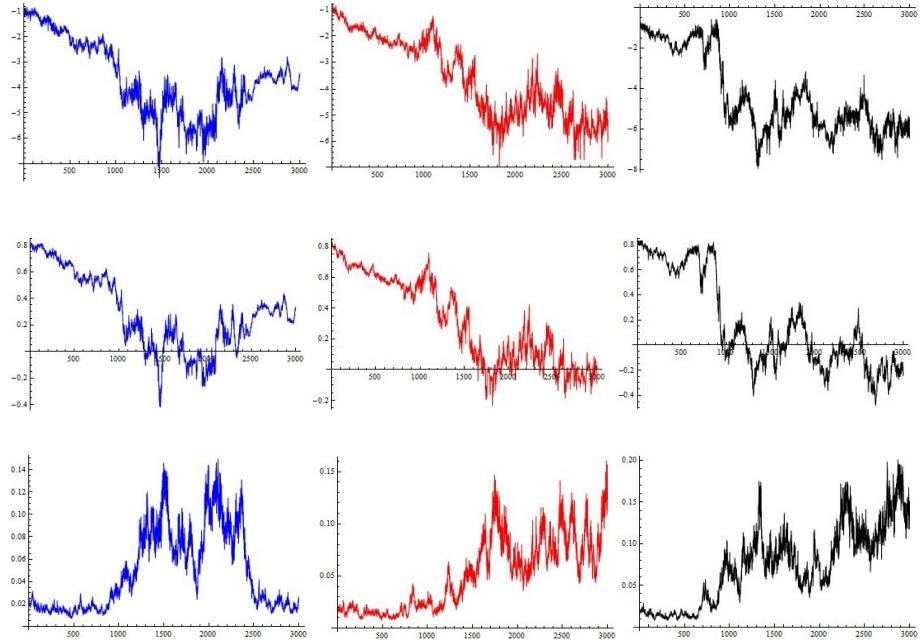
$$- \beta_k = 0.8$$

$$- \gamma_k^2 = 0.1$$

- $\alpha_k \sim \mathcal{N}(0, 100)$
- $\beta_k \sim \mathcal{N}(0, 100)$
- $\gamma_k^2 \sim \Gamma^{-1}(5, 0.1)$
- $h_k(0) \sim \mathcal{N}(0, 100)$
- Počet simulácií = 3000
- Burn-in = 1000

Vieme, že podľa predpokladov má log-volatilita tvar autoregresného procesu (4.4). Pri každej simulácii boli priebežné odhadované parametre stochastickej volatility danej rovnicou (4.4). Ukážeme si ich na splatnostiach 1Y, 5Y, a 10Y.

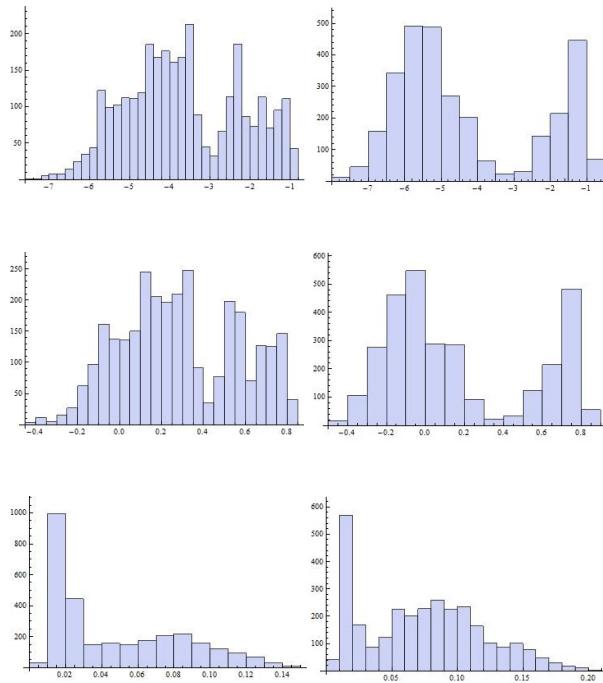
Obr. 5.7: Vývoj parametrov α , β , γ



Zobrazený je reťazec všetkých nasimulovaných parametrov. Pri oceňovaní swapcie však prvých 1000 hodnôt neuvažujeme, čím chcem odstrániť vplyv volby vstupných parametrov.

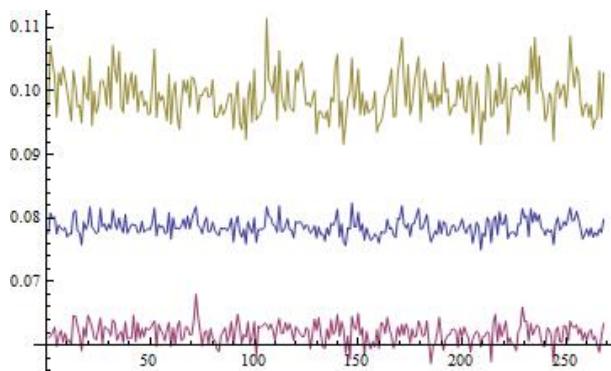
Rozdelenie parametrov volatility si ukážeme na obrázku 5.8, kde sú zobrazené histogramy pre α , β a γ , tentokrát pri splatnostiach 1Y a 10Y.

Obr. 5.8: Histogramy parametrov α , β , γ

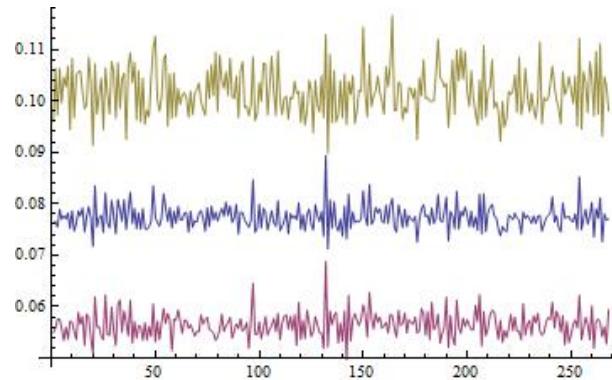


Zo zvolených parametrov sme pre rôzne doby splatnosti nasimulovali priebeh volatility dĺžky 278, čo odpovedá počtu jednotlivých dát, ktoré máme k dispozícii. Na obrázkoch 5.9 a 5.10 vidíme priebeh simulovanej volatility pre splatnosť 1Y a 10Y. Vyobrazené sú priemerné hodnoty, dolný a horný 90%-ný konfidenčný interval.

Obr. 5.9: Vývoj volatility pre splatnosť 1Y



Obr. 5.10: Vývoj volatility pre splatnosť 10Y



Priemerné hodnoty volatility pre všetky splatnosti nám zhŕňa tabuľka 5.3. Sú v nej percentuálne vyjadrenia priemeru volatility, horného a dolného 90%-ného intervalu spoľahlivosti.

Tabuľka 5.3: Priemerné hodnoty simulovanej volatility

	1Y	2Y	3Y	4Y	5Y	6Y	7Y	8Y	9Y	10Y
Volatilita (%)	7.99	7.34	6.9	7.29	7.67	7.7	7.76	7.34	7.12	7.75
Dolný interval	6.19	5.6	5.18	5.56	5.87	5.51	5.66	5.5	5.5	5.64
Horný interval	10.3	9.18	8.89	9.57	9.58	10.2	10.2	9.34	8.97	10.2

Priemerná pravdepodobnosť prijatia bola pri danom počte simulácií 60%-ná. Takýto postup si vyžaduje vyšší počet opakovania kalibrácia, avšak kvôli časovej náročnosti programu to nebolo možné zrealizovať.

Teraz pristúpime k oceneniu swapcie na základe získanej volatility uvedenej v tabuľke 5.3. Postup je rovnaký ako pri predošlých algoritmoch. Volatilita swapcie nám vyšla približne 5% a hodnoty derivátu pre priemernú hodnotu volatility a taktiež pre hodnoty volatility konfidenčného intervalu sú

	Cena swapcie (EUR)
Priemerná volatilita	2.51×10^6
Dolný interval	1.84×10^6
Horný interval	3.28×10^6

5.2.5 Porovnanie cien swapcie

Hlavným cieľom tejto práce bolo oceniť konkrétny derivát popísaný na začiatku analytickej časti. Pripomenieme si základné položky zmluvy. Oceňovali sme swapciu uzavretú na nominálnu čiastku 200 miliónov EUR. Strana A je platcom po hyblivej sadzby, a to 6 mesačného EURIBORu. Strana B je platcom pevnej sadzby určenej vo výške 5.625%. Výsledkom je výška zisku strany A pri uplatnení derivátu, ktorý ma splatnosť o 10 rokov s maturitou swapu 10 rokov. Prvé dva spôsoby nám pomocou explicitného vzorca dali jednoznačné výsledky. V treťom prípade bola cena spočítaná na základe počiatočnej simulácie volatility.

K určeniu hodnoty derivátu bolo potrebné kalibrovať modely na tržné dátá, konkrétnie implikované volatility capletov. Využili sme vzorec pre cenu príjemcovskej swapcie, ktorá je pridelená strane, ktorá má právo prijímať fixnú sadzbu, v našom prípade je to strana A. Pri skúmaní diskontovanej hodnoty derivátu nás zaujíma, či je kladná. V takej situácii je strana A vo výhode a pravdepodobne do obchodu vstúpi. Výška súčasnej hodnoty potom určuje zisk, ktorý strana bude mať pri uplatnení práva na vstup do swapu. Nasledujúca tabuľka nám zhŕňa ceny derivátu k dátumu uzavretia kontraktu.

Tabuľka 5.4: Ceny swapcie

metóda	cena swapcie(EUR)	% z nominálnej čiastky
Hull	2.95×10^6	1.48%
Brigo-Mercurio	\approx Hull	\approx Hull
pomocou historickej volatility	4.34×10^6	2.17%
MCMC	2.51×10^6	1.26%

V prípade MCMC metódy sa jedná o priemer z jednotlivých simulácií. Síce nám udáva istý odhad ceny, nevieme však nič o ostatných simulovaných hodnotách, preto sme si v predošej časti uviedli aj ďalšiu charakteristiku, a to interval spoľahlivosti.

Jednotlivé ceny sa výrazne líšia. Ked'že sa jedná o predpoved' vývoja úrokových sadzieb do budúcnosti, nemôžeme s určitosťou vyhlásiť, ktorá metóda je najspoľahlivejšia. V každom postupe sme však dostali kladné číslo, čo symbolizuje výhodu kontraktu pre stranu A, ktorá na základe týchto údajov vstúpi do obchodu.

Záver

Táto práca bola zameraná na úrokové deriváty a ich kalibráciu. Popísali sme jednotlivé modely úrokových sadzieb, pričom sme sa detailne venovali modelu založenom na HJM rámci, a to Libor Market modelu, ktorý ako prvý uvažuje forwardové sadzby. Je to relatívne nový nástroj simulujúci forwardové sadzby pri vstupnej spotovej miere. Keďže zohľadňuje implikované tržné volatility, je modelom, ktorý dobre korešponduje s aktuálnymi podmienkami na trhu.

Vieme, že volatilita je latentná premenná, čiže ju nemôžeme pozorovať priamo. Preto sme ukázali rôzne metódy jej kalibrácie. Zamerali sme sa na postupy založené na bayesovskom princípe a podrobne sme popísali MCMC algoritmy. Porovnali sme 4 spôsoby modelovania volatility. Kalibrácia pomocou capových volatilít, pomocou capových a swapciových volatilít, ktoré sme získali z trhu, pomocou historickej volatility určenej z historických údajov výnosov bezkúponových dlhopisov a ako posledný spôsob sme použili už spomínaný MCMC algoritmus.

Tieto teoretické poznatky sme využili pri aplikácií na reálne dátu. Ocenili sme konkrétny derivátový obchod, ktorý bol skutočne uzavretý. Poukázali sme na veľkú dôležitosť kalibrácie volatility, od ktorej sa odvíja výsledná hodnota náslovo derivátu. Priebeh volatility je rôzny pre rôzne modely, čo súvisí s faktom, aké tržné dátu pri odhade uvažujeme. Z porovnania cien swapcie vypočítaných pomocou Blackovej formuly vyplýva, že strany kontraktu podstupujú taktiež modelové riziko, ktoré je v tomto prípade výrazné. Výber postupu, podľa ktorého modelujeme volatilitu má zásadný vplyv na výšku zisku kupujúcej strany. Ukázalo sa, že aj napriek tomu je tento kontrakt pre kupujúcu stranu výhodný, z čoho usudzujeme, že v dobe maturity swapcie, strana uplatní svoje právo vstúpiť do 10Y swapu.

Literatúra

- [1] Brigo, D., Mercurio, F.: *Interest Rate Models*. Springer. Berlin 2001.
- [2] Cipra, T.: *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou*. Ekopress. Praha 2005.
- [3] Eraker B.: *MCMC Analysis of Diffusion Models with Application to Finance*, Journal of Business & Economic Statistics, vol. 19, no. 2, 177-191, 2001.
- [4] Holotňáková, D.: *Úrokové míry*. Bakalárska práca MFF UK. Praha 2011.
- [5] Hull J. C.: *Options, Futures, and Other Derivatives, 7th Edition*, Pearson Prentice Hall, Englewood Cliffs, 2008.
- [6] Chen, M.H., Shao, Q.M., Ibrahim, J.G.: *Monte Carlo Methods in Bayesian Computation*, Springer-Verlag. New York 2000.
- [7] Johannes M., Polson N.: *MCMC Methods for Financial Econometrics*, in Handbook of Financial Econometrics, Volume 2 (eds Ait-Sahalia and L.P. Hansen), North Holland, pp. 1-72, 2009.
- [8] Lopes H.F., Polson N.G.: *Bayesian inference for stochastic volatility modeling*, Working Paper, The University of Chicago 2010.
- [9] Nevrkla L.: *Úrokové deriváty v nabídce českých bank*. Diplomová práca FSV UK. Praha 2007.
- [10] Ratchev S.T., Hsu J.S., Bagasheva B.S., Fabozzi F.J.: *Bayesian Methods in Finance*, The Frank J. Fabozzi Series, Wiley, 2008.
- [11] Sorensen, D., Gianola, D.: *Likelihood, Bayesian, and MCMC Methods in Quantitative Genetics*. Springer-Verlag. New York 2002.
- [12] Witzany J.: *Estimating Correlated Jumps and Stochastic Volatilities*, IES Working Paper, Prague, No. 35., pp. 33, 2011.
- [13] Witzany J.: *Financial Derivatives and market Risk Management*, Part I/II, Oeconomica, 2012.

Zoznam obrázkov

5.1	Vývoj swapových sadzieb	40
5.2	Výnosy bezkupónových dlhopisov	41
5.3	Bootstrapping - prvý spôsob	41
5.4	Vývoj 6M EURIBOR sadzieb	42
5.5	Výnosy bezkupónových dlhopisov - všetky dátá	42
5.6	Simulácie forwardových mier	45
5.7	Vývoj parametrov α, β, γ	50
5.8	Histogramy parametrov α, β, γ	51
5.9	Vývoj volatility pre splatnosť 1Y	51
5.10	Vývoj volatility pre splatnosť 10Y	52

Zoznam tabuliek

3.1	Okamžitá volatilita forwardovej miery	25
3.2	Okamžitá volatilita forwardovej miery po úprave	26
5.1	Forwardové volatility	45
5.2	Porovnanie modelov - výsledné údaje	49
5.3	Priemerné hodnoty simulovanej volatility	52
5.4	Ceny swapcie	53

Ocenenie Brigo-Mercurio

```

In[244]:= t[i_] := i / 2;
t[-1] := 0;
tau[i_] := (*t[i]-t[i-1]*)0.5;
tau[0] = 0.5;

In[248]:= fi[i_] := 
$$\frac{\text{caplet}[i] * \sqrt{t[i]}}{\sqrt{\sum[\tau[j-1] * \psi[i-j+1]^2, \{j, 1, i\}]}}$$


In[249]:= rho[i_, j_] := Cos[theta[i] - theta[j]]

In[261]:= F[i_, 0] := FWD[i]

In[262]:= w[a_, b_, i_, t_] := 
$$\left( \tau[i] * \text{Product}\left[\frac{1}{1 + \tau[j] * F[j, t]}, \{j, a+1, i\} \right] \right) /$$


$$\sum[\tau[k] * \text{Product}\left[\frac{1}{1 + \tau[j] * F[j, t]}, \{j, a+1, k\} \right], \{k, a+1, b\}]$$


s[a_, b_, t_] := Sum[w[a, b, i, t] * F[i, t], \{i, a+1, b\}]

vLMM[a_, b_, t_] :=

$$\text{Sqrt}\left[\frac{1}{a} \sum\left[\frac{w[a, b, i, t] * w[a, b, j, t] * F[i, t] * F[j, t] * \rho[i, j]}{s[a, b, t]^2} * f[i] *$$


$$f[j] * \sum[\psi[i-k] * \psi[j-k], \{k, 0, a\}], \{i, a+1, b\}, \{j, a+1, b\}] \right]$$


parametre =
Join[Table[\{\psi[i], 1\}, \{i, 1, M\}], Table[\{\theta[i], \frac{\pi}{2}\}, \{i, 1, M\}]];

In[269]:= sumacia = Sum[(vLMM[i, j, 0] - h[i, j])^2, \{j, 2, M\}, \{i, 1, j-1\}];

In[270]:= podm := Table[ $\frac{-\pi}{2} < \theta[i] - \theta[i-1] < \frac{\pi}{2}$ , \{i, 2, M\}];

fcia = FindMinimum[{sumacia, podm}, parametre];

In[272]:= θ[i_] := theta[i] /. Last[fcia]
ψ[i_] := ψ[i] /. Last[fcia]

In[274]:= φ[i_] := 
$$\frac{\text{caplet}[i] * \sqrt{t[i]}}{\sqrt{\sum[\tau[j-1] * \psi[i-j+1]^2, \{j, 1, i\}]}}$$


In[275]:= ρ[i_, j_] := Cos[θ[i] - θ[j]]

vLMM2[a_, b_, t_] :=

$$\text{Sqrt}\left[\frac{1}{a} \sum\left[\frac{w[a, b, i, t] * w[a, b, j, t] * F[i, t] * F[j, t] * \rho[i, j]}{s[a, b, t]^2} * \phi[i] *$$


$$\phi[j] * \sum[\psi[i-k] * \psi[j-k], \{k, 0, a\}], \{i, a+1, b\}, \{j, a+1, b\}] \right]$$


volat = Table[vLMM2[a, b, 0], \{b, 2, M\}, \{a, 1, b-1\}];

volatilita = AppendTo[volat, caplet];

```

```

In[368]:= F[k_, t_] :=
  F[k, t - 1] * Exp[Sum[(o[k, j] * tau[j] * phi[j] * phi[k] * psi[j - a] * psi[k - a] * F[j, t - 1]) /
    (1 + tau[j] * F[j, t - 1]), {j, a + 1, k}]] *
  Exp[-(phi[k]^2 * psi[k - a]^2 / 2) + phi[k] * psi[k - a] * RandomReal[NormalDistribution[]]]
  mivery = Module[{}, h = {}; For[a = 0, a < 10, a++,
    {i = a, AppendTo[h, Table[F[k, i + 1], {k, i + 1, 10}]]}]; h];

```

```

In[435]:= n = 10;
sk = 0.05625;
L = 1000;

```

```

In[515]:= G[j_, t_] := mivery[[j, t]]

```

```

In[516]:= s[t_] := (1 - Product[1/(1 + tau[j]*G[j, t]], {j, 1, n}]) /
  Sum[tau[i] * Product[1/(1 + tau[j]*G[j, t]], {j, 1, i}], {i, 1, n}]

```

```

In[518]:= gama[k_, t_] := Product[1 + tau[j] * G[j, t], {j, 1, n}] -
  Product[1 + tau[j] * G[j, t] - 1, {j, 1, n}] -
  Sum[Product[1 + tau[j] * G[j, t], {j, i + 1, n - 1}], {i, 0, k - 1}] /
  Sum[Product[1 + tau[j] * G[j, t], {j, i + 1, n}], {i, 0, n}]

```

```

In[520]:= T0 = 5;
T = 10;

```

```

volSwapcie = Sqrt[
  1/T0 * Integrate[Sum[tau[k] * volatilita[10, k] * G[k, 1] * gama[k, 1],
    {k, 1, n}]^2, {t, 1, T0}]];

```

```

In[523]:= P[0, i_] := 1/((1 + FWD[[i]])^i)

```

```

A = Sum[tau[i] * P[0, t[i]], {i, 1, n}];

```

```

d1 = Log[s[1]/sk + volSwapcie^2 * T0/2] / (volSwapcie * Sqrt[T0]);
d2 = Log[s[1]/sk - volSwapcie^2 * T0/2] / (volSwapcie * Sqrt[T0]);

```

```

In[527]:= rozd[x_] := CDF[NormalDistribution[], x]

```

```

In[528]:= f0 = A * L * (s[1] * rozd[d1] - sk * rozd[d2])

```

Ocenenie Hull

```

In[291]:= volatilita[0] = caplet[[1]];

In[292]:= volatilita[k_] := Sqrt[caplet[[k+1]]^2 * t[k+1] - Sum[volatilita[i]^2, {i, 0, k-1}]]]

Λ = Table[volatilita[k], {k, 0, 9}]

In[298]:= mieryHullData := Module[{miery},
  miery = Table[0, {i, 1, 10}, {ii, 1, 10}];
  miery[[1]] = FWD;
  For[j = 2, j <= 10, j++,
    For[k = j, k <= 10, k++,
      miery[[j, k]] = miery[[j-1, k]] *
        Exp[(Sum[(tau[ii] * miery[[j-1, ii]] * Λ[[ii-j+1]] * Λ[[k-j+1]]) / (1 +
          tau[ii] * miery[[j-1, ii]]), {ii, j, k}] - Λ[[k-j+1]]^2) / 2] * tau[j-1] +
        Λ[[k-j+1]] * RandomReal[NormalDistribution[], Sqrt[tau[j-1]]]];
    ];
  ];
]

In[498]:= G = Transpose[mieryHullData];

In[501]:= s[t_] := Product[1/(1+tau[j]*G[[j,t]]), {j, 1, n}] /
  Sum[tau[i] * Product[1/(1+tau[j]*G[[j,t]]), {j, 1, i}], {i, 1, n}]

In[503]:= gama[k_, t_] := Product[1+tau[j]*G[[j,t]], {j, 1, n}] -
  Product[1+tau[j]*G[[j,t]]-1, {j, 1, n}] -
  Sum[Product[1+tau[j]*G[[j,t]], {j, i+1, n-1}], {i, 0, k-1}] /
  Sum[Product[1+tau[j]*G[[j,t]], {j, i+1, n}], {i, 0, n}]

volSwapcie = Sqrt[
  1/T0 * Integrate[Sum[(tau[k]*Λ[[k]]*G[[k,1]]*gama[k,1]) / (1+tau[k]*G[[k,1]]), {k, 1, n}]^2, {t, 0, T0}]];
]

In[510]:= d1 = Log[s[1]/sk] + volSwapcie^2 * T0 / 2 /
  volSwapcie * Sqrt[T0]
d2 = Log[s[1]/sk] - volSwapcie^2 * T0 / 2 /
  volSwapcie * Sqrt[T0]

In[512]:= rozd[x_] := CDF[NormalDistribution[], x]
f0 = A * L * (s[1] * rozd[d1] - sk * rozd[d2]);

```