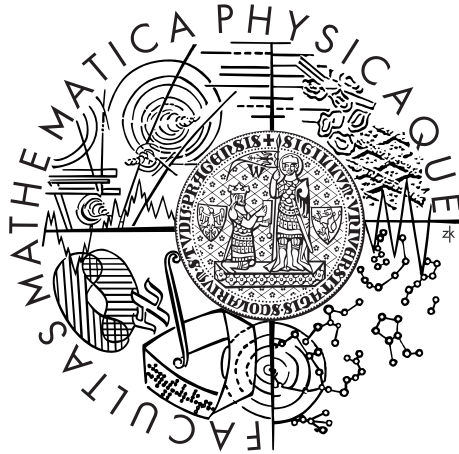


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Bc. Iveta Kováčová

Chování portfolií na efektivních a neefektivních trzích

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Praha 2013

Na tomto místě bych ráda poděkovala vedoucímu práce Doc. RNDr. Janu Hurtovi, CSc. za trpělivost při konzultování mé práce, za jeho cenné rady a obětavost. Dále bych ráda poděkovala celé své rodině za veškerou podporu a důvěru, kterou do mě po celý můj život vkládá.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 31. 7. 2013

Podpis autora

Název práce: Chování portfolií na efektivních a neefektivních trzích

Autor: Iveta Kováčová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc., KPMS MFF UK

Abstrakt: V předložené práci shrneme výsledky týkající se konstrukce optimálních portfolií. Představíme geometrickou reprezentaci portfolií v případě porušení předpokladů o efektivním trhu. Předvedeme technickou analýzu portfolia na konkrétních datech pomocí programu Mathematica 8.0 a porovnáme eficientní množinu portfolia při různých strategiích investování.

Klíčová slova: portfolio s minimálním rizikem, Kellyho strategie, efektivní trhy, přímky očekávaných výnosů, křivky rizik

Title: Portfolios behaviour on efficient and inefficient markets

Author: Iveta Kováčová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc., KPMS MFF UK

Abstract: In this thesis we summarize the results concerning the construction of optimal portfolios. We introduce the geometric representation of the portfolios in the case that the assumptions about an efficient market are violated. We perform a technical analysis of the portfolio on the given data by using the program Mathematica 8.0. and compare an efficient set of the portfolio at different investment strategies.

Keywords: minimum risk portfolios, Kelly's strategy, efficient markets, iso-mean lines, iso-variance curves

Obsah

Úvod	3
1 Hypotéza efektivních trhů	4
2 Ilustrace analýzy portfolia	6
2.1 Portfolio složené ze dvou aktiv	6
2.2 Nejistota výnosů cenných papírů	7
2.2.1 Riziko portfolia	8
2.2.2 Příklad	8
3 Eficientní portfolia	10
3.1 Geometrická analýza eficientní množiny	10
3.1.1 Množina přípustných portfolií	10
3.1.2 Přímký očekávaných výnosů	12
3.1.3 Křivky rizik	13
3.1.4 Kritická přímká tří cenných papírů	16
3.1.5 Vymezení eficientní množiny	16
4 Metody výběru portfolia	20
4.1 Výběr portfolia vzhledem k střední hodnotě a rozptylu	20
4.2 Tobinova věta o separaci	23
4.3 Výběr portfolia vzhledem k střední hodnotě a rozptylu s bezrizikovým aktivem	24
4.3.1 Maximalizace Sharpeova poměru	26
4.4 Model oceňování kapitálových aktiv	26
4.4.1 Alternativní vyjádření očekávaného výnosu portfolia	26
4.4.2 Předpoklady modelu CAMP	27
4.4.3 Tržní portfolio	27
5 Zpracování dat	28
5.1 Prodej nakrátko není povolen	29
5.1.1 Vyčerpání všech prostředků	29
5.1.2 Nevyčerpání všech prostředků	31
5.2 Prodej nakrátko povolen	33
5.2.1 Vyčerpání všech prostředků	33
5.2.2 Nevyčerpání všech prostředků	35
5.3 Prodej nakrátko povolen vs. nepovolen	37
5.4 Kellyho strategie	38
5.4.1 Problém házení mincí	38
5.4.2 Maximalizace střední hodnoty zisku	39
5.4.3 Maximalizace pravděpodobnosti úspěchu v případě sázky neceleho jmění	39
Závěr	42
Seznam použité literatury	43

Úvod

Tato práce se zabývá analýzou portfolia obsahující velké množství cenných papírů. Dobré portfolio je více než jen dlouhý seznam akcií, komodit a dluhopisů. Je to vyvážená jednotka, která dodává investorovi dostatek ochrany a příležitostí v případě různých eventuality. Investor by se měl snažit vytvořit takové ucelené portfolio, které nejlépe odpovídá jeho potřebám.

Analýza portfolia začíná se sběrem informací o příslušných cenných papírech. Končí závěry týkající se portfolia jako celku. Účelem analýzy je najít takové portfolio, které nejvíc uspokojuje investorovo očekávání.

Pro analýzu portfolia můžeme použít různé informace týkající se cenných papírů. Zdrojem informací mohou posloužit předpovědi jednotlivých analytiků týkající se budoucích výnosů. Pokud jsou použity výnosy minulých období jako zdroj, výsledkem analýzy jsou portfolia, která se již osvědčila v minulosti. Předpovědi analytiků mohou vést k lepším, ale i horším portfoliím.

V první části práce uvedeme krátkou ilustraci analýzy portfolia, zaměříme se hlavně na geometrickou reprezentaci portfolia a přesně popíšeme nalezení eficientní množiny portfolia v případě tří cenných papírů. V druhé části popíšeme metody nalezení portfolia s minimálním rizikem při pevně dané očekávané hodnotě výnosnosti obsahující libovolný počet cenných papírů. V poslední kapitole předvedeme technickou analýzu portfolia na konkrétních datech, pojednáme o výsledcích různých investičních strategií.

Většina obrázků a všechny výpočty byli zrealizovaný pomocí programu Mathematica 8.0.

1. Hypotéza efektivních trhů

Hypotéza kapitálových a komoditních trhů je přeplněna pokusy nalézt pravidlo nebo metodiku, jak vyhledávat mimořádné investiční příležitosti a jak překonávat trh. Cílem fundamentální i technické analýzy je jediné: být lepší než ti druzí. Toto chování pro trh má následující praktický důsledek. Uvažujme o cenách akcií, cenných papírů obecně nebo komodit. Dejme tomu, že na burze v New Yorku se jednoho dne zobchodovalo patnáct miliónů kusů akcií IBM. Znamená to, že toho dne se musel najít určitý počet účastníku trhu, který byl ochoten za určitou cenu akcií prodat, a jistý počet jiných účastníků trhu, kteří byli ochotni za tutéž cenu akcií IBM koupit. Má-li být trh v rovnováze, musí být nabídka i poptávka vyvážená.

Když budeme uvažovat, že prodávající i kupující mají stejné informace a stejnou inteligenci, nezbyvá než konstatovat, že obě strany mají stejný nárok na pravdu - kurs dané akcie by tedy měl teoreticky zůstat neměnný. V praxi se pochopitelně nemůže stát, že by kupující i prodávající měli pravdu současně. Kurz akcií nezůstává delší dobu neměnné. V reálném světě jsou ceny akcií ovlivňovány dobrými i špatnými zprávami. Jakákoliv důležitá zpráva posune kurz více nebo méně jedním z možných směrů. Právě to je jádrem hypotézy efektivních trhů: všechny informace, které jsou v určitý moment známy, jsou okamžitě obsaženy v kurzu daného cenného papíru. Jakmile se nová informace objeví, je okamžitě správně ohodnocena a zahrnuta do ceny.

Zdá se, že kdyby hypotéza efektivních trhů dokonale platila, byla by analýza cenných papírů bez užitku. Není to ovšem úplně pravda, i na dokonale efektivních trzích je stále co analyzovat, např. riziko cenných papírů. Za druhé, málokterý trh je ve skutečnosti natolik efektivní, aby se v něm nenašla alespoň skulinka. Za třetí, bez soustavné činnosti analytiků by trhy ztratily efektivitu.

Říkáme, že trh je efektivní v případě, že splňuje níže uvedené předpoklady viz [3, str. 79]. (V závorkách je ohodnocena míra splnitelnosti následovně: realistická – v zásadě splněná, omezená – obvykle splněná, restriktivní – splněná v určitých případech, nereálná – těžko splnitelná.)

1. Investoři se rozhodují pouze na základě informací očekávaného výnosu a kovarianční struktury výnosů (*homogeneous expectations*) (realistická).
2. Chování investorů je racionální. Vybírají portfolio s nejvyšším očekávaným výnosem z těch, které mají stejné riziko (realistická).
3. Vybírají portfolio s nejmenším rizikem z těch, u kterých je očekáván stejný výnos (realistická).
4. Aktiva jsou nekonečně dělitelná (omezená).
5. Investiční horizont se realizuje v jednom časovém úseku (realistická).
6. Nejsou žádné transakční náklady ani daně (omezená).
7. Existuje pouze jedna bezriziková úroková míra a všichni investoři si mohou půjčit nebo nabízet finanční prostředky s touto úrokovou mírou (nereálná).

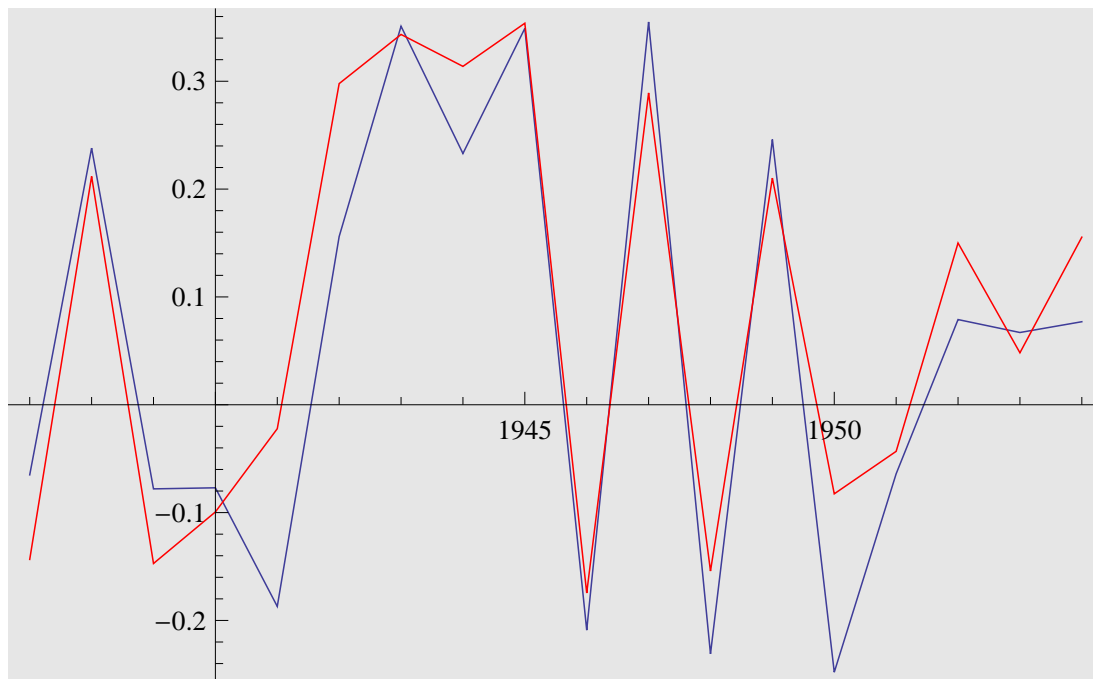
8. Všechna aktiva jsou volná k prodeji (realistická).
9. Všichni investoři mají povolený prodej nakrátko (restriktivní).
10. Žádný investor nemůže v značné míře ovlivnit výnos příslušného aktiva (restriktivní).
11. Všechny potřebné informace (očekávaný výnos a kovarianční struktura výnosu) jsou k dispozici pro všechny investory ve stejný čas (restriktivní).

Jsou-li tyto předpoklady splněny, nastává tržní rovnováha (*market equilibrium*), protože všichni investoři jsou si plně vědomi situace na trhu a chovají se racionálně.

2. Ilustrace analýzy portfolia

2.1 Portfolio složené ze dvou aktiv

Krátkou analýzu portfolia, které se skládá ze dvou aktiv uvedeme na jednoduchém příkladě. V praxi samozřejmě analyzujeme portfolio skládající se z mnohem více aktiv, které vstupují do analýzy jako kandidáti pro sestavení optimálního portfolia.



Obrázek 2.1: *Coca-cola* (modře), 80% *C.C*+20% *A.T. & Sfe* (červeně)

Výnosy cenných papírů společnosti *Coca-cola* a *Atchison, Tobeka & Santa Fe* mezi lety 1937 - 1954¹ jsou znázorněny na obrázku 2.1. Nechť P_t je uzavírací cena na konci roku t a D_t jsou vyplacené dividendy v roce t , pak výnosy jsou definovány následujícím způsobem:

$$\frac{P_t - P_{t-1} + D_t}{P_{t-1}} \quad (2.1)$$

Například výnos pro rok 1948 dostaneme jako

$$\frac{(\text{uzavírací cena, 1948}) - (\text{uzavírací cena, 1947}) + (\text{dividendy, 1948})}{(\text{uzavírací cena, 1947})}$$

Je to částka, kterou investor získá nebo ztratí v případě, že investuje \$1.00 na konci roku 1947. Ztráta se definuje jako záporný výnos. Například, uzavírací cena v roce 1947 byla 50, v roce 1948 byla 45 a během roku 1948 byly vyplaceny \$2 jako dividendy. Pak výnos v roce 1948 činil

$$\frac{45 - 50 + 2}{50} = -0.06,$$

¹Data jsou převzata z [8].

tedy ztráta byla 6%.

Výběr portfolia by měl být založen více na rozumných předpokladech o budoucnosti než na samotné minulosti. Výběr, který je založen na samotné minulosti předpokládá, že průměrné výnosy minulých hodnot jsou dobrým odhadem pro budoucí výnosy a proměnlivost výnosů v minulosti je dobrým měřítkem nejistoty budoucích výnosů. V následující části budeme diskutovat pouze o analýze založené na hodnotách z minulosti.

Předpokládejme, že sestavíme portfolio následujícím způsobem: investujeme na začátku roku 1954 20% do akcií *Atchison, Topeka & Santa Fe* a 80% do akcií firmy *Coca-cola*. Výnos z takto sestaveného portfolia na konci roku 1954 by činil

$$\begin{aligned} &= 0.2 * 0.469 + 0.8 * 0.077 \\ &= 0.155. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Průměrný očekávaný výnos z našeho portfolia je

$$\begin{aligned} &= 0.2 * 0.198 + 0.8 * 0.055 \\ &= 0.084. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Tato částka je vyšší než průměrný výnos akcií společnosti *Coca-cola* (0.055) a nižší než průměrný výnos akcií *A. T. & Sfe* (0.198). Míra očekávaného výnosu výsledného portfolia musí vždy ležet mezi mírou výnosu nejméně a nejvíce výnosné investice, která může být zařazena do našeho portfolia. Pro rizika ovšem toto jednoduché pravidlo neplatí. Riziko výsledného portfolia může být menší než riziko nejbezpečnější jednotlivé investice, která je obsažena v portfoliu. Výnosy z *A. T. & Sfe* v časovém horizontu 1937 - 1954 vykazovaly nejvyšší roční ztrátu 45 centů za dolar. Výnosy *Coca-cola* byly stabilnější, vykazovaly ztrátu 25 centů. Výnos z portfolia, které jsme sestavili ze dvou aktiv v kombinaci 20%-80% byl nejstabilnější ve smyslu maximální ztráty. Maximální ztráta za celé období činila 18 centů. Na obrázku 2.1 vidíme výnos našeho portfolia za dané období, který jsme porovnali s výnosem, jež by nám dalo pouze jedno aktivum.

Portfolio „20%-80%“, dává vyšší průměrný výnos a má nižší variabilitu než portfolio, které by se skládalo pouze z akcií *Coca-coly*. Výsledkem předchozích úvah je, že v tomto případě se diverzifikované portfolio ziskovější a stabilnější než kdybychom investovali pouze do akcií *Coca-coly*.

2.2 Nejistota výnosů cenných papírů

Nejistota je charakteristickým rysem investice. Očekáváme příliš mnoho když si myslíme, že lze s určitostí předpovídat, jestli příslušný cenný papír bude v budoucnu výnosný nebo ztrátový. Lze očekávat, že příslušný analytik dojde k následujícím závěrům: Výnos z aktiva A je pravděpodobnější než z aktiva B; výnos cenného papíru C je víc závislý na vývoji trhu než výnos cenného papíru D; cenný papír E bude vykazovat jistější ale pomalejší růst než cenný papír F, cenné papíry G a H budou dostatečně výnosné pokud poptávka po jejich produktu bude nadále růst.

Opatrné a promyšlené úvahy týkající se silných a slabých stránek cenných papírů jsou nejlepším základem analýzy portfolia.

2.2.1 Riziko portfolia

Dalším a lepším měřítkem variability portfolia je rozptyl, resp. směrodatná odchylka, kterou definujeme následovně:

$$\sigma = \sqrt{x_1^2 \sigma_{11} + x_1 x_2 \sigma_{12} + x_1 x_3 \sigma_{13} + \dots + x_n^2 \sigma_{nn}}, \quad (2.4)$$

kde σ je riziko (směrodatná odchylka) portfolia, x_i je váha i -té složky portfolia a σ_{ij} je kovariance mezi mírami zisku i -té a j -té složky portfolia pro $i, j = 1, \dots, n$.

Směrodatná odchylka výnosu z celého portfolia neobsahuje pouze směrodatné odchylky jednotlivých individuálních aktiv. Obsahuje také korelace mezi výnosy jednotlivých aktiv. Korelační koeficient ρ měří lineární závislost výnosů jednotlivých aktiv. Pokud $\rho = 1$, říkáme, že mezi danými veličinami je přímá lineární závislost. Pokud mezi nimi neexistuje žádná lineární závislost, říkáme, že veličiny jsou vzájemně nekorelované ($\rho = 0$).

Platí, že čím vyšší je korelace mezi výnosy jednotlivých cenných papírů, tím větší je rozptyl celkového výnosu portfolia.

2.2.2 Příklad

Uvažujme portfolio skládající se ze dvou aktiv s očekávaným výnosem $\mathbf{r} = (0.4, 0.1)$, $\sigma_{11} = 0.2^2$ a $\sigma_{22} = 0.1^2$. Za podmínky, že váhy jednotlivých aktiv splňují $x_1 + x_2 = 1$, očekávaný výnos portfolia bude

$$r_p = 0.4x_1 + 0.1(1 - x_1) = 0.3x_1 + 0.1 \quad (2.5)$$

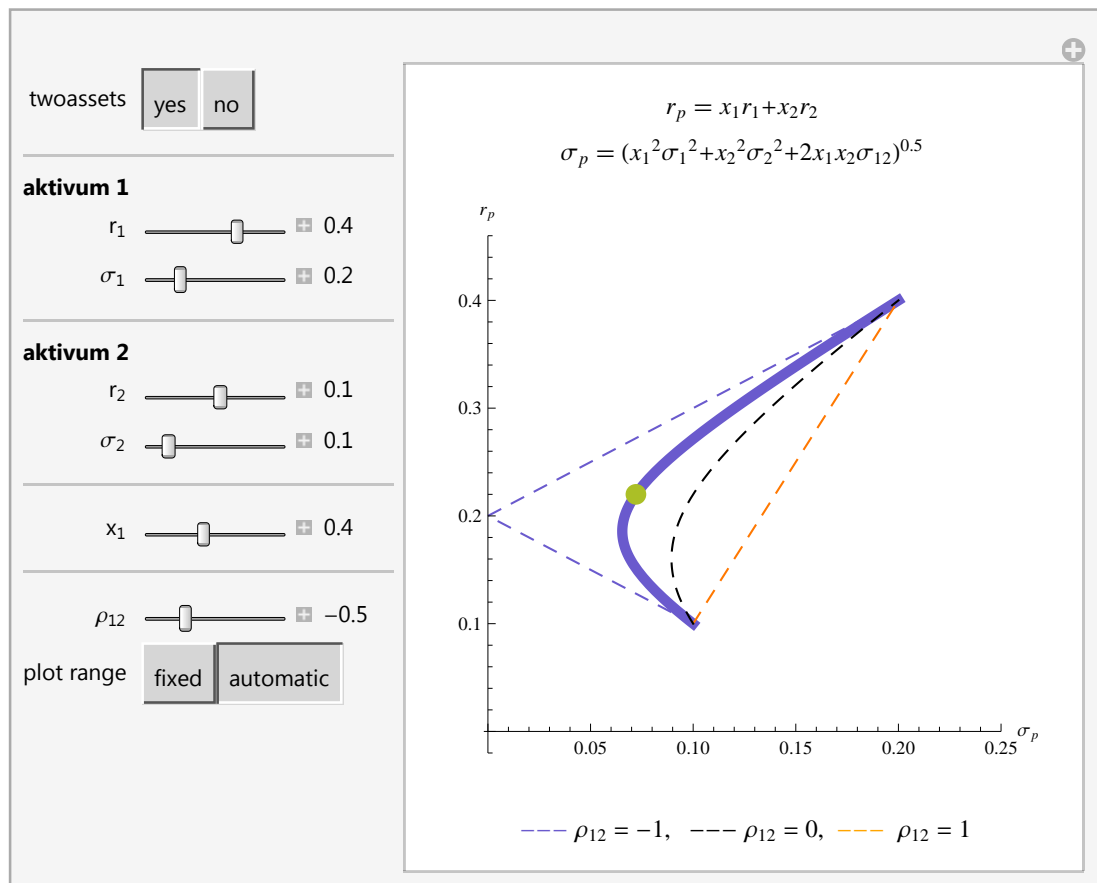
a rozptyl portfolia

$$\sigma_p^2 = 0.2^2 x_1^2 + \rho_{12} 0.2 \cdot 0.1 x_1 (1 - x_1) + 0.1^2 (1 - x_1)^2. \quad (2.6)$$

Závislost očekávané hodnoty portfolia na jeho riziku je obvykle znázorňována do tzv. *prostoru rizik a výnosů*². Příslušným křivkám se říká *eficientní hranice*. Pro různé hodnoty korelačního koeficientu ρ_{12} jsou tyto hranice znázorněny na obrázku 2.2. Vidíme, že nulového rizika portfolia jsme schopni dosáhnout pouze v případě perfektní negativní korelace mezi výnosy aktiv, tzn. pro $\rho_{12} = -1$. Podívejme se pro jaké hodnoty vah (x_1, x_2) najdeme portfolio s minimálním rizikem. Rozptyl portfolia σ_p^2 je pro $|\rho| < 1$ pozitivně definitní kvadratická forma, což je postačující k tomu abychom našli řešení rovnice

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial x_1} = 2 \cdot 0.2^2 x_1 + \rho_{12} \cdot 0.2 \cdot 0.1 - 2 x_1 \rho_{12} \cdot 0.2 \cdot 0.1 - 2 \cdot 0.1(1 - x_1) = 0. \quad (2.7)$$

²*Prostor rizik a výnosů* je vhodné grafické schéma pro hledání kompromisu mezi dostatečně malým rizikem σ a zároveň dostatečně velkou střední mírou zisku μ . Na vodorovné ose této roviny je znázorněna hodnota rizika uvažovaného portfolia a na její svislé ose odpovídající hodnota střední míry zisku.



Obrázek 2.2: Eficientní hranice portfolia

Řešením rovnice je

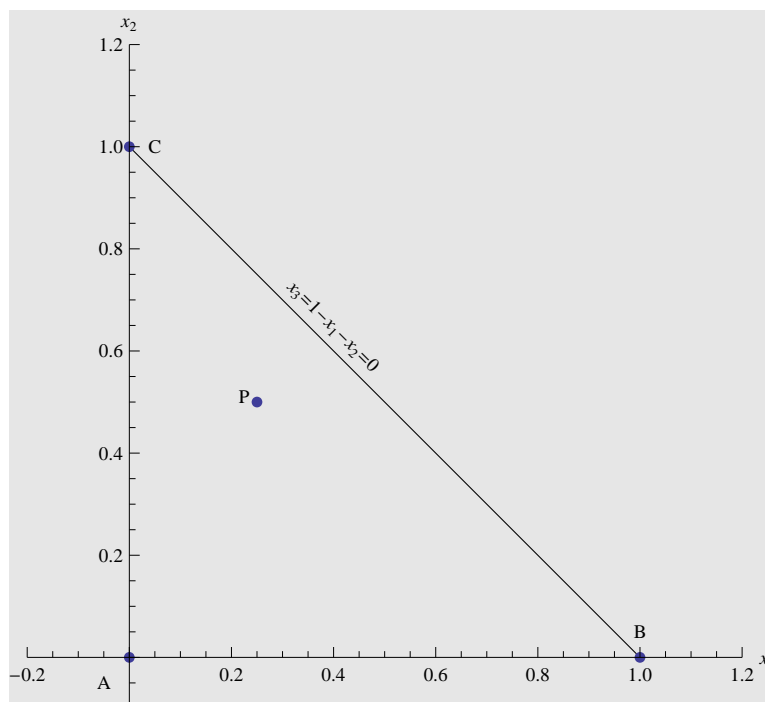
$$x_1^* = \frac{0.02(1 - \rho_{12})}{0.1 - 0.04\rho_{12}}, \quad x_2^* = 1 - x_1^* = \frac{0.08 - 0.02\rho_{12}}{0.1 - 0.04\rho_{12}}. \quad (2.8)$$

Jednoduchá analýza ukazuje, že pro $\rho_{12} \leq 0.5$ je x_1^* v intervalu $[0,1]$, přičemž pro $\rho_{12} > 0.5$ x_1^* překročí hodnotu 1, tzn. že k dosažení minimálního rizika potřebujeme prodej nakrátko (viz kapitola 3.1.1).

3. Eficientní portfolia

Tato kapitola popisuje geometrickou analýzu portfolia, které se skládá ze tří aktiv. Uvedeme všechny hlavní a potřebné pojmy pro analýzu portfolia s libovolným počtem cenných papírů.

3.1 Geometrická analýza eficientní množiny



Obrázek 3.1: Geometrická reprezentace portfolia

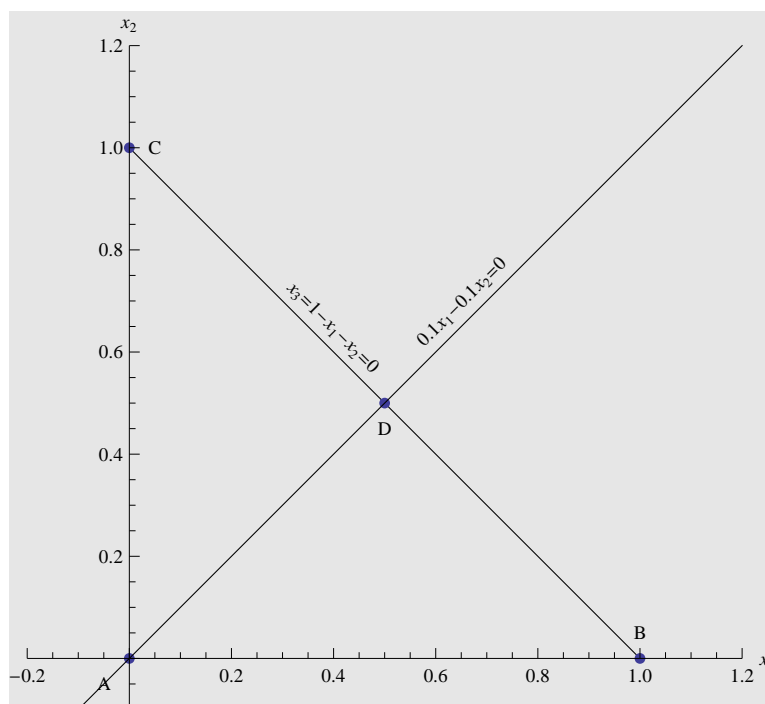
3.1.1 Množina přípustných portfolií

Definice 1. Předpokládejme, že portfolio se skládá z n aktiv s relativními podíly v portfoliu x_1, \dots, x_n . **Množinu přípustných portfolií** (zkr. přípustná množina) nazýváme množinu všech možných portfolií, které mohou vzniknout z daných n aktiv změnou jejich relativních podílů. Relativní podíly musí splňovat podmínku $\sum_{i=1}^n x_i = 1$.

Dalším běžným (někdy legislativním) omezením je $x_i \geq 0$ pro $\forall i$. Situace, kdy tato podmínka neplatí, se nazývá prodej nakrátko (*sell short*)¹.

Nechť tedy x_i reprezentuje část investice do i -tého cenného papíru. Pro $i = 1, 2, 3$ je to například

¹Prodej nakrátko (short sell): je často používaná transakce při spekulaci na pokles ceny cenných papírů: klient dá makléři pokyn k prodeji cenných papírů jiného klienta s tím, že mu je za předepsanou dobu (obvykle krátkou) opět nechá odkoupit. Je-li jeho spekulace na pokles ceny správná, lze cenné papíry koupit levněji, než byly původně prodány, a příslušný cenový rozdíl je klientův zisk.



Obrázek 3.2: Nestandardní přípustná množina

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.75, \\ x_2 &= 0.00, \\ x_3 &= 0.25. \end{aligned} \tag{3.1}$$

To znamená, že 75% z našich prostředků jsme investovali do prvního cenného papíru a 25% do třetího. Platí

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1. \tag{3.2}$$

Částka investovaná do třetího cenného papíru je závislá na částkách investovaných do ostatních:

$$x_3 = 1 - x_1 - x_2. \tag{3.3}$$

Bod P na obrázku 3.1 reprezentuje portfolio, kde $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.50$ a $x_3 = 1 - 0.25 - 0.50 = 0.25$. Standardní analýza portfolia vyžaduje, aby $x_i \geq 0$ pro $i = 1, 2, 3$. Přípustná množina je v tomto případě oblast ležící v trojúhelníku ABC na obrázku 3.1. Požadavek $x_1 \geq 0$ je jedním z omezení při výběru portfolia. Omezení určují přípustnou množinu. Standardní analýza, kde se portfolio skládá z n cenných papírů má $n + 1$ omezení.

Předpokládejme, že výnosy ze tří cenných papírů jsou 0.04, 0.02, 0.03 a požadovaný výnos celého portfolia je 0.03. V tomto případě portfolio patří do přípustné množiny, pokud

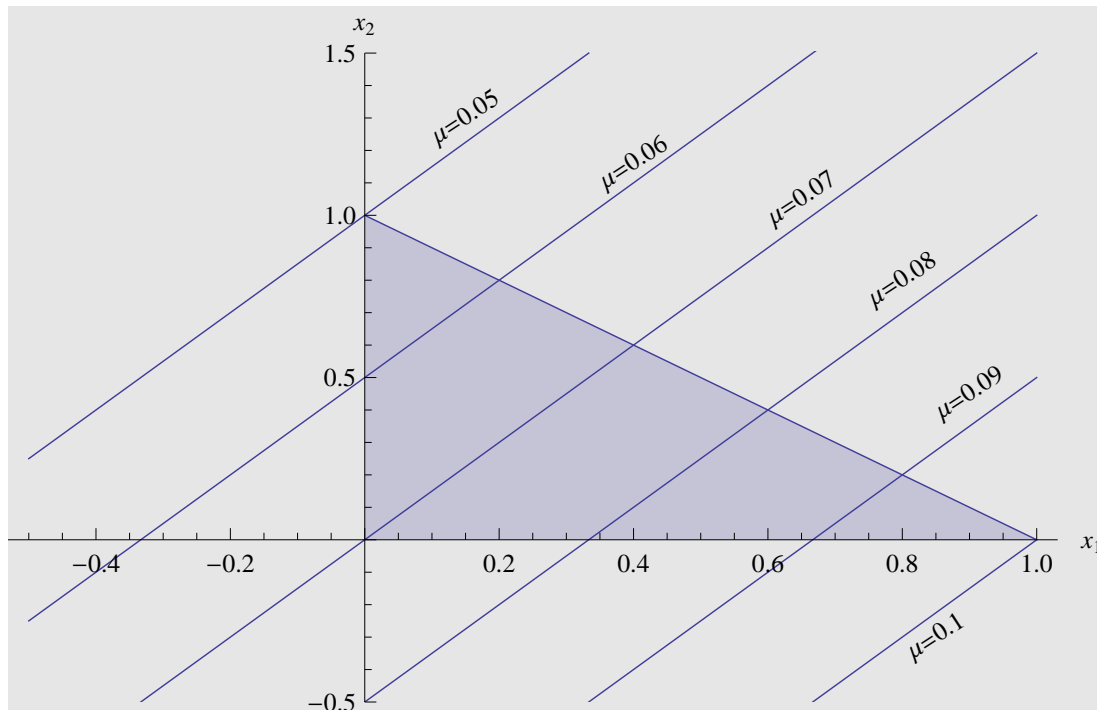
$$0.04x_1 + 0.02x_2 + 0.03x_3 \geq 0.03. \tag{3.4}$$

Po dosazení $x_3 = 1 - x_1 - x_2$ se dostaneme k požadavku

$$0.01x_1 - 0.01x_2 \geq 0. \tag{3.5}$$

Množina přípustných portfolií je v tomto případě reprezentována body v trojúhelníku ABD na obrázku 3.2.

3.1.2 Přímký očekávaných výnosů



Obrázek 3.3: Přímký očekávaných výnosů

Při analýze tří cenných papírů je očekávaný výnos portfolia μ reprezentován rovnicí

$$\mu = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 + x_3\mu_3. \quad (3.6)$$

Očekávaný výnos portfolia je dán váženým průměrem očekávaných výnosů jednotlivých cenných papírů, kde váhami jsou veličiny x_1, x_2, x_3 reprezentující relativní podíly v portfoliu.

Pokud v předchozím vzorci nahradíme x_3 výrazem $1 - x_1 - x_2$, dojdeme k výrazu

$$\mu = x_1(\mu_1 - \mu_3) + x_2(\mu_2 - \mu_3) + \mu_3. \quad (3.7)$$

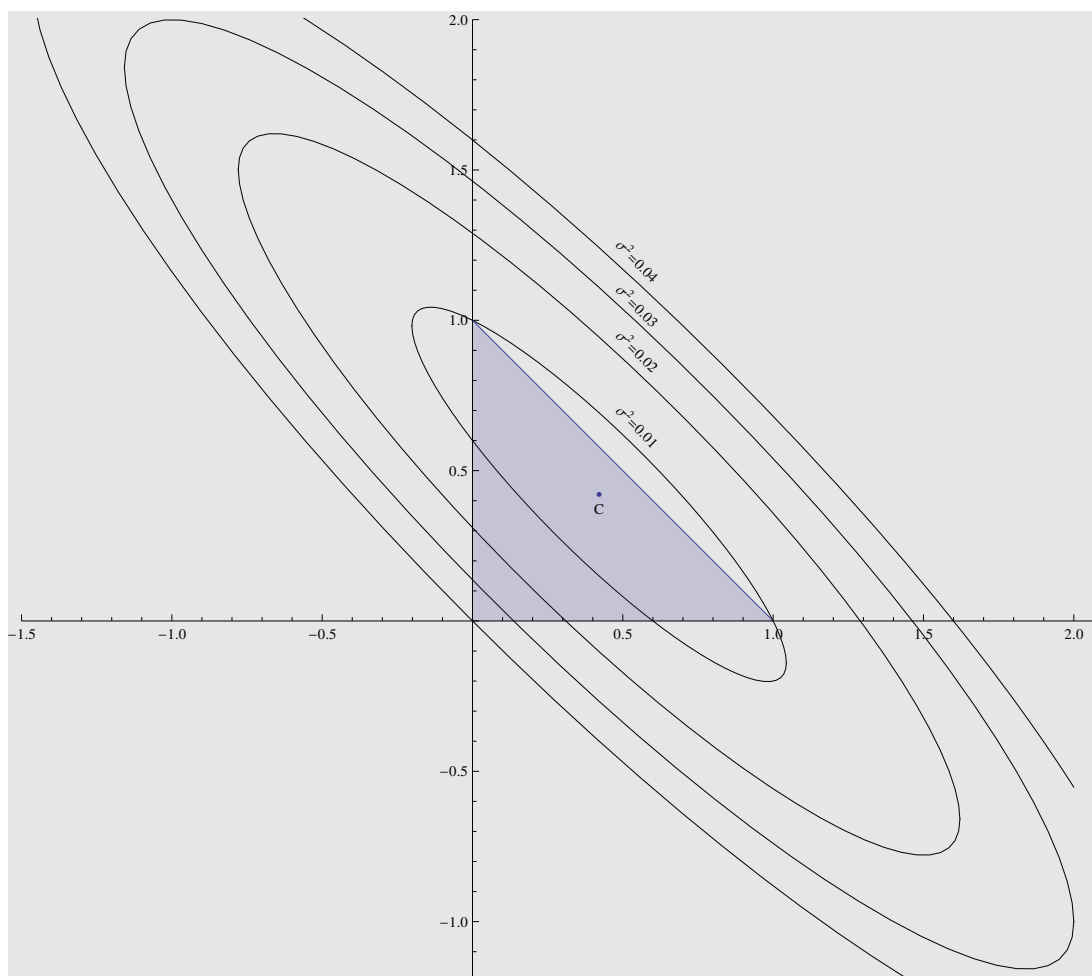
Očekávaný výnos portfolia závisí pouze na x_1 a x_2 . Mějme dány očekávané výnosy tří cenných papírů $\mu_1 = 0.1, \mu_2 = 0.05, \mu_3 = 0.07$. Všechna portfolia s očekávaným výnosem $\mu = 0.08$ musí splnit rovnost

$$\begin{aligned} 0.08 &= 0.03x_1 - 0.02x_2 + 0.07 \\ 0.01 &= 0.03x_1 - 0.02x_2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Tato rovnost je reprezentována jako přímka označená $\mu = 0.08$ na obrázku 3.3. Portfolio dává očekávaný výnos 0.08 pouze tehdy, když je reprezentován bodem přímky $\mu = 0.08$. Na obrázku 3.3 jsou další přímky, které reprezentují všechna

možná portfolia s celkovými očekávanými výnosy 0.05, 0.06, 0.07, 0.09, 0.10. Tyto přímky jsou vzájemně rovnoběžné a nazýváme je jako *přímky očekávaných výnosů* (*iso-mean lines*). Maximálního očekávaného výnosu za podmínky že $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, lze v tomto případě dosáhnout v bodě $[1, 0]$ ($\mu = 0.1$). V příloze na obrázcích 5.15, 5.16, jsou znázorněny přímky očekávaných výnosů portfolia pro další různé hodnoty očekávaných výnosů jednotlivých aktiv.

3.1.3 Křivky rizik



Obrázek 3.4: Křivky rizik

Rozptyl výnosu portfolia σ^2 , který se skládá ze tří cenných papírů můžeme vyjádřit jako

$$\sigma^2 = x_1^2\sigma_{11} + x_2^2\sigma_{22} + x_3^2\sigma_{33} + 2x_1x_2\sigma_{12} + 2x_1x_3\sigma_{13} + 2x_2x_3\sigma_{23}, \quad (3.9)$$

kde σ_{ij} je kovariance mezi výnosy i -tého a j -tého cenného papíru.

Po substituci x_3 výrazem $1 - x_1 - x_2$ dostaneme

$$\begin{aligned} \sigma^2 = x_1^2\sigma_{11} &+ x_2^2\sigma_{22} + (1 - x_1 - x_2)^2\sigma_{33} + 2x_1x_2\sigma_{12} \\ &+ 2\sigma_{13}x_1(1 - x_1 - x_2) + 2\sigma_{23}x_2(1 - x_1 - x_2), \end{aligned} \quad (3.10)$$

po úpravě

$$\begin{aligned}\sigma^2 = & x_1^2 [\sigma_{11} - 2\sigma_{13} + \sigma_{33}] + x_2^2 [\sigma_{22} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33}] + \\ & + 2x_1x_2 [\sigma_{12} - \sigma_{13} - \sigma_{23} + \sigma_{33}] + \\ & + 2x_1 [\sigma_{13} - \sigma_{33}] + 2x_2 [\sigma_{23} - \sigma_{33}] + \sigma_{33}.\end{aligned}\quad (3.11)$$

Z výrazu (3.11) vidíme, že v tomto případě rozptyl výnosu portfolia závisí pouze na x_1 a x_2 . Pro cenné papíry s hodnotami

$$\begin{aligned}\sigma_{11} = \sigma_{22} &= 0.01, \\ \sigma_{33} &= 0.04, \\ \sigma_{12} &= 0.005, \\ \sigma_{13} = \sigma_{23} &= 0,\end{aligned}\quad (3.12)$$

rozptyl výnosu portfolia je následující

$$\sigma^2 = 0.05x_1^2 + 0.05x_2^2 + 0.09x_1x_2 - 0.08x_1 - 0.08x_2 + 0.04.\quad (3.13)$$

Všechna portfolia, pro která platí, že $\sigma^2 = 0.01$, musí splnit rovnost

$$0.01 = 0.05x_1^2 + 0.05x_2^2 + 0.09x_1x_2 - 0.08x_1 - 0.08x_2 + 0.04.\quad (3.14)$$

Křivka označená jako $\sigma^2 = 0.01$ na obrázku 3.4 obsahuje všechny body, které tuto rovnost splňují. Všechny tyto křivky mají tvar elipsy. Na obrázku 3.4 vidíme také elipsy pro $\sigma^2 = 0.02$, $\sigma^2 = 0.03$ a $\sigma^2 = 0.04$. Všechny tyto elipsy mají střed ve stejném bodě, mají stejnou orientaci a stejný poměr hlavní a vedlejší poloosy. Říkáme jim *křivky rizik (iso-variance curves)*. Bod C se souřadnicemi $x_1 = x_2 = 8/19$ je středem všech elips z předchozího příkladu. Také reprezentuje portfolio, jehož výnos má nejmenší rozptyl. S rostoucím rozptylem délky poloos elips rostou tak, že poměr jejich délek zůstává konstantní.

Poznámka

Portfolio s minimálním rizikem lze snadno nalézt analýzou vztahu (3.11). Předpokládejme obecné vyjádření kvadratické křivky

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2fy + g = 0,\quad (3.15)$$

kde střed elipsy $[x_0, y_0]$ je definován takto

$$\begin{aligned}x_0 &= \frac{cd - bf}{b^2 - ac} \\ y_0 &= \frac{af - bd}{b^2 - ac}.\end{aligned}\quad (3.16)$$

Portfolio s minimálním rizikem (3.11) najdeme srovnáním (3.15) a aplikací na (3.16):

$$\begin{aligned}a &= \sigma_{11} - 2\sigma_{13} + \sigma_{33} \\ b &= \sigma_{12} - \sigma_{13} - \sigma_{23} + \sigma_{33} \\ c &= \sigma_{22} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33} \\ d &= \sigma_{13} - \sigma_{33} \\ f &= \sigma_{23} - \sigma_{33} \\ g &= \sigma_{33} - \sigma^2,\end{aligned}\quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}
x_1^* &= \frac{\sigma_{23}^2 + \sigma_{13}(\sigma_{22} - \sigma_{23}) - \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{12}(\sigma_{33} - \sigma_{23})}{(\sigma_{12} - \sigma_{13} - \sigma_{23} + \sigma_{33})^2 - (\sigma_{11} - 2\sigma_{13} + \sigma_{33})(\sigma_{22} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33})} \\
x_2^* &= \frac{\sigma_{13}^2 - \sigma_{23}\sigma_{13} + \sigma_{11}(\sigma_{23} - \sigma_{33}) + \sigma_{12}(\sigma_{33} - \sigma_{13})}{(\sigma_{12} - \sigma_{13} - \sigma_{23} + \sigma_{33})^2 - (\sigma_{11} - 2\sigma_{13} + \sigma_{33})(\sigma_{22} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33})} \\
x_3^* &= (1 - x_1^* - x_2^*).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Tento bod může, ale nemusí patřit do přípustné množiny portfolia.

Příklady křivky rizik

V příloze na obrázcích 5.17, 5.18 a 5.19 jsou uvedeny příklady křivek rizik a přímků středních hodnot. Jako MVP (minimum variance portfolio) je označeno portfolio s nejmenším rizikem. Na obrázku 5.17a vidíme křivky rizik sestavené s následujícími charakteristikami

$$\begin{aligned}
R_1=0.09 \quad \sigma_1=0.26 \quad \rho_{12}=0.57, \\
R_2=0.16 \quad \sigma_2=0.06 \quad \rho_{13}=-0.38, \\
R_3=0.50 \quad \sigma_3=0.49 \quad \rho_{23}=-0.41,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

kde R_i je očekávaný výnos i -tého aktiva, σ_i značí směrodatnou odchylku výnosu i -tého aktiva a ρ_{ij} je korelace mezi výnosy i -tého a j -tého aktiva. Na obrázku 5.17b jsou znázorněné křivky rizik pro hodnoty $\sigma = 0.0502$ (červeně), $\sigma = 0.0509$ (přerušovaně) a $\sigma = 0.0518$. Nejmenší rozptyl dle (3.16) který označujeme MVP, je v bodě $x_1 = -0.0609$, $x_2 = 1.01$, $x_3 = 1 - x_1 - x_2$. V tomto bodě je rozptyl výnosu portfolia roven $\sigma^2 = (0.05011)^2$. Tento bod nepatří do přípustné množiny. Pro portfolio s nejmenším σ^2 , které patří do přípustné množiny s omezením $x_i \geq 0$, nabývá minimální rozptyl výnosu $\sigma^2 = (0.0518)^2$.

Na obrázku 5.18a jsou křivky rizik sestavené s následujícími charakteristikami

$$\begin{aligned}
R_1=0.09 \quad \sigma_1=0.44 \quad \rho_{12}=0.16, \\
R_2=0.16 \quad \sigma_2=0.06 \quad \rho_{13}=-0.86, \\
R_3=0.50 \quad \sigma_3=0.19 \quad \rho_{23}=-0.44,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

kde R_i je očekávaný výnos i -tého aktiva, σ_i značí směrodatnou odchylku výnosu i -tého aktiva a ρ_{ij} je korelace mezi výnosy i -tého a j -tého aktiva. Na obrázku 5.18b jsou znázorněné křivky rizik pro hodnoty $\sigma = 0.02980$ (červeně), $\sigma = 0.02910$ (přerušovaně) a $\sigma = 0.02915$. Nejmenší rozptyl dle (3.16) který označujeme MVP, je v bodě $x_1 = 0.114$, $x_2 = 0.558$, $x_3 = 1 - x_1 - x_2$. V tomto bodě je rozptyl výnosu portfolia roven $\sigma^2 = (0.02907)^2$. Tento bod patří do přípustné množiny.

Na obrázku 5.19a jsou křivky rizik sestavené s následujícími charakteristikami

$$\begin{aligned}
R_1=0.09 \quad \sigma_1=0.04 \quad \rho_{12}=0.16, \\
R_2=0.16 \quad \sigma_2=0.26 \quad \rho_{13}=-0.86, \\
R_3=0.50 \quad \sigma_3=0.49 \quad \rho_{23}=-0.44,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

kde R_i je očekávaný výnos i -tého aktiva, σ_i značí směrodatnou odchylku výnosu i -tého aktiva a ρ_{ij} je korelace mezi výnosy i -tého a j -tého aktiva. Na obrázku 5.19b jsou znázorněné křivky rizik portfolia $\sigma = 0.01595$ (červeně), $\sigma = 0.016$ (přerušovaně) a $\sigma = 0.01605$. Nejmenší rozptyl dle (3.16) který označujeme MVP, je v bodě $x_1 = 0.8843$, $x_2 = 0.0425$, $x_3 = 1 - x_1 - x_2$ označeném jako MVP. V tomto bodě rozptyl výnosu portfolia má hodnotu $\sigma^2 = (0.01593)^2$. Tento bod patří do přípustné množiny.

Poznámka

Nechť ξ_i je náhodná veličina reprezentující výnos i -tého aktiva. Křivky rizik vytvoří systém elips, pokud nastává jedna z následujících možností:

1. $\sigma_{11} - 2\sigma_{13} + \sigma_{33} = 0$; v případě, že náhodná veličina $(\xi_1 - \xi_2)$ má nulový rozptyl;
2. $\sigma_{22} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33} = 0$; v případě, že náhodná veličina $(\xi_2 - \xi_3)$ má nulový rozptyl;
3. korelační koeficient náhodných veličin $(\xi_1 - \xi_3)$ a $(\xi_2 - \xi_3)$ je roven 1 nebo -1.

3.1.4 Kritická přímka tří cenných papírů

Na obrázku 3.5 vidíme přímky očekávaných výnosů a zároveň křivky rizik. Analýzu začneme v bodě A . Budeme pokračovat směrem nahoru po přímce μ_3 . Přímka μ_3 postupně protíná elipsy $\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Očekávaný výnos portfolia je stejný v každém bodě přímky. Rozptyl výnosu portfolia směrem od bodu A k bodu B na přímce μ_3 klesá a dále od bodu B roste. Ze všech bodů na přímce μ_3 má výnos portfolia nejmenší rozptyl v bodě B , kde je μ_3 tečnou elipsy σ_1 . Pro ostatní přímky analogicky platí že, v bodech D, E, F, G, H najdeme nejmenší rozptyly k příslušným přímкам, které reprezentují očekávané výnosy $\mu_1, \mu_2, \mu_4, \mu_5$ a μ_6 .

Přímka l je spojnicí všech bodů, které minimalizují rozptyl pro daný očekávaný výnos. Říkáme jí *kritická přímka (critical line)*. Pokud nějaký bod leží na kritické přímce znamená to, že minimalizuje rozptyl pro nějakou hodnotu očekávaného výnosu. Kritická přímka prochází bodem C , středem všech elips. Může, ale nemusí procházet množinou přípustných portfolií.

3.1.5 Vymezení eficientní množiny

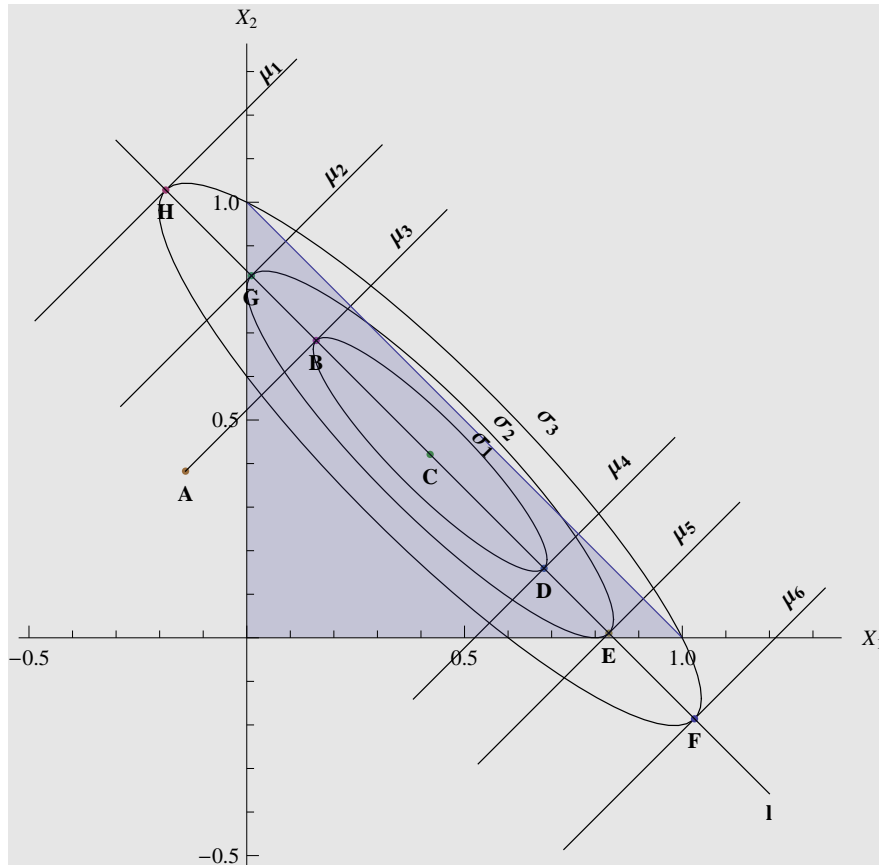
Definice 2. *Portfolio s váhami \mathbf{x}^* je eficientní vzhledem ke střední hodnotě a rozptylu, jestliže neexistují jiné váhy \mathbf{x} splňující podmínku $\sum_i x_i = 1$, pro které je $\mu_x \geq \mu_{x^*}$ a současně $\sigma_x^2 \leq \sigma_{x^*}^2$ a alespoň jedna z nerovností je ostrá.*

Obrázek 3.6 obsahuje následující informace:

1. bod C reprezentuje portfolio s nejmenším rizikem ze všech ostatních portfolií, patřících nebo nepatřících do přípustné množiny; v tomto případě bod C do přípustné množiny patří;
2. bod \bar{X} reprezentuje portfolio s největším očekávaným výnosem z přípustné množiny;
3. směr růstu očekávaného výnosu (modrá šipka vpravo);
4. kritickou čáru l .

Na základě těchto informací lomená modrá čára $CA\bar{X}$ reprezentuje množinu eficientních portfolií.

Jestliže je portfolio P na obrázku 3.6 eficientní, pak musí splňovat následující podmínky:



Obrázek 3.5: Kritická přímka

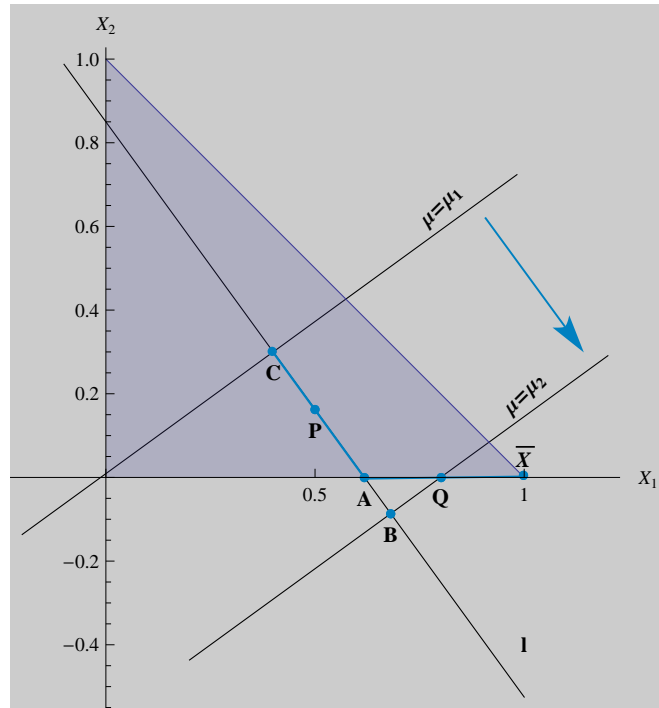
1. P je z množiny přípustných portfolií;
2. pokud nějaké jiné portfolio z přípustné množiny má větší očekávaný výnos, pak nutně musí mít větší riziko než portfolio P ;
3. pokud nějaké jiné portfolio z přípustné množiny má menší riziko, pak nutně musí mít menší očekávaný výnos než portfolio P ;

Portfolio reprezentováno bodem C má následující vlastnosti:

1. je z přípustné množiny;
2. má nejmenší riziko ze všech portfolií, tj. žádné portfolio z přípustné množiny nemá vyšší očekávaný výnos se stejným nebo menším rizikem;
3. žádné portfolio nemá menší riziko a zároveň stejný nebo vyšší očekávaný výnos;

Tedy C je eficientní.

Portfolio s menším očekávaným výnosem než C , nebo portfolio se stejným očekávaným výnosem, které je reprezentováno bodem ležícím na přímce μ_1 (mimo bodu C), nemůže být eficientní. Všechna portfolia s menším očekávaným výnosem mají větší riziko než portfolio reprezentované bodem C . Pokud se pohybujeme po přímce I od bodu C ve směru nižších očekávaných výnosů, nenajdeme žádné



Obrázek 3.6: Eficientní množina

eficientní portfolio. Na druhé straně, na kritické přímce I mezi body C a A najdeme nespočetně mnoho bodů reprezentujících eficientní portfolio. Body na přímce I pod bodem A nejsou eficientní, protože nepatří do přípustné množiny.

Uvažujme přímku μ_2 . Portfolio reprezentované bodem B má nejmenší riziko ze všech bodů na této přímce, ale nepatří do přípustné množiny. S rostoucí vzdáleností od bodu B po přímce μ_2 , rozptyl výnosů roste. Bod Q reprezentuje portfolio s nejmenším rizikem, které patří do přípustné množiny a zároveň leží na přímce μ_2 .

Portfolio, které je reprezentované bodem Q splňuje následující vlastnosti eficientního portfolio:

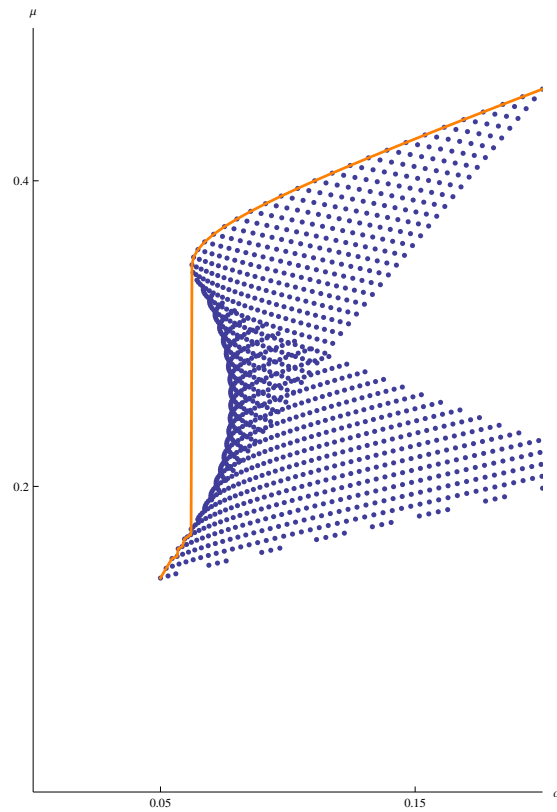
1. je z přípustné množiny;
2. všechny body s větším nebo stejným očekávaným výnosem a stejným nebo menším rozptylem výnosu nepatří do přípustné množiny.

Poznámka

V příloze na obrázku 5.20 vidíme eficientní hranici portfolio (oranžově) a přípustnou množinu pro hodnoty (3.19), (3.21) a (3.20).

Poznámka

V demonstraci ThreeAssetsPortfolio (viz [7]) se autor dopustil hrubé chyby, neboť korelační koeficienty je možné volit libovolně, což v mnoha případech vede ke



Obrázek 3.7: Zkreslená eficientní hranice

korelační matici, která není pozitivně semidefinitní. Například

$$\begin{aligned}
 R_1 &= 0.14 & \sigma_1 &= 0.05 & \rho_{12} &= 0.85, \\
 R_2 &= 0.21 & \sigma_2 &= 0.23 & \rho_{13} &= 0.79, \\
 R_3 &= 0.46 & \sigma_3 &= 0.20 & \rho_{23} &= -0.83,
 \end{aligned}
 \tag{3.22}$$

kde R_i je očekávaný výnos i -tého aktiva, σ_i značí směrodatnou odchylku výnosu i -tého aktiva a ρ_{ij} je korelace mezi výnosy i -tého a j -tého aktiva. To pak vede ke zkreslenému pohledu na eficientní hranici (viz obrázek 3.7).

4. Metody výběru portfolia

4.1 Výběr portfolia vzhledem k střední hodnotě a rozptylu

Nechť $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ je sloupcový vektor o n složkách reprezentující portfolio, které se skládá z n aktiv a x_i je relativní podíl investovaný do i -tého aktiva, pro $i = 1, \dots, n$. Přirozeně $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Dále označme $\mathbf{1}$ jako sloupcový vektor jedniček o n složkách. Nechť $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_n)^\top$ je sloupcový vektor hodnot očekávaných výnosů o n složkách. R_i reprezentuje očekávaný výnos i -tého aktiva, pro $i = 1, \dots, n$. Předpokládáme, že platí $R_i \neq R_j$ pro alespoň jedno $i \neq j$. Nechť \mathbf{V} je matice kovariancí výnosů s rozměry $n \times n$ se složkami σ_{ij} pro $i, j = 1, \dots, n$. Matice \mathbf{V} je pozitivně definitní, tzn. pro libovolný nenulový vektor \mathbf{x} o n složkách platí, že $\mathbf{x}^\top \mathbf{V} \mathbf{x} > 0$. Pozitivní definitnost implikuje, že \mathbf{V} je také regulární, tzn. výnos žádného aktiva není perfektně korelovaný s výnosem portfolia složeného ze zbývajících aktiv a žádné z aktiv nebo portfolia složená z aktiv nejsou bezriziková. Označme rozptyl portfolia P jako σ_p^2 a očekávaný výnos jako R_p . Problém výběru portfolia můžeme zformulovat následujícím způsobem

$$\begin{aligned} \min \quad & \sigma_p^2 = \mathbf{x}^\top \mathbf{V} \mathbf{x} \\ \text{za podmínky} \quad & \mathbf{x}^\top \mathbf{1} = 1 \\ & \mathbf{x}^\top \mathbf{R} = R_p. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Úlohu řešíme pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Definujeme Langrangeovu funkci jako

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, \lambda_1, \lambda_2) = \mathbf{x}^\top \mathbf{V} \mathbf{x} - \lambda_1(\mathbf{x}^\top \mathbf{R} - R_p) - \lambda_2(\mathbf{x}^\top \mathbf{1} - 1). \quad (4.2)$$

Dále musí platit

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{V}\mathbf{x} - \lambda_1\mathbf{R} - \lambda_2\mathbf{1} = \mathbf{0}, \quad (4.3)$$

kde $\mathbf{0}$ z (4.3) je sloupcový vektor nul o n složkách a

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \lambda_1} = R_p - \mathbf{x}^\top \mathbf{R} = 0, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \lambda_2} = 1 - \mathbf{x}^\top \mathbf{1} = 0. \quad (4.5)$$

Z (4.3) dostaneme

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{V}^{-1}(\lambda_1\mathbf{R} + \lambda_2\mathbf{1}) = \frac{1}{2}\mathbf{V}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

V poslední rovnosti jsme výraz $\lambda_1\mathbf{R} + \lambda_2\mathbf{1}$ nahradili maticovou formou. Podobně v (4.4) a (4.5) píšeme

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{1} \end{pmatrix}^\top \mathbf{x} = \begin{pmatrix} R_p \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Přenásobením obou stran (4.6) výrazem $(\mathbf{R} \ \mathbf{1})^\top$ a použitím (4.7) dostaneme

$$(\mathbf{R} \ \mathbf{1})^\top \mathbf{x} = \frac{1}{2} (\mathbf{R} \ \mathbf{1})^\top \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{R} \ \mathbf{1}) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_p \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Pro zjednodušený zápis označme symetrickou matici typu $n \times n$

$$\mathbf{A} \equiv (\mathbf{R} \ \mathbf{1})^\top \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{R} \ \mathbf{1}), \quad (4.9)$$

se složkami

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^\top \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R} & \mathbf{R}^\top \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \\ \mathbf{R}^\top \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} & \mathbf{1}^\top \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Matice \mathbf{A} je pozitivně definitní. Pro libovolné y_1, y_2 z nichž alespoň jedno je různé od nuly, platí, že

$$(\mathbf{R} \ \mathbf{1}) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (y_1 \mathbf{R} + y_2 \mathbf{1}) \quad (4.11)$$

je nenulový vektor o n složkách. Předpokládali jsme, že hodnoty \mathbf{R} nejsou všechny stejné. Matice \mathbf{A} je tedy pozitivně definitní a platí, že

$$\begin{aligned} (y_1 \ y_2) \mathbf{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= (y_1 \ y_2) (\mathbf{R} \ \mathbf{1})^\top \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{R} \ \mathbf{1}) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= (y_1 \mathbf{R} + y_2 \mathbf{1})^\top \mathbf{V}^{-1} (y_1 \mathbf{R} + y_2 \mathbf{1}) > 0, \end{aligned} \quad (4.12)$$

kde \mathbf{V}^{-1} je pozitivně definitní matice.

Po dosazení \mathbf{A} do (4.8) dostaneme

$$\frac{1}{2} \mathbf{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_p \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Díky tomu, že matice \mathbf{A} je regulární, dostaneme

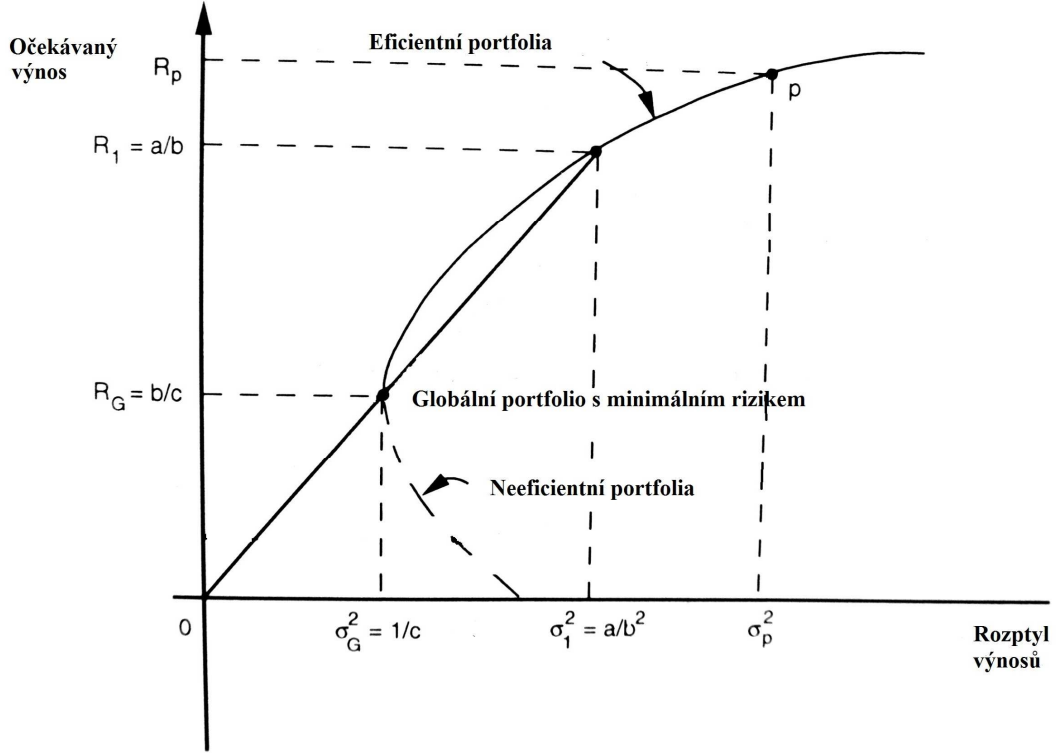
$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} R_p \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Po dosazení (4.14) do (4.6) dostaneme náš hledaný výsledek,

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2} \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{R} \ \mathbf{1}) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{R} \ \mathbf{1}) \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} R_p \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

tedy váhy, které minimalizují rozptyl výnosu portfolia při pevně daném očekávaném výnosu.

Věta 1. *Nechť \mathbf{V} je pozitivně definitní kovarianční matice typu $n \times n$ a \mathbf{R} je sloupcový vektor o n složkách, kde R_i je očekávaný výnos i -tého aktiva pro $i = 1, \dots, n$. Předpokládáme, že platí $R_i \neq R_j$ pro alespoň jedno $i \neq j$. Pak existuje jediné portfolio s nejmenším rozptylem výnosu při daném očekávaném výnosu R_p , jehož váhy jsou dané vztahem (4.15).*



Obrázek 4.1: Portfolio složené z n aktiv

Spočítejme minimální rozptyl výnosu portfolia σ_p^2 při dané očekávané míře výnosu R_p

$$\begin{aligned}
 \sigma_p^2 &= \mathbf{x}^\top \mathbf{V} \mathbf{x} = (R_p \ 1) \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{R} \ \mathbf{1})^\top \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V} \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{R} \ \mathbf{1}) \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} R_p \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= (R_p \ 1) \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} R_p \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= (R_p \ 1) \frac{1}{(ac - b^2)} \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_p \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{a - 2bR_p + cR_p^2}{(ac - b^2)}. \tag{4.16}
 \end{aligned}$$

Z (4.16) vidíme, že závislost mezi σ_p^2 a R_p je kvadratická – na obrázku 4.1 je znázorněná parabolou (viz [5, str.7]). Této parabole říkáme *eficientní hranice*, což je množina všech řešení úlohy (4.1) pro různé hodnoty R_p . Dolní část křivky je nakreslena přerušovaně, znázorňuje tzv. *neeficientní portfolia*. Horní část reprezentuje portfolia s největším očekávaným výnosem při daném rozptylu výnosnosti.

Na obrázku 4.1 je také portfolio reprezentované váhami \mathbf{x}_G (*globální portfolio s minimálním rizikem*), které minimalizují rozptyl výnosnosti portfolia bez ohledu na jeho očekávanou výnosnost. Minimalizací výrazu (4.16) přes R_p dostaneme, že rozptyl je minimální pro

$$R_G = \frac{b}{c}. \tag{4.17}$$

Po dosazení (4.17) do rovnice (4.16) dostaneme hodnotu nejmenšího možného

rozptylu výnosnosti portfolia

$$\sigma_G^2 = \frac{a - 2bR_G + cR_G^2}{ac - b^2} = \frac{a - 2b(b/c) + c(b/c)^2}{ac - b^2} = \frac{1}{c}. \quad (4.18)$$

Po dosazení hodnoty R_G do rovnice (4.15) získáme hledané váhy \mathbf{x}_G ,

$$\mathbf{x}_G = \mathbf{V}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} R_G \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{V}^{-1} \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b/c \\ 1 \end{pmatrix}}{(ac - b^2)} = \frac{\mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}}{c}. \quad (4.19)$$

4.2 Tobinova věta o separaci

V této sekci popíšeme důležité vlastnosti separace, které jsou z matematického hlediska přímočaré, avšak z ekonomického hlediska jsou významné. Následující věta říká, že všechna portfolia, která řeší úlohu (4.1), lze vyjádřit jako lineární kombinace dvou portfolií, která úlohu (4.1) řeší také.

Věta 2. *Nechť \mathbf{x}_a a \mathbf{x}_b jsou řešením úlohy (4.1) při očekávaných výnosech R_a a R_b , a necht' platí $R_a \neq R_b$. Pak*

- (a) *Každé jiné řešení úlohy (4.1) \mathbf{x}_c je lineární kombinací \mathbf{x}_a a \mathbf{x}_b .*
- (b) *Každé portfolio, které je lineární kombinací \mathbf{x}_a a \mathbf{x}_b řeší úlohu (4.1), tzn. $\alpha \mathbf{x}_a + (1 - \alpha) \mathbf{x}_b$ řeší úlohu (4.1).*

Důkaz.

- (a) Necht' R_c je očekávaný výnos portfolia \mathbf{x}_c . Zvolme parametr α takový, že $R_c = \alpha R_a + (1 - \alpha) R_b$ tj.

$$\alpha = \frac{R_c - R_b}{R_a - R_b}. \quad (4.20)$$

Chceme dokázat, že $\mathbf{x}_c = \alpha \mathbf{x}_a + (1 - \alpha) \mathbf{x}_b$. Podle (4.15) máme

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{V}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} R_c \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{V}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha R_a + (1 - \alpha) R_b \\ \alpha + (1 - \alpha) \end{pmatrix} \\ &= \alpha \mathbf{V}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} R_a \\ 1 \end{pmatrix} + (1 - \alpha) \mathbf{V}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} R_b \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \alpha \mathbf{x}_a + (1 - \alpha) \mathbf{x}_b. \end{aligned} \quad (4.21)$$

- (b) Předpokládáme, že portfolio \mathbf{x}_c je lineární kombinací \mathbf{x}_a a \mathbf{x}_b . Pak

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_c &= \alpha \mathbf{x}_a + (1 - \alpha) \mathbf{x}_b \\ &= \alpha \mathbf{V}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} R_a \\ 1 \end{pmatrix} + (1 - \alpha) \mathbf{V}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} R_b \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{V}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha R_a + (1 - \alpha) R_b \\ \alpha + (1 - \alpha) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Podle (4.15) \mathbf{x}_c řeší úlohu (4.1) s danou očekávanou mírou výnosu $\alpha R_a + (1 - \alpha) R_b$.



V předchozí větě bylo ukázáno, že lineární kombinací dvou portfolií s minimálním rizikem dostaneme další portfolio s minimálním rizikem. Z praktického hlediska je dobré vzít si taková dvě portfolia, pro která rozptyl a očekávanou výnosnost snadno spočteme. Prvním takovým portfolioem je \mathbf{x}_G z (4.19) s očekávaným výnosem R_G a s rozptylem výnosnosti σ_G^2 . Druhým je portfolio z obrázku 4.1, kde $\mathbf{x}_1 = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{R}/b$ s $R_1 = a/b$ a $\sigma_1^2 = a/b^2$.

4.3 Výběr portfolia vzhledem k střední hodnotě a rozptylu s bezrizikovým aktivem

V předchozích dvou sekcích jsme ukázali problém výběru portfolia z n rizikových aktiv. V této sekci předvedeme výběr portfolia v případě, že máme k dispozici n rizikových a jedno bezrizikové aktivum. Zavedme sloupcový vektor \mathbf{r} o n složkách se složkami $r_i = R_i - R_0$ pro $i = 1, 2, \dots, n$, kde R_0 reprezentuje očekávanou míru výnosu bezrizikového aktiva. Označme váhy reprezentující relativní podíl investovaný do jednotlivých aktiv jako sloupcový vektor \mathbf{w} o n složkách, kde w_i je relativní podíl investovaný do i -tého aktiva pro $i = 1, 2, \dots, n$. Váha bezrizikového aktiva v portfoliu bude $w_0 = 1 - \mathbf{w}^\top \mathbf{1}$. Pro dané portfolio P označme

$$r_p = \mathbf{w}^\top \mathbf{R} + (1 - \mathbf{w}^\top \mathbf{1}) R_0 - R_0 = \mathbf{w}^\top \mathbf{r} \quad (4.23)$$

a rozptyl portfolia P jako

$$\sigma_p^2 = \mathbf{w}^\top \mathbf{V} \mathbf{w}. \quad (4.24)$$

V předchozích dvou výrazech \mathbf{R} a \mathbf{V} jsou výrazy z předchozích sekcí. Všimněme si, že bezrizikové aktivum nemá žádný vliv na rozptyl portfolia P . Výrazu (4.23) říkáme *očekávaný výnos portfolia nad danou bezrizikovou výnosností R_0 (nadvýnos)*.

Problém výběru portfolia vzhledem k střední hodnotě a rozptylu s bezrizikovým aktivem zformulujeme následujícím způsobem

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{w}^\top \mathbf{V} \mathbf{w} \\ \text{za podmínky} \quad & \mathbf{w}^\top \mathbf{r} = r_p \end{aligned} \quad (4.25)$$

Všimněme si, že podmínka $\mathbf{w}^\top \mathbf{1} = 1$ již v úloze není. Úlohu řešíme stejným způsobem jako (4.1). Výsledkem jsou váhy

$$\mathbf{w} = \left(\frac{r_p}{\mathbf{r}^\top \mathbf{V}^{-1} \mathbf{r}} \right) \mathbf{V}^{-1} \mathbf{r}, \quad (4.26)$$

kteří dávají minimální rozptyl výnosu portfolia

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= \mathbf{w}^\top \mathbf{V} \mathbf{w} \\ &= \left(\frac{r_p}{\mathbf{r}^\top \mathbf{V}^{-1} \mathbf{r}} \right)^2 \mathbf{r}^\top \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{r} \\ &= \frac{r_p^2}{\mathbf{r}^\top \mathbf{V}^{-1} \mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Poměr

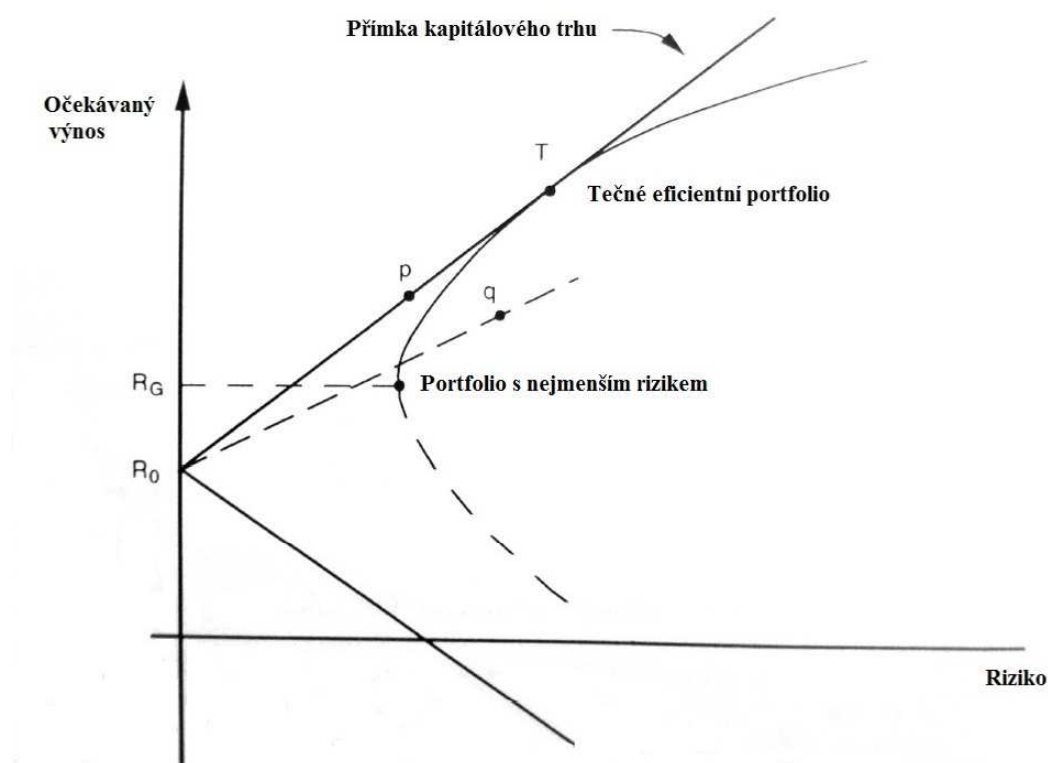
$$\frac{r_p}{\sigma_p} = (\mathbf{r}^\top \mathbf{V}^{-1} \mathbf{r})^{1/2}, \quad (4.28)$$

je tzv. *Sharpeova míra portfolia*.

Stejně jako v předchozí sekci lze ukázat, že i v tomto případě lze eficientní portfolia reprezentovat jako lineární kombinaci dvou portfolií - bezrizikového a tzv. *tečného eficientního portfolia* s váhami \mathbf{w}_T , které splňuje dodatečnou podmínku $\mathbf{1}^\top \mathbf{w}_T = 1$. Odpovídající hodnota očekávané výnosnosti tečného portfolia r_T (nad danou bezrizikovou výnosností R_0) dostaneme z (4.26) a $\mathbf{1}^\top \mathbf{w}_T = 1$ jako

$$r_T = \frac{\mathbf{r}^\top \mathbf{V}^{-1} \mathbf{r}}{\mathbf{1}^\top \mathbf{V}^{-1} \mathbf{r}}. \quad (4.29)$$

Z předpokladu eficientního trhu plyne, že očekávaný výnos bezrizikového aktiva je nižší, než očekávaný výnos portfolia \mathbf{x}_G z předchozí sekce, tzn., že $R_0 < R_G$. Platí tedy, že $\mathbf{1}^\top \mathbf{V}^{-1} \mathbf{r} > 0$ a také $\mathbf{r}^\top \mathbf{V}^{-1} \mathbf{r} > 0$ z pozitivní semidefinitnosti matice \mathbf{V} . Tzn., že $r_T > 0$ a sklon přímky, která je tečnou ke grafu v bodě T , je kladný (viz obr. 4.2 z [5, str. 14]). Této přímce říkáme *přímka kapitálového trhu* (CML-capital market line).



Obrázek 4.2: Portfolio n rizikových a jednoho bezrizikového aktiva

Korelační koeficient výnosů libovolného portfolia q , s váhami \mathbf{w}_q , a libovolného portfolia p , které leží na přímce CML je

$$\begin{aligned} \rho(p, q) &= \frac{\mathbf{w}_q^\top \mathbf{V} \mathbf{w}_p}{\sigma_q \sigma_p} \\ &= \frac{r_p r_q}{(\mathbf{r}^\top \mathbf{V}^{-1} \mathbf{r}) \sigma_q \sigma_p} \\ &= \frac{r_q / r_p}{\sigma_q / \sigma_p} \\ &= \text{Sharpeová míra portfolia } q / \text{Sharpeová míra portfolia } p \end{aligned} \quad (4.30)$$

4.3.1 Maximalizace Sharpeova poměru

Neexistuje žádná přímá metoda jak maximalizovat Sharpeův poměr z (4.28) a proto raději budeme řešit problém maximalizace kvadratického Sharpeůvho poměru (viz [3]), tzn. hledáme řešení úlohy

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{(\mathbf{r}^\top \mathbf{w})^2}{\mathbf{w}^\top \mathbf{V} \mathbf{w}} \\ \text{za podmínky} \quad & \mathbf{1}^\top \mathbf{w} = 1 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Zdůrazněme, že maximalizace Sharpeova poměru a úloha (4.31) nejsou ekvivalentní. Maxima pro (4.28) lze dosáhnout pro portfolio, které dává záporný očekávaný výnos. Takový výsledek je nám k ničemu. Za předpokladu, že \mathbf{V} je pozitivně definitní matice, pak existuje symetrická matice zvaná odmocninová $\mathbf{V}^{1/2}$. Podle Schwarzovy nerovnosti platí

$$(\mathbf{r}^\top \mathbf{w})^2 = (\mathbf{r}^\top \mathbf{V}^{-1/2} \mathbf{V}^{1/2} \mathbf{w})^2 \leq (\mathbf{r}^\top \mathbf{V}^{-1} \mathbf{r}) (\mathbf{w}^\top \mathbf{V} \mathbf{w}). \quad (4.32)$$

Vidíme, že kvadratický Sharpeův poměr je shora omezen hodnotou $(\mathbf{r}^\top \mathbf{V}^{-1} \mathbf{r})$ a rovnost nastává v případě, že $\mathbf{w} = \lambda \mathbf{V}^{-1} \mathbf{r}$ pro libovolné λ . Víme, že \mathbf{w} je portfolio a také, že $\mathbf{1}^\top \mathbf{w} = 1$, pak dostaneme $\lambda = 1 / (\mathbf{1}^\top \mathbf{V}^{-1} \mathbf{r})$, kde $(\mathbf{1}^\top \mathbf{V}^{-1} \mathbf{r}) \neq 0$. V případě, že $\mathbf{1}^\top \mathbf{V}^{-1} \mathbf{r} = 0$ úloha nemá řešení. Optimální portfolio tedy dostaneme jako

$$\mathbf{w}^* = \frac{\mathbf{V}^{-1} \mathbf{r}}{\mathbf{1}^\top \mathbf{V}^{-1} \mathbf{r}}. \quad (4.33)$$

4.4 Model oceňování kapitálových aktiv

Model oceňování kapitálových aktiv je speciálním případem Markowitzova modelu portfolia, kde právě jedno z aktiv v portfoliu je bezrizikové s kladným výnosem.

4.4.1 Alternativní vyjádření očekávaného výnosu portfolia

Nechť $r_T = \mathbf{w}_T^\top \mathbf{r}$ je očekávaný výnos tečného eficientního portfolia a $\boldsymbol{\sigma}_T$ je vektor kovariancí mezi výnosem excesů rizikových aktiv portfolia a mezi výnosem aktiv tečného eficientního portfolia, tzn.

$$\boldsymbol{\sigma}_T = \mathbf{V} \mathbf{w}_T = \frac{\mathbf{R} - R_0 \mathbf{1}}{\mathbf{1}^\top \mathbf{V}^{-1} \mathbf{r}}. \quad (4.34)$$

Rozptyl tečného eficientního portfolia podle (4.27) a (4.29) dostaneme jako

$$\sigma_T^2 = \frac{\mathbf{r}^\top \mathbf{V}^{-1} \mathbf{r}}{(\mathbf{1}^\top \mathbf{V}^{-1} \mathbf{r})^2}. \quad (4.35)$$

Z posledních dvou rovnic vyplývá

$$(\mathbf{R} - R_0 \mathbf{1}) = \frac{\boldsymbol{\sigma}_T}{\sigma_T^2} r_T. \quad (4.36)$$

4.4.2 Předpoklady modelu CAMP

- investor zohledňuje pouze první dva momenty rozdělení pravděpodobnosti výnosů
- při daném očekávaném výnosu portfolia si investor vybírá portfolio s nejmenším rozptylem výnosů
- všichni investoři investují ve stejném čase pro jedno stejně dlouhé období
- rozhodnutí individuálního investora neovlivňuje významně tržní ceny
- aktiva jsou nekonečně dělitelná
- neexistují transakční náklady a daně
- investorům je povolen prodej nakrátko
- investor je averzní vůči riziku
- všichni investoři mají stejné očekávání týkající se očekávaného výnosu, rozptylu a kovariancí výnosů (předpoklad homogenních očekávání)

Racionální investoři volí portfolia z množiny eficientních portfolií, přičemž volba konkrétního portfolia je dána investorovou averzí k riziku.

4.4.3 Tržní portfolio

Jak jsme uvedli v předchozí sekci, eficientní portfolia lze reprezentovat jako lineární kombinaci dvou portfolií bezrizikového a tečného eficientního portfolia. Označme $\tilde{\mathbf{w}}_M$ jako váhy tzv. *tržního portfolia*¹. Lze tedy psát

$$\tilde{\mathbf{w}}_M = \delta \tilde{\mathbf{w}}_0 + (1 - \delta) \tilde{\mathbf{w}}_T, \quad (4.37)$$

kde $\tilde{\mathbf{w}}_0 = (1, 0, \dots, 0)^\top$ a $\tilde{\mathbf{w}}_T = (0, \mathbf{w}_T^\top)^\top$. Očekávaný výnos tržního portfolia nad danou bezrizikovou výnosností R_0 se rovná

$$r_M = (1 - \delta) r_T. \quad (4.38)$$

Vektor kovariancí mezi výnosem rizikových aktiv portfolia nad danou bezrizikovou výnosností R_0 a mezi výnosem tržního portfolia nad danou bezrizikovou výnosností R_0 označme jako

$$\boldsymbol{\sigma}_M = (1 - \delta) \mathbf{V} \mathbf{w}_T = (1 - \delta) \boldsymbol{\sigma}_T. \quad (4.39)$$

Rozptyl tržního portfolia je daný takto

$$\sigma_M^2 = (1 - \delta)^2 \sigma_T^2. \quad (4.40)$$

Dosazením výrazu (4.38), (4.39) a (4.40) do výrazu (4.36) dostaneme

$$(\mathbf{R} - R_0 \mathbf{1}) = \beta (R_M - R_0), \quad (4.41)$$

kde $\beta = \boldsymbol{\sigma}_M / \sigma_M^2$. Tato formule se nazývá *model oceňování kapitálových aktiv* (CAPM).

¹Tržní portfolio M (*market portfolio*) označuje hypotetické portfolio, které by obsahovalo každou z investičních možností na daném kapitálovém trhu, a to v poměru odpovídajícím celkové tržní hodnotě každé jednotlivé investice na kapitálovém trhu. V praxi se tržní portfolio obvykle aproximuje vhodně zvoleným indexem cenných papírů (viz [1]).

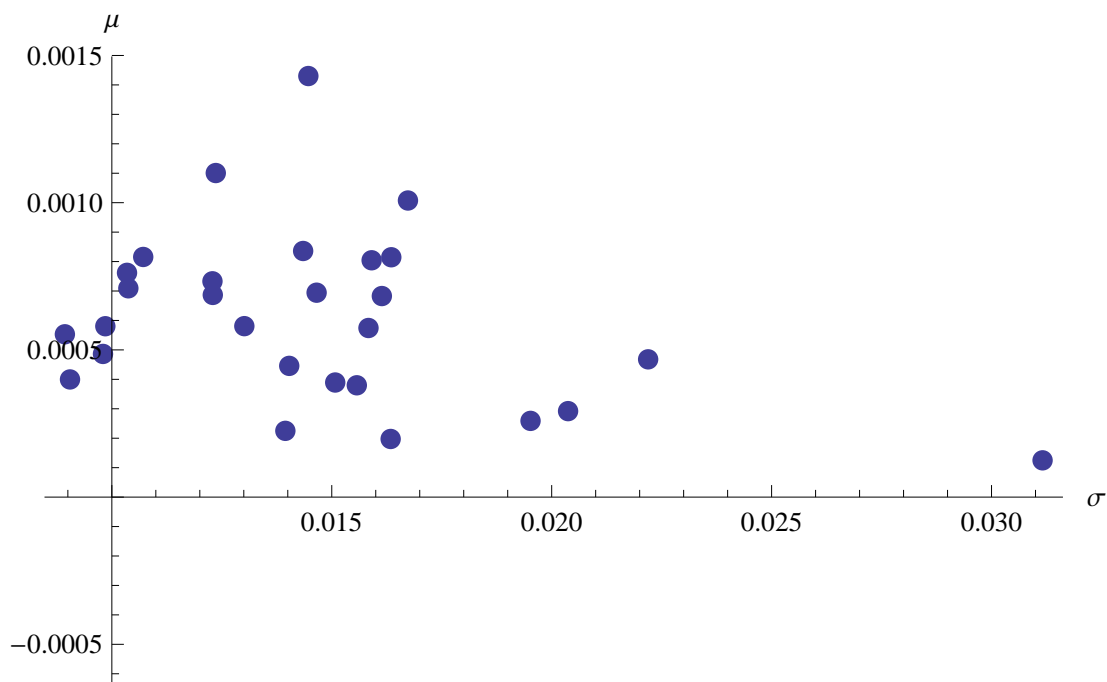
5. Zpracování dat

V této kapitole se seznámíme s výsledky analýzy portfolia obsahující větší množství cenných papírů. Jako inspirace nám posloužila práce *Optimal portfolios on (in)efficient markets*, Hurt 2011.

V naší analýze jsme zpracovali výnosy třiceti amerických průmyslových, mediálních, finančních a technologických aktuálně největších a nejznámějších společností. Data jsou získána pomocí funkce *FinancialData* za období mezi 1.1.2011 a 31.12.2012. Dohromady bylo zpracováno 30×501 dat. Názvy jednotlivých společností jsou následující:

zkratka	Název společnosti
AA	Alcoa Inc.
AXP	American Express Company
BA	Boeing Company
BAC	Bank of America Corp
CAT	Caterpillar Inc.
CSCO	Cisco Systems, Inc.
CVX	Chevron Corporation
DD	E.I. du Pont de Nemours & Company
DIS	Walt Disney Company
GE	General Electric Company
HD	Home Depot, Inc.
HPQ	Hewlett-Packard Company
IBM	International Business Machines Corp
INTC	Intel Corporation
JNJ	Johnson & Johnson
JPM	J.P. Morgan Chase & Co.
KFT	Kraft Foods, Inc.
KO	Coca-Cola Company
MCD	McDonald's Corporation
MMM	3M Company
MRK	Merck & Co Inc
MSFT	Microsoft Corporation
PFE	Pfizer Inc.
PG	Procter & Gamble Company
T	AT&T, Inc.
TRV	The Travelers Companies, Inc.
UTX	United Technologies
VZ	Verizon Communications Inc.
WMT	Wal-Mart Stores, Inc.
XOM	ExxonMobil Corporation

Očekávané výnosy a příslušná směrodatná odchylka výnosů jsou znázorněny na obrázku 5.1 a v tabulce 5.5. Na obrázku 5.14 jsou ilustrovány výnosy prvních 6 společností.

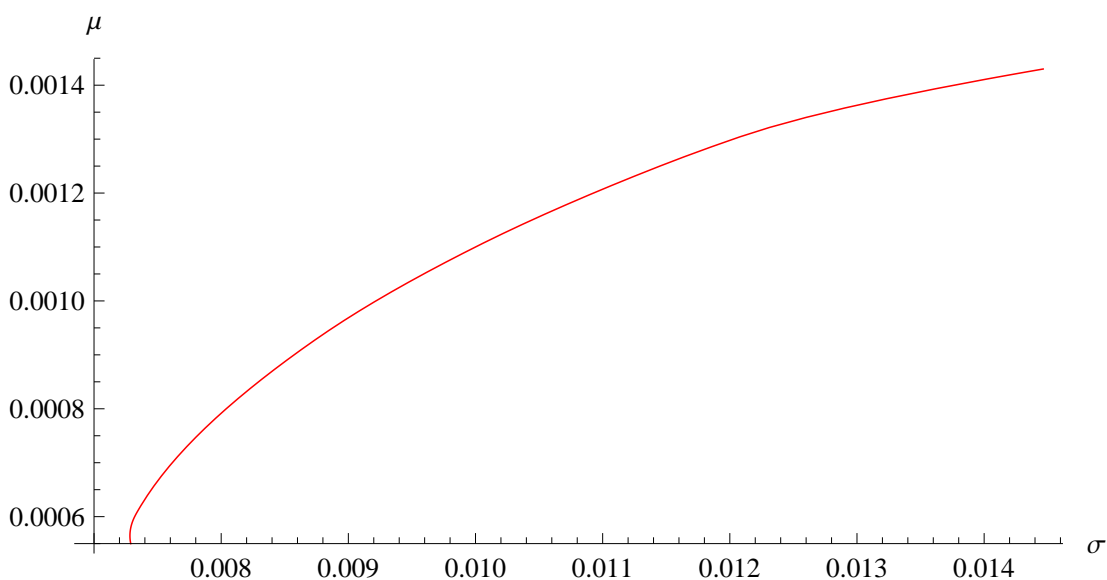


Obrázek 5.1: Očekávaný výnos a riziko akcií

5.1 Prodej nakrátko není povolen

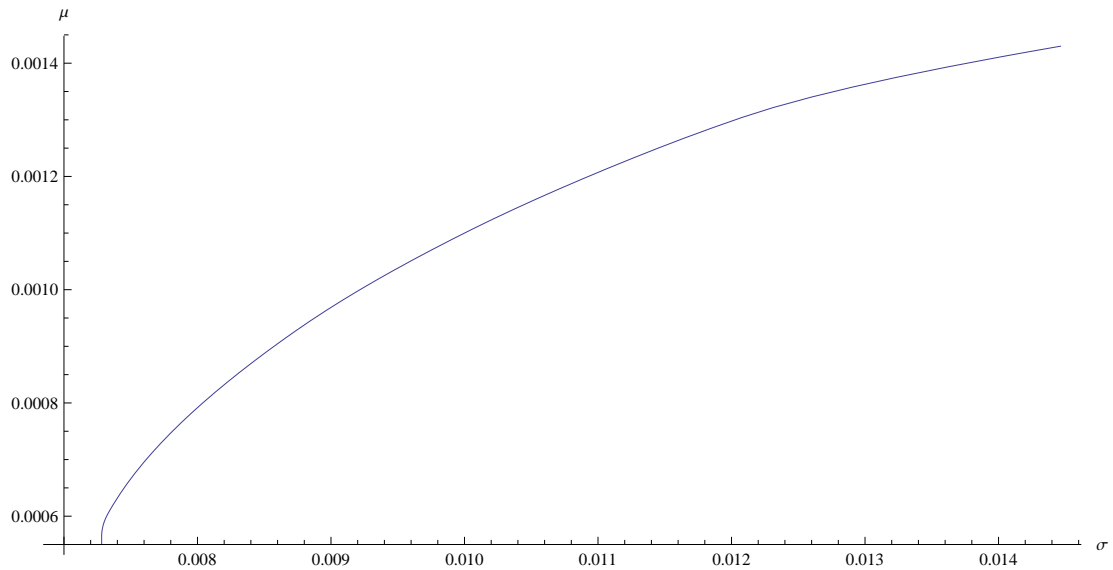
V této sekci kapitoly hledáme eficientní množinu portfolia s podmínkou, že všechny váhy x_i musí být nezáporné. Uvažujme možnosti:

5.1.1 Vyčerpání všech prostředků



Obrázek 5.2: Eficientní hranice

Při hledání eficientního portfolia uvažujme možnost vyčerpání všech možných



Obrázek 5.3: Eficientní hranice

prostředků, tzn. hledáme řešení úlohy

$$\begin{aligned}
 & \min && \sigma_p^2 = \mathbf{x}^\top \mathbf{V} \mathbf{x} \\
 & \text{za podmínky} && \sum_{i=1}^{30} x_i = 1 \\
 & && \sum_{i=1}^{30} x_i \mu_i = 0.001 \\
 & && x_i \geq 0, \text{ pro } i = 1, 2, \dots, 30
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

nebo

$$\begin{aligned}
 & \min && \sigma_p^2 = \mathbf{x}^\top \mathbf{V} \mathbf{x} \\
 & \text{za podmínky} && \sum_{i=1}^{30} x_i = 1 \\
 & && \sum_{i=1}^{30} x_i \mu_i \geq 0.001 \\
 & && x_i \geq 0, \text{ pro } i = 1, 2, \dots, 30.
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Pro nalezení řešení úlohy (5.1) resp. (5.2) jsme použili zabudovanou funkci programu Mathematica 8.0 a to *FindMinimum*:

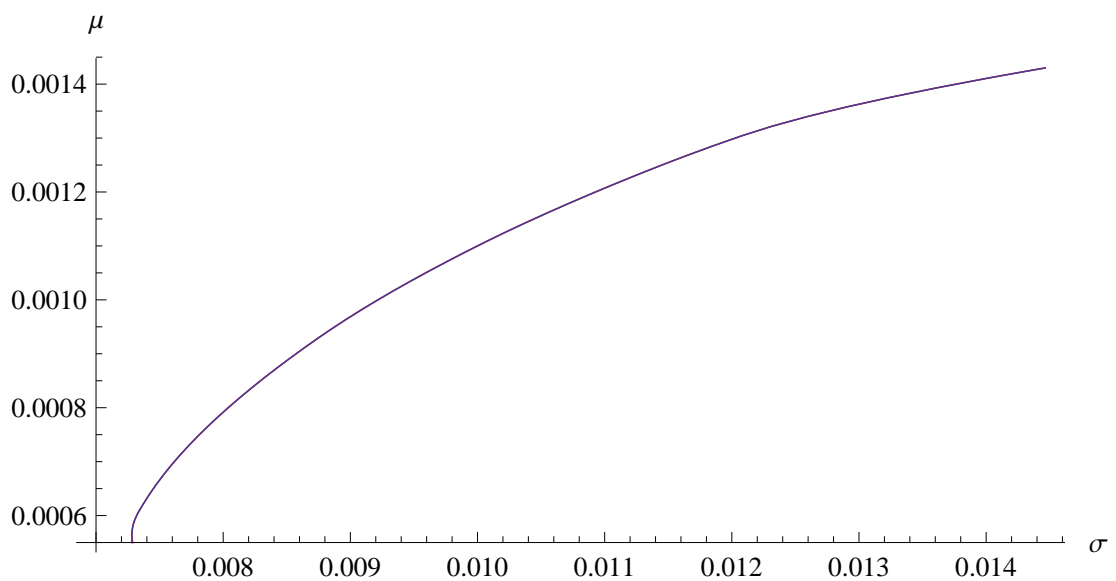
```
FindMinimum[{variables.covariancesreturnsCompanies.variables,
  Total[variables] == 1 && meansreturnsCompanies.variables == 0.001 &&
  Apply[And, Thread[variables >= 0]]}, variables]
```

```
FindMinimum[{variables.covariancesreturnsCompanies.variables,
  Total[variables] == 1 && meansreturnsCompanies.variables >= 0.001 &&
  Apply[And, Thread[variables >= 0]]}, variables]
```

pro kterou platí následující tvrzení:

- Vrátil seznam tvaru $\{f_{min}, x \rightarrow x_{min}\}$, kde f_{min} je minimální hodnota funkce f , a x_{min} je hodnota x , pro které je toto minimum nalezeno.
- Funkce nejprve lokalizuje hodnoty všech proměnných, pak vyhodnotí funkci f se symbolickými proměnnými, pak opakovaně vyhodnocuje výsledek numericky.

Příslušné váhy, které minimalizují úlohu (5.1) a (5.2) pro pevně daný očekávaný výnos portfolia $\mu = 0.001$ nalezneme v příloze v tabulce 5.1. Řešení úlohy (5.1) a eficientní množina portfolia je znázorněna na obrázku 5.2 a totéž pro úlohu (5.2) na obrázku 5.3. Na obrázku 5.4 je vidět, že případy (5.1) a (5.2) jsou ekvivalentní.

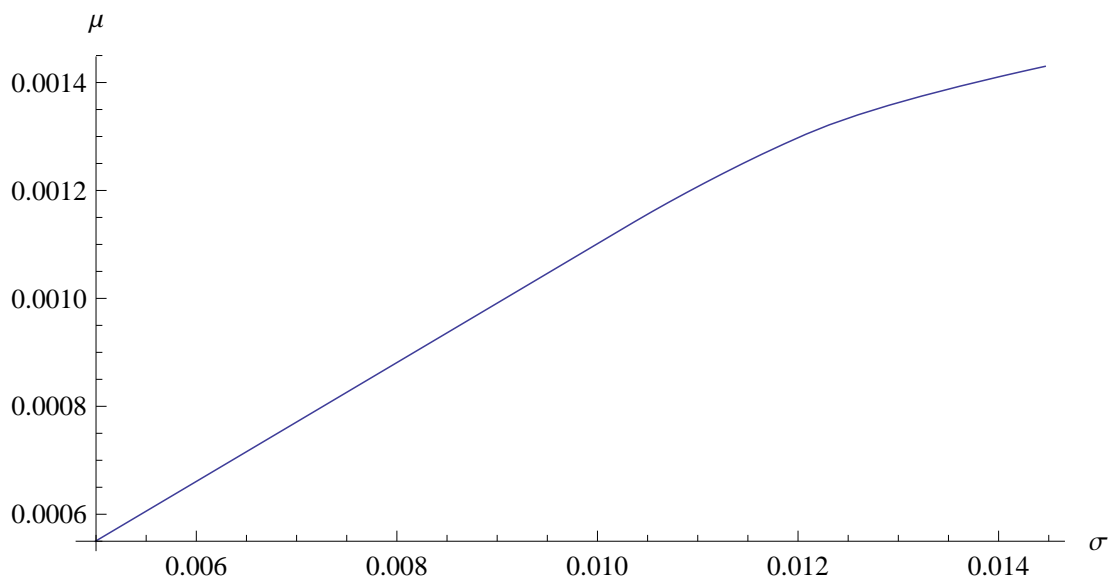


Obrázek 5.4: Eficientní množina

5.1.2 Nevyčerpání všech prostředků

V této části hledáme řešení úloh

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sigma_p^2 = \mathbf{x}^\top \mathbf{V} \mathbf{x} \\
 \text{za podmínky} \quad & \sum_{i=1}^{30} x_i \leq 1 \\
 & \sum_{i=1}^{30} x_i \mu_i = 0.001 \\
 & x_i \geq 0, \text{ pro } i = 1, 2, \dots, 30
 \end{aligned} \tag{5.3}$$



Obrázek 5.5: Eficientní hranice portfolia

a

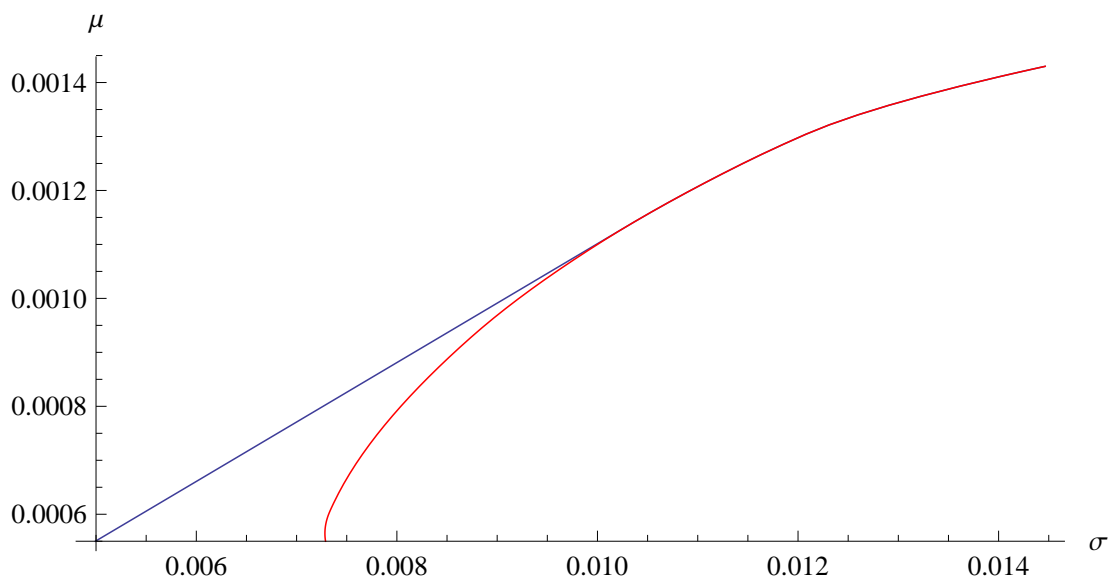
$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sigma_p^2 = \mathbf{x}^\top \mathbf{V} \mathbf{x} \\
 \text{za podmínky} \quad & \sum_{i=1}^{30} x_i \leq 1 \\
 & \sum_{i=1}^{30} x_i \mu_i \geq 0.001 \\
 & x_i \geq 0, \text{ pro } i = 1, 2, \dots, 30.
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Podmínka $\sum_{i=1}^{30} x_i \leq 1$ říká, že při hledání minimálního rizika portfolia při pevně dané očekávané hodnotě $\mu = 0.001$ můžeme, ale nemusíme nutně vyčerpat všechny naše prostředky. Podmínka $x_i \geq 0$ nám zabraňuje prodej nakrátko. Řešení předchozích úloh pomocí zabudované funkce *FindMinimum* jsme hledali následovně:

```
FindMinimum[{variables.covariancesreturnsCompanies.variables,
  Total[variables] <= 1 && meansreturnsCompanies.variables == 0.001 &&
  Apply[And, Thread[variables >= 0]]}, variables]
```

```
FindMinimum[{variables.covariancesreturnsCompanies.variables,
  Total[variables] <= 1 && meansreturnsCompanies.variables >= 0.001 &&
  Apply[And, Thread[variables >= 0]]}, variables].
```

Příslušné váhy, které řeší úlohu (5.3) a (5.4), nalezneme v příloze v tabulce 5.2. Na obrázku 5.5 vidíme eficientní hranici portfolia k úloze (5.3) a (5.4). Stejně jako v předchozí sekci jsou úlohy (5.3) a (5.4) ekvivalentní. Na obrázku 5.6 jsme porovnali eficientní hranice v případě, že vyčerpáme všechny prostředky (červeně) a v případě, že všechny nutně nevyčerpáme (modře). Z grafu je patrné, že k danému riziku jsme v některých případech schopni najít vyšší očekávaný výnos portfolia v případě, že nevyčerpáme všechny naše prostředky, než kdybychom investovali všechno.

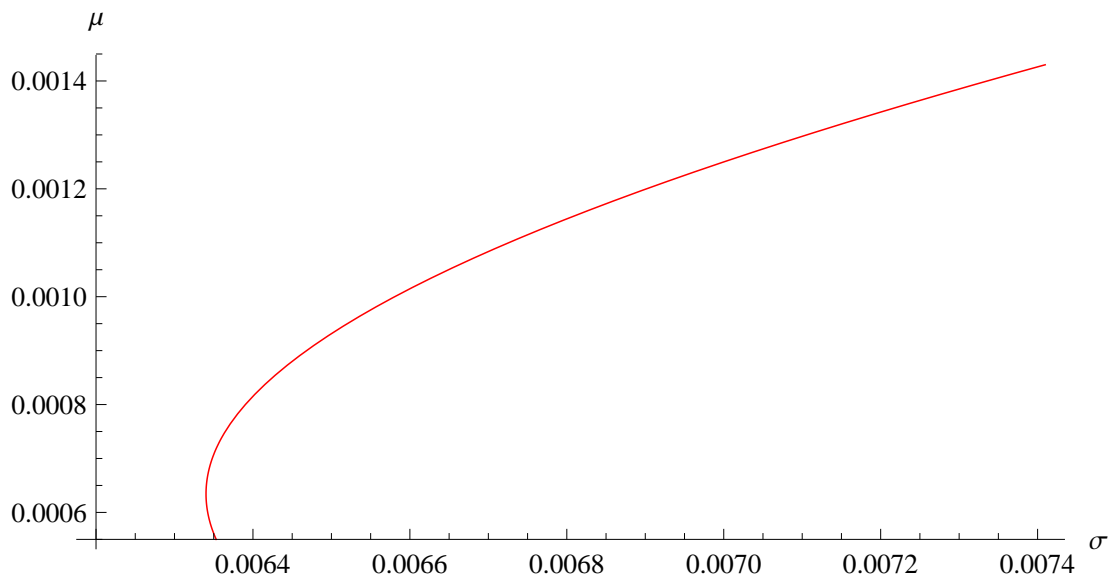


Obrázek 5.6: Eficientní hranice portfolia

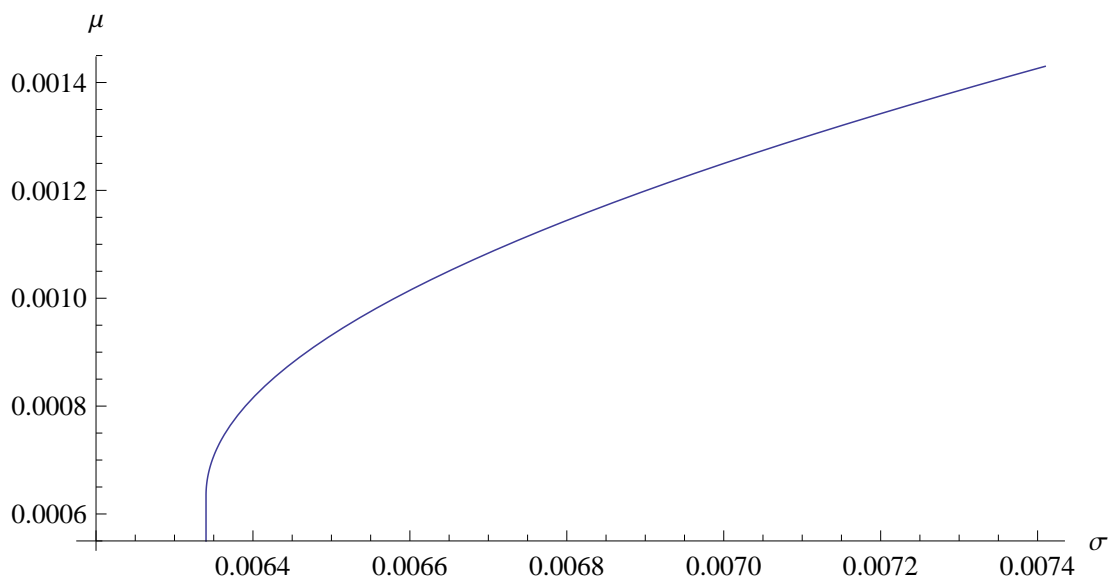
5.2 Prodej nakrátko povolen

V této části kapitoly při hledání portfolia s minimálním rizikem uvažujeme, že příslušné relativní podíly, investované do jednotlivých aktiv, mohou nabývat záporných hodnot. To znamená, že tzv. prodej nakrátko je povolen.

5.2.1 Vyčerpání všech prostředků



Obrázek 5.7: Eficientní hranice



Obrázek 5.8: Eficientní hranice

Hledáme řešení úlohy

$$\begin{aligned}
 & \min \quad \sigma_p^2 = \mathbf{x}^\top \mathbf{V} \mathbf{x} \\
 & \text{za podmínky} \quad \sum_{i=1}^{30} x_i = 1 \\
 & \quad \quad \quad \sum_{i=1}^{30} x_i \mu_i = 0.001
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

resp.

$$\begin{aligned}
 & \min \quad \sigma_p^2 = \mathbf{x}^\top \mathbf{V} \mathbf{x} \\
 & \text{za podmínky} \quad \sum_{i=1}^{30} x_i = 1 \\
 & \quad \quad \quad \sum_{i=1}^{30} x_i \mu_i \geq 0.001.
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

V obou případech vidíme, že podmínka $x_i \geq 0$, není zahrnutá do řešení. Řešení jsme hledali ve tvaru

```
FindMinimum[{variables.covariancesreturnsCompanies.variables,
  Total[variables] == 1 &&
  meansreturnsCompanies.variables == 0.001}, variables]
```

```
FindMinimum[{variables.covariancesreturnsCompanies.variables,
  Total[variables] == 1 &&
  meansreturnsCompanies.variables >= 0.001}, variables].
```

Výsledné váhy, které minimalizují riziko portfolia jsou uvedeny v tabulce 5.3. Na obrázku 5.7 a 5.8 je znázorněná eficientní hranice úloh (5.5) a (5.6). Eficientní množinu portfolia jsme vykreslili pomocí funkce *ParametricPlot*

```

ParametricPlot[{Sqrt[(FindMinimum[{variables.\
covariancesreturnsCompanies.variables,
  Total[variables] == 1 &&
  meansreturnsCompanies.variables == \[Mu] }, variables,
  WorkingPrecision -> 45] // First)] // Evaluate, \[Mu]}, {\[Mu],
  0.00055, 0.00143}, AxesLabel -> {\[Sigma], \[Mu]},
  AspectRatio -> 0.5, PlotStyle -> Red, AxesOrigin -> {0.007, 0.00055}]

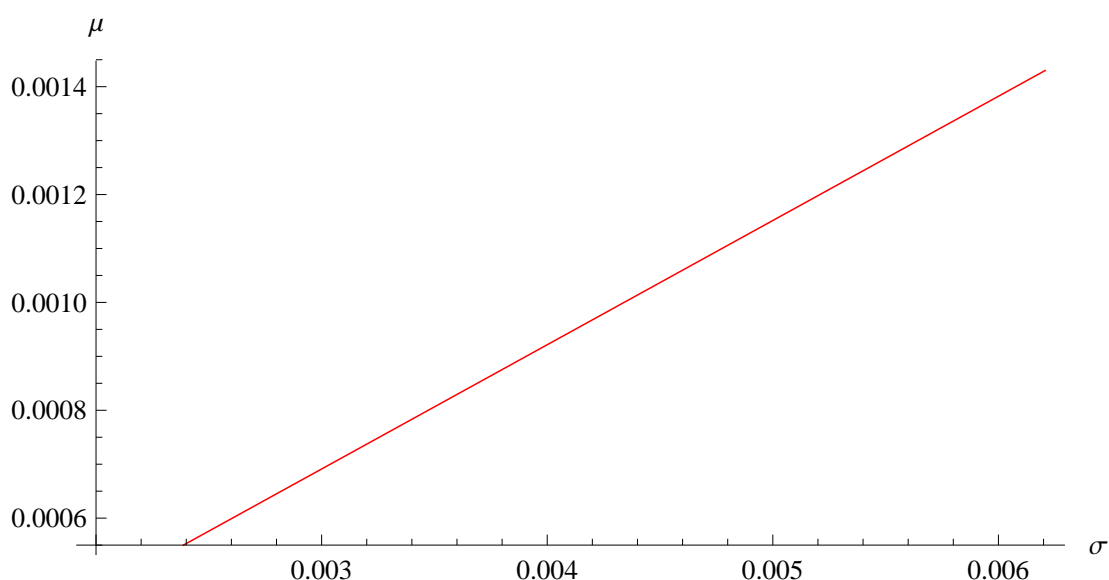
```

```

ParametricPlot[{Sqrt[(FindMinimum[{variables.\
covariancesreturnsCompanies.variables,
  Total[variables] == 1 &&
  meansreturnsCompanies.variables >= \[Mu] }, variables,
  WorkingPrecision -> 45] // First)] // Evaluate, \[Mu]}, {\[Mu],
  0.00055, 0.00143}, AxesLabel -> {\[Sigma], \[Mu]},
  AspectRatio -> 0.5, AxesOrigin -> {0.007, 0.00055}].

```

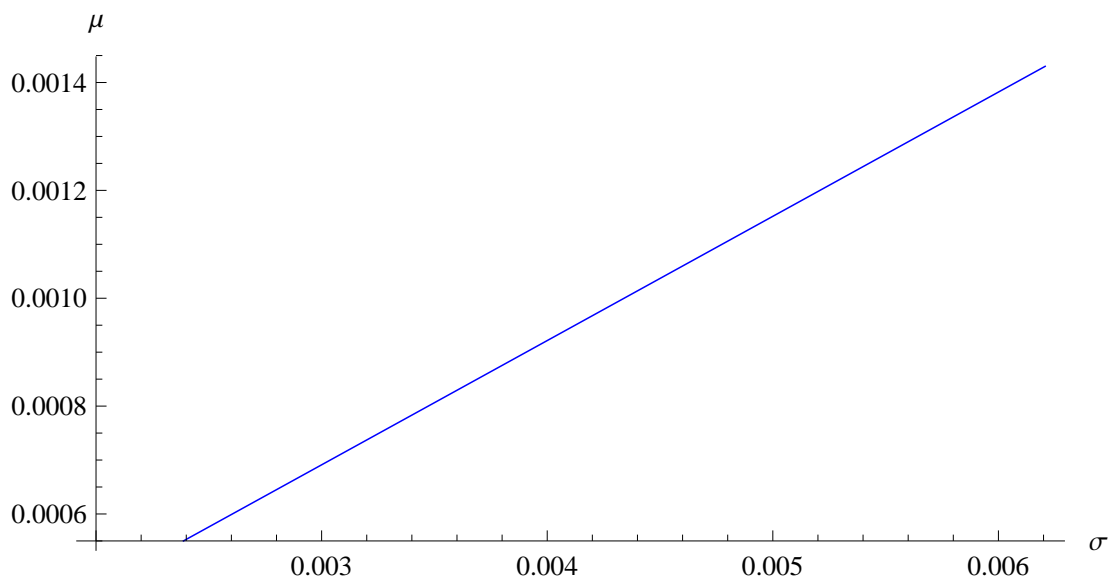
5.2.2 Nevyčerpání všech prostředků



Obrázek 5.9: Eficientní hranice

Úloha je zadaná následovně

$$\begin{aligned}
 & \min \quad \sigma_p^2 = \mathbf{x}^\top \mathbf{V} \mathbf{x} \\
 & \text{za podmínky} \quad \sum_{i=1}^{30} x_i \leq 1 \\
 & \quad \quad \quad \sum_{i=1}^{30} x_i \mu_i = 0.001
 \end{aligned} \tag{5.7}$$



Obrázek 5.10: Eficientní hranice

resp.

$$\begin{aligned}
 & \min \quad \sigma_p^2 = \mathbf{x}^\top \mathbf{V} \mathbf{x} \\
 & \text{za podmínky} \quad \sum_{i=1}^{30} x_i \leq 1 \\
 & \quad \quad \quad \sum_{i=1}^{30} x_i \mu_i \geq 0.001.
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Řešení úloh (5.7) a (5.8) nalezneme v tabulce 5.4. Eficientní hranici na obrázku 5.9 a 5.10 jsme získali následujícím způsobem:

```

ParametricPlot[{Sqrt[(FindMinimum[{variables.\
covariancesreturnsCompanies.variables,
  Total[variables] <= 1 &&
  meansreturnsCompanies.variables == \[Mu] }, variables,
  WorkingPrecision -> 45] // First)] // Evaluate, \[Mu]}, {\[Mu],
  0.00055, 0.00143}], AxesLabel -> {\[Sigma], \[Mu]},
  AspectRatio -> 0.5, AxesOrigin -> {0.007, 0.00055}, PlotStyle -> Red]

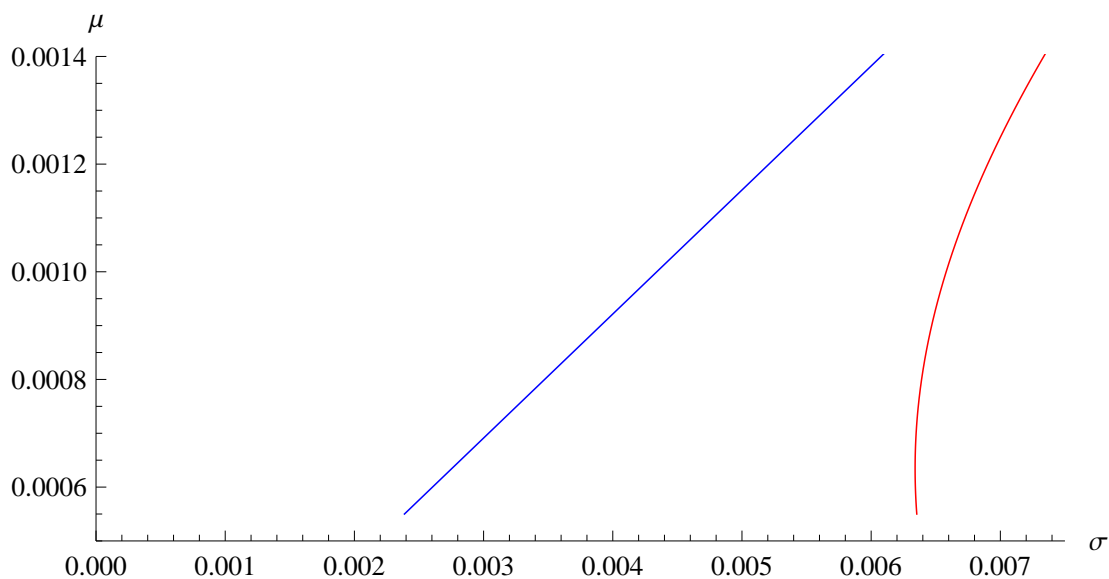
```

```

ParametricPlot[{Sqrt[(FindMinimum[{variables.\
covariancesreturnsCompanies.variables,
  Total[variables] <= 1 &&
  meansreturnsCompanies.variables >= \[Mu] }, variables,
  WorkingPrecision -> 45] // First)] // Evaluate, \[Mu]}, {\[Mu],
  0.00055, 0.00143}], AxesLabel -> {\[Sigma], \[Mu]},
  AspectRatio -> 0.5, AxesOrigin -> {0.007, 0.00055},
  PlotStyle -> Blue].

```

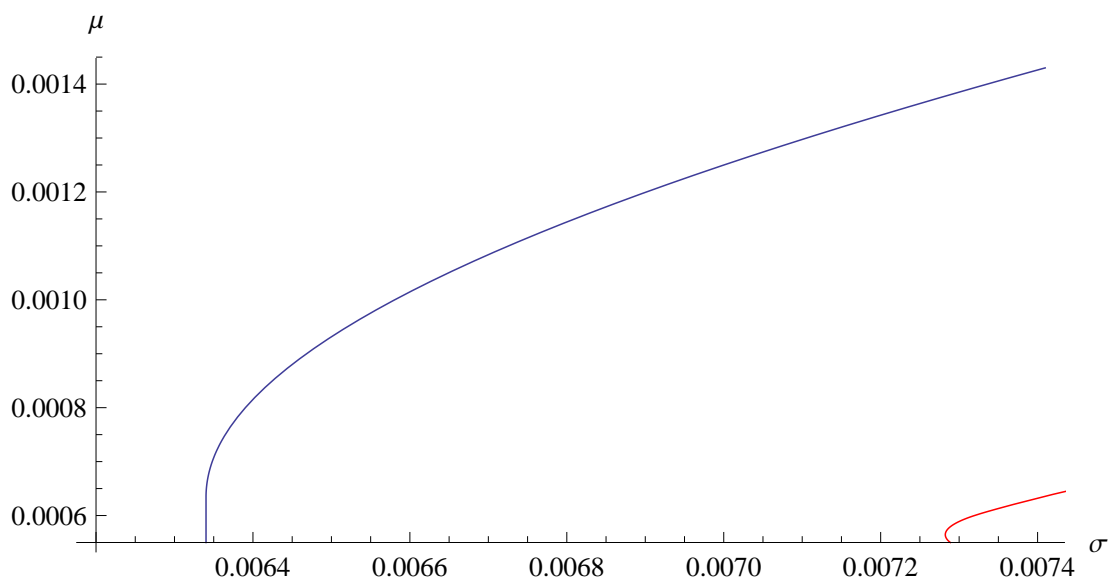
Na obrázku 5.11 jsme porovnali eficientní hranici úlohy (5.5) a (5.7), tedy v případě, že vyčerpáme všechny naše prostředky (červeně) s případem, že všechny



Obrázek 5.11: Eficientní hranice

prostředky nevyčerpáme nutně (modře). Z grafu opět vidíme, že i v tomto případě se nevyplatí investovat všechny naše prostředky, tedy při pevně dané očekávané míře výnosů dosáhneme nižšího rizika.

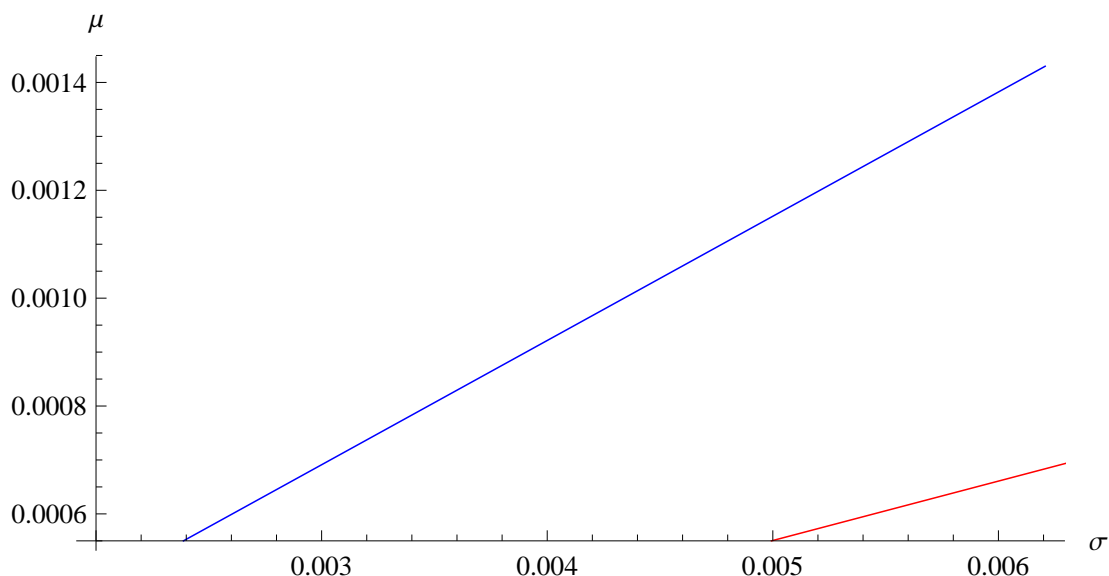
5.3 Prodej nakrátko povolen vs. nepovolen



Obrázek 5.12: Prodej nakrátko povolen vs. nepovolen

V této části analýzy porovnáme eficientní portfolia získána v případě, že prodej nakrátko je povolen s případem že není. Uvažujme nejdříve, že vyčerpáme všechny naše prostředky. Na obrázku 5.12 vidíme, že pokud je prodej nakrátko povolen (modře) jsme schopni dosáhnout vyšší očekávaný výnos s nižším rizikem jako v případě, že prodej nakrátko není povolen (červeně).

V případě, že nevyčerpáme nutně všechny naše prostředky dosáhneme podobného výsledku. Opět, pokud prodej nakrátko je povolen jsme schopni dosáhnout vyšší očekávaný výnos s nižším rizikem jako v případě že prodej nakrátko není povolen. Tento fakt je zobrazen na obrázku 5.13.



Obrázek 5.13: Prodej nakrátko povolen vs. nepovolen

5.4 Kellyho strategie

Jak již bylo řečeno v předchozích sekcích, jsme schopni dosáhnout vyššího očekávaného výnosu s nižším rizikem v případě, že neinvestujeme veškeré naše prostředky. Otázkou však je, jakou část našeho jmění bychom měli investovat pro dosažení maximálního výnosu. V této části popíšeme strategii pro stanovení procenta jmění k investování.

Kellyho kritérium (nebo také strategie či formule) publikoval v roce 1956 John Kelly jako nový systém řešící problematiku hluku při telefonování na dlouhé vzdálenosti. Zajímavá rovnice oslovila i hráče a sázkaře, kteří se chytře chopili příležitosti, jak maximalizovat zisk ze svých sázek.

5.4.1 Problém házení mincí

Předpokládejme jednoduchou hru házení mincí. V případě, že výsledek hodu je rub, vyhráváme. V opačném případě vyhrává soupeř. Dále uvažujme nerealistický případ, kdy náš soupeř má nekonečně velké jmění. Předpokládejme, že pravděpodobnost naší výhry je $p \in (1/2, 1)$ a pravděpodobnost prohry je $1 - p$. V každém kole vsadíme w dolarů. V případě výhry dostaneme w dolarů, v opačném případě se jich musíme vzdát. Matematicky úlohu můžeme zformulovat následovně.

Nechť B_1, B_2, \dots jsou nezávislé, stejně rozdělené bernoulliiovské náhodné veličiny, pro které platí

$$P(B_n = 1) = p \text{ a } P(B_n = 0) = 1 - p, \quad (5.9)$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Z nezávislosti B_n , $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\mathbb{P}(B_1 = i_1, B_2 = i_2, \dots, B_n = i_n) = p^k (1-p)^{n-k}, \quad (5.10)$$

pro $i_1, \dots, i_n \in \{0, 1\}$ a $k = i_1 + \dots + i_n$.

Předpokládejme, že na začátku hry máme pevně dané jmění, označme ho X_0 . Po n -tém hodu, $n \in \mathbb{N}$, máme náhodné množství peněz. V čase n je to náhodná veličina X_n . Speciálně v čase $n-1$ je naše jmění náhodná veličina X_{n-1} . V dalším kroku můžeme vsadit maximálně tolik, kolik jsme měli v předchozím kroku, tedy X_{n-1} . To znamená, že naše sázka v čase n je také náhodná veličina W_n , která je nezávislá na veličinách B_n, B_{n+1}, \dots a nemůže přesáhnout hodnotu náhodné veličiny X_{n-1} . Za těchto předpokladů naše náhodné jmění po n krocích vzhledem k výsledku B_n můžeme vyjádřit následovně

$$X_n = X_{n-1} - W_n + 2W_n B_n. \quad (5.11)$$

Otázkou je, jakou strategii si zvolit v případě, že náš soupeř hraje libovolně dlouho a vlastní nekonečně mnoho peněz, abychom maximalizovali svůj zisk.

5.4.2 Maximalizace střední hodnoty zisku

Uvažujme podmíněnou očekávanou hodnotu náhodné veličiny X_n z předchozí části za podmínky (X_{n-1}, W_n)

$$\mathbb{E}[X_n | (X_{n-1}, W_n)] = X_{n-1} - W_n + 2W_n \mathbb{E}[B_n] = X_{n-1} + (2p-1)W_n, \quad (5.12)$$

protože B_n nezávisí na X_{n-1} a W_n . Z předpokladu, že $p > 1/2$ je vidět, že podmíněnou střední hodnotu maximalizujeme maximalizací W_n . To znamená, že při n -tém hodu vsadíme všechno, tedy $W_n = X_{n-1}$ a $\mathbb{E}[X_n] = 2p\mathbb{E}[X_{n-1}]$. Můžeme tedy psát

$$\mathbb{E}[X_n] = (2p)^n X_0. \quad (5.13)$$

Za našeho předpokladu $2p > 1$ roste funkce $(2p)^n$ exponenciálně s rostoucím n .

Kritéria, která byla použita pro maximalizaci X_n jsou sice snadno spočitatelná, ale v reálném světě nepoužitelná. Pokud vsadíme X_{n-1} v každém kroku hry, znamená to, že pokaždé vsadíme celé naše jmění. V případě, že pokaždé vyhrájeme, v každém kroku zdvojnásobíme náš majetek; v případě, že alespoň jednou prohrajeme, ztratíme všechno. Pravděpodobnost výhry ve všech n kolech je p^n , tzn.

$$\mathbb{P}(X_n = 2^n X_0) = p^n \text{ a } \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p^n. \quad (5.14)$$

Protože $p \in (1/2, 1)$, naše pravděpodobnost úspěchu ve všech hodech s rostoucím n konverguje k 0.

5.4.3 Maximalizace pravděpodobnosti úspěchu v případě sázky necelého jmění

Předpokládejme, že počet hodů mincí $n \in \mathbb{N}$ je pevně daný a nechť máme fixně dané jmění, kterého chceme dosáhnout, označme ho $(1+r)^n X_0$, $r \in [-1, 1]$. Hledáme strategii pro W_n tak, aby maximalizovala pravděpodobnost úspěchu

$$\mathbb{P}(X_n \geq (1+r)^n X_0). \quad (5.15)$$

Uvažujme jednoduchý model. Nechť f je dané číslo, $f \in [0, 1]$ takové, že

$$W_n = fX_{n-1} \quad (5.16)$$

v každém kroku. To znamená, že si vsadíme pevnou část svého jmění v každém kroku. Podívejme se na maximalizaci (5.15) za podmínky (5.16). Dosazením (5.16) do (5.11) máme

$$X_n = X_{n-1} - fX_{n-1} + 2fX_{n-1}B_n = (1 - f + 2fB_n)X_{n-1}. \quad (5.17)$$

Protože B_n nabývá pouze hodnot 0 a 1, můžeme psát

$$X_n = e^{xB_n + y(1-B_n)}X_{n-1}, \quad (5.18)$$

kde platí následující

- pokud $B_n = 1$, pak

$$X_n = (1 - f + 2f)X_{n-1} = (1 + f)X_{n-1} = e^x X_{n-1}, \quad (5.19)$$

platí, že $e^x = (1 + f)$, odkud $x = \ln(1 + f)$,

- pokud $B_n = 0$, pak

$$X_n = (1 - f + 2f \cdot 0)X_{n-1} = (1 - f)X_{n-1} = e^y X_{n-1}, \quad (5.20)$$

platí, že $e^y = (1 - f)$, odkud $y = \ln(1 - f)$.

Pomocí vyjádření x a y v (5.18) můžeme (5.17) přepsat do tvaru

$$X_n = e^{B_n \ln(1+f) + (1-B_n) \ln(1-f)} X_{n-1}. \quad (5.21)$$

Dále můžeme psát:

$$\begin{aligned} X_1 &= e^{B_1 \ln(1+f) + (1-B_1) \ln(1-f)} X_0 \\ X_2 &= e^{(B_1+B_2) \ln(1+f) + (2-[B_1+B_2]) \ln(1-f)} X_0 \\ X_3 &= e^{(B_1+B_2+B_3) \ln(1+f) + (3-[B_1+B_2+B_3]) \ln(1-f)} X_0 \\ &\vdots \\ X_n &= e^{(B_1+\dots+B_n) \ln(1+f) + (n-[B_1+\dots+B_n]) \ln(1-f)} X_0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Označme součet všech úspěchů po n -tém hodu jako

$$S_n = B_1 + \dots + B_n. \quad (5.23)$$

Rekurzivní formuli (5.22) můžeme pomocí S_n napsat jako

$$X_n = e^{(n-S_n) \ln(1-f) + S_n \ln(1+f)} X_0. \quad (5.24)$$

Pomocí této formule můžeme (5.15) přepsat do tvaru

$$\mathbf{P} \left(e^{(n-S_n) \ln(1-f) + S_n \ln(1+f)} X_0 \geq (1+r)^n X_0 \right). \quad (5.25)$$

Dále platí

$$\mathbb{P}((n - S_n)\ln(1 - f) + S_n\ln(1 + f) \geq n\ln(1 + r)) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \frac{\ln(1 + r) - \ln(1 - f)}{\ln(1 + f) - \ln(1 - f)}\right). \quad (5.26)$$

Tato pravděpodobnost je maximalizována v případě, že výraz

$$R(f) = \frac{\ln(1 + r) - \ln(1 - f)}{\ln(1 + f) - \ln(1 - f)} \quad (5.27)$$

je minimální. Po zjednodušení rovnice $\frac{\partial R(f)}{\partial f} = 0$ se dostaneme k výrazu

$$\ln(1 + r) = \ln(1 - f) + \frac{1 + f}{2}[\ln(1 + f) - \ln(1 - f)]. \quad (5.28)$$

Dosazením (5.28) do výrazu (5.26) dostaneme

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \frac{1 + f}{2}\right). \quad (5.29)$$

Podle zákona velkých čísel výraz $S_n/n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} p$.

Platí $\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - p| \geq \epsilon) \geq \mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \geq p + \epsilon) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ pro $\epsilon > 0$. V případě, že

$\frac{1+f}{2} > p$, pak $\frac{1+f}{2} - p > 0$, tzn. můžeme zvolit $\epsilon := \frac{1+f}{2} - p$, tedy

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \frac{1 + f}{2}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \quad (5.30)$$

Také platí $\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - p| \geq \epsilon) \geq \mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \leq p - \epsilon) = 1 - \mathbb{P}(\frac{S_n}{n} > p - \epsilon) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ pro $\epsilon > 0$. V případě, že

$\frac{1+f}{2} < p$, pak $p - \frac{1+f}{2} > 0$. Zvolme si $\epsilon := p - \frac{1+f}{2}$, tedy

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \frac{1 + f}{2}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1. \quad (5.31)$$

Kritérium pro výhodné sázení je

$$\frac{1 + f}{2} \leq p \Leftrightarrow f \leq 2p - 1 = p - q, \text{ kde } q = 1 - p \quad (5.32)$$

Výrazu (5.32) se říká *Kellyho kritérium*. Pokud $f = p - q$ dosadíme do výrazu (5.28), získáme tzv. *očekávanou míru růstu (expected growth rate)*

$$\ln(1 + r) = p \ln(2p) + q \ln(2q) \Rightarrow 1 + r = (2p)^p (2q)^q. \quad (5.33)$$

Kellyho kritérium nám nezaručí zisk. Zaručí nám pouze to, že pokud vyhraje, naše aktuální výhra bude co možná největší. Kellyho kritérium nezaručí ani to, že neprohrajeme. Zaručí ale to, že se zcela minimalizuje možnost ztráty všech peněz. Proto se používá i v podnikání při realizování různých obchodů.

Závěr

Portfolio je soubor investic, který investor vytváří se záměrem minimalizovat riziko spojené s investováním a současně maximalizovat výnos z investic. Je nemožné si odvodit všechny možné závěry při analýze portfolia. Analýza portfolia musí být založena na takových kritériích, která nám slouží jako vodítko pro to, co je důležité a nedůležité, relevantní a irelevantní. Je to hledání optimálního kompromisu mezi minimální výší rizika a maximální výší výnosu. Správná volba kritéria závisí na povaze investora. V jednom se však všichni investoři shodují

- všichni chtějí dosáhnout co nejvyššího 'výnosu'¹;
- chtějí spolehlivý, co nejstabilnější výnos.

Portfolia s vyšším očekávaným výnosem mají obvykle vyšší riziko. U většiny portfolií s extrémně vysokým očekávaným výnosem také figuruje velké riziko ztráty. U portfolia s menším rizikem zase můžeme očekávat menší výnos. Záleží proto na investorovi, zda preferuje jistější menší výnos (investor „s velkou averzí vůči riziku“), nebo je ochoten pro větší výnos více riskovat (investor „s malou averzí vůči riziku“).

Pokud portfolio A má vyšší očekávaný výnos s menším rizikem než portfolio B a zároveň splňuje další požadavky investora, říkáme jednoduše, že A je lepší než B. O portfoliu B bychom už neměli dále uvažovat, vzhledem k tomu, že máme k dispozici jiné varianty, které nám přinesou vyšší výnos s menším rizikem než B. Portfolio B je neeficientní. Po eliminaci všech neeficientních portfolií, dostaneme množinu eficientních portfolií. Všichni racionální investoři mají k dispozici tuto množinu a přece neplatí, že by všichni volili to samé portfolio. Volba konkrétního portfolia u každého investora je dána jeho averzí k riziku.

V první části této práce jsme uvedli ilustraci proč je diverzifikace důležitá pro konstrukci optimálního portfolia. Z uvedeného příkladu bylo zřejmé, že diverzifikace portfolia je snadno dosažitelná jsou-li jeho složky mezi sebou dostatečně záporně korelované. Dále jsme ukázali geometrickou reprezentaci portfolia, předvedli jsme přesný postup nalezení eficientní množiny portfolia skládající se ze tří cenných papírů. Zavedli jsme pojmy *přímky očekávaných výnosů* a *křivky rizik* z ang. pojmů *iso-mean lines* a *iso-variance curves*. Tyto charakteristiky jsme ukázali na konkrétních příkladech, i na takových, kde podmínka efektivního trhu je porušena viz. obrázek 5.17a a 5.18a, tzn. že neplatí podmínka $R_1 < R_2 < R_3 \Rightarrow \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$.

V další části jsme předvedli analýzu portfolia v případě že máme k dispozici větší množství aktiv. Vycházeli jsme z moderní teorie portfolia jehož zakladatelem je pokládán H. Markowitz. Jeho model se týká především investic do portfolia akcií a využívá celé řady zjednodušujících předpokladů. Na základě této teorie jsme v poslední části pomocí programu Mathematica 8.0 sestavili optimální portfolio pro různé strategie investování. S porovnáním eficientní hranice portfolia jsme zjistili, že není vždy výhodné pro investora vyčerpání všech jeho prostředků na neefektivním trhu² a to i v případě povolení prodeje nakrátko.

¹Pojem 'výnos' definuje každý investor jinak, avšak ve většině případů dávají přednost většímu výnosu před menším.

²Neefektivita trhu je zřejmá z tabulky 5.5.

Seznam použité literatury

- [1] CIPRA, T., *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou*, vyd. 2, Ekopress, Praha 2005.
- [2] DUPÁČOVÁ, J., *Markowitzův model optimální volby portfolia*. <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~dupacova/downloads/Markowitz.pdf> (Použito 3. 6. 2013)
- [3] DUPAČOVÁ, J., HURT, J. and ŠTĚPÁN, J., *Stochastic modeling in economics and finance*, Kluwer Academic publishers, Dordrecht 2002.
- [4] HURT, J., *Optimal portfolios on (in)efficient markets*, Wolfram Technology Conference 2011. [http://www.wolfram.com/events/technology-conference/2011/presentations/OptimalPortfoliosOn\(In\)EfficientMarkets.cdf](http://www.wolfram.com/events/technology-conference/2011/presentations/OptimalPortfoliosOn(In)EfficientMarkets.cdf) (Použito 15. 5. 2013)
- [5] JARROW, R. A., MAKSIMOVIC, V., and ZIEMBA, W. T., eds., *Finance*, Handbooks in Operations Research and Management Science Volume 9, Elsevier, Amsterdam, 1995.
- [6] KOHOUT, P., *Peníze, výnosy a rizika: příručka investiční strategie*, vyd. 1, Ekopress, Praha 1998.
- [7] MACLACHLAN, F., *Three - Asset Efficient Frontier*, The Wolfram Demonstrations Project. <http://demonstrations.wolfram.com/ThreeAssetEfficientFrontier/>. 2013. (Použito 15. 5. 2013)
- [8] MARKOWITZ, H. M., *Portfolio Selection*, New York - John Wiley & Sons, Inc. 1956.
- [9] STARR, S., *Some notes on Kelly's criterion*. <http://www.math.rochester.edu/people/faculty/sstarr/210/Kelly1.pdf>. 2011. (Použito 15. 7. 2013)
- [10] WEISSTEIN, Eric W., *Ellipse*, MathWorld - A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Ellipse.html>. 2013. (Použito 25. 2. 2013)

Přílohy

$x_{AA} \rightarrow 0.0032$	$x_{HD} \rightarrow 0.32$	$x_{MSFT} \rightarrow 0.0084$
$x_{AXP} \rightarrow 0.013$	$x_{HPQ} \rightarrow 0.0027$	$x_{PFE} \rightarrow 0.25$
$x_{BA} \rightarrow 0.010$	$x_{IBM} \rightarrow 0.022$	$x_{PG} \rightarrow 0.017$
$x_{BAC} \rightarrow 0.0044$	$x_{INTC} \rightarrow 0.0097$	$x_T \rightarrow 0.036$
$x_{CAT} \rightarrow 0.0064$	$x_{JNJ} \rightarrow 0.020$	$x_{TRV} \rightarrow 0.018$
$x_{CSCO} \rightarrow 0.0078$	$x_{JPM} \rightarrow 0.0070$	$x_{UNH} \rightarrow 0.027$
$x_{CVX} \rightarrow 0.012$	$x_{KO} \rightarrow 0.016$	$x_{UTX} \rightarrow 0.0084$
$x_{DD} \rightarrow 0.0066$	$x_{MCD} \rightarrow 0.025$	$x_{VZ} \rightarrow 0.048$
$x_{DIS} \rightarrow 0.013$	$x_{MMM} \rightarrow 0.0091$	$x_{WMT} \rightarrow 0.042$
$x_{GE} \rightarrow 0.010$	$x_{MRK} \rightarrow 0.018$	$x_{XOM} \rightarrow 0.012$

Tabulka 5.1: Váhy portfolia s minimálním rizikem

$x_{AA} \rightarrow 0.0020$	$x_{HD} \rightarrow 0.32$	$x_{MSFT} \rightarrow 0.0059$
$x_{AXP} \rightarrow 0.0095$	$x_{HPQ} \rightarrow 0.0018$	$x_{PFE} \rightarrow 0.24$
$x_{BA} \rightarrow 0.0069$	$x_{IBM} \rightarrow 0.020$	$x_{PG} \rightarrow 0.015$
$x_{BAC} \rightarrow 0.0027$	$x_{INTC} \rightarrow 0.0069$	$x_T \rightarrow 0.042$
$x_{CAT} \rightarrow 0.0042$	$x_{JNJ} \rightarrow 0.018$	$x_{TRV} \rightarrow 0.014$
$x_{CSCO} \rightarrow 0.0053$	$x_{JPM} \rightarrow 0.0045$	$x_{UNH} \rightarrow 0.024$
$x_{CVX} \rightarrow 0.0090$	$x_{KO} \rightarrow 0.013$	$x_{UTX} \rightarrow 0.0057$
$x_{DD} \rightarrow 0.0043$	$x_{MCD} \rightarrow 0.025$	$x_{VZ} \rightarrow 0.063$
$x_{DIS} \rightarrow 0.0094$	$x_{MMM} \rightarrow 0.0063$	$x_{WMT} \rightarrow 0.059$
$x_{GE} \rightarrow 0.0070$	$x_{MRK} \rightarrow 0.014$	$x_{XOM} \rightarrow 0.0086$

Tabulka 5.2: Váhy portfolia s minimálním rizikem

$x_{AA} \rightarrow -0.12$	$x_{HD} \rightarrow 0.034$	$x_{MSFT} \rightarrow -0.013$
$x_{AXP} \rightarrow 0.00090$	$x_{HPQ} \rightarrow -0.044$	$x_{PFE} \rightarrow 0.096$
$x_{BA} \rightarrow -0.025$	$x_{IBM} \rightarrow 0.14$	$x_{PG} \rightarrow 0.18$
$x_{BAC} \rightarrow -0.012$	$x_{INTC} \rightarrow 0.019$	$x_T \rightarrow 0.19$
$x_{CAT} \rightarrow 0.047$	$x_{JNJ} \rightarrow 0.34$	$x_{TRV} \rightarrow -0.0092$
$x_{CSCO} \rightarrow -0.0024$	$x_{JPM} \rightarrow -0.021$	$x_{UNH} \rightarrow 0.013$
$x_{CVX} \rightarrow -0.00078$	$x_{KO} \rightarrow 0.093$	$x_{UTX} \rightarrow -0.058$
$x_{DD} \rightarrow -0.077$	$x_{MCD} \rightarrow 0.19$	$x_{VZ} \rightarrow 0.049$
$x_{DIS} \rightarrow -0.0068$	$x_{MMM} \rightarrow -0.019$	$x_{WMT} \rightarrow 0.17$
$x_{GE} \rightarrow -0.057$	$x_{MRK} \rightarrow -0.068$	$x_{XOM} \rightarrow -0.019$

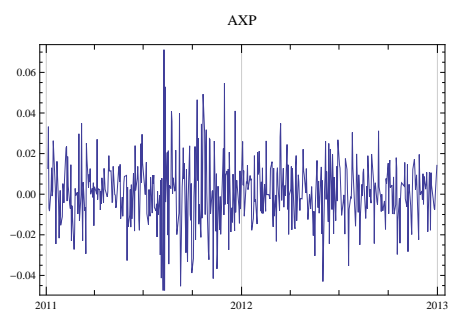
Tabulka 5.3: Váhy portfolia s minimálním rizikem

$x_{AA} \rightarrow -0.18$	$x_{HD} \rightarrow 0.12$	$x_{MSFT} \rightarrow -0.067$
$x_{AXP} \rightarrow 0.052$	$x_{HPQ} \rightarrow -0.10$	$x_{PFE} \rightarrow 0.15$
$x_{BA} \rightarrow 0.014$	$x_{IBM} \rightarrow 0.14$	$x_{PG} \rightarrow -0.091$
$x_{BAC} \rightarrow -0.024$	$x_{INTC} \rightarrow 0.023$	$x_T \rightarrow 0.10$
$x_{CAT} \rightarrow 0.071$	$x_{JNJ} \rightarrow 0.070$	$x_{TRV} \rightarrow 0.054$
$x_{CSCO} \rightarrow -0.0036$	$x_{JPM} \rightarrow 0.021$	$x_{UNH} \rightarrow 0.014$
$x_{CVX} \rightarrow 0.11$	$x_{KO} \rightarrow -0.092$	$x_{UTX} \rightarrow -0.048$
$x_{DD} \rightarrow -0.067$	$x_{MCD} \rightarrow 0.018$	$x_{VZ} \rightarrow 0.025$
$x_{DIS} \rightarrow 0.041$	$x_{MMM} \rightarrow -0.022$	$x_{WMT} \rightarrow 0.040$
$x_{GE} \rightarrow -0.0018$	$x_{MRK} \rightarrow -0.011$	$x_{XOM} \rightarrow -0.062$

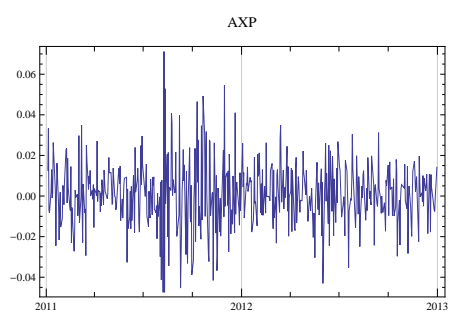
Tabulka 5.4: Váhy portfolia s minimálním rizikem

	μ	σ
HPQ	-0.0017174	0.0240776
AA	-0.000844011	0.0229643
BAC	0.000124864	0.0311605
DD	0.000197455	0.0163389
MSFT	0.000225043	0.0139448
CSCO	0.000258891	0.0195193
CAT	0.000292013	0.0203727
INTC	0.000379767	0.0155697
UTX	0.000389209	0.0150785
PG	0.000399625	0.00904878
MMM	0.000445742	0.0140329
JPM	0.00046792	0.0221928
KO	0.000486297	0.00979857
JNJ	0.000552993	0.00893226
BA	0.000574379	0.0158347
MCD	0.000580361	0.00985191
XOM	0.000580658	0.0130122
GE	0.000682893	0.0161388
MRK	0.000686733	0.0122951
CVX	0.00069428	0.0146554
WMT	0.00070919	0.010375
IBM	0.000732964	0.0122874
T	0.00076174	0.010345
DIS	0.000804375	0.0159064
AXP	0.000814637	0.0163534
VZ	0.000815651	0.0107133
TRV	0.000835935	0.0143489
UNH	0.00100738	0.0167322
PFE	0.0011007	0.012363
HD	0.00143014	0.0144676

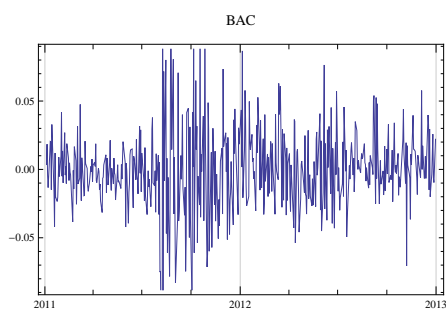
Tabulka 5.5: Očekávaný výnos a riziko akcií



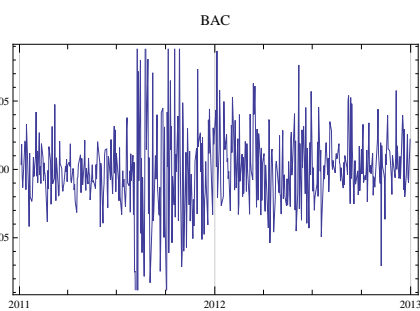
(a) Alcoa Inc.



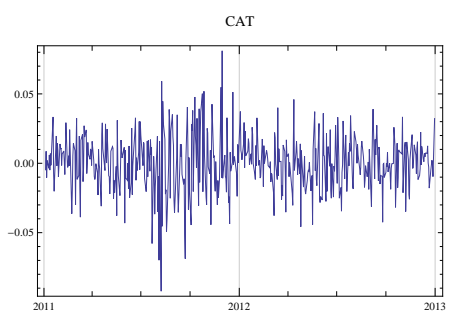
(b) American Express Company



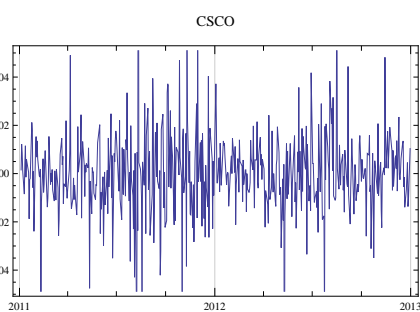
(c) Boeing Company



(d) Bank of America Corp.

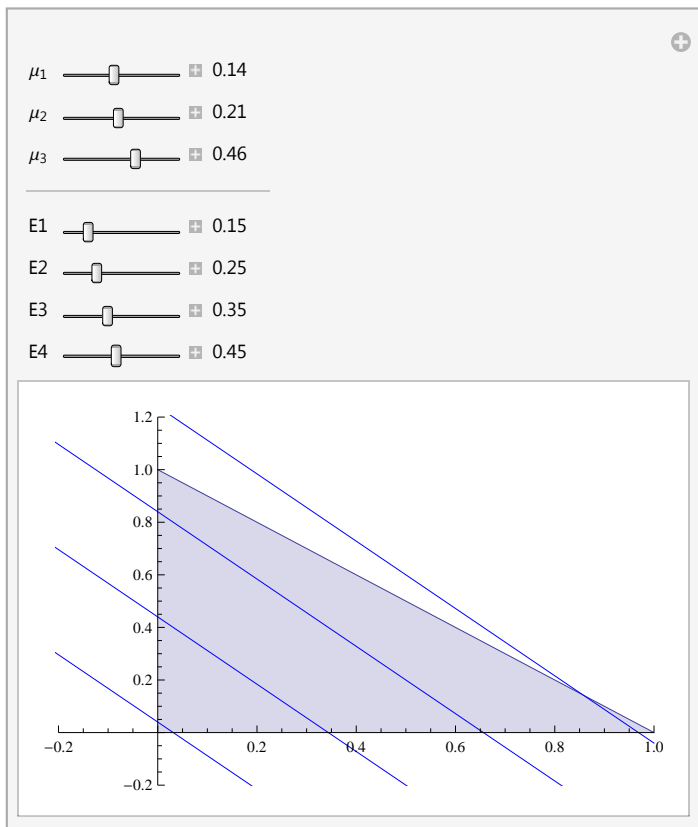


(e) Caterpillar Inc.

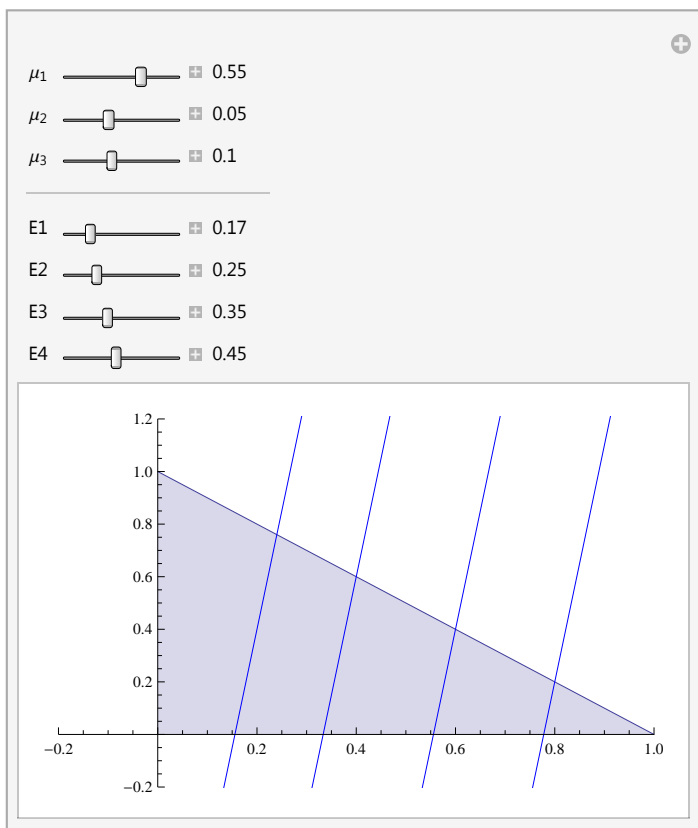


(f) Cisco Systems, Inc.

Obrázek 5.14: Výnosy akcií

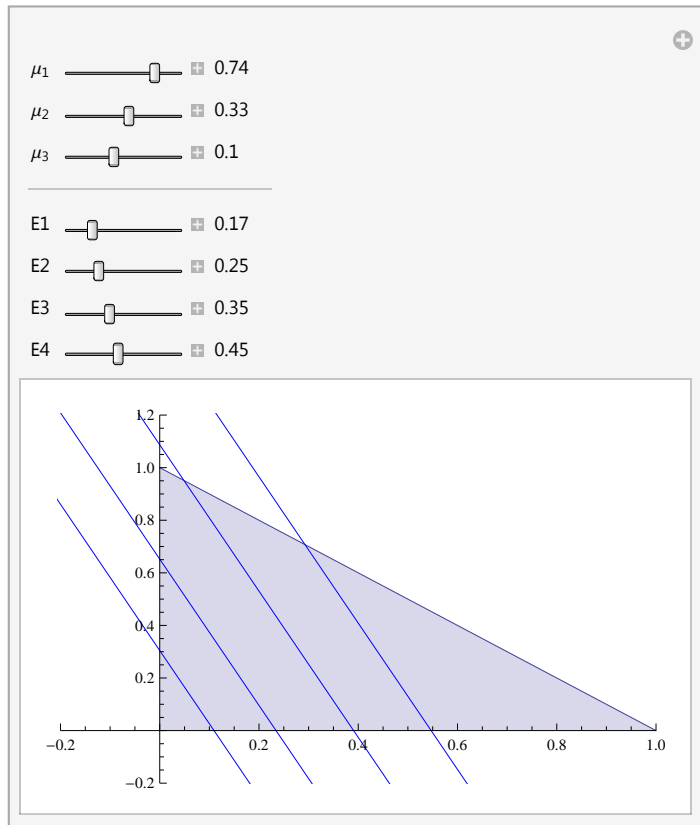


(a) iso1

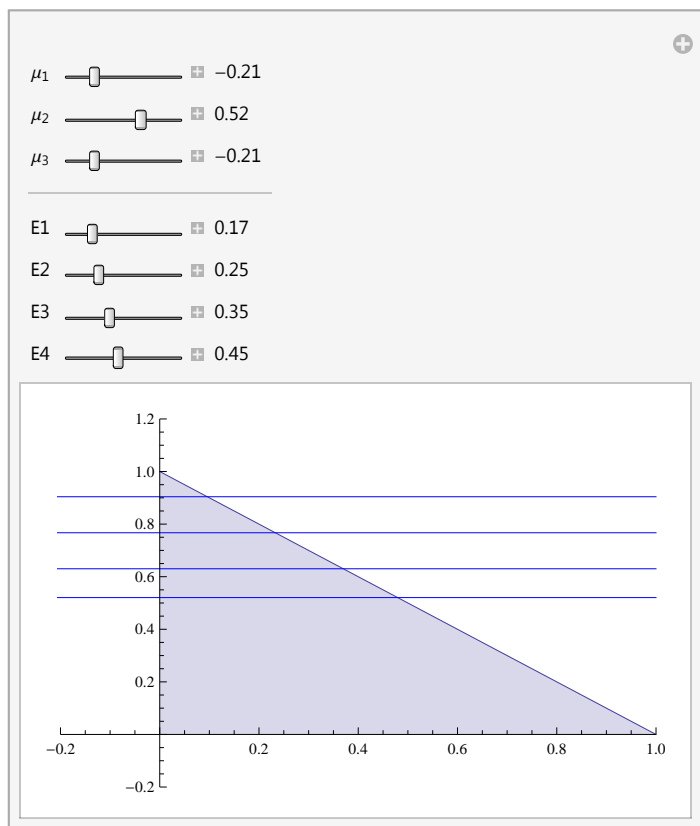


(b) iso2

Obrázek 5.15: Přímkové očekávané výnosy

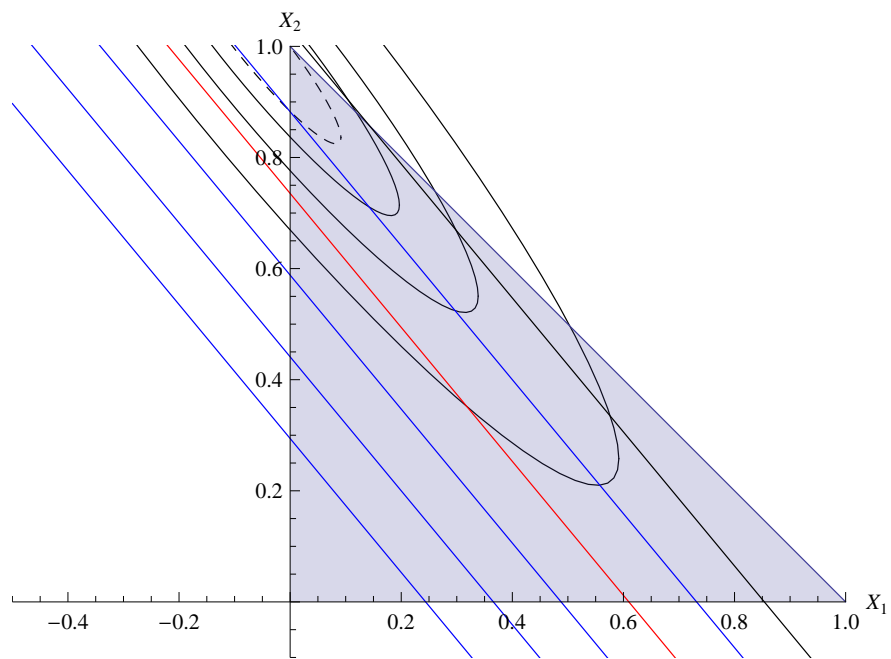


(a) iso3

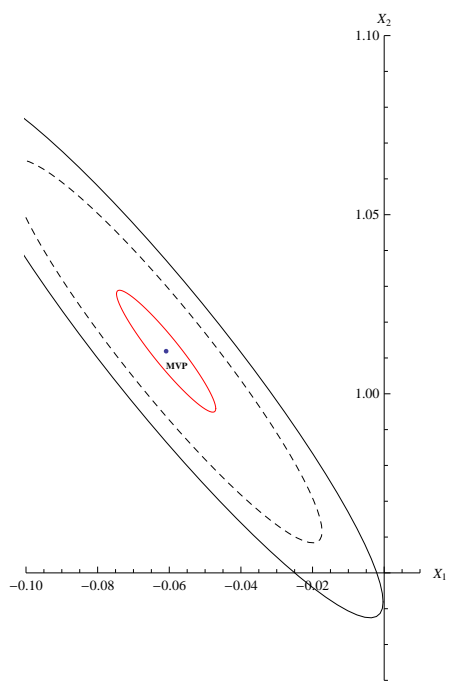


(b) iso4

Obrázek 5.16: Přímkové očekávané výnosy

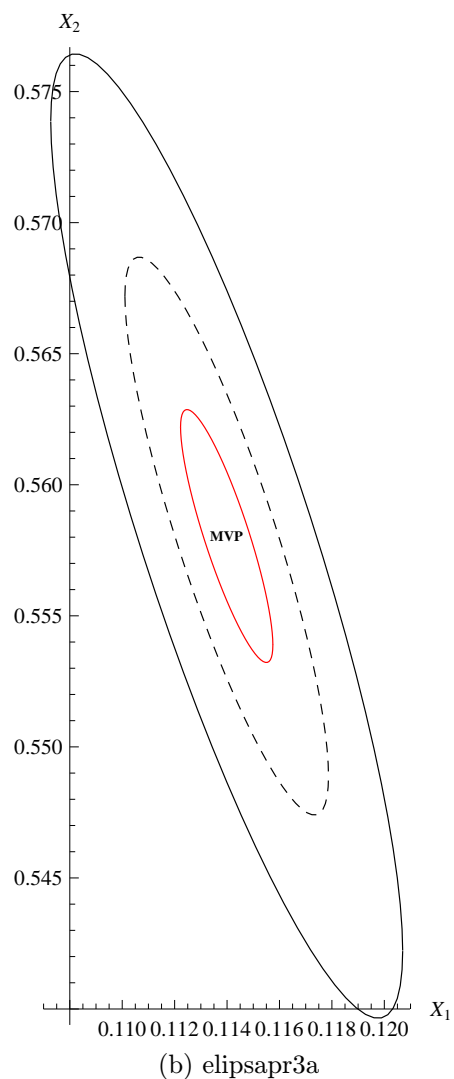
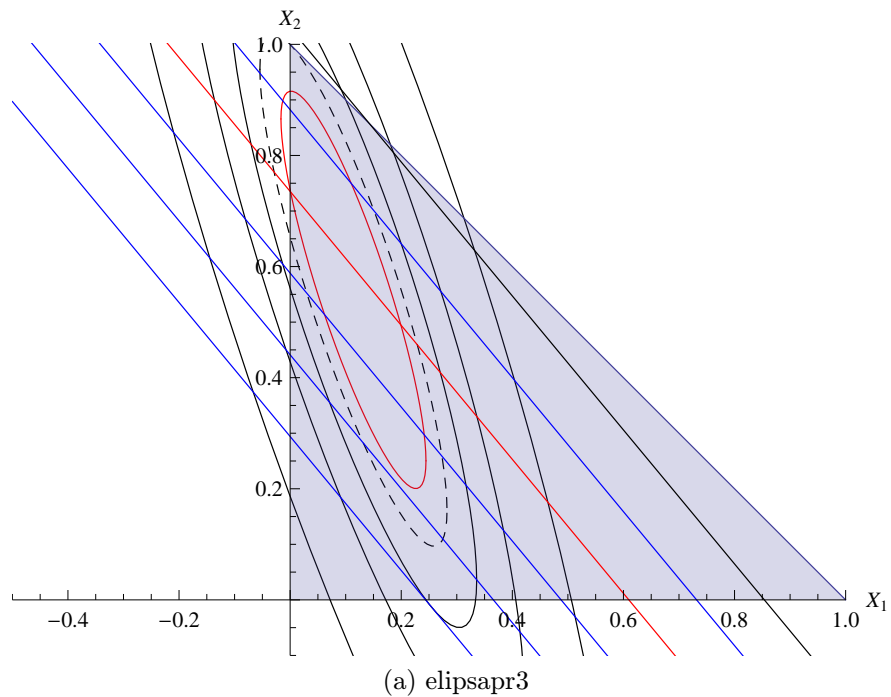


(a) elipsapr2

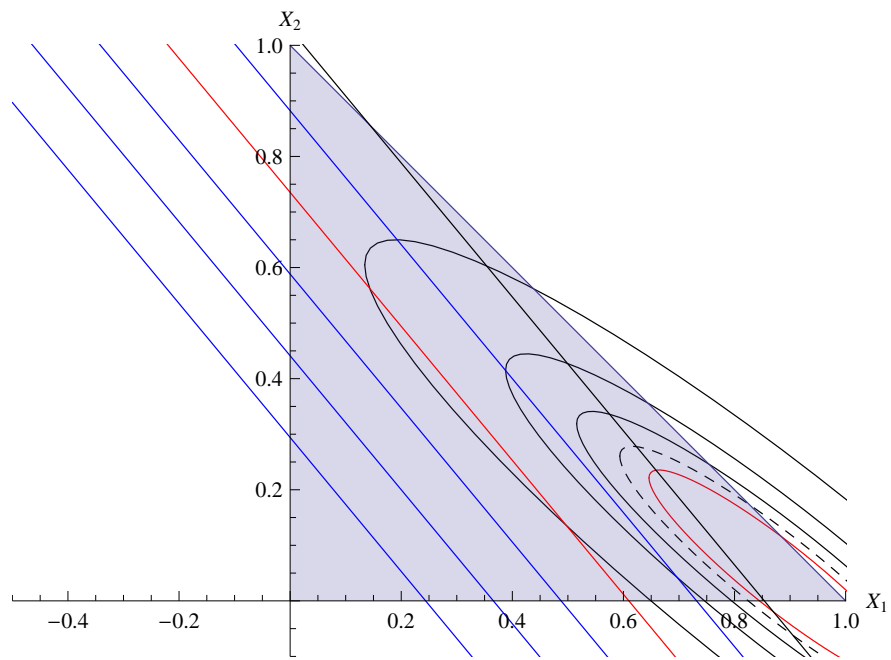


(b) elipsapr2a

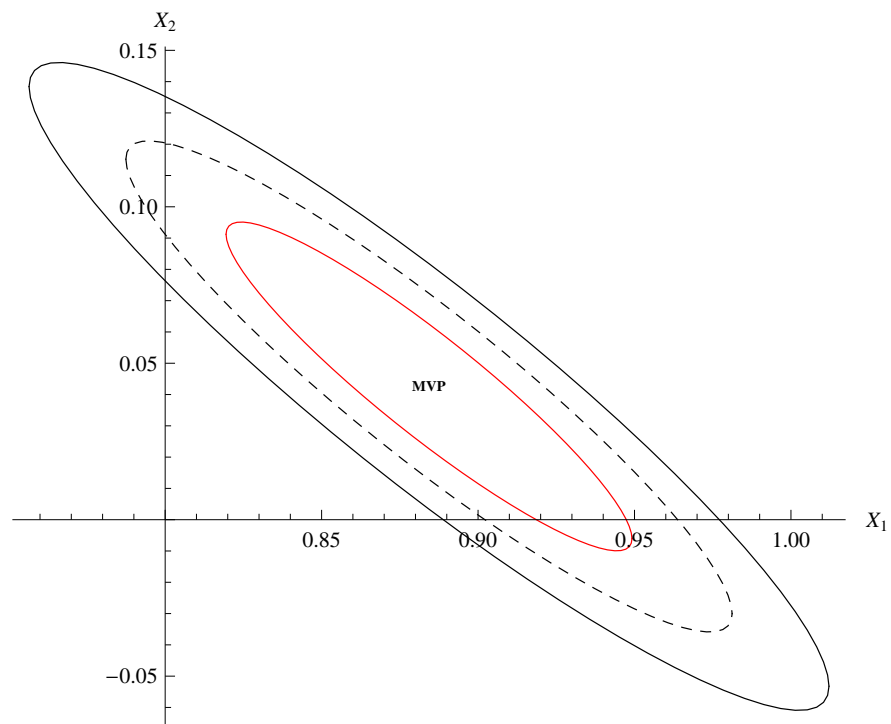
Obrázek 5.17: Křivky rizik



Obrázek 5.18: Křivky rizik

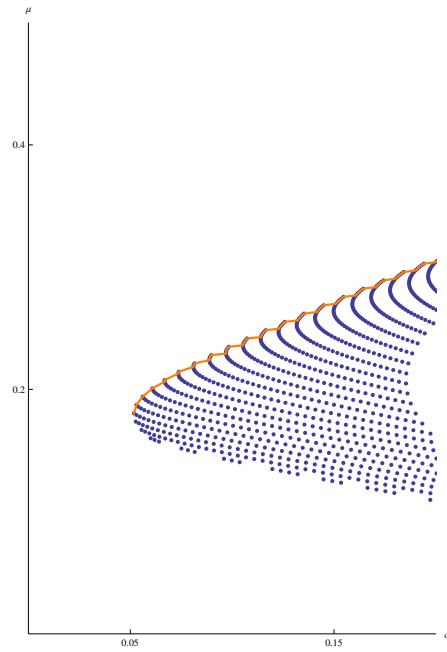


(a) elipsapr4

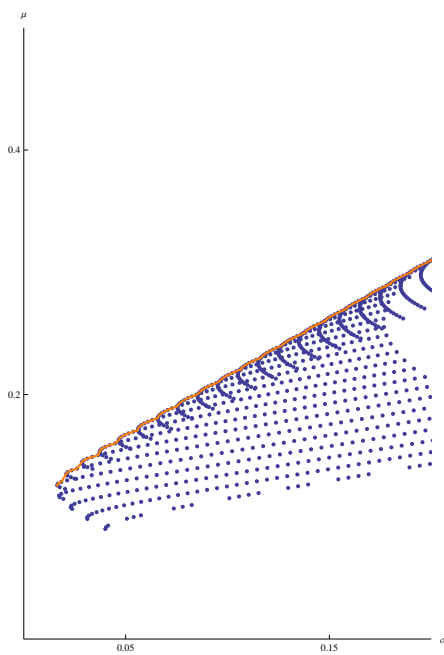


(b) elipsapr4a

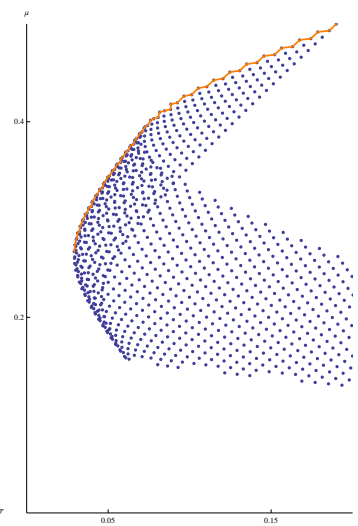
Obrázek 5.19: Křivky rizik



(a) efficientnihranice2



(b) efficientnihranice4



(c) efficientnihranice3

Obrázek 5.20: Eficientní hranice