Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Monika Tvrdá

Webová aplikace pro výuku integrálního počtu na SŠ

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc.

Studijní program: Chemie

Studijní obor: Učitelství chemie a matematiky pro střední školy

Praha 2013

Ráda bych na tomto místě poděkovala doc. RNDr. Jarmile Robové, CSc. za pomoc, vstřícný přístup a vedení mé diplomové práce, protože bez toho by tato práce nevznikla.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Webová aplikace pro výuku integrálního počtu na SŠ

Autor: Bc. Monika Tvrdá

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Tato diplomová práce se zabývá webovými výukovými materiály, které zahrnují učivo integrálního počtu v rozsahu probíraném na střední škole. V úvodu je proveden rozbor existujících výukových webových stránek. Je zde hodnocena věcná správnost, didaktické zpracování, grafické zpracování a zařazení interaktivních prvků. Stěžejní částí práce je vlastní webová aplikace pro výuku integrálního počtu. Cílem bylo předložit studentům učivo atraktivní interaktivní formou při zdůraznění názornosti. Kromě teoretického základu obsahuje práce množství krokovaně řešených úloh a možnost ověření znalostí prostřednictvím dvou typů testů. Dosažení vytyčených cílů práce bylo ověřeno krátkým dotazníkovým šetřením.

Klíčová slova: integrál, aplikace, testy, úlohy

Title: Web application for teaching of calculus in secondary school

Author: Bc. Monika Tvrdá

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc., Department of Mathematics Education

Abstract: This thesis deals with web teaching materials that include calculus in the range discussed at the high school. In the introduction there is an analysis of existing educational websites. There is evaluated correctness, didactic processing, graphic design and the inclusion of interactive elements. The main section is a web application for teaching calculus. The aim was to give the students curriculum attractive and interactive way to emphasize the clarity. In addition to the theoretical basis the application includes the amount stepping solved tasks and the possibility of verifying knowledge through two types of tests. Achievement of the aims of this work were verified by a short questionnaire.

Keywords: calculus, application, tests, tasks

Obsah

Úvod

Učivo integrálního počtu je obvykle ve školních vzdělávacích plánech zařazeno až na závěr středoškolského (zejména gymnaziálního) studia. Pro žáky je tato látka poměrně obtížná také proto, že je při řešení úloh třeba využití poznatků z jiných kapitol matematiky. Zejména se zde využívají funkce a rovnice, v aplikačních úlohách také znalosti z analytické geometrie. Kvalitní výukový materiál může značnou měrou přispět k lepšímu pochopení tohoto učiva. Cílem diplomové práce je vytvoření takového materiálu, který nabídne přehledně členěný, názorný a obsahově přiměřený text pro usnadnění samostatné domácí přípravy.

Před vlastní realizací byl v létě 2012 proveden rozbor sedmi zdarma dostupných webových stránek v českém, slovenském a anglickém jazyce zabývající se touto oblastí. Hodnocena byla obsahová přiměřenost, věcná správnost, didaktické zpracování, grafické zpracování a zařazení interaktivních prvků. Rozbor ukázal, že v té době neexistoval výukový materiál, který by pokryl celé učivo integrálního počtu a využil výhod, které nabízí webové prostředí oproti klasickým tištěným učebnicím. Jedná se zejména o přehledné grafické zpracování a interaktivní prvky, jako jsou applety, krokovaně řešené příklady, testové úlohy či hypertextové odkazy. Podrobný rozbor jednotlivých stránek je uveden v první části této práce.

Stěžejní část diplomové práce tvoří samotná webová aplikace pro výuku integrálního počtu (dostupná na *www.karlin.mff.cuni.cz/~tvrdam/integraly*). Zahrnuje teoretický výklad učiva, řešené úlohy a dvojí typ testů. Obsahuje učivo věnované neurčitému integrálu, určitému integrálu a aplikacím. Velký důraz je zde kladen na využití možností webového prostředí zahrnujících interaktivní prvky a grafické provedení. Je vhodné poznamenat, že těžiště diplomové nebylo v programování fomátu webových stránek, ale v naplnění jejich obsahu.

V květnu 2013 bylo provedeno krátké dotazníkové šetření pro ověření přínosu webových stránek pro studenty. Jeho výsledky jsou uvedeny v závěru celé práce.

1. Rozbor existujících materiálů

V této kapitole bude proveden rozbor několika již existujících webových stránek zabývajících se tématikou integrálního počtu vyučovaného na střední škole. Srovnávány budou snadno dohledatelné stránky, jejichž prohlížení není zpoplatněno. Pro vyhledávání byla použita hesla: *integrál(y), integrální počet, integrování.* Níže uvedený výčet stránek pokrývá ty, které lze hodnotit podle většiny dále uvedených kritérií. Nezabývá se tedy weby, jež problematiku integrálního počtu zmiňují jen okrajově.

Nejprve budou uvedena kriteria hodnocení, následně budou jednotlivě uváděny webové stránky.

1.1 Kritéria hodnocení

Integrální počet představuje pro středoškolského studenta poměrně obtížný tematický celek, pro jehož zvládnutí je podstatné jak zevrubné vysvětlení teorie a množství příkladů a aplikací, tak i celkové zpracování a pojetí učiva.

Kritéria hodnocení webových stránek rozdělíme do pěti základních kategorií:

1. Obsahová přiměřenost
2. Věcná správnost
3. Didaktické zpracování
4. Grafické zpracování
5. Zařazení interaktivních prvků

Stupnice hodnocení bude čtyřstupňová, podobně jako na vysoké škole. Konkrétní hodnocení bude dále uvedeno u každé kategorie.

1.1.1 Obsahová přiměřenost

V současné době je výuka na středních školách realizována pomocí Rámcových vzdělávacích programů (RVP), z nichž dále vycházejí Školní vzdělávací programy (ŠVP), které si školy vytvářejí samostatně. Neexistují tedy jednotné výukové osnovy, podle niž by bylo plošně vyučováno. Pro hodnocení obsahové přiměřenosti bylo ale nutné zvolit konkrétní publikaci, z níž se bude vycházet.

Výchozím materiálem pro stanovení obsahu učiva integrály na střední škole byly zvoleny učebnice *Matematika Maturitní minimum – Sbírka úloh z matematiky pro střední školy* [1] a *Matematická cvičení pro střední školy* [2]. V publikaci [1] jsou stanoveny následující dovednosti, které by měl student střední školy ovládat:

1. Ovládat pojem primitivní funkce k dané funkci.
2. Znát zpaměti základní vzorce a pravidla pro výpočet neurčitých integrálů a umět je aplikovat.
3. Ovládat výpočet jednoduchých určitých integrálů na základě Newtonovy-Leibnitzovy věty.
4. Umět vypočítat obsah množiny M v těchto případech:
   a) množina M je ohraničena grafem funkce f a přímkou $y = 0$
   b) množina M je ohraničena grafem funkce f a přímkami $y = 0$, $x = a$, $x = b$
   c) množina M je ohraničena grafy funkcí f a g
   d) množina M je disjunktní sjednocení dvou množin typu a), b), c)
5. Umět vypočítat objem jednoduchých rotačních těles vytvořených rotací křivky $y = f(x)$ kolem osy x.
6. Chápat nejjednodušší fyzikální aplikace určitého integrálu.

Stupnice hodnocení:

1	Stránka pokrývá všechno výše uvedené učivo.
2	Stránka pokrývá více než polovinu výše uvedeného učiva.
3	Stránka pokrývá méně než polovinu výše uvedeného učiva.
4	Stránka pokrývá minimum výše uvedeného učiva.

1.1.2 Věcná správnost

Současní studenti mají tendenci bezmezně věřit informacím zveřejněným na webu. Z tohoto důvodu je velmi důležité, aby informace zde uvedené byly věcně správné a nemátly tak studenta.

Stupnice hodnocení:

1	Stránka obsahuje učivo bez obsahových chyb.
2	Stránka obsahuje učivo s drobnými obsahovými chybami či nepřesnostmi.
3	Stránka obsahuje učivo s obsahovými chybami.
4	Stránka obsahuje zásadní obsahové chyby.

1.1.3 Didaktické zpracování

Uvedení učiva na webových stránkách samo o sobě studentovi ještě nezaručí, že látku pochopí lépe než z tištěné učebnice či školního výkladu. Pro výukově zaměřené weby je tedy dále velmi důležitá srozumitelnost, názornost a motivace.

Hodnoceno bude:

1. Motivace pro studium integrálního počtu.
2. Srozumitelnost výkladu pro středoškolskou úroveň.
3. Názornost při řešení úloh.

Stupnice hodnocení:

1	Vhodně zvolený a zařazený motivační text. Srozumitelný výklad z pohledu středoškolského studenta. Úlohy řešené názorně.
2	Problematické je právě jedno z uvedených kritérií, tedy: Nevhodná nebo zcela chybějící motivace, *nebo* Výklad obtížněji pochopitelný, nedostatečná srozumitelnost, *nebo* Úlohy řešené zběžně bez důrazu
3	Bezchybně zpracováno je pouze jedno z uvedených kritérií, tedy: Vhodně zvolená motivace, *nebo* Srozumitelně vedený výklad, *nebo* Názorné řešení úloh.
4	Učivo uváděné bez předcházející motivace. Výklad nevhodně vedený, chaotický, či zcela chybějící. Nedostatečná názornost při řešení úloh.

1.1.4 Grafické zpracování

Dobré grafické zpracování webové stránky umožňuje studentovi snazší vyhledávání pojmů a ukazuje provázanost jednotlivých částí učiva. Využití obrázků v některých kapitolách považuji pro správné pochopení vysvětlovaných pojmů za nezbytné. To všechno přispívá ke snadnější orientaci v učivu integrálního počtu a tak i k rychlejšímu pochopení celé problematiky.

Hodnoceno bude:

1. Přehlednost, uspořádání učiva, snadnost vyhledání hledaného pojmu.
2. Sázení matematických symbolů.
3. Využití obrázků tam, kde je to možné.

Stupnice hodnocení:

1	Přehledný, dobře strukturovaný web. Matematické symboly čitelné, v textu přirozeně včleněné. Přiměřené využití obrázků.
2	Problematické je právě jedno z uvedených kritérií, tedy: Špatně strukturovaný web, *nebo* Matematické symboly obtížněji čitelné, patrná odlišnost od okolního textu, *nebo* Absence obrázků.
3	Bezchybně zpracováno je pouze jedno z uvedených kritérií, tedy: Web přehledný, dobře strukturovaný, *nebo* Matematické symboly přirozeně včleněné, *nebo* Využití obrázků.
4	Špatně strukturovaný web, chaotický. Matematické symboly viditelně odlišné. Absence obrázků.

1.1.5 Interaktivní prvky

Využití interaktivních prvků ve webové stránce je důležitým faktorem, který odlišuje zpracování učiva jako webové stránky oproti učivu v klasické papírové formě. Kvalitní interaktivní prvky umožňují studentovi lepší pochopení celé problematiky.

Hodnoceno bude:

1. Přítomnost řešených příkladů s možností krokování postupu a vysvětlení jednotlivých částí výpočtu.
2. Samostatné testování žáků.
3. Využití apletů.

Stupnice hodnocení:

1	Řešené příklady s možností krokování výpočtu. Testy. Aplety.
2	Chybí právě jedno z uvedených kritérií, tedy: Absence řešených příkladů s možností krokování výpočtu, *nebo* Absence testů, *nebo* Absence apletů.
3	Přítomno je pouze jedno z uvedených kritérií, tedy: Řešené příklady s možností krokování výpočtu, *nebo* Samostatné testování žáků, *nebo* Využití apletů.
4	Neřešené příklady nebo řešené příklady bez možnosti krokování výpočtu. Absence testů. Absence apletů.

1.2 České webové stránky

Mezi českými webovými stránkami je obtížné nalézt materiály omezující se na učivo integrálního počtu na střední škole. Z tohoto důvodu budou často uváděny stránky zaměřující se na vysokoškolskou matematiku, jejichž část je ale pro středoškolského studenta pochopitelná a přínosná.

Seznam hodnocených webových stránek:

1. Matematika-online-a.kvalitne.cz
2. Aristoteles.cz
3. Homen.vsb.cz
4. Mathonline.cz
5. Mojeskola.cz

1.2.1 Matematika-online-a.kvalitne.cz

Obrázek 1.1: Matematika-online-a.kvalitne.cz

První hodnocenou internetovou stránkou je

http://matematika-online-a.kvalitne.cz/integralni-pocet.htm.

Prvenství si vysloužila svým umístěním při vyhledávání, kdy se při zadání slov *integrál, integrály, integrální počet* umístila vždy na předních příčkách.

Obsahová dostatečnost

Stránky v menu uvádějí následující členění učiva: *Neurčitý integrál, Určitý integrál, Integrace podle vzorců, Per partes, Integrace substituční metodou, Integrace racionální lomenné funkce, Integrace goniometrických funkcí, Objem rotačního tělesa, Obsah rotační plochy, Dvojný integrál*, přičemž kapitoly *Integrace racionální lomenné funkce*
a *Dvojný integrál* jsou prázdné. Chybějící kapitoly ovšem nejsou součástí učiva střední školy, a tak jejich absenci ponecháme bez komentáře. Dále nebudeme hodnotit kapitoly *Integrace goniometrických funkcí* a *Obsah rotační plochy*, které se taktéž zaměřují na vysokoškolské učivo. Každá kapitola kromě teorie vždy obsahuje soubor příkladů s možností otevření celého řešení ve formátu .pdf.

Zaměřme se na obsah jednotlivých kapitol.

Neurčitý integrál
Kapitola *Neurčitý integrál* se dále dělí na dvě na sebe navazující podkapitoly – definice a výčet vzorců. Nejprve se zde autoři snaží o vysvětlení projmů primitivní funkce a neurčitý integrál.

Následuje přehled základních vzorců pro primitivní funkce. Výčet je bohatý, obsahuje všechny vzorce potřebné pro studenta střední školy a také několik vzorců vysokoškolských (např. hyperbolické funkce).

Příkladů je v této části uvedeno deset, vždy s přiloženým řešením ve formátu .pdf. Typ příkladů považuji na úvod za přiměřený.

Určitý integrál
Kapitola *Určitý integrál* se opět nejprve snaží o co možná nejsrozumitelnější vysvětlení pojmu určitý integrál a vysvětlení, jak takový integrál počítat. Teorií se příliš nezabývá, což pro účely těchto stránek nepovažuji za problematické. Dále v tomto úvodním přehledu uvádí vzorce pro výpočty rovinného obsahu, objemu rotačních těles a dokonce i obsahu rotační plochy.

Následuje deset řešených příkladů na výpočty určitého integrálu. Další dva příklady neuvádějí zadání, pravděpodobně se jedná o výpočet obsahu rovinného obrazce ohraničeného dvojicí funkcí.

Domnívám se, že v úvodní kapitole k učivu určitého integrálu by zcela stačilo vysvětlení pojmu a procvičení příkladů s určitým integrálem, aplikace bych nechala na později. Další kapitoly jsou navíc na tyto aplikace zaměřeny, přičemž jejich náplň vznikla pouhým překopírováním zde uvedeného textu.

Integrace podle vzorců
Kapitola *Integrace podle vzorců* téměř duplikuje úvodní kapitolu o neurčitém integrálu. Je tu uveden tentýž výčet vzorců pro určení primitivní funkce, ovšem bez metody per partes. Navíc jsou tu uvedeny věty pro počítání s konstantou a pro

integrál součtu více funkcí.

Příklady jsou naprosto totožné s kapitolou *Neurčitý integrál*. Přínos této kapitoly tedy není příliš zřejmý, věty mohly být uvedeny již v úvodní části o neurčitém integrálu.

Per partes
Nyní následuje uvedení metody *per partes*. Kapitola na začátku nabízí odvození vzorce a jeho uvedení.

Dále je uvedeno sedm řešených příkladů.

Integrace substituční metodou
Při pohledu na zpracování této kapitoly nejspíš nebude žádný student o problematice substituce poučenější. Teorii lze shrnout jednou větou, cituji:

> „Substituční metoda tedy metoda tedy zjednoduší integrál na snadněji řešitelný.“

Dále je uvedeno deset příkladů na použití substituční metody. Výklad ovšem chybí.

Objem rotačního tělesa
V úvodu kapitoly je zřejmá snaha o vysvětlení původu vzorce pro objem rotačního tělesa. Autor zde využívá vzorec pro objem válce, který dále upravuje dosazením za výšku a poloměr následovně:

> „... místo výšky válce dosadíme integrační meze a místo poloměru funkci $f(x)$ nebo $f(y)$, která rotuje kolem jedné z os $x, y, \ldots$“

Dále je uveden kompletní vztah pro objem rotačního tělesa a sada deseti příkladů přiměřené obtížnosti.

Hodnocení: Webovou stránku z hlediska obsahu hodnotím známkou **2** z následujících důvodů:

Klady:

- pokrytí většiny učiva střední školy.

Zápory:

- chybějící fyzikální aplikace,
- nedostatečné vysvětlení použití substituční metody a metody per partes.

Věcná správnost

Výklad teorie je ve všech případech podán věcně správně. Problémy začínají u výpočtů. Pro ilustraci uvádím první příklad pro procvičení látky řešení metodou per partes:

Příklad č.1.:

Vypočítejte:

$\int (x.\ln(x))dx$

Řešení:

$$\int x.\ln(x)dx = \left| \begin{matrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \ln(x-1) & v = \dfrac{1}{x-1} \end{matrix} \right| = x.\frac{1}{x-1} - \int 1.\frac{1}{x-1}dx = \underline{\underline{\frac{x}{x-1} - \ln(x-1) + c}}$$

Obrázek 1.2: Příklad 1 – per partes

Tento příklad má velmi pěkné prvotní zadání, i když osobně by mi přišlo vhodnější zařadit na začátek méně komplikovaný příklad (např. typický pro derivaci proměnné x). Ovšem daleko závažnější je zřejmě celé další řešení příkladu. Nejen, že se během výpočtu změnil argument logaritmu, ale celá metoda per partes je užita přesně obráceně, přičemž největší chybou je uvedená integrace logaritmu.

Hodnocení: Webovou stránku z hlediska věcné správnosti hodnotím známkou **3** z následujících důvodů:

Klady:

- teorie uvedena věcně správně,
- většina příkladů řešená správně.

Zápory:

- naprosto chybně řešený vzorový příklad pro metodu per partes.

Didaktické zpracování

Nyní se zaměříme na výše uvedené stránky a pokusíme se je rozebrat z hlediska didaktického zpracování.

Neurčitý integrál
Cituji definici:

> „Integrace je operace opačná k derivování.
>
> Ke známému diferenciálu funkce hledáme tuto funkci integrováním diferenciálu funkce. Hledáme-li ke známé derivaci $f'(x)$ příslušnou funkci $f(x)$ výsledkem je vždy množina funkcí, které se navzájem liší o přičtenou konstantu c ($c' = 0$) je to neurčitý integrál. Neurčitý integrál je množina všech primitivních funkcí.“

Kladně hodnotím odsazení první věty, která jednoduše říká to, co většina studentů nezbytně potřebuje vědět. Ve druhém odstavci se autor snažil o přesnější výklad, dle mého názoru se mu ovšem příliš nepovedl. Zejména poslední věta toho mnoho nepoví studentovi, který se s pojem integrál ještě nesetkal, a tak neví, co je primitivní funkce. A tak se vlastně definuje nový pojem pomocí neznámého a nevysvětleného pojmu. Nehledě na využívání výrazu diferenciál, který je pro středoškolského studenta velmi obtížný.

Další didaktický problém vidím v obsahu kapitoly. Z neznámého důvodu je pod výčtem vzorců, které na začátek výkladu bezpochyby patří, uvedeno pravidlo per partes, které ve výpočtech této části není využíváno. Naopak chybí věty pro počítání s konstantou a součet, resp. rozdíl, integrálů, jejichž znalost je pro řešení příkladů této kapitoly nezbytná.

Určitý integrál
Do této kapitoly se autorovi vloudilo poměrně velké množství gramatických chyb a překlepů, které mohou činit čtenáři potíže. Cituji:

„Vlastnosti určitého integrálu:

- Určitý integrál jehož meze jsou si rovny je roven nule.
- Výměnou integračních mezí změní určitý integrál známého.“

Dále u podkapitol *Obsah rovinného obrazce*, *Objem rotačního tělesa* a *Obsah rotační plochy* znatelně chybí obrázky pro názornou ilustraci nově zavedených pojmů. Slovní vysvětlení je věcně správné, ovšem didakticky ho považuji za nedostatečné.

Integrace podle vzorců
Jak již bylo výše uvedeno, tato kapitola téměř zcela duplikuje úvodní část *Neurčitý integrál*. Z didaktického hlediska lze vytknout uvedení vzorců pro cyklometrické a hyperbolické funkce, které středoškolský student nemusí bezpodmíněčně ovládat a které jsou zde uvedeny v základním výčtu vzorců „bez kterých se při výpočtech dál nedostanete“.

Per partes
Také tuto kapitolu neshledávám didakticky příliš povedenou. Uvádí sice, že se metoda používá při integraci součinu, ale už nezdůrazňuje, že vždy jeden z činitelů je třeba umět integrovat a druhý pak derivovat. Studentovi tak opět nabízí jen jakýsi vzorec a jeho odvození, který je třeba se bezmyšlenkovitě naučit zpaměti.

Dalším nedostatkem jsou příklady (řešení prvního je rozebráno výše). Pořadí příkladů není voleno od jednodušších ke složitějším, ale náhodně.

Integrace substituční metodou
V úvodu se kapitola *Integrace substituční metodou* snaží vysvětlit přínos této metody, ovšem nijak se nezmiňuje o tom, jak správnou substituci sestavit. V přiložených deseti příkladech je substituce užívána bez dalšího vysvětlení, proč je právě taková substituce vhodná.

V této kapitole shledávám zásadní nedostatek, žákovi problematiku nevysvětlí.

Objem rotačního tělesa
Kapitola *Objem rotačního tělesa* měla původně patrně navazovat na kapitolu o obsahu plochy pod křivkou, ze které vychází. Tato kapitola ovšem není součástí webových stránek. V úvodní kapitole o určitém integrálu je pouze uveden vzorec. Také z těchto důvodů působí celá teorie zmateně. Negativně dále hodnotím nepřítomnost ilustračního obrázku nebo apletu.

Hodnocení: Webovou stránku z hlediska didaktického zpracování hodnotím známkou **3** z následujících důvodů:

Klady:

- názorně řešené příklady,
- snaha o vysvětlení původu vzorců.

Zápory:

- chybějící motivační text,
- spíše přehledovitý než výkladový styl textu,
- zmatečné vysvětlení teoretického základu.

Grafické zpracování

Přehlednost
Zpracování stránky je zdánlivě velmi přehledné. Velmi pěkně je zpracovaná úvodní strana, která přehledně shrnuje názvy jednotlivých kapitol a jejich stručný obsah. Tyto kapitoly jsou vypsány také v postranním menu. Bohužel jejich náplň už tolik přehledná není. Již v obsahovém hodnocení jsem se zmiňovala o nevhodném rozsahu některých kapitol a jejich doslovném duplikování v kapitolách jiných.

Dále nepovažuji za zcela vhodné uspořádání jednotlivých částí výkladu, kdy je nejprve uveden neurčitý integrál obecně, za nímž následuje určitý integrál obecně a až poté metody řešení neurčitého integrálu následované využitím a počítáním určitého integrálu.

Hledaný konkrétní pojem se nicméně dá dohledat poměrně snadno, problém nastává až při soustavném čtení celých kapitol.

Sázení matematických symbolů
Matematické symboly jsou sázeny trojím způsobem:

1. **Symboly v textu** se chovají jako text, po překopírování do textového editoru (např. Word) dají stejný výraz - psáno kurzívou, použit symbol pro integrál.
2. **Zadání příkladů** tvoří vložené obrázky, jak ukazuje následující Obrázek:

$$\int (x.\ln(x))dx$$

Obrázek 1.3: Zadání příkladu

Obrázky vypadají jako psané ve Wordu a vložené, neboť LaTeXpíše symboly jinak.

3. **Řešení příkladů** není součástí textu, ale je uváděno ve formátu .pdf ke stažení. Symboly vypadají stejně jako ty, jimiž jsou psána zadání příkladů:

Příklad č.1.:

Vypočítejte:

$$\int_1^2 4x\ dx =$$

Řešení:

$$\int_1^2 4x\ dx = \left[4\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \left[2x^2\right]_1^2 = \left[2(2)^2\right] - \left[2(1)^2\right] = 8 - 2 = \underline{\underline{6}}$$

Obrázek 1.4: Řešení příkladu

Kladně hodnotím umístění odkazu na řešení příkladu hned vedle jeho zadání. Řešení tedy není nutné složitě vyhledávat.

Využití ilustračních obrázků
Ilustrační obrázky nejsou používány v žádné kapitole.

Hodnocení: Webovou stránku z hlediska grafického zpracování hodnotím známkou **3** z následujících důvodů:

Klady:

- snadné vyhledávání konkrétního pojmu,
- přehledně připojená řešení příkladů.

Zápory:

- chybějící obrázky,
- obtížněji čitelné matematické symboly v textu,
- řešení příkladů mimo vlastní internetové stránky ve formátu .pdf,
- nevhodné uspořádání některých kapitol.

Interaktivní prvky

Přítomnost řešených příkladů s možností krokování postupu a vysvětlení jednotlivých částí výpočtu

Ke každé kapitole je přiložena sada průměrně deseti příkladů s přiloženým řešením bez možnosti krokování výpočtu a vysvětlením jednotlivých částí výpočtu.

Samostatné testování žáků

Není.

Využití apletů

Aplety se na stránce nevyskytují.

Hodnocení: Webovou stránku z hlediska interaktivních prvků hodnotím známkou **4** z následujících důvodů:

Klady:

- přítomná řešení uváděných příkladů.

Zápory:

- chybějící krokované řešení,
- chybějící testy,
- chybějící aplety.

Celkové hodnocení

Webová stránka nabízí poměrně ucelený výklad učiva integrálního počtu s možností vyhledávání pojmů. Bohužel chybí obrázky i jakékoli interaktivní prvky, stránka má tedy ve výsledku spíše charakter tištěné učebnice.

Obsahová dostatečnost	2
Věcná správnost	3
Didaktické zpracování	3
Grafické zpracování	3
Interaktivní prvky	4
Celkem	**3**

1.2.2 Aristoteles.cz

Obrázek 1.5: Aristoteles.cz

Stránka

http://www.aristoteles.cz/matematika/integraly/integraly-tabulka.php

se objevila při vyhledávání slova *integrály* vyhledávačem Google na druhé příčce. Pokusíme se ji zhodnotit podle výše uvedených kritérií.

Obsahová správnost a dostatečnost

Po ne úplně snadném vyhledání všech pojmů souvisejících s učivem integrálního počtu na střední škole nalezneme následující kapitoly: *Přehled základních integrálů, Integrály – řešené příklady, Integrály – příklady, Substituční metoda, Substituční metoda – příklady, Metoda per partes, Per partes – příklady, Určitý integrál, Určitý integrál – příklady.*

Jednotlivé kapitoly nyní důkladněji rozebereme.

Přehled základních integrálů
Po kliknutí na název kapitoly *Přehled základních integrálů* se nám otevře kapitola nazvaná *Pravidla pro výpočet integrálů.* Na tuto kapitolu dále odkazuje odkaz *Základní integrály.* To už samo o sobě působí matoucím dojmem. Ať už je tato kapitola nazvána jakkoli, obsahuje základní tabulku integrálů doplněnou o slovní popis jednotlivých řádků tabulky, viz Obrázek 1.6:

7.	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$	integrace vedoucí **na arcsin x**

Obrázek 1.6: Tabulka integrálů

Integrály – řešené příklady
Tato kapitola obsahuje celkem tři řešené příklady na integraci konstanty a integraci polynomu. Tyto základní jednoduché příklady jsou řešené přehledně, se zdůrazněním využití příslušných vzorců.

Integrály – příklady
Kapitola obsahuje 25 dalších příkladů bez výsledků. Výsledky a pravděpodobně také postup řešení se objeví až po přihlášení a zaplacení, tato část již tedy není běžně přístupná, a tak se jí nebudeme dále věnovat.

Substituční metoda
Po rozkliknutí názvu této kapitoly se obdobně jako v případě kapitoly *Přehled základních integrálů* zobrazí kapitola s pozměněným názvem, v tomto případě kapitola *Integrace pomocí substituční metody.* Na stejnou kapitolu také v jiných částech webové stránky odkazuje heslo *Substituční metoda – teorie.* Je zde uveden obecný vzorec pro substituční metodu, řešený typický příklad na substituci, dále dva odstavce vysvětlující, kdy a jak se substituční metoda používá, a nakonec také odvození výše uvedeného vzorce z derivace složené funkce.

V této kapitole postrádám vysvětlení, jakým způsobem substituci sestavujeme.

Substituční metoda – příklady
Kapitola má po rozkliknutí opět jiný název, tentokrát *Integrace pomocí substituční metody.* Je zde uvedeno 32 příkladů, jejichž výsledky i postup jsou dostupné pouze po přihlášení a zaplacení.

Metoda per partes
Odkazy *Metoda per partes* a *Per partes – teorie* vedou na kapitolu *Integrace metodou per partes.* Ta obsahuje vzorec pro per partes, řešený typický příklad, podrobné vysvětlení, kdy per partes využíváme a kterou funkci derivujeme/integrujeme, dále odvození vzorce z derivace součinu a tři neřešené příklady pro per partes bez uvedených výsledků.

Per partes – příklady
Název této kapitoly po rozkliknutí je tentokrát *Integrace metodou per partes – příklady.* Obsahuje 20 příkladů na per partes, jejichž výsledky a postup výpočtu jsou dostupné pouze po zaplacení a přihlášení.

Určitý integrál
Kapitola *určitý integrál* velmi názorně vysvětluje význam a využití určitého integrálu, dále uvádí vzorec pro jeho výpočet a řešený typický příklad. Bohužel zde není vysvětleno, odkud se meze berou, ani jakým způsobem se posléze dosazují.

Určitý integrál – příklady
V kapitole je uveden pouze jediný příklad, jehož řešení opět není bez přihlášení dostupné.

Hodnocení: Webovou stránku z hlediska obsahu hodnotím známkou **3** z následujících důvodů:

Klady:

- uvedení základních vzorců pro výpočty integrálů,
- uvedení základních pravidel pro výpočty integrálů,
- uvedení Newtonovy-Leibnitzovy formule (bez pojmenování).

Zápory:

- neuvedení pojmu primitivní funkce,
- neuvedení pojmu neurčitý integrál,
- nedostatečné vysvětlení aplikace susbtituční metody,
- nedostatečné vysvětlení pojmu určitý integrál – bez zmínek, jakými přímkami a funkcemi je množina, jejíž obsah hledáme, ohraničena,
- neuvedení výpočtu objemu rotačního tělesa,
- chybějící fyzikální aplikace.

Věcná správnost

Z hlediska věcné správnosti stránce nelze prakticky nic vytknout. Jediné, co může působit matoucím dojmem, je nedbalé používání integrační konstanty C, která je při některých výpočtech za výsledkem uvedena, v jiných ale chybí.

Hodnocení: Webovou stránku z hlediska věcné správnosti hodnotím známkou **1** z následujících důvodů:

Klady:

- obsah stránky je věcně správný.

Zápory:

- nedbalá práce s integrační konstantou.

Didaktické zpracování

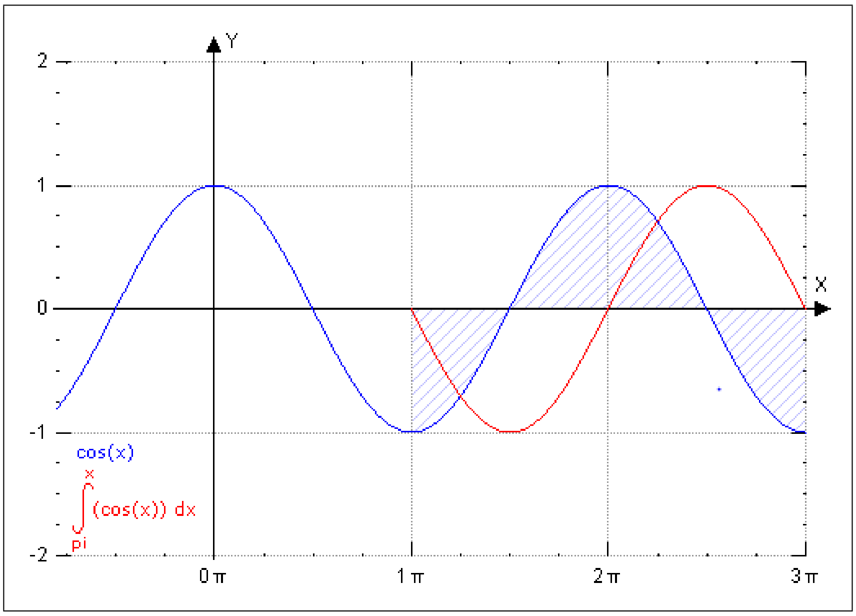
Webovou stránku Aristoteles.cz je poměrně obtížné hodnotit z hlediska didaktického zpracování, jelikož charakter stránky je spíše přehledový. Motivace pro studium zde naprosto chybí, web se zaměřuje především na uvedení vzorců. Přesto se pokusíme zdůraznit didaktický přínos některých kapitol.

Metoda per partes a substituční metoda
U obou metod je zřejmá snaha autora přiblížit studentům, kdy je třeba tu či onu metodu nasadit. Bohužel zde chybí vysvětlení, proč tak činíme (např. substituci zavádíme tehdy, když je integrál příliš složitý a my se ho tak snažíme zjednodušit). Nicméně pokud již student o těchto metodách dříve slyšel, uvedená teorie mu pomůže problematiku alespoň částečně pochopit.

Velmi pozitivně dále hodnotím u obou metod uvedení řešeného typického příkladu bezplatně a na vhodném místě výkladu.

Odvození obou metod přes příslušné derivace zase pomáhá propojit derivace s integracemi.

Určitý integrál
Kapitola *Určitý integrál* je zpracována didakticky velmi pěkně s důrazem na názornost. Vyskytuje se tu množství ilustračních obrázků, které napomáhají pochopení daného pojmu. Vytknout lze snahu autorů zobrazit v jednom obrázku co nejvíce jevů. Kromě znázornění křivky a vyšrafování příslušné plochy je v obrázku zakreslena také primitivní funkce k dané funkci, jak ukazuje Obrázek 1.7:



Obrázek 1.7: Ilustrační obrázek

Dále zde, bohužel, není vysvětleno, co jsou vlastně meze a jakým způsobem se s nimi ve výpočtu pracuje.

Uvedený řešený příklad doplněný o grafické znázornění je ovšem velmi pěkný.

Hodnocení: Webovou stránku z hlediska didaktického zpracování hodnotím známkou **3** z následujících důvodů:

Klady:

- vhodně zvolené a názorně řešené vzorové příklady,
- srozumitelnost přiměřená středoškolskému studentovi.

Zápory:

- chybějící motivace,
- nedostatečné vysvětlení metod pro počítání,
- matoucí uvedení primitivní funkce v obrázcích.

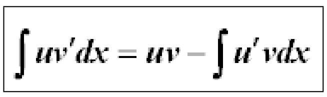
Grafické zpracování

Přehlednost
Stránka je po stránce přehlednosti naprosto nedostatečná. Kapitoly se po rozkliknutí přejmenovávají, na stejnou stránku je odkazováno z rozdílně nazvaných odkazů. Navíc menu se podle aktuálně zobrazené kapitoly neustále mění.

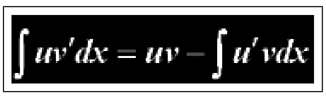
Dále se v menu nezobrazují všechny pojmy související s daným tématem, ale jejich místo zabírají pojmy z jiného učiva. Například v menu není nikdy zároveň zobrazen odkaz na neurčitý i určitý integrál zároveň. Takto vypadá úvodní menu k učivu integrálů, které se zobrazí po vyhledání pojmu integrály pomocí vyhledávače Google:

Obrázek 1.8: Hlavní menu

Sázení matematických symbolů
Matematické symboly jsou vždy sázené jako obrázek, ať už se jedná o uváděné vzorce, zadání nebo řešení příkladů. Po zkopírování takového obrázku do editoru Word nebo programu Malování získáme obrázek v invertovaných barvách. Srovnání:



Obrázek 1.9: Vzorec uvedený na stránkách



Obrázek 1.10: Vzorec po překopírování do Malování

Využití ilustračních obrázků
V rámci uvedených kapitol velmi pozitivně hodnotím využití obrázků v kapitole *Určitý integrál.* Tyto obrázky výrazně napomáhají pochopení tohto pojmu.

Hodnocení: Webovou stránku z hlediska grafického zpracování hodnotím známkou **3** z následujících důvodů:

Klady:

- využití ilustračních obrázků v kapitole *Určitý integrál.*

Zápory:

- nepřehledné menu,
- obtížné vyhledávání pojmů,
- matematické symboly sázené jako obrázky.

Interaktivní prvky

Přítomnost řešených příkladů s možností krokování postupu a vysvětlení jednotlivých částí výpočtu
V každé kapitole je alespoň jeden vzorově řešený příklad. Chybí zde ovšem možnost krokování výpočtu.

Samostatné testování žáků
V neplacené verzi není.

Využití apletů
Aplety se na stránce nevyskytují.

Hodnocení: Webovou stránku z hlediska interaktivních prvků hodnotím známkou **4** z následujících důvodů:

Klady:

- přítomná řešení uváděných vzorových příkladů.

Zápory:

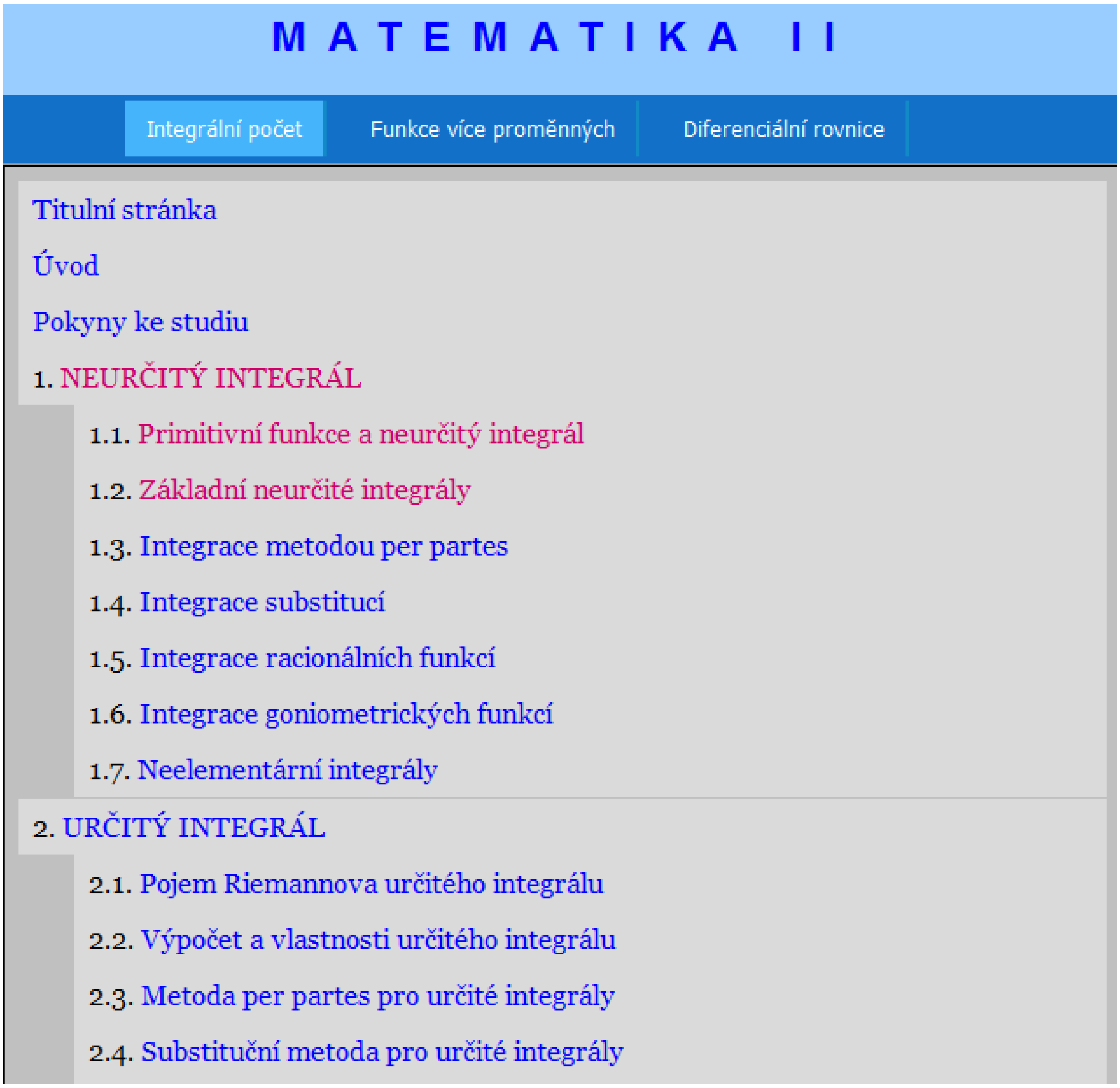
- chybějící krokované řešení,
- chybějící testy,
- chybějící aplety.

Celkové hodnocení

Webová stránka nabízí nepřehledně uspořádaný výklad části učiva integrálního počtu. Kladně hodnotím odvození vzorců pro substituční metodu a metodu per partes a dále ilustrační obrázky v učivu určitého integrálu.

Obsahová dostatečnost	3
Věcná správnost	1
Didaktické zpracování	3
Grafické zpracování	3
Interaktivní prvky	4
Celkem	**3**

1.2.3 Homen.vsb.cz



Obrázek 1.11: Homen.vsb.cz

Webová stránka

http://homen.vsb.cz/ kre40/esfmat2/

je zajímavá zejména tím, že je psaná jako velmi přehledně členěná učebnice. Můžeme tedy předpokládat, že bude vynikat obsahovou stránkou nad grafickým zpracováním a interaktivními prvky.

Obsahová dostatečnost

Menu nabízí, jak je zřejmé z úvodního obrázku, následující členění kapitol:

1. Neurčitý integrál: *Primitivní funkce a neurčitý integrál, Základní neurčité integrály, Integrace metodou per partes, Integrace substitucí, Integrace racionálních funkcí, Integrace goniometrických funkcí, Neelementární integrály;*

2. Určitý integrál: *Pojem Riemannova určitého integrálu, Výpočet a vlastnosti určitého integrálu, Metoda per partes pro určité integrály, Substituční metoda pro určité integrály, Nevlastní integrály;*

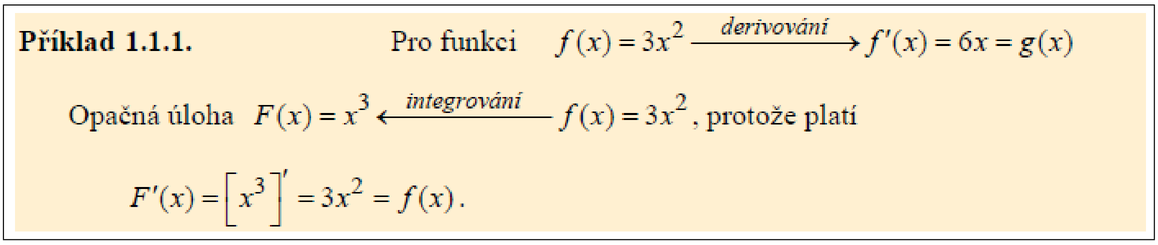
3. Aplikace určitého integrálu: *Obsah rovinné oblasti, Délka oblouku křivky, Objem rotačního tělesa, Obsah pláště rotačního tělesa, Fyzikální aplikace.*

V hodnocení se zaměříme jen na ty kapitoly, které obsahem pokrývají učivo střední školy tak, jak ho vymezuje publikace [1].

Součástí každé kapitoly je kromě výkladu také sbírka řešených příkladů, kontrolní otázky na pochopení dané problematiky, úlohy k samostanému řešení s uvedenými výsledky, kontrolní test s výsledky a shrnutí lekce. V této části hodnocení se zaměříme jen na výklad.

Neurčitý integrál

Primitivní funkce a neurčitý integrál
Kapitola srozumitelně vysvětluje pojem primitivní funkce a propojuje ho s dříve probíranými derivacemi:



Příklad 1.1.1. Pro funkci $f(x) = 3x^2 \xrightarrow{\text{derivování}} f'(x) = 6x = g(x)$

Opačná úloha $F(x) = x^3 \xleftarrow{\text{integrování}} f(x) = 3x^2$, protože platí

$$F'(x) = \left[x^3\right]' = 3x^2 = f(x).$$

Obrázek 1.12: Primitivní funkce

Dále důkladně vysvětluje význam pojmu neurčitý integrál a to pomocí srozumitelně řešených příkladů, čímž současně ukazuje původ základních integračních vzorců. Vzorce následně uvádí pohromadě v přehledné tabulce.

Základní neurčité integrály
Po rozkliknutí této kapitoly se objeví totožný .pdf soubor jako pro výše rozebíranou kapitolu *Primitivní funkce a neurčitý integrál.* Nebudeme ji tedy znovu hodnotit.

Integrace metodou per partes
Kapitola ukazuje nejprve odvození vztahu pro per partes, který následně uvádí jako větu. Zdůrazňuje také, že funkce, na které metodu per partes aplikujeme, musí mít na daném intervalu spojité derivace. Srozumitelně a názorně pak vysvětluje na konkrétních příkladech, který člen součinu je třeba integrovat a který derivovat. Součástí jsou dále řešené příklady, u nichž je vždy ukázáno, proč jsme příslušné členy součinu derivovali, resp. integrovali. Dále kapitola uvádí schéma, pomocí kterého lze jednoduché integrály vypočítat.

Kladně dále hodnotím vysvětlení příkladů, u kterých výpočet integrálu vede na násobek integrálu původního.

Integrace substitucí
Tato část výkladu uvádí, kdy je vhodné substituci použít a jaký má mít tvar, což je illustrováno na množství uvedených řešených příkladů.

Určitý integrál

Výpočet a vlastnosti určitého integrálu
Kapitola uvádí Newtonovu-Leibnitzovu formuli včetně důkazu. Na úkor této podrobnosti, pro středoškolského studenta nepodstatné, není dostatečně vysvětleno dosazování mezí do integrálu. Dále jsou uvedeny vztahy pro výpočet určitého integrálu součtu a pro výpočet určitého integrálu součinu, kdy jedním z činitelům je konstanta (oboje včetně důkazu).

Řešené i neřešené příklady jsou opět pro středoškolského studenta příliš složité, jednoduchých příkladů pro samostatné procvičování látky je uvedeno velmi málo.

Metoda per partes pro určité integrály
Kapitola se zaměřuje na výpočet určitého integrálu, kdy se neodděluje fáze výpočtu primitivní funkce od výpočtu určitého integrálu. Na začátku ovšem vysvětluje, že je také možné vypočítat integrál jako neurčitý integrál a meze dosadit až do výsledku nakonec.

Teorie je vysvětlená přehledně, pro středoškolského studenta přiměřeně. Také uvedené řešené i neřešené příklady považuji za vhodné tomuto stupni studia.

Substituční metoda pro určité integrály
Složitěji pojatá kapitola, spíše vhodná pro vysokoškolské studenty. Domnívám se, že středoškolskému studentovi stačí umět vypočítat určitý integrál převedením na neurčitý, ten substitucí vypočítat a nakonec dosadit původní meze.

Také uvedené příklady nenasvědčují tomu, že by student střední školy měl tuto techniku výpočtu ovládat.

Aplikace určitého integrálu

Obsah rovinné oblasti
Kapitola zahrnuje všechny body uvedené v publikaci [1]. Teorie je uvedena rozsáhle, ale díky ohraničení podstatných věcí je i pro studenta střední školy pochopitelná. Příklady jsou řešeny názorně, ilustrační obrázky napomáhají pochopení celé problematiky. Část příkladů rozsahem přesahuje středoškolskou látku.

Objem rotačního tělesa
V kapitole je velmi pěkně ukázáno odvození vztahu pro objem rotačního tělesa. Řešené příklady ukazují mimo jiné odvození vztahů pro výpočet objemu koule a rotačního kužele.

Přítomné příklady na procvičení látky jsou už pro středoškolského studenta bohužel příliš složité.

Fyzikální aplikace
Kapitola se zabývá určením těžiště a momentu setrvačnosti soustavy hmotných bodů, rovinné křivky a rovinné oblasti.

Hodnocení: Webovou stránku z hlediska obsahu hodnotím známkou **1** z následujících důvodů:
Klady:

- pokrytí veškerého učiva uvedeného v publikaci [1].

Věcná správnost

Text uváděný na webové stránce je součástí rozsáhlého výukového projektu. Také z toho důvodu je zřejmé, že se v textu nevyskytují závažné věcné chyby.

Hodnocení: Webovou stránku z hlediska věcné správnosti hodnotím známkou **1** z následujících důvodů:

Klady:

- uvedené učivo neobsahuje věcné chyby.

Didaktické zpracování

Učební text je didakticky zpracován velmi pěkně. Na začátku každé kapitoly je uveden tzv. Průvodce studiem, tj. motivační a shrnující tetx k dané části. Tento text je psán srozumitelně a přehledně, takže studentovi jasně sdělí, proč se má tématem zabývat.

Následuje vždy teoretický výklad, který srozumitelně vysvětluje a odvozuje postup ve výpočtech, hojně jsou využívány řešené příklady vhodně včleněné v příslušném textu.

V kontrolních otázkách uvedených na konci výkladu je po studentovi požadováno, aby problematiku pochopil do hloubky – např.:

10. Doplňte funkci $v(x)$, je-li $u'(x) = 1$ a výsledný integrál je $I = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$.

Obrázek 1.13: Kontrolní otázka

Jediným didaktickým problémem může být pro středoškolského studenta obtížnost některých kapitol. Například teorie uvedená v kapitole *Integrace substitucí* byla pravděpodobně psaná pro vysokoškolské studenty; pro studenta střední školy by teorie v odborné podobě, jak je zde představená, nebyla snadno pochopitelná. Také později uváděné řešené i neřešené příklady svou obtížností nepokrývají středoškolskou látku, ale dalece ji přesahují.

Hodnocení: Webovou stránku z hlediska didaktického zpracování hodnotím známkou **1** z následujících důvodů:

Klady:

- motivační text zařazený na začátku každé kapitoly,

- vzorce uváděné včetně srozumitelného odvození,
- velké množství příkladů na procvičení,
- kontrolní otázky napomáhající vlastnímu zhodnocení pokroku ve studiu.

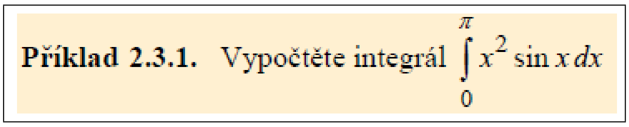
Zápory:

- uzpůsobení spíše vysokoškolské obtížnosti učiva, středoškolský student si musí vybírat, co potřebuje.

Grafické zpracování

Přehlednost
Jednotlivé kapitoly této webové učebnice se otevírají ve formátu .pdf, části výkladu jsou odlišeny grafickými značkami, jejichž přehled je uveden na začátku menu. Členění jednotlivých kapitol je přehledné, ovšem pro středoškolského studenta může být obtížnější orientovat se v hutném textu, který je určen spíše pro vyšší stupně studia matematiky.

Sázení matematických symbolů
Matematické symboly jsou v textu sázeny přirozeně, není patrná odlišnost od ostatního textu:



Obrázek 1.14: Sázení matematických symbolů

Využití obrázků
Ilustrační obrázky jsou hojně využívány, přispívají ke snadnějšímu pochopení problematiky.

Hodnocení: Webovou stránku z hlediska grafického zpracování hodnotím známkou **1** z následujících důvodů:

Klady:

- přehledné členění kapitol v základním menu,
- přirozené sázení matematických symbolů,
- využití ilustračních obrázků.

Zápory:

- odkazy se otevírají jako .pdf soubory, není tedy možnost plynulého přecházení mezi kapitolami.

Interaktivní prvky

Přítomnost řešených příkladů s možností krokování postupu a vysvětlení jednotlivých částí výpočtu

V každé kapitole jsou přítomny řešené příklady. Vzhledem k charakteru webových stránek – kapitoly se otevírají jako .pdf soubory, zde chybí možnost krokování výpočtu.

Samostatné testování žáků

Testy jsou přítomny v závěru každé kapitoly. Je uvedeno zadání příkladu a poté čtyři možné výsledky, z nichž student volí právě jeden správný.

Využití apletů

Aplety se na stránce, vzhledem k jejímu charakteru, nevyskytují.

Hodnocení: Webovou stránku z hlediska interaktivních prvků hodnotím známkou **3** z následujících důvodů:

Klady:

- řešené vzorové příklady,
- samostatné testování studentů.

Zápory:

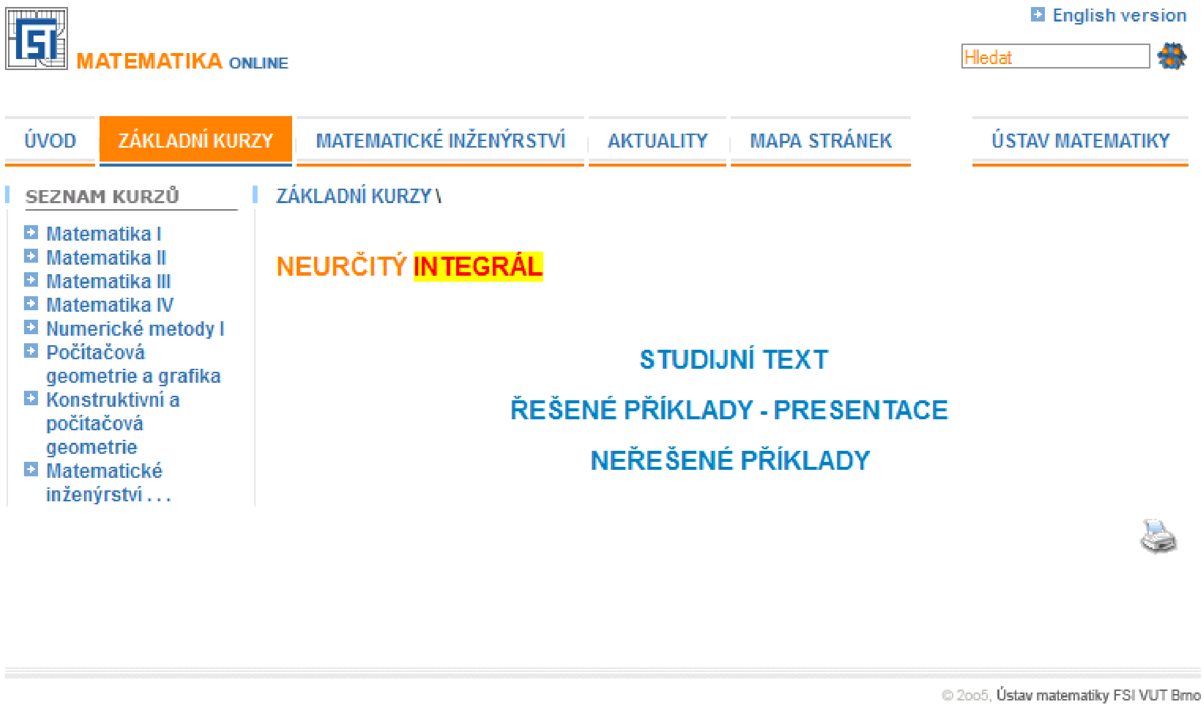
- chybějící krokované řešení,
- chybějící aplety.

Celkové hodnocení

Webová stránka se jeví jako velmi dobrá, přesto spíše tištěná učebnice. Jednotlivé kapitoly se otevírají jako samostatné .pdf soubory, student tedy nemůže využívat prakticky žádné výhody učebnice ve formě webové stránky oproti klasické papírové publikaci. Obsahem stránka naplňuje a daleko přesahuje učivo integrálního počtu na střední škole tak, jak je uváděn v [1].

Obsahová dostatečnost	1
Věcná správnost	1
Didaktické zpracování	1
Grafické zpracování	1
Interaktivní prvky	3
Celkem	**1,4**

1.2.4 Mathonline.cz



Obrázek 1.15: Mathonline.cz

Stránka

http://mathonline.fme.vutbr.cz/

je zaštiťována Ústavem matematiky FSI VUT Brno. Z tohoto důvodu lze předpokládat přítomnost spíše vysokoškolského přístupu k učivu integrálního počtu.

Obsahová dostatečnost

Menu Základní kurzy – Matematika I nabízí dvě kapitoly zabývající se tématem integrálního počtu: *Neurčitý integrál, Určitý integrál.* Po rozkliknutí každé z kapitol se objeví seznam podkapitol:

1. Neurčitý integrál: *Studijní text, Řešené příklady – presentace, Neřešené příklady*

2. Určitý integrál: *Studijní text, Neřešené příklady; Aplikace určitého integrálu: Studijní text, Neřešené příklady, Řešené příklady – presentace*

Neurčitý integrál – Studijní text
Po kliknutí na název kapitoly se objeví čtyřstránkový text ve formátu .pdf. Ten přehledně shrnuje učivo integrálního počtu, který rozděluje do následujících podkapitol:

1. Základní pojmy: primitivní funkce a neurčitý integrál, tabulka základních integračních vzorců

2. Integrační metody: integrace konstanty, integrace součtu, přímá metoda integrace, substituční metoda, metoda per partes, její odvození a příklady využití; u všech metod je uveden seznam neřešených příkladů bez výsledků.

Neurčitý integrál – Řešené příklady – presentace
Jak již název kapitoly napovídá, kapitolu tvoří prezentace ve formátu .pdf. Prezentace obsahuje celkem tři řešené příklady, u kterých je přítomno krokování výpočtu. Každý krok je pod výpočtem slovně okomentován.

Neurčitý integrál – Neřešené příklady
Tato kapitola sestává ze sbírky úloh pro učivo neurčitých integrálů. Vedle příkladů jsou uvedeny jejich výsledky. Příklady jsou opět uvedeny ve formátu .pdf.

Určitý integrál – Studijní text
Pro středoškolského studenta je v této části (formát .pdf) pouze uvedena Newton-Leibnitzova formule. Postrádám zde vysvětlení pojmu určitý integrál.

Určitý integrál – Neřešené příklady
Opět sbírka příkladů, analogický formát jako v kapitole *Neurčitý integrál – Neřešené příklady*.

Aplikace určitého integrálu – Studijní text
Tento studijní text ve formátu .pdf uvádí přehledné shrnutí základních aplikačních vztahů určitého integrálu – v tabulce jsou uvedeny vztahy pro výpočet obsahu, objemu, délky křivky a povrchu pláště. Pod tabulkou jsou uvedeny příklady na procvičení s uvedenými výsledky. Vzorce nejsou nijak vysvětlené, jedná se o přehled.

Aplikace určitého integrálu – Neřešené příklady
Kapitola uvádí sbírku úloh na aplikaci určitého integrálu s výsledky. Příklady se otevírají pohromadě na jedné .pdf stránce.

Aplikace určitého integrálu – Řešené příklady – presentace
V .pdf prezentaci je uvedeno krokované řešení celkem tří příkladů a to na obsah plochy pod křivkou, objem rotačního tělesa a délka křivky. Příklady jsou řešeny přehledně, ovšem bez dostatečného výkladu v části *Aplikace určitého integrálu – Studijní text* není pochopení vůbec snadné.

Hodnocení: Webovou stránku z hlediska obsahu hodnotím známkou **2** z následujících důvodů:

Klady:

- přehledné shrnutí učiva integrálního počtu,

Zápory:

- chybí důkladnější rozebrání případů počítání obsahu útvaru ohraničeného křivkami,
- chybí fyzikální aplikace.

Věcná správnost

Text je uváděn věcně správně, nezaznamenala jsem obsahové chyby.

Hodnocení: Webovou stránku z hlediska věcné správnosti hodnotím známkou **1** z následujících důvodů:

Klady:

- uvedené učivo neobsahuje věcné chyby.

Didaktické zpracování

Nejprve se pokusíme zhodnotit didaktické zpracování studijního textu. Tato teoretická část výkladu je psána formou definic, vět a poznámek, což může na středoškolského studenta působit příliš stroze. V textu prakticky chybí didaktické poznámky či motivační úvody. Na stylu výkladu je patrné, že je psán primárně pro studenty vysoké školy, kterým je přizpůsoben i obtížností. Pro běžného středoškolského studenta tak bude orientace v problematice obtížná.

Na první pohled dále působí velmi pěkně přítomnost krokovaných řešených příkladů ke každé kapitole. Tyto příklady jsou ovšem, bohužel, poměrně značně složité a dle mého názoru jejich pochopení již vyžaduje jistý stupeň znalosti postupů výpočtů. Uváděné příklady nelze považovat za typové a základní.

Hodnocení: Webovou stránku z hlediska didaktického zpracování hodnotím známkou **4** z následujících důvodů:

Klady:

- vkládané poznámky alespoň částečně doplňují strohé definice a věty,
- krokované řešené příklady (i když příliš obtížné).

Zápory:

- absence motivačních textů,
- absence vysvětlení použití metod výpočtů,
- uzpůsobení spíše vysokoškolskému stylu a obtížnosti učiva.

Grafické zpracování

Přehlednost
Kapitoly jsou členěny přehledně, ale příliš obecně. Není možnost samostatně prostudovat konkrétní podkapitoly – např. jednotlivé metody řešení neurčitého integrálu. Formát .pdf znemožňuje plynulý přechod mezi jednotlivými kapitolami.

Sázení matematických symbolů
Matematické symboly jsou sázeny přirozeně bez znatelné odlišnosti od okolního

textu.

Využití obrázků
Obrázky prakticky nejsou využívány. Jejich využití jsem zaznamenala pouze u dvou příkladů s krokovaným řešením.

Hodnocení: Webovou stránku z hlediska grafického zpracování hodnotím známkou **3** z následujících důvodů:

Klady:

- sázení matematických symbolů.

Zápory:

- otevírání kapitol ve formátu .pdf,
- absence obrázků.

Interaktivní prvky

Přítomnost řešených příkladů s možností krokování postupu a vysvětlení jednotlivých částí výpočtu
Ke každé z kapitol je přiložena prezentace obsahující tři příklady s možností krokování řešení. Kromě dalšího kroku se zobrazí také slovní komentář k právě prováděnému postupu.

Samostatné testování žáků
Není.

Využití apletů
Aplety se na stránce, vzhledem k jejímu charakteru, nevyskytují.

Hodnocení: Webovou stránku z hlediska interaktivních prvků hodnotím známkou **3** z následujících důvodů:

Klady:

- řešené vzorové příklady s možností krokování řešení.

Zápory:

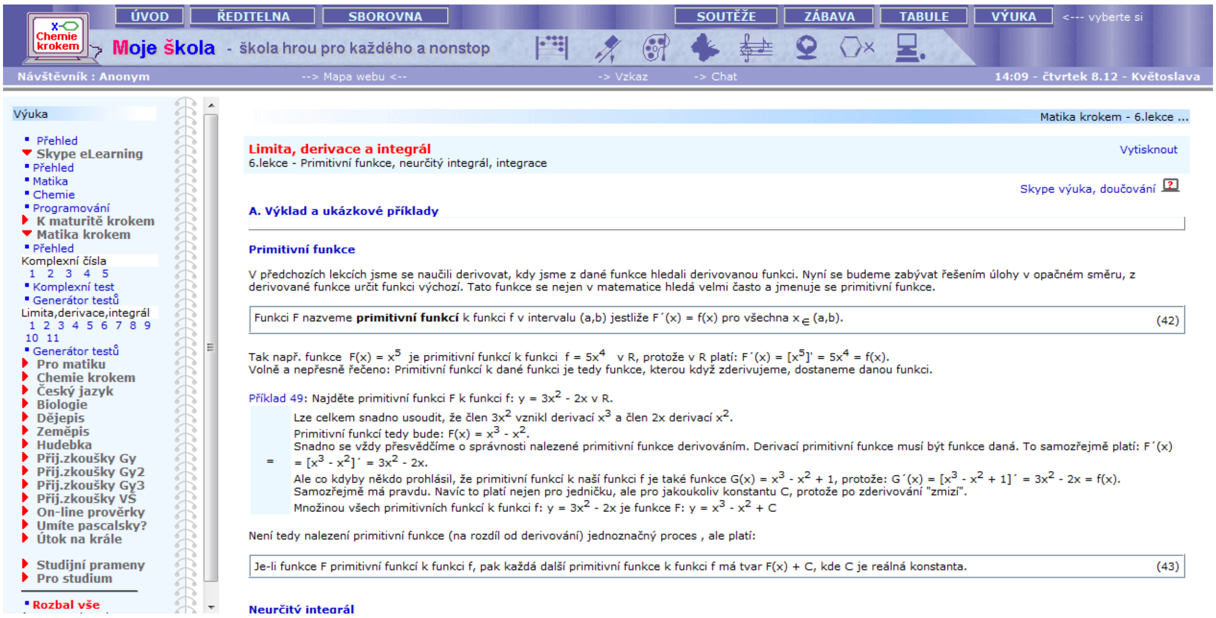
- chybějící testy,
- chybějící aplety.

Celkové hodnocení

Webová stránka poskytuje přehledné shrnutí učiva integrálního počtu. Naneštěstí zcela chybí jakýkoli výklad k učivu. Kladně hodnotím přítomnost alespoň malého počtu příkladů s možností krokování výpočtu. To samo bez předem vysvětlené teorie ovšem pro pochopení učiva nestačí.

Obsahová dostatečnost	2
Věcná správnost	1
Didaktické zpracování	4
Grafické zpracování	3
Interaktivní prvky	3
Celkem	**2,6**

1.2.5 Mojeskola.cz



Obrázek 1.16: Mojeskola.cz

Portál

http://www.mojeskola.cz/

je uveden podtitulem „škola hrou pro každého a nonstop“. Vzhled stránky se od většiny dříve hodnocených webů liší tím, že kapitoly otevírá přímo v okně prohlížeče, nikoli ve formátu .pdf.

Obsahová dostatečnost

Učivo integrálního počtu probíraného na střední škole pokrývají následující kapitoly: *6. lekce – Primitivní funkce, neurčitý integrál, integrace; 7. lekce – Určitý integrál a jeho aplikace.* Tyto kapitoly nyní rozebereme po stránce obsahové.

6. lekce – Primitivní funkce, neurčitý integrál, integrace

Výklad a ukázkové příklady – Text je zcela přizpůsoben rozsahu učiva integrálního počtu vyučovaného na střední škole. Je dále dělen do několika podkapitol:

- Primitivní funkce – Výklad se v úvodu věnuje pojmu primitivní funkce, vysvětluje ho a ukazuje, z jakého důvodu se do výsledku výpočtu připisuje integrační konstanta.
- Neurčitý integrál – Podkapitola definuje pojmy spojené s integrací, vše demonstruje na vzorovém příkladu (řeší ho bez vzorců „odhadem“ na základě znalosti derivace).
- Integrování funkcí – V této části jsou uvedena pravidla integrování elementárních funkcí a věty o integraci součtu a konstanty. Vše je následně využíváno při výpočtech několika vzorových příkladů.

- Per partes – Vzorec pro metodu per partes je nejprve odvozen. Následně je ukázáno na několika konkrétních příkladech, jakým způsobem volíme integrovanou, resp, derivovanou, funkci.

- Substituční metoda – Pokdapitola uvádí vzorec pro substituční metodu, vysvětluje důvod jejího použití. Metoda je ovšem ukázána pouze na dvou příkladech, které dostatečně nevysvětlují, jakým způsobem substituci sestavujeme.

7. lekce – Určitý integrál a jeho aplikace

Výklad a ukázkové příklady

- Určitý integrál – Úvodní část je věnována definici a geometrické interpretaci určitého integrálu, jsou zde také definovány základní pojmy, např. meze. Na řešeném příkladu je názorně ukázáno, jakým způsobem se meze dosazují.

- Výpočet určitého integrálu – Druhá podkapitola uvádí poučky o mezích integrálu (změna znaménka při záměně mezí a integrál vyjádřený pomocí součtu integrálů na dílčích intervalech). V řešených příkladech je ukázána metoda per partes pro určitý integrál a substituční metoda se změnou mezí.

- Aplikace určitého integrálu – Podkapitola je úvodem pro následující části. Vysvětluje, ve kterých oblastech je možné určitý integrál využít.

- Obsah rovinného útvaru – Zde je uveden vzorec pro výpočet obsahu útvaru ohraničeného křivkou, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$, dále také útvaru ohraničeného grafy dvou funkcí. Vysvětluje, kdy je třeba vyýpočet rozložit na dílčí integrály a kdy je třeba využít absolutní hodnotu výsledku. Vše je doplněno názornými obrázky a názornými řešenými příklady.

- Objem rotačního tělesa – Poslední podkapitola uvádí vzorec pro objem rotačního tělesa vzniklého rotcí křivky kolem osy x i y, který dále aplikuje na dvou řešených příkladech (objem rotačního kužele a rotačního paraboloidu).

Hodnocení: Webovou stránku z hlediska obsahového hodnotím známkou **2** z následujících důvodů:

Klady:

- pokrytí většiny učiva z publikace [1].

Zápory:

- chybějící fyzikální aplikace.

Věcná správnost

Text je uváděn věcně správně. V případě, že autor chce uvést ne zcela přesné vysvětlení, uvádí toto již dopředu.

Hodnocení: Webovou stránku z hlediska věcné správnosti hodnotím známkou **1** z následujících důvodů:

Klady:

- uvedené učivo neobsahuje věcné chyby.

Didaktické zpracování

Didaktické zpracování této webové stránky je velmi pěkné. Před každou částí výkladu se snaží uvést důvod, proč se další teorií zabývat. Teoretický výklad je posléze doplňován o množství vysvětlujících poznámek. Celý text je psán formou zcela odpovídající středoškolskému stupni studia. Výkladová část dále obsahuje komentované řešené příklady přiměřené obtížnosti, které celý výklad vhodně doplňují a vysvětlují. Kladně dále hodnotím využití ilustračních obrázků v části určitý integrál.

Hodnocení: Webovou stránku z hlediska didaktického zpracování hodnotím známkou **1** z následujících důvodů:

Klady:

- motivační text na začátku každé výkladové části,
- názorné vysvětlení probraného učiva přiměřené středoškolskému studentovi,
- řešené příklady.

Zápory:

- nedostatečné vysvětlení zvolení vhodné substituce při použití substituční metody.

Grafické zpracování

Přehlednost
Učivo ve dvou oddělených kapitolách na sebe logicky navazuje. Ovšem není zde možnost zaměření pouze na konkrétní podkapitolu, vždy je třeba zobrazení celku a v něm pak následné dohledání pojmu.

Sázení matematických symbolů
Matematické symboly jsou sázeny dvojím způsobem:

1. Symbol se chová jako text, je možné ho zkopírovat např. do Wordu, aniž by došlo ke změně, např.:

Množinou všech primitivních funkcí k funkci f: y = 3x^2 - 2x je funkce F: y = x^3 - x^2 + C

Obrázek 1.17: Symbol chovající se jako text

2. Symbol se chová jako obrázek, je možné ho samostatně uložit ve formátu .gif či kopírovat, např.:

$$\int f(x)dx$$

Obrázek 1.18: Symbol chovající se jako obrázek

Znak pro integrál je vždy vložen jako obrázek. Je viditelně odlišný od okolního textu. Za ním následující symboly jsou buď ve formátu textu (jednoduché symboly), nebo ve formátu obrázku (složitější symboly).

Využití obrázků
Ilustrační obrázky jsou hojně využívány u aplikačních úloh určitého integrálu. Jejich využití je přiměřené a přispívá k názornosti výkladu.

Hodnocení: Webovou stránku z hlediska grafického zpracování hodnotím známkou **3** z následujících důvodů:

Klady:

- využití ilustračních obrázků.

Zápory:

- hůře strukturovaný web bez odkazů na konkrétní pojmy,
- matematické symboly viditelně odlišné od okolního textu, přesto nerušící.

Interaktivní prvky

Přítomnost řešených příkladů s možností krokování postupu a vysvětlení jednotlivých částí výpočtu
Každá dílčí kapitola obsahuje řešené příklady, které názorně doplňují předcházející teoretický výklad. Příklady jsou uváděny dvojí formou:

1. Příklady s krokovou kontrolou e-učitele – Část dostupná pouze po bezplatné registraci. Obsahuje 8 příkladů, které jsou řešeny interaktivně. Student vždy z nabídky čtyř možností volí následující krok výpočtu. Pokud zvolí správně, pokračuje k dalšímu kroku, který opět vybírá z nabídky. V opačném případě se mu pod nabídkou červeně napíše správná varianta, ovšem bez příslušného vysvětlení. Celý výpočet je následně vyhodnocen a slovně okomentován (např. „Děláš mnoho chyb, ještě procvičuj.“).
2. Příklady na procvičení učiva – V závěru první kapitoly je uvedeno 200 příkladů různé obtížnosti (obtížnost je odlišená pomocí barev a písmen A, B, C). Při řešení těchto příkladů může tápající student využít možnosti „Help“, kde je mu napovězena metoda, kterou má pro zdárné dokončení využít. K dispozici je také výsledek.

Obrázek 1.19: Příklad k procvičení učiva

Jediné, co lze vytknout, je absence slovních komentářů jednotlivých kroků řešení.

Samostatné testování žáků
V závěru každé z kapitol jsou samostatnému testování žáků věnovány dvě podkapitoly nazvané „Kontrolní test" a „Náhodný test".

- Kontrolní test – Úlohy, které jsou obměnou úloh u maturity a přijímacích zkoušek na VŠ. Student vybírá správný výsledek ze čtyř nabízených. Po vyhodnocení student obdrží bodové ohodnocení a slovní komentář k dosaženému výsledku.
- Náhodný test – Otestování znalosti učiva této lekce na náhodně vybraných úlohách, výběr z pěti možných výsledků. Možnost vyhodnocení.

Využití apletů
Aplety se na stránce nevyskytují.

Hodnocení: Webovou stránku z hlediska interaktivních prvků hodnotím známkou **2** z následujících důvodů:

Klady:

- řešené vzorové příklady s možností krokování řešení,
- interaktivní testy.

Zápory:

- chybějící aplety.

Celkové hodnocení

Webová stránka podává stručně, přesto výstižně a názorně, ucelený výklad k učivu integrálního počtu probíraného na střední škole. Látka je pro studenta snadno pochopitelná především díky množství řešených příkladů, které teoretický výklad prakticky doplňují a objasňují. V závěru je studentovi umožněno samostatné testování nabytých vědomostí.

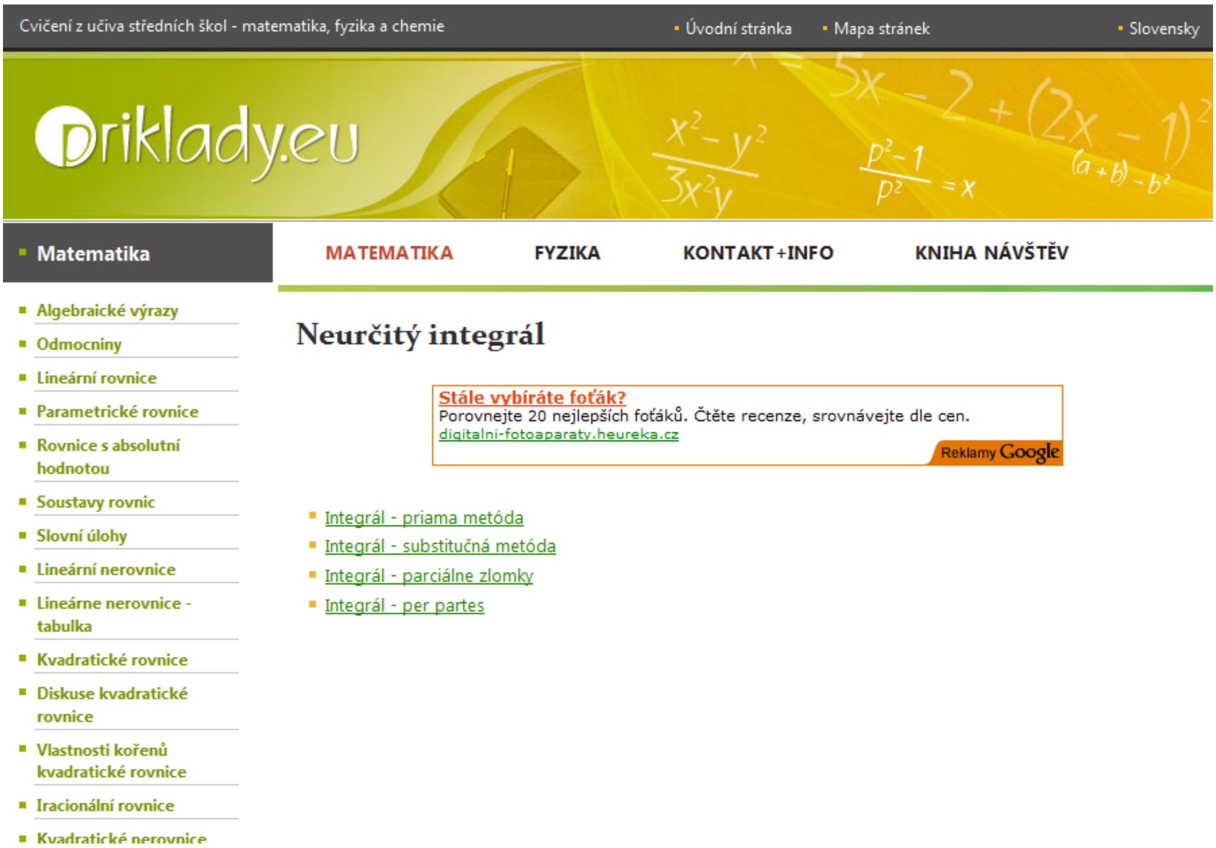
Obsahová dostatečnost	2
Věcná správnost	1
Didaktické zpracování	1
Grafické zpracování	3
Interaktivní prvky	2
Celkem	**1,8**

..

1.3 Cizojazyčné webové stránky

Cizojazyčné webové stránky mohou studentovi ukázat jiný pohled na látku než stránky české, které jsou psány veskrze podobně. V hodnocení si ukážeme jednu slovenskou stránku, jež je zajímavě zpracovaná formou řešených úloh, a poté nejrozsáhlejší webovou matematickou encyklopedii psanou anglicky.

1.3.1 Priklady.eu



Obrázek 1.20: Priklady.eu

Slovenská webová stránka

http://www.priklady.eu/cs/Matematika/Neurcity-integral.alej

již názvem napovídá, že je zaměřena zejména na příklady.

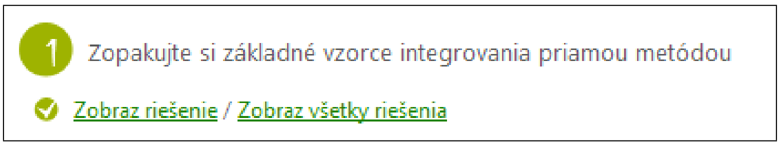
Obsahová dostatečnost

V menu Matematika se integrálním počtem zabývají dvě kapitoly, které se dále dělí na jednotlivé podkapitoly následovně:

1. Neurčitý integrál
   - *Integrál – přímá metoda*
   - *Integrál – substituční metoda*
   - *Integrál – per partes*

2. Výpočet a použití určitého integrálu
    - *Určitý integrál – Leibnitz-Newtonova metoda*
    - *Určitý integrál – substituce*
    - *Obsah rovinného obraze*
    - *Objem rotačního tělesa*
    - *Určitý integrál ve fyzice*

Jednotlivé podkapitoly sestávají z očíslovaných úloh, nejen početních příkladů. Ke každé úloze je přiloženo řešení, které lze zobrazit kliknutím na příslušný odkaz u zadání příkladu.



Obrázek 1.21: Úloha

Podkapitoly nyní obsahově rozebereme.

Integrál – přímá metoda
První úloha (viz Obrázek 1.21) ve svém řešení shrnuje základní poznatky o neurčitém integrálu a přímé metodě jeho řešení. Definuje pojem neurčitý integrál a poskytuje tabulku základních integračních vzorců.

Následuje série 35 řešených příkladů (řešení je opět dostupné až po kliknutí na příslušný odkaz).

Integrál – substituční metoda
Tato podkapitola bohužel žádnou teorii neobsahuje. Řešení je uvedeno přehledně, ovšem výklad studentovi neposkytne.

Integrál – per partes
Počáteční teorie odvozuje vzorec pro metodu per partes ze vztahu pro derivaci součinu. Vše je psáno matematickými symboly bez slovního komentáře. Následuje sada 13 příkladů s možností zobrazení přehledného řešení.

Určitý integrál – Leibnitz-Newtonova metoda
Uvedený teoretický úvod poskytuje Leibnitz-Newtonovu formuli a dvě věty pro výpočet určitého integrálu (změna znaménka při záměně mezí, rozložení integrálu na součet dvou dílčích integrálů). Další úlohy jsou tvořeny 12 početními příklady s možností zobrazení řešení.

Určitý integrál – substituce
V podkapitole, obdobně jako v případě substituce pro neurčitý integrál, není uveden žádný teoretický úvod. Obsahuje pouze tři příklady s možností zobrazení řešení. Využívá se zde přepočítávání mezí.

Obsah rovinného obraze
Teorie uvádí základní vzorec pro výpočet rovinného obrazce ohraničeného přímkami $y = 0$, $x = a$, $x = b$ a grafem funkce $f(x)$. Další úlohy jsou zaměřeny na odvození vzorců pro výpočet obsahu známých rovinných útvarů – např. čtverce, obdélníku, trojúhelníku, kruhu, apod. .

Objem rotačního tělesa
Uvedený teoretický základ ukazuje vzorec pro výpočet objemu rotačního tělesa, které vzniklo rotací rovinného obrazce ohraničeného přímkami $y = 0$, $x = a$, $x = b$ a grafem funkce $f(x)$. Další úlohy jsou analogicky, jako v případě podkapitoly *Obsah rovinného obrazce*, zaměřeny zejména na odvození známých vzorců pro výpočet objemu základních těles – např. koule, válce nebo rotačního kužele.

Určitý integrál ve fyzice
V této poslední podkapitole jsou uvedeny čtyři rozdílné příklady z fyziky (výpočet práce, dráhy, rychlosti apod.)

Hodnocení: Webovou stránku z hlediska obsahu hodnotím známkou **3** z následujících důvodů:

Klady:

- pojetí většiny učiva z publikace [1],

Zápory:

- přehledový charakter, nedostatečné vysvětlení jednotlivých pojmů,
- chybějící teorie v kapitolách o substituci.

Věcná správnost

Text i řešené příklady jsou uváděny věcně správně.

Hodnocení: Webovou stránku z hlediska věcné správnosti hodnotím známkou **1** z následujících důvodů:

Klady:

- uvedené učivo neobsahuje věcné chyby.

Didaktické zpracování

Stránka obsahuje velmi pěkné soubory názorně řešených příkladů středoškolsky přiměřené úrovně. Pokud tedy student již má za sebou nějaký teoretický úvod, příklady mu budou jistě přínosem.

Teoretická část výkladu ovšem značně zaostává. Náznak výkladu je pouze občas v úvodních teoretických úlohách. Takováto teorie je ovšem pro studenta naprosto nedostačující a látku nevysvětluje.

Hodnocení: Webovou stránku z hlediska didaktického zpracování hodnotím známkou **3** z následujících důvodů:

Klady:

- řešené příklady přiměřené úrovně,
- možnost zobrazení řešení úlohy až ve chvíli, kdy uživatel uzná za vhodné.

Zápory:

- absence motivačního textu,
- minimum teoretického výkladu.

Grafické zpracování

Přehlednost
Kapitoly jsou přehledně členěny do podkapitol, každá (pod)kapitola má vlastní hypertextový odkaz. Učivo v jednotlivých podkapitolách je členěno přehledně, postupuje se od teorie k jednodušším a následně obtížnějším příkladům.

Sázení matematických symbolů
Matematické symboly jsou sázeny ve formátu obrázků. Ty je možné zkopírovat a jako celek vložit. Celé soubory oddělených úloh jsou tvořeny jedním obrázkem.

Využití obrázků
Webová stránka neobsahuje žádné obrázky.

Hodnocení: Webovou stránku z hlediska grafického zpracování hodnotím známkou **3** z následujících důvodů:

Klady:

- přehledné členění kapitol, podkapitol.

Zápory:

- matematické symboly viditelně odlišné od okolního textu,
- absence obrázků.

Interaktivní prvky

Přítomnost řešených příkladů s možností krokování postupu a vysvětlení jednotlivých částí výpočtu

Jednotlivé úlohy umožňují zobrazit řešení až ve chvíli, kdy student chce řešení zobrazit. Řešení tak neodvádí pozornost od výpočtu.

Možnost krokování postupu zde není.

Samostatné testování žáků
Není.

Využití apletů
Aplety se na stránce nevyskytují.

Hodnocení: Webovou stránku z hlediska interaktivních prvků hodnotím známkou **4** z následujících důvodů:

Klady:

- přítomná řešení uváděných příkladů.

Zápory:

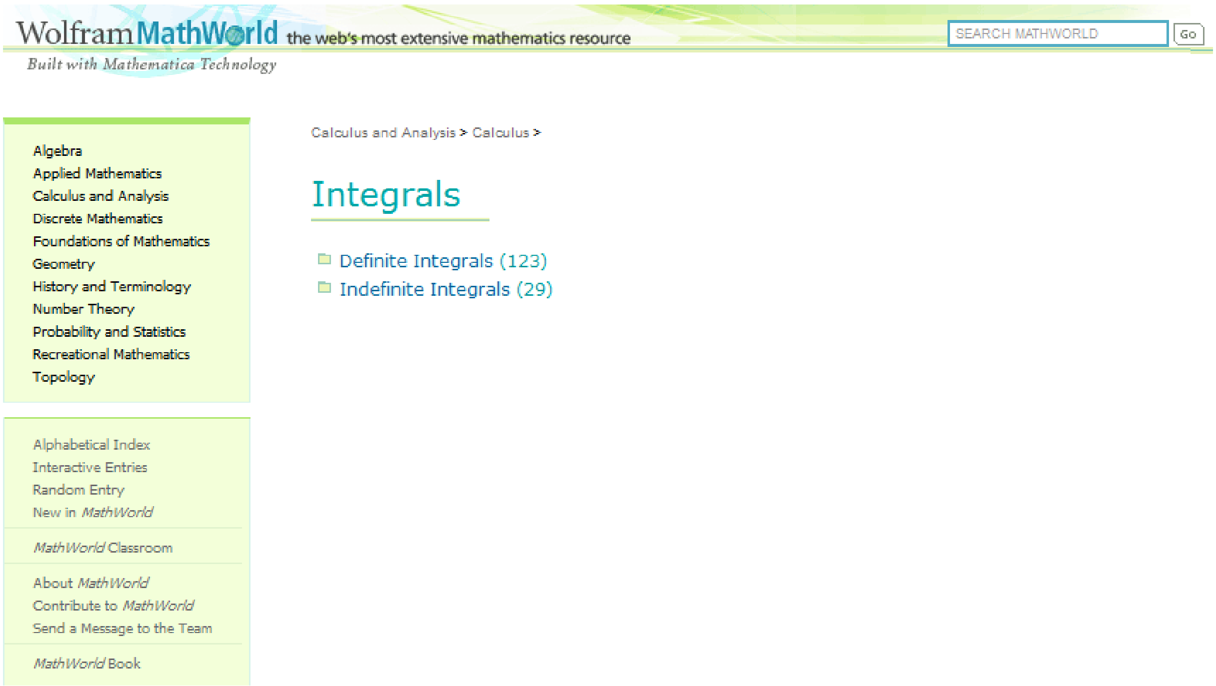
- chybějící krokované řešení,
- chybějící testy,
- chybějící aplety.

Celkové hodnocení

Obsah webové stránky poměrně dobře odpovídá jejímu názvu. Stránka je zaměřena zejména na úlohy, jichž ale není příliš mnoho. Na začátku uvedená teorie plní funkci shrnutí a připomenutí, funkci výkladu plnit příliš nemůže. Oceňuji možnost zobrazení řešení až ve chvíli, kdy sama uznám za vhodné.

Obsahová dostatečnost	3
Věcná správnost	1
Didaktické zpracování	3
Grafické zpracování	3
Interaktivní prvky	4
Celkem	**3**

1.3.2 Mathworld.wolfram.com



Obrázek 1.22: Mathworld.wolfram.com

Anglická webová stránka

http://mathworld.wolfram.com/topics/Integrals.html

má spíše charakter encyklopedie. Uvedeme si hesla související s učivem integrálního počtu na střední škole a pokusíme se nalézt jejich přínos pro studenty.

Obsahová dostatečnost

V přehledu hesel uvedeme pouze ta, která jsou relevantní pro středoškolského studenta. Z nich pak ta, které poskytují nějaký text, některé na stránce uvedené odkazy jsou totiž bohužel nefunkční.

- Integrál
- Integrace
- Integrand
- Integrační konstanta
- Neurčitý integrál
- Integrace metodou per partes
- Určitý integrál
- Objem rotačního tělesa

Integrál
Heslo *Integrál* poskytuje souhrn informací a pojmů souvisejících s integrálem. Má spíše přehledovitý charakter. Text sestává z mnoha hypertextových odkazů, které čtenáře ihned přesměrují na další heslo.

Integrace
Heslo poskytuje definici pojmu integrace.

Integrand
Opět definice zadaného pojmu.

Integrační konstanta
Vysvětlení připojení integrační konstanty k výsledku integrálu. Srovnání s derivacemi.

Neurčitý integrál
Vysvětlení pojmu přes určitý integrál. Uvedení mnoha vzorců pro výpočty integrálů.

Integrace metodou per partes
Kapitola přehledně ukazuje odvození vztahu pro per partes i jeho použití na konkrétním příkladu.

Určitý integrál
Heslo poskytuje základní přehled pravidel pro počítání určitého integrálu. Ukazuje Newton-Leibnitzovu formuli, pravidla o změně znaménka při záměně mezí, o počítání integrálu přes součet dílčích integrálů a o shodných mezích.

Objem rotačního tělesa („Method of Disks“)
Zde je popsán vzorec pro objem tělesa vzniklého rotací křivky na daném intervalu kolem osy x. V dalším hesle je uveden vzorec pro objem tělesa vzniklého rotací obrazce ohraničeného dvěma křivkami kolem osy x („Method of Washers“).

Hodnocení: Webovou stránku z hlediska obsahu hodnotím známkou **2** z následujících důvodů:

Klady:

- postihnutí většiny učiva uvedeného v [1].

Zápory:

- chybějící substituční metoda,
- chybějící základní vzorec pro výpočet obsahu rovinného útvaru tak, jak je uveden v [1].

Věcná správnost

Webová encyklopedie uvádí, že se jedná o nejrozsáhlejší zdroj matematických informací na webu. Věcné chyby tedy v tomto případě nejsou přípustné.

Hodnocení: Webovou stránku z hlediska věcné správnosti hodnotím známkou **1** z následujících důvodů:

Klady:

- uvedené učivo neobsahuje věcné chyby.

Didaktické zpracování

Didaktické zpracování webové stránky odpovídá jejímu encyklopedickému pojetí. V některých rozsáhlejších kapitolách je tak znatelná snaha o bližší přiblížení pojmu čtenáři, jiné části jsou proti tomu uváděny jen jako hesla. Pro běžného středoškolského studenta může být také poměrně velkým problémem, kromě angličtiny, především odlišnost v odborných výrazech, kdy nestačí hledaný pojem pouze přeložit z češtiny do angličtiny (např. objem rotačního tělesa je uváděn jako Method of Disks).

Styl textu je spíše než výkladový odborný, teorie není doplněná o žádné řešené příklady.

Hodnocení: Webovou stránku z hlediska didaktického zpracování hodnotím známkou **4** z následujících důvodů:

Klady:

- snaha o bližší objasnění pojmu v někerých rosáhleji pojatých heslech.

Zápory:

- absence motivačního textu,
- absence ilustračních příkladů,
- nepřiměřená úroveň výkladu pro středoškolského studenta.

Grafické zpracování

Přehlednost
Webová stránka má encyklopedický charakter. Vyhledávání pojmů je snadné podle hledaného hesla.

Sázení matematických symbolů
Matematické symboly jsou sázeny ve formě obrázku:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx.$$

Obrázek 1.23: Vzorec

Využití obrázků
Webová stránka v některých dalších odkazech obrázky obsahuje, ve výše hodnocených heslech ovšem obrázky využívány nejsou.

Hodnocení: Webovou stránku z hlediska grafického zpracování hodnotím známkou **3** z následujících důvodů:

Klady:

- přehledné vyhledávání pojmů.

Zápory:

- matematické symboly ve formě obrázků,
- chybějící obrázky.

Interaktivní prvky

Přítomnost řešených příkladů s možností krokování postupu a vysvětlení jednotlivých částí výpočtu
Encyklopedický charakter webové stránky si nedává za cíl uvádění příkladů, ale spíš objasnění pojmů. Příklady jsou tedy uváděny pouze na dokreslení teorie.

Samostatné testování žáků
Není.

Využití apletů
Aplety se vyskytují u odlišných hesel. Mezi hodnocenými kapitolami se aplety nevyskytly.

Hodnocení: Webovou stránku z hlediska interaktivních prvků hodnotím známkou **4** z následujících důvodů:

Klady:

- aplety u souvisejících hesel.

Zápory:

- chybějící příklady s krokovaným řešením,
- chybějící testy,
- chybějící aplety.

Celkové hodnocení

Webová stránka splňuje požadavky na encyklopedii matematiky. Hesla jsou uspořádána logicky, mezi jednotlivými pojmy je možno snadno přecházet i pomocí hypertextových odkazů přímo v textu. Látka je uvedena pro vysokoškolského studenta, méně zdatný čtenář si musí z kapitol vybrat jen ty potřebné.

Obsahová dostatečnost	2
Věcná správnost	1
Didaktické zpracování	4
Grafické zpracování	3
Interaktivní prvky	4
Celkem	**2,8**

1.4 Závěrečné shrnutí

Webové stránky byly hodnoceny podle pěti předem stanovených kritérií:

- Obsahová dostatečnost
- Věcná správnost
- Didaktické zpracování
- Grafické zpracování
- Interaktivní prvky,

přičemž největším problémem bylo zařazení interaktivních prvků. Řada serverů tak ve výsledku zdarma nabízí pěknou učebnici, kterou lze zobrazit v digitální podobě. Přitom využívání interaktivních prvků by mělo být to hlavní, co odlišuje výukový text zobrazený na webu oproti klasickým tištěným učebnicím.

Hodnocené webové stránky se také obvykle omezovaly na strohé uvedení pouček a vzorců, které bez dalšího vysvětlení studentovi problematiku dostatečně neobjasňují. Nemohou tak kvůli absenci doplňujících poznámek ani částečně nahradit výklad učitele. Problémem uvedených stránek také často bylo uzpůsobení obsahu i formy pro vysokoškolské studenty.

Ani grafické zpracování často nepředčilo klasické výukové materiály. Například přirozené zobrazení matematických symbolů, které v učebnicích považujeme za samozřejmost, činilo autorům obvykle značné potíže. Stránky také většinou nevyužily možnost zobrazení názorných barevných obrázků, což běžné učebnice z finančních důvodů často nemohou poskytnout.

Obsahová dostatečnost se lišila v závislosti na typu stránky a jejím zaměření. Některé weby se zaměřovaly více na příklady, jiné upřednostňovaly teoretický výklad. Kladně lze hodnotit věcnou správnost, která byla téměř vždy úplná.

Z výše uvedeného shrnutí je zřejmé, že na webu v současnosi neexistuje webová stránka, jež by zároveň pokrývala kompletní středoškolské pojetí integrálního počtu, zpracovávala látku didakticky i graficky vhodně a využívala interaktivní prvky při výuce.

Hodnocení bylo uvedeno vzhledem ke stavu v září 2012. Nereflektuje tedy změny, popřípadě vznik nových webových stránek, zveřejněné po tomto datu.

Na následující straně je přehledně uvedeno souhrnné hodnocení všech výše uvedených webových stránek.

Název webové stránky	**Obsahová dostatečnost**	**Věcná správnost**	**Didaktické zpracování**	**Grafické zpracování**	**Interaktivní prvky**	**Celkové hodnocení**
Homen.vsb.cz	1	1	1	1	3	**1,4**
Mojeskola.cz	2	1	1	3	2	**1,8**
Mathonline.cz	2	1	4	3	3	**2,6**
Aristoteles.cz	3	1	3	3	4	**3**
Matematika-online-a.kvalitne.cz	2	3	3	3	4	**3**

Tabulka 1.1: České webové stránky

Název webové stránky	**Obsahová dostatečnost**	**Věcná správnost**	**Didaktické zpracování**	**Grafické zpracování**	**Interaktivní prvky**	**Celkové hodnocení**
Mathworld.wolfram.com	2	1	4	3	4	**2,8**
Priklady.eu	3	1	3	3	4	**3**

Tabulka 1.2: Cizojazyčné webové stránky

2. Webová aplikace

Na základě rozboru existujících webových stránek je zřejmé, že na webu neexistovala volně dostupná česky psaná aplikace pro výuku integrálního počtu, která by dostatečně splňovala kritéria uvedená v předchozí kapitole. V září 2012 začala tedy vznikat vlastní webová aplikace, nyní dostupná na

www.karlin.mff.cuni.cz/∼tvrdam/integraly.

Níže je aplikace převedená do tiskové podoby. Ta se od webové aplikace mírně liší. Byly zde přečíslovány věty, úlohy a příklady z důvodu snazší orientace v textu (webová aplikace toto řeší použitím hypertextových odkazů). U krokovaně řešených úloh je další krok výpočtu naznačen odrážkou – „puntíkem“; úlohy řešené bez slovního komentáře jsou zde uvedeny bez vysvětlení postupu řešení. Také zde nejsou uvedeny všechny testové otázky, ale pouze jejich výběr.

2.1 Úvod

2.1.1 Motivace

Integrální počet se řadí spolu s diferenciálním počtem k matematické disciplíně zvané **matematická analýza**.

Znalosti a metody matematické analýzy se využívají v mnoha oborech lidské činnosti. Své uplatnění nalézají ve fyzice, chemii, ekonomii, stavebnictví apod.

Pro zvládnutí integrálního počtu je, možná více než v jiných oborech matematiky, nezbytná návaznost na předchozí poznatky. Zejména se zde jedná o vlastnosti funkcí, řešení rovnic různých typů a dříve uvedená témata z diferenciálního počtu (tj. limity, spojitost, derivace funkce atd.).

Integrální počet je učivem, ve kterém je potřeba uplatňovat kreativní postupy při řešení úloh. Díky tomu přináší řešení úloh integrálního počtu radost z uvažování a chápání.

Radost z uvažování a chápání je největším darem přírody. (Albert Einstein)

2.1.2 Z historie

Rozvoj integrálního počtu (spolu s diferenciálním počtem zvaný matematická analýza) pochází ze začátku 17. století. Objevuje se v dílech takových matematických velikánů, jakými byli René Descartes (1596-1650) či Pierre de Fermat (1601-1665).

Základní úlohy matematické analýzy pak zformuloval v polovině 17. století Isaac Newton (1643-1727), který ve své práci objevil základní vztah mezi derivací a integrálem. Dodnes užívanou symboliku a první výklad integrálního počtu publikoval ke konci 17. století Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716).

Matematická analýza nebo-li infinitezimální počet

Infinitezimálními úvahami, tj. úvahami nad určením velikosti zkoumaného útvaru jeho rozdělením na „nekonečně mnoho nekonečně malých kusů“, se zabýval německý matematik a astronom Johann Kepler (1571-1663).
Pojem "nekonečně malých veličin"se stal základem pro zpřesňování matematické analýzy, kterým se zabýval hlavně francouzský matematik Augustin Louis Cauchy (1789-1857). Ten je také považován za tvůrce moderní matematické analýzy.

Významné pokroky v teorii integrálu v 18. století učinil německý matematik Bernhard Riemann (Riemannův integrál), o sto let později pak tento integrál účinně zobecnil Henri Lebesgue (Lebesgueův integrál).

Augustin Louis Cauchy

Henri Lebesgue

Obrázek 2.1: Slavní matematici

(*Obrázky byly přejaty z webu http://cs.wikipedia.org/*)

2.1.3 Jak s výukovou stránkou pracovat

Orientace na webových stránkách

Učivo je na stránkách tříděno do položek v menu a podmenu. Hlavní kapitoly obsahují učivo o neurčitém integrálu, určitém integrálu a využití těchto poznatků. Navíc je zde zařazena kapitola o výpočtech objemů některých těles bez použití integrálního počtu. V každé hlavní kapitole je nejprve uveden teoretický výklad, který je doplněn řešenými příklady. Najdete zde přehledné tabulky se shrnutím důležitých poznatků, mnemotechnické pomůcky apod.

Úlohy pro procvičení učiva

Následují řešené úlohy dělené na úlohy s komentovaným řešením a další úlohy bez těchto slovních komentářů. Pokud je Vám tedy jasné, jak úlohu řešit, můžete si jen zkontrolovat svůj postup v úlohách bez slovních komentářů. Naopak úlohy se slovním komentářem slouží pro lepší pochopení a větší názornost u těch úloh, v jejichž řešení tápete.

Testy

Poslední část webové stránky tvoří dva typy testů. První je *Zaškrtávací test* s výběrem odpovědi, druhý - tzv. *Postupný test* - simuluje průběh výpočtu neurčitého integrálu. Úlohy do testů jsou typově vybírány podle sbírek pro střední školy (viz Literatura).

Používaná tlačítka

Tlačítko	Význam
	zobrazí další krok v řešení úlohy
	zobrazí najednou celé řešení úlohy
	skryje řešení úlohy
	odkryje rozšiřující učivo

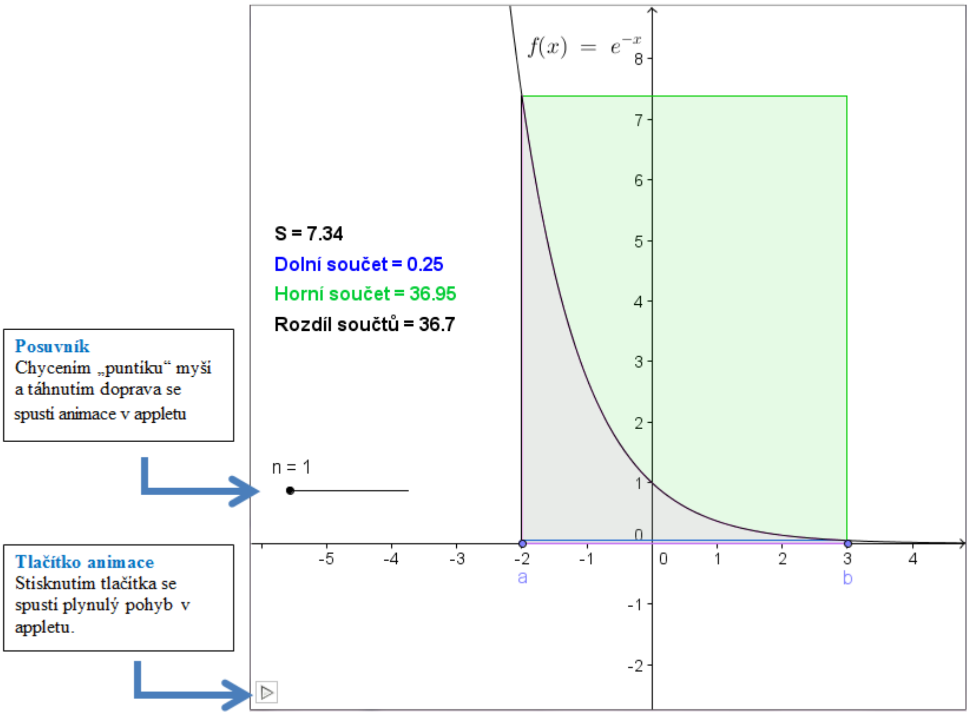
Obrázek 2.2: Používaná tlačítka

Práce s applety

Applety jsou interaktivní prvky. Jejich spuštění je možné dvěma způsoby:

- stisknutím tlačítka animace

- táhnutím posuvníku



Obrázek 2.3: Applet

2.2 Neurčitý integrál

2.2.1 Motivace

V předcházejícím studiu jste se zabývali hledáním derivací funkcí. Naučili jste se různé způsoby, kterými lze příslušné derivace nalézt.
V praxi se ovšem často setkáváme s opačným problémem. Máme danou derivaci funkce a potřebujeme nalézt funkci „původní“.

Například jste mohli řešit úlohu, ve které jste k funkci $F(x) = x^2$ hledali její derivaci, tedy $F'(x) = 2x$.

Pro další výklad budeme značit $F'(x) = f(x)$.

Jak by vypadala úloha opačná? Máme danou funkci $f(x) = 2x$ a hledáme předpis funkce, jejíž derivací získáme právě funkci $f(x) = 2x$.

V našem případě je řešení nasnadě. Hledanou funkcí je funkce $F(x) = x^2$. Ale je to jediné řešení?

2.2.2 Zavedení neurčitého integrálu

Primitivní funkce

V motivační části jsme si položili otázku, zda je možné k derivaci funkce najít předpis původní funkce před zderivováním. Zároveň jsme také našli jedno konkrétní řešení.

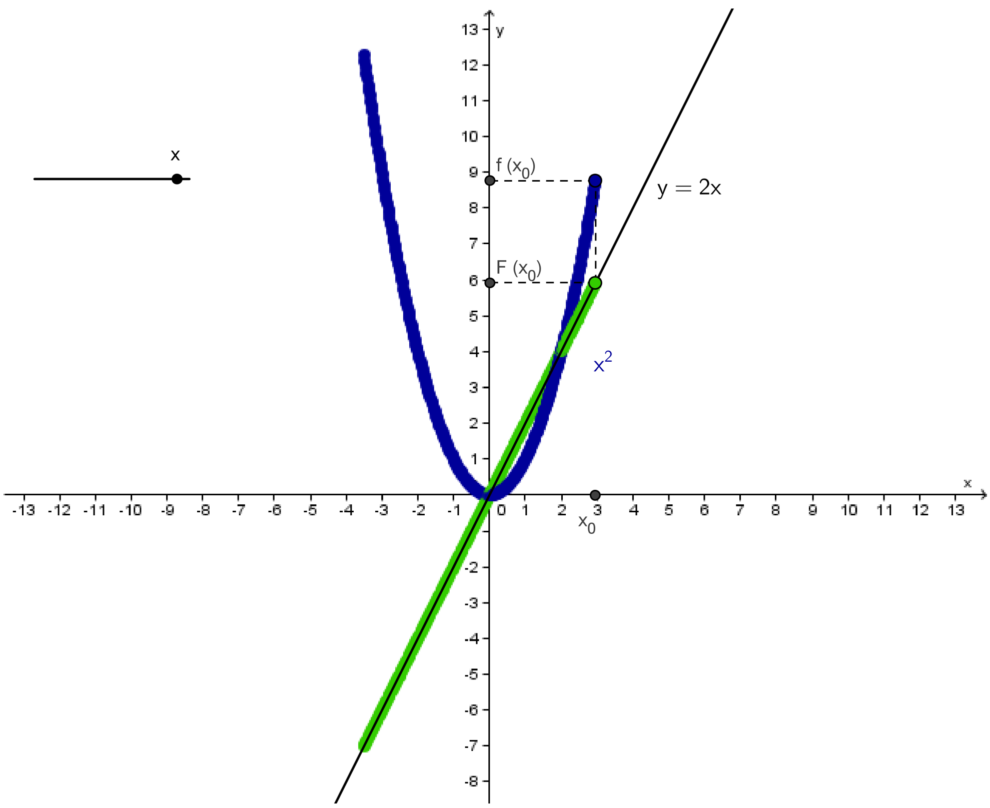
Nyní se na problematiku podíváme přesněji.

Definice 2.2.1. Nechť F, f jsou funkce definované v intervalu (a, b). Řekneme, že **funkce F je primitivní funkcí k funkci f v intervalu** (a, b), jestliže pro všechna $x \in (a, b)$ platí:

$$F'(x) = f(x)$$

Vykreslení primitivní funkce

Na níže uvedeném appletu je znázorněno postupné vykreslování primitivní funkce k funkci $f : y = 2x$. Graf funkce f je zde znázorněn černě. Pohybem posuvníku nebo animací vidíte, jak „probíhá bod přímkou" a zároveň se k němu vykresluje bod na grafu primitivní funkce.



Obrázek 2.4: Applet – neurčitý integrál

Již jsme si vysvětlili, co znamená pojem *primitivní funkce*. Stále ale zůstala nezodpovězena otázka z motivační části výkladu, tedy jednoznačnost nalezeného řešení. Rozebereme si úlohu důkladněji.

Úloha 2.2.1. *Zderivujte následující funkce:*

1. $y = x^2 + 3$
2. $y = x^2 - 9$
3. $y = x^2$

1. Podle pravidel derivování víme, že v součtu derivujeme každý sčítanec zvlášť. Dále víme, že derivace konstanty (v našem případě je konstanta rovna číslu tři) je nula a známe vztah pro derivaci mocniny.

   Vztah pro derivaci mocniny:
   $$(x^n)' = nx^{n-1},\ x \in R,\ n \in N$$
   Platí tedy:
   $$y' = 2x$$

2. Podle pravidel derivování víme, že v rozdílu derivujeme menšence i menšitele zvlášť. Dále víme, že derivace konstanty (v našem případě je konstanta rovna číslu devět) je nula a známe vztah pro derivaci mocniny.
   Platí tedy:
   $$y' = 2x$$

3. Známe pravidlo pro derivaci mocniny a tak snadno získáme výsledek:
   $$y' = 2x$$

Uvědomte si: Derivace konstanty je nula. Derivace funkcí, které se liší jen o konstantu, je stejná!

Příklad 2.2.1. *Nalezněte primitivní funkci k funkci $f(x) = 2x$.*

Řešení
Z motivační části výkladu víme, že jedním z řešení je $F(x) = x^2$. Pravdivost tohoto řešení si můžeme snadno ověřit tak, že funkci $F(x)$ znovu zderivujeme:

$$F'(x) = 2x$$

Na základě předchozí úlohy by vám již mělo být jasné, že toto není jediné řešení příkladu. Řešením by mohly být všechny funkce uvedené v předchozí úloze.
Celkem je takovýchto funkcí nekonečně mnoho (stejně jako je nekonečně mnoho různých konstant.)

Kompletní řešení je tedy třeba zapsat i s libovolnou konstantou. Tu obvykle značíme c:
$$F(x) = x^2 + c, c \in R$$

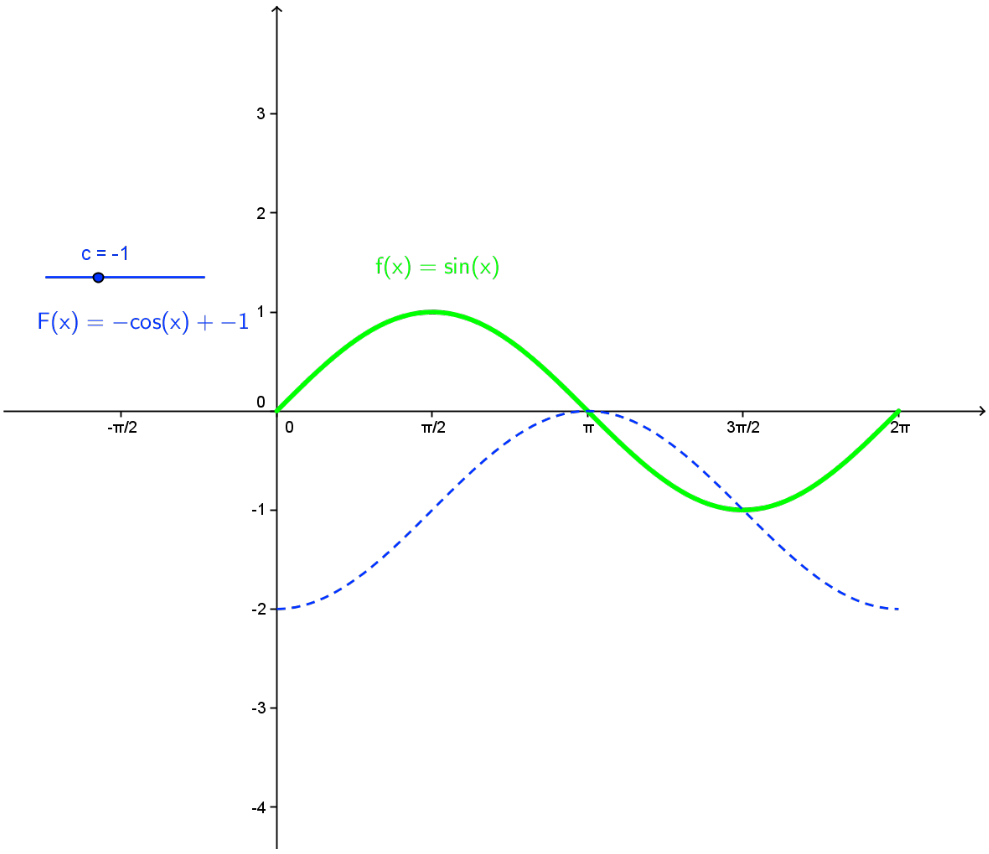
Integrační konstanta

Věta 2.2.1. Je-li funkce F v intervalu $(a;b)$ primitivní funkcí k funkci f, pak každá primitivní funkce k funkci f je ve tvaru $F(x)+c$, kde c je reálná konstanta.

Důkaz uveden v podkapitole „Důkazy".

Na následujícím appletu si můžete pomocí posuvníku vyzkoušet měnit hodnotu integrační konstanty.

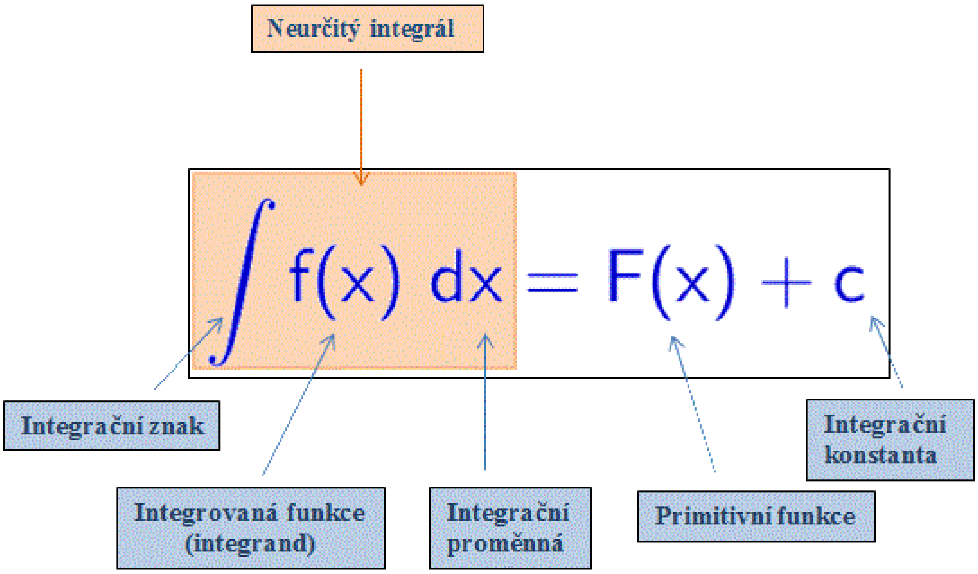
Všechny zobrazené grafy znázorňují graf primitivní funkce $F(x)$ k funkci $f(x) = \sin x$. Pro přehlednost je funkce $f(x)$ zobrazena pouze na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$:



Obrázek 2.5: Applet – konstanta

Terminologie

Primitivní funkci F k funkci f na intervalu $(a; b)$ zapisujeme takto:



Obrázek 2.6: Symbolika

Postup, při kterém hledáme primitivní funkci, pak nazýváme **integrování** nebo **integrace**. Hledáme-li primitivní funkci F k dané funkci f, říkáme též, že počítáme neurčitý integrál.

Zápis

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

čteme takto:

„neurčitý integrál funkce $f(x)$ podle proměnné x“.

Poznámka 2.2.1. Ověření správnosti výpočtu neurčitého integrálu provádíme zderivováním výsledné primitivní funkce.

Pozor! Ke každé funkci f nemusí na daném intervalu $(a; b)$ existovat primitivní funkce. Jinými slovy, ne každou funkci lze integrovat.

Věta 2.2.2. K funkci f existuje na intervalu $(a; b)$ primitivní funkce právě tehdy, když je f na tomto intervalu **spojitá**.

2.2.3 Pravidla pro výpočet neurčitého integrálu

Tabulka výpočetních vzorců

Následující tabulka přehledně shrnuje vzorce, podle kterých určíme primitivní funkce základních funkcí. Připomeňme, že c ve druhém sloupci značí integrační konstantu.

	funkce f	$\int \boldsymbol{f(x)}\ \mathbf{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F(x)} + \boldsymbol{c}$	**podmínky platnosti vzorce** $x \in D_f$
1.	$y = 0$	$\int 0\ \mathrm{d}x = c$	$x \in (-\infty; +\infty)$
2.	$y = 1$	$\int 1\ \mathrm{d}x = \int\ \mathrm{d} = x + c$	$x \in (-\infty; +\infty)$
3.	$y = x^n,\ n \in N$	$\int x^n\ \mathrm{d} = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$x \in (-\infty; +\infty)$
4.	$y = x^k,\ k \in Z \setminus \{-1\}$	$\int x^k\ \mathrm{d}x = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c$	$x \in (0; +\infty)$
5.	$y = x^r,\ r \in R \setminus \{-1\}$	$\int x^r\ \mathrm{d}x = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$x \in (-\infty; +\infty)$ pro $r > -1$ $x \in (0; +\infty)$ pro $r < -1$
6.	$y = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + c$	$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
7.	$y = e^x$	$\int e^x\ \mathrm{d}x = e^x + c$	$x \in (-\infty; +\infty)$
8.	$y = a^x,\ a > 0, a \neq 1$	$\int a^x\ \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$x \in (-\infty; +\infty)$
9.	$y = \sin x$	$\int \sin x\ \mathrm{d}x = -\cos x + c$	$x \in (-\infty; +\infty)$
10.	$y = \cos x$	$\int \cos x\ \mathrm{d}x = \sin x + c$	$x \in (-\infty; +\infty)$
11.	$y = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\ \mathrm{d}x = \mathrm{tg}\ x + c$	$x \in \bigcup\limits_{k \in Z} \left((2k-1)\frac{\pi}{2}; (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$
12.	$y = \frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\ \mathrm{d}x = -\mathrm{cotg}\ x + c$	$x \in \bigcup\limits_{k \in Z} (k\pi; (k+1)\pi)$

Tabulka 2.1: Tabulka výpočetních vzorců

Uvedenou tabulku si můžete stáhnout ve formátu .pdf zde.

Věty pro výpočet neurčitého integrálu

Při určování primitivních funkcí ovšem pracujeme s komplikovanějšími předpisy funkcí. Pro tyto případy budeme neurčitý integrál určovat s pomocí následujících vět.

Věta o vytknutí konstanty

Věta 2.2.3. *Je dána funkce f, ke které na intervalu $(a;b)$ existuje neurčitý integrál $\int f(x)\ \mathrm{d}x$ a dále libovolná reálná konstanta k.*
Pak existuje na intervalu $(a;b)$ také neurčitý integrál $\int kf(x)\ \mathrm{d}x$ a platí:

$$\int kf(x)\ \mathrm{d}x = k\int f(x)\ \mathrm{d}x$$

Poznámka 2.2.2. Zjednodušeně říkáme, že pokud je funkce násobená konstantou (tj. číslem), lze tuto konstantu vytknout před integrál a vynásobit jí až výsledek výpočtu.

Příklad 2.2.2. *Vypočítejte* $\int 2x\ \mathrm{d}x$.

Řešení
Úlohu řešíme s využitím *vzorce 3* a *Věty o vytknutí konstanty*. Nejprve vytkneme konstantu:

$$\int 2x\ \mathrm{d}x = 2\int x\ \mathrm{d}x$$

V dalším kroku konstantu jen opisujeme a počítáme $\int x\ \mathrm{d}x$. Podle *vzorce 3* platí ($n=1$):

$$2\int x^1\ \mathrm{d}x = 2\cdot\frac{x^{1+1}}{1+1}$$

Algebraickými úpravami pak dostaneme

$$2\cdot\frac{x^2}{2} = x^2$$

a na závěr nezapomeneme připsat integrační konstantu. Tedy

$$\int 2x\ \mathrm{d}x = x^2 + c.$$

Poznámka 2.2.3. Při výpočtech obvykle místo x^1 píšeme jen x.

Věta o integraci součtu

Věta 2.2.4. Jsou dány funkce $f,\ g$, ke kterým na intervalu $(a;b)$ existují neurčité integrály $\int f(x)\ \mathrm{d}x$, $\int g(x)\ \mathrm{d}x$.
Pak existuje na intervalu $(a;b)$ také neurčitý integrál $\int[f(x)+g(x)]\ \mathrm{d}x$ a platí:

$$\int[f(x)+g(x)]\ \mathrm{d}x = \int f(x)\ \mathrm{d}x + \int g(x)\ \mathrm{d}x$$

Poznámka 2.2.4. Větu lze rozšířit pro libovolný počet integrovaných funkcí.

Poznámka 2.2.5. Zjednodušeně říkáme: Integrál součtu funkcí je součet integrálů jednotlivých funkcí.

Příklad 2.2.3. *Vypočítejte* $\int(\sin x + \sqrt{x})\ \mathrm{d}x$.

Řešení
Úlohu řešíme s využitím *vzorce 9* a *vzorce 5* a *Věty o integraci součtu.*
Nejprve přepíšeme integrál součtu funkcí jako součet integrálů:

$$\int (\sin x + \sqrt{x})\ \mathrm{d}x = \int \sin x\ \mathrm{d}x + \int \sqrt{x}\ \mathrm{d}x$$

V dalším kroku integrujeme každý sčítanec zvlášť. První podle *vzorce 9* a druhý podle *vzorce 5*, přičemž si uvědomíme, že platí $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, tedy $n = \frac{1}{2}$. Integrujeme takto:

$$\int \sin x\ \mathrm{d}x + \int \sqrt{x}\ \mathrm{d}x = (-\cos x) + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$$

Algebraickými úpravami pak dostaneme:

$$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \cos x + c = 2\frac{\sqrt{x^3}}{3} - \cos x + c$$

Tedy

$$\int (\sin x + \sqrt{x})\ \mathrm{d}x = 2\frac{\sqrt{x^3}}{3} - \cos x + c.$$

Věta o integraci rozdílu

Věta 2.2.5. Jsou dány funkce f, g, ke kterým na intervalu $(a; b)$ existují neurčité integrály $\int f(x)\ \mathrm{d}x$, $\int g(x)\ \mathrm{d}x$.
Pak existuje na intervalu $(a; b)$ také neurčitý integrál $\int [f(x) - g(x)]\ \mathrm{d}x$ a platí:

$$\int [f(x) - g(x)]\ \mathrm{d}x = \int f(x)\ \mathrm{d}x - \int g(x)\ \mathrm{d}x$$

Poznámka 2.2.6. Větu lze rozšířit pro libovolný počet integrovaných funkcí.

Poznámka 2.2.7. Zjednodušeně říkáme: Integrál rozdílu funkcí je rozdíl integrálů jednotlivých funkcí.

Příklad 2.2.4. *Vypočítejte* $\int \left(\frac{1}{x} - 1\right)\ \mathrm{d}x$.

Řešení:
Úlohu řešíme s využitím *vzorce 2* a *vzorce 6* a *Věty o integraci rozdílu.*
Nejprve přepíšeme integrál rozdílu funkcí jako rozdíl integrálů:

$$\int \left(\frac{1}{x} - 1\right)\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x - \int 1\ \mathrm{d}x$$

V dalším kroku integrujeme menšenec i menšitel zvlášť. První podle *vzorce 6* a druhý podle *vzorce 2*, přičemž si uvědomíme, že platí $\int 1\ \mathrm{d}x = \int\ \mathrm{d}x$. Integrujeme takto:

$$\int \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x - \int\ \mathrm{d}x = \ln|x| - x + c$$

Tedy

$$\int \left(\frac{1}{x} - 1\right) \mathrm{d}x = \ln|x| - x + c.$$

Další úlohy na procvičení výpočtů z této kapitoly najdete v sekci *Úlohy*.

2.2.4 Metoda *per partes*

Metoda *per partes* je jedna ze dvou základních integračních metod, které se používají na střední škole. Název *per partes* napovídá, že se jedná o integrování *po částech*. Tato metoda se používá pro integraci součinu (resp. podílu) dvou funkcí. Vzorec, podle kterého integrujeme, je odvozen z **derivace** součinu dvou funkcí.

Věta 2.2.6. Jsou dány funkce u, v, které mají na intervalu $(a; b)$ spojité derivace u', v'. Na tomto intervalu platí:

$$\int u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x$$

Poznámka 2.2.8. Uvedený vztah zapisujeme stručněji ve tvaru:

$$\int uv'\ \mathrm{d}x = uv - \int u'v\ \mathrm{d}x$$

Odvození vzorce pro per partes

Úloha 2.2.2. *Vzpomeňte si na vzorec pro derivaci součinu dvou funkcí. Aplikujte na něj algebraické úpravy a integrujte tak, abyste dostali výše uvedený vztah pro per partes.*

S vědomím mírné matematické nekorektnosti budeme pro účely názorného vysvětlení průběhu důkazu nyní na vztah pro derivaci součinu nahlížet jako na rovnici.

- Vztah pro derivaci součinu vypadá takto:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

- Oba výrazy nyní integrujeme:

$$\int (uv)' = \int u'v + \int uv'$$

- Všimneme si, že na levé straně rovnice výraz derivujeme i integrujeme. Získáváme tedy původní výraz:

$$uv = \int u'v + \int uv'$$

- Nyní již jen převedeme jeden integrál z pravé strany rovnice na levou:

$$uv - \int u'v = \int uv'$$

- A na závěr zaměníme levou a pravou stranu rovnice a doplníme, podle jaké proměnné integrujeme:

$$\int uv' \, \mathrm{d}x = uv - \int u'v \, \mathrm{d}x$$

Použití vzorce

Jak již bylo uvedeno, metoda *per partes* se používá tehdy, když máme integrovat součin (podíl $\frac{f(x)}{g(x)}$ chápeme jako součin $f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$). Jeden činitel budeme vždy derivovat a druhý integrovat.

Pro integraci si zpravidla vybíráme ten činitel, který lze snáze integrovat, a derivujeme činitel, jehož derivací získáme jednodušší výraz.

Činitel, který budeme derivovat, označíme u, jeho derivaci pak u'. Činitel, který budeme integrovat, označíme v', primitivní funkci pak v. Poté už vše jen dosadíme do vztahu.

Použití metody *per partes* si nyní názorně ukážeme na několika řešených příkladech.

Příklad 2.2.5. *Vypočítejte* $\int x \sin x \, \mathrm{d}x$.

Řešení
Před integrací si musíme nejprve rozmyslet, který činitel budeme integrovat a který derivovat. Obvykle integrujeme ten člen, který lze integrovat snáze, a derivujeme ten člen, jehož derivací dojde ke zjednodušení celého výrazu. V našem případě je výhodnější

- **derivovat** výraz x, protože se derivací zjednoduší (proměnná x „zmizí“):

$$x' = 1$$

- **integrovat výraz** $\sin x$, protože jeho integrace je velmi snadná podle vzorce:

$$\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + c$$

Označme tedy:

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x & v' = \sin x \\ u' = 1 & v = -\cos x \end{array}}$$

Aplikace metody bude tedy probíhat takto:

$$\int u \cdot \ v' \ \ \mathrm{d}x = \ u \ \cdot \ \ v \ \ - \int u' \cdot \ \ \ v \ \ \ \mathrm{d}x$$
$$\int x \cdot \sin x \, \mathrm{d}x = -x \cdot \cos x - \int \ 1 \ \cdot (-\cos x) \, \mathrm{d}x$$

Obrázek 2.7: Aplikace metody per partes

Dále už integrál vypočítáme pomocí tabulky vzorců a vět pro výpočet neurčitého integrálu:

$$-x \cdot \cos x - \int 1 \cdot (-\cos x) \ \mathrm{d}x = -x \cdot \cos x + \int \cos x \ \mathrm{d}x = -x \cdot \cos x + \sin x + c =$$
$$= \sin x - x \cdot \cos x + c$$

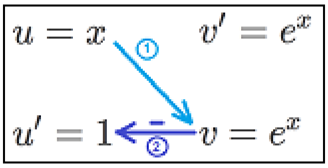
Závěr:

$$\int x \cdot \sin x \ \mathrm{d}x = \sin x - x \cdot \cos x + c$$

Mnemotechnická pomůcka

Pro zapamatování vzorce pro *per partes* existuje několik mnemotechnických pomůcek. My si ukážeme pomůcku založenou na grafické podobě zobrazování u a v.

V předchozím příkladu jste viděli, že funkce u a v zapisujeme do schématu ve tvaru obdélníku, přičemž v každém jeho rohu je jedna funkce a její „tvar před/po derivaci“. Pokud budete funkce u a v zapisovat tímto způsobem, vzorec sestavíte podle šipek takto:



Obrázek 2.8: Mnemotechnická pomůcka pro *per partes*

$$\int \mathbf{uv'} \ \mathbf{dx} = \mathbf{uv} - \int \mathbf{u'v} \ \mathbf{dx}$$

Obrázek 2.9: Vzorec pro *per partes*

Příklad 2.2.6. *Vypočítejte* $\int xe^x \ \mathrm{d}x$.

Řešení

V tomto příkladu je výhodné:

- **integrovat výraz** e^x, protože jeho integrace je velmi snadná:

$$\int e^x \ \mathrm{d}x = e^x + c$$

- **derivovat** výraz x, protože se derivací zjednoduší (proměnná x „zmizí“):

$$x' = 1$$

Aplikace metody bude tedy probíhat takto:

$$\int xe^x \, \mathrm{d}x = xe^x - \int 1 \cdot e^x \, \mathrm{d}x =$$

$u = x$	$v' = e^x$
$u' = 1$	$v = e^x$

Dále už integrál vypočítáme pomocí tabulky vzorců:

$$= xe^x - e^x + c = e^x(x-1) + c$$

Závěr:

$$\int xe^x \, \mathrm{d}x = e^x(x-1) + c$$

Další možnost využití metody *per partes*

Metodu *per partes* lze úspěšně využít i při integraci funkce, již nelze na první pohled zapsat ve tvaru součinu či podílu, a kterou jinak integrovat neumíme, ale umíme ji snadno derivovat. Příkladem takové funkce je $y = \ln x$. Řešení si opět ukážeme krok po kroku.

Příklad 2.2.7. *Vypočítejte* $\int \ln x \, \mathrm{d}x$.

Řešení
Výraz si vhodně přepíšeme tak, aby obsahoval součin:

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x \, \mathrm{d}x$$

Dále už integrujeme pomocí metody *per partes*. V tomto příkladu je výhodné:

- **derivovat** funkci $\ln x$, protože derivace $\ln x$ je snazší než integrace:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- **integrovat konstantu** 1:

$$\int 1 \, \mathrm{d}x = x + c$$

Aplikace metody bude tedy probíhat takto:

$$\int \ln x \ \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x \ \mathrm{d}x = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \ \mathrm{d}x =$$

$u = \ln x$	$v' = 1$
$u' = \frac{1}{x}$	$v = x$

Dále už integrujeme podle tabulky vzorců a vět pro výpočet neurčitého integrálu:

$$= x \cdot \ln x - \int 1 \ \mathrm{d}x = x \cdot \ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$$

Závěr:

$$\int \ln x \ \mathrm{d}x = x(\ln x - 1) + c$$

Další úlohy na procvičení postupů z této kapitoly najdete v sekci *Úlohy*.

2.2.5 Substituční metoda

Substituční metoda je druhá z integračních metod, které pomáhají při řešení komplikovanějších integrálů. S metodou substituce jste se setkali již dříve při řešení různých typů rovnic. Při jejím použití hraje zásadní roli derivace funkce, kterou substituujeme.

Použitím substituční metody zjednodušíme složitější integrál, a poté se vrátíme zpět k původnímu integrálu.

Věta o substituci

Věta 2.2.7. Nechť funkce $F(t)$ je primitivní funkcí k funkci $f(t)$ v intervalu $(\alpha;\beta)$. Nechť funkce $t = g(x)$ má derivaci $g'(x)$ v intervalu (a,b). Pro každé $x \in (a;b)$ nechť hodnota $g(x)$ patří do intervalu $(\alpha;\beta)$.
Pak v intervalu $(a;b)$ je funkce $F(g(x))$ primitivní funkcí k funkci $f(g(x)) \cdot g'(x)$, tj.

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \ \mathrm{d}x = F(g(x)) + c$$

Důkaz uveden v podkapitole „Důkazy“.

Poznámka 2.2.9. Výše uvedenou větu používáme často také ve tvaru

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \ \mathrm{d}x = \int f(t) \ \mathrm{d}t = F(t) + c.$$

Zjednodušeně říkáme: *Složenou funkci můžeme pomocí substituce převést na jednodušší a najít integrál této jednodušší funkce.*

Použití substituční metody si ukážeme na následujícím příkladu. Ten vyřešíme s využitím dvou různých zápisů postupu.

1. První odpovídá *Větě o substituci* tak, jak je formulována výše.
2. S druhým, více zjednodušujícím, se častěji setkáte v literatuře pro SŠ (např. [3])

Zdůrazněme, že se jedná o dva různé **zápisy** (nikoli rozdílné metody), v obou případech se tedy musíme dostat ke stejnému závěru.

Příklad 2.2.8. *Vypočítejte* $\int (5x+7)^8 \, \mathrm{d}x$.

Řešení

Víme, že příklad by pro nás bylo velmi snadné vyřešit, kdybychom umocňovali jednočlen a ne dvojčlen jako v tomto případě. Pro integraci mocniny máme totiž vzorec:

$$\int x^r \, \mathrm{d}x = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$$

Výhodná by tedy pro nás byla substituce za výraz uvnitř závorky:

$$t = 5x + 7$$

1. způsob zápisu

Je takováto substituce vhodná podle *Věty o substituci*?

$$t = g(x) = (5x + 7)$$

Z *Věty o substituci* víme, že se jedná o „kombinaci substituce a její derivace“, určíme tedy tuto derivaci:

$$\mathrm{d}t = g'(x) \, \mathrm{d}x = 5 \, \mathrm{d}x$$

Vraťme se opět k *Větě o substituci* a srovnejme s ní dosavadní postup.

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \int f(g(x)) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x & = & \int f(t) \, \mathrm{d}t \\ \int (5x+7)^8 \cdot 5 \, \mathrm{d}x & = & \int t^8 \, \mathrm{d}t \end{array}}$$

Obrázek 2.10: Substituce 1

Nyní víme, že:

$$\int (5x+7)^8 \cdot 5 \, \mathrm{d}x = \int t^8 \, \mathrm{d}t$$

Srovnejme tyto výrazy se zadáním příkladu: „Vypočítejte $\int (5x+7)^8 \, \mathrm{d}x$.“. Zadaný integrál získáme úpravou výše uvedeného vztahu takto:

$$\begin{aligned} \int t^8 \, \mathrm{d}t &= \int (5x+7)^8 \cdot 5 \, \mathrm{d}x \qquad / : 5 \\ \frac{1}{5} \int t^8 \, \mathrm{d}t &= \int (5x+7)^8 \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Tedy platí:

$$\boxed{\int (5x+7)^8 \, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{5} \int t^8 \, \mathrm{d}t}$$

2. způsob zápisu (obvyklejší v literatuře)

Zkusme dosadit do integrálu naši substituci $t = 5x + 7$:

$$\int (5x+7)^8 \, \mathrm{d}x = \int t^8 \, \mathrm{d}x$$

Výše uvedený vztah zřejmě **není v pořádku**. Integraci podle x **nelze** nahradit integrací podle t pouhým přepsáním $\mathrm{d}x$ na $\mathrm{d}t$. Dobře provedená substituce se tedy skládá nejen z vhodně zvoleného výrazu, za který substituujeme, ale také ze správného nahrazení integrační proměnné. Toto nahrazení si nyní názorně ukážeme.

Z *Věty o substituci* víme, že se zde pracuje se „substitucí a její derivací“. Abychom získali tuto derivaci, podíváme se na předchozí vztah jako na rovnici a obě její strany zderivujeme.

$$\begin{aligned} t &= 5x + 7 \\ \mathrm{d}t &= 5 \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Nyní již známe vztah mezi $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}t$. Pro správné nahrazení $\mathrm{d}t$ za $\mathrm{d}x$ tedy celý integrál vynásobíme $\frac{1}{5}$ (vydělíme pěti).

Do integrálu dosadíme celou substituci:

$$\boxed{\int (5x+7)^8 \, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{5} \int t^8 \, \mathrm{d}t}$$

Dvěma odlišnými způsoby zápisu jsme tedy, jak jsme předpokládali, dostali tentýž integrál proměnné t. Ten už snadno vypočítáme. Nejprve použijeme vzorec pro integrál mocniny:

$$\frac{1}{5} \int t^8 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{5} \cdot \frac{t^{8+1}}{8+1} + c = \frac{1}{5} \cdot \frac{t^9}{9} + c = \frac{t^9}{45} + c$$

Nakonec nesmíme zapomenout dosadit za t, kde $t = 5x + 7$:

$$\frac{t^9}{45} + c = \frac{(5x+7)^9}{45} + c$$

Závěr:
$$\int (5x+7)^8 \,\mathrm{d}x = \frac{(5x+7)^9}{45} + c$$
Ověření správnosti výpočtu provedeme derivací výsledku:
$$\left(\frac{(5x+7)^9}{45} + c\right)' = \frac{9(5x+7)^8 \cdot 5}{45} = \frac{45(5x+7)^8}{45} = (5x+7)^8$$

Ne vždy je ale integrace složené funkce takto jednoduchá. Při špatně zvolené substituci nebo při nevhodném použití této metody můžeme integrovaný výraz naopak zkomplikovat, což si ukážeme na dalším příkladu.

Příklad 2.2.9. *Vypočítejte* $\int \mathrm{tg}\ x \,\mathrm{d}x$.

Řešení
V tabulce vzorců není vzorec pro integraci funkce $y = \mathrm{tg}\ x$. Proto si tuto funkci přepíšeme jako podíl funkcí $\sin x$ a $\cos x$:
$$\int \mathrm{tg}\ x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x} \,\mathrm{d}x$$
Uvědomme si, že podíl můžeme zapsat také jako součin, který potřebujeme při použití *Věty o substituci*:
$$\int \frac{\sin x}{\cos x} \,\mathrm{d}x = \int \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \,\mathrm{d}x$$

1. způsob zápisu

Musíme si rozmyslet, jakým způsobem zvolíme substituci. Vše bude opět vycházet ze známého vztahu
$$\int f(t) \,\mathrm{d}t = \int f(g(x)) \cdot g'(x) \,\mathrm{d}x = F(t) + c.$$

Poznámka 2.2.10. Vhodná substituce se vždy určuje pro konkrétní zadání!

Níže si ukážeme obě možnosti substituce, přičemž vhodná bude pouze jedna, u druhé „dojdeme do slepé uličky“.

1. Volíme substituci $t = \sin x$:
$$\begin{array}{rcl} t & = & g(x) & = & \sin x \\ \mathrm{d}t & = & g'(x)\,\mathrm{d}x & = & \cos x \,\mathrm{d}x \end{array}$$

   Pro takto zvolenou substituci je zřejmě $f(g(x)) = g(x)$. ($\sin x$ už je přesně ve tvaru, který máme zadaný.)

   Podle *Věty o substituci* dostáváme:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \; dx = \int f(t) \, dt$$
$$\int \sin x \cdot \cos x \; dx = \int t \; dt$$

Obrázek 2.11: Substituce 2

Nyní víme, že

$$\int \sin x \cdot \cos x \; dx = \int t \; dt$$

Srovnejme tyto výrazy se zadáním integrálu: $\int \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \; dx$. Zadaný integrál nelze z výše uvedeného výrazu snadno získat, tato substituce tedy nebyla vhodná.

2. Volíme substituci $t = \cos x$:

$$\begin{array}{rcccl} t & = & g(x) & = & \cos x \\ dt & = & g'(x) \; dx & = & -\sin x \; dx \end{array}$$

Pro takto zvolenou substituci je zřejmě $f(g(x)) = \frac{1}{g(x)}$. (Abychom z výrazu $\cos x$ vytvořili $frac1\cos x$, což máme zadané.)

Podle *Věty o substituci* dostáváme:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \; dx = \int f(t) \, dt$$
$$\int \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) \; dx = \int \frac{1}{t} \; dt$$

Obrázek 2.12: Substituce 3

Nyní víme, že

$$\int \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) \; dx = \int \frac{1}{t} \; dt$$

Srovnejme tyto výrazy se zadáním integrálu: $\int \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \; dx$. Zadaný integrál získáme úpravou výše uvedené rovnice takto:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t &= \int \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)\ \mathrm{d}x \qquad / \cdot (-1) \\
-\int \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t &= \int \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x\ \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Tedy platí:

$$\boxed{\int \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x\ \mathrm{d}x = -\int \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t}$$

2. způsob zápisu (obvyklejší v literatuře)

Opět si musíme rozmyslet, jakým způsobem zvolíme substituci. Znovu rozebereme obě možnosti. Připomeňme, že řešíme integrál

$$\int \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x\ \mathrm{d}x$$

1. Volíme substituci $t = \sin x$:

$$
\begin{aligned}
t &= \sin x \\
\mathrm{d}t &= \cos x\ \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Aby nedocházelo k situaci, kdy dosazením substituce získáme v jednom integrálu současně proměnnou x i substituční proměnnou t (viz předchozí příklad), provedeme před dosazením substituce do integrálu následující pomocný výpočet.

Pomocný výpočet:
Upravíme výraz vzniklý dosazením do integrálu za proměnné t a $\mathrm{d}t$. Při tom se budeme snažit získat takový výraz, kde se nachází jen proměnná t, respektive $\mathrm{d}t$.

$$\frac{1}{\cos x} \cdot \sin x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\cos x} \cdot t \cdot \frac{1}{\cos x}\ \mathrm{d}t = t \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\ \mathrm{d}t$$

Vidíme, že výraz nelze žádoucím způsobem upravit. Tato substituce tedy **není vhodná**.

2. Volíme substituci $t = \cos x$:

$$
\begin{aligned}
t &= \cos x \\
\mathrm{d}t &= -\sin x\ \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Pomocný výpočet:

$$\frac{1}{\cos x} \cdot \sin x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{t} \cdot \sin x \cdot \frac{1}{-\sin x}\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$$

Úpravou výrazu došlo k úplnému odstranění proměnné x. Takovýto výraz již lze integrovat. Dostáváme:

$$\boxed{\int \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x \, \mathrm{d}x = -\int \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t}$$

Získaný výraz již snadno integrujeme podle vzorce z tabulky.

Integrál vyřešíme podle vzorce:

$$-\int \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t = -\ln|t| + c$$

Nakonec nesmíme zapomenout dosadit za t, kde $t = \cos x$:

$$-\ln|t| + c = -\ln|\cos x| + c$$

Závěr:

$$\int \mathrm{tg}\ x \, \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + c$$

Ověření správnosti výpočtu provedeme derivací výsledné primitivní funkce (derivujeme složenou funkci):

$$(-\ln|\cos x| + c)' = -\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \mathrm{tg}\ x$$

Poznámka 2.2.11. Z Příkladu 2.2.9 je zřejmé, že nalezení vhodné substituce je pro použití substituční metody stěžejní.

Poznámka 2.2.12. Nadále na těchto stránkách budeme používat 2. způsob zápisu řešení, jelikož je obvyklý ve středoškolských učebnicích. Studentům s hlubším zájmem o matematiku nicméně doporučuji podrobnější prostudování 1. způsobu zápisu řešení.

Odhad vhodné substituce je otázkou cviku. Čím více příkladů vypočítáte, tím snáze naleznete vhodnou substituci.
Další úlohy na procvičení výpočtů z této kapitoly najdete v sekci *Úlohy*.

2.2.6 Úlohy s komentářem

Tato kapitola obsahuje řešené úlohy se slovním komentářem, ve kterých jsou ukázány různé metody řešení integrálu.
Stejné úlohy bez slovního komentáře, **tedy pouze krokované, a další podobné úlohy, jsou uvedeny v menu stručně nazvaném Úlohy**.
Úlohy nejsou děleny podle metod, abyste se sami pokusili vhodnou metodu stanovit.

Řešení je krokované, tj. v každém kroku se zobrazí jen jeden následující krok výpočtu. Doporučuji Vám nezobrazit hned celé řešení, ale používat jednotlivé kroky pouze jako nápovědu.

Řešení úlohy je uváděno bez ověření správnosti. Pro ověření správnosti výpočtu nalezenou primitivní funkci derivujte.

Úloha 2.2.3. *Vypočítejte* $\int x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x$.

- V úloze vidíme součin dvou činitelů, přičemž **neplatí**, že by jeden byl derivací druhého. Vhodné je tedy využít metodu *per partes.*
- Nyní se musíme rozhodnout, který činitel budeme integrovat a který derivovat. V našem případě je výhodnější derivovat funkci $y = x$, protože $x' = 1$, čímž se integrál zjednoduší.

  Označme tedy:

$u = x$	$v' = \cos x$
$u' = 1$	$v = \sin x$

- Aplikace metody bude probíhat takto:
$$\int x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x \, \mathrm{d}x =$$
- Dále už integrál vypočítáme pomocí tabulky vzorců:
$$= x \cdot \sin x + \cos x + c$$
- Závěr:
$$\int x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = x \cdot \sin x + \cos x + c$$

Úloha 2.2.4. *Vypočítejte* $\int (x^4 + 3x^2 - 5x + 6) \, \mathrm{d}x$.

- V úloze vidíme součet několika funkcí, použijeme tedy větu o integraci součtu funkcí.
-
$$\int (x^4 + 3x^2 - 5x + 6) \, \mathrm{d}x = \int x^4 \, \mathrm{d}x + \int 3x^2 \, \mathrm{d}x - \int 5x \, \mathrm{d}x + \int 6 \, \mathrm{d}x =$$
- Tam, kde je to možné, vytkneme konstantu před integrál:
$$= \int x^4 \, \mathrm{d}x + 3 \int x^2 \, \mathrm{d}x - 5 \int x \, \mathrm{d}x + 6 \int 1 \mathrm{d}x =$$
- Dále už integrál vypočítáme pomocí tabulky vzorců:
$$= \frac{x^5}{5} + 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 5 \cdot \frac{x^2}{2} + 6x + c$$
- Závěr:
$$\int (x^4 + 3x^2 - 5x + 6) \, \mathrm{d}x = \frac{x^5}{5} + x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + c$$

Úloha 2.2.5. *Vypočítejte* $\int \cos^2 x \; \mathrm{d}x$.

- Pro funkci $y = \cos^2 x$ nemáme k dispozici žádný vzorec v tabulce. Musíme tedy použít jednu z integračních metod. Uvědomme si, že $\cos^2 x = \cos x \cdot \cdot \cos x$.

- Nyní se musíme rozhodnout, kterou metodu použijeme. Rozebereme si obě možnosti:

  1. Substituční metoda
     a. $t = \cos^2 x$

     $$\begin{aligned} t &= \cos^2 x \\ \mathrm{d}t &= 2 \cdot \cos x \cdot (-\sin x) \; \mathrm{d}x \end{aligned}$$

     Po dosazení do integrálu získáme následující výraz:

     $$\int t \cdot \frac{1}{-2 \sin x \cos x} \; \mathrm{d}t$$

     Vidíme, že jsme výraz nezjednodušili, ale naopak jsme získali výraz obsahující dvě proměnné (x a t). Tato substituce tedy není vhodná.

     b. $t = \cos x$

     $$\begin{aligned} t &= \cos x \\ \mathrm{d}t &= -\sin x \; \mathrm{d}x \end{aligned}$$

     Po dosazení do integrálu získáme následující výraz:

     $$\int t \cdot \frac{1}{-\sin x} \; \mathrm{d}t$$

     Opět máme výraz obsahující dvě proměnné (x a t). Tato substituce tedy také není vhodná.
  2. Metoda *per partes*
     V případě této metody využijeme vyjádření druhé mocniny pomocí součinu: $\cos^2 x = \cos x \cdot \cos x$. Vidíme, že oba činitelé jsou stejní, nezáleží tedy na tom, který budeme derivovat a který integrovat:

     $$\boxed{\begin{array}{ll} u = \cos x & v' = \cos x \\ u' = -\sin x & v = \sin x \end{array}}$$

     $$\int \cos x \cdot \cos x \; \mathrm{d}x = \cos x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot (-\sin x) \; \mathrm{d}x =$$

$$= \cos x \cdot \sin x + \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$$

Vypadá to, že touto metodou získáme integrál, který lze vypočítat. V případě integrálu $\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x$ jsme neúspěšně aplikovali substituční metodu. Je tedy pravděpodobné, že substituční metoda by byla neúspěšná také v případě $\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$. Také tento integrál se pokusíme počítat metodou *per partes* (použijeme ji znovu).

Opět si druhou mocninu vyjádříme jako součin dvou stejných činitelů: $\sin^2 x = \sin x \cdot \sin x$, nezáleží tedy na tom, který činitel derivujeme a který integrujeme:

$$\cos x \cdot \sin x + \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x =$$

$u = \sin x$	$v' = \sin x$
$u' = \cos x$	$v = -\cos x$

$$= \cos x \cdot \sin x - \sin x \cdot \cos x - \int (-\cos^2 x) \, \mathrm{d}x$$

Uvědomme si, co jsme zatím vypočítali:

$$\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \cos x \cdot \sin x - \sin x \cdot \cos x + \int \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \int \cos^2 x \, \mathrm{d}x$$

Zdánlivě se točíme v kruhu a opět musíme počítat původní integrál ze zadané funkce. Pokusme se podívat na tuto část výpočtu jako na **rovnici**. Získáváme:

$$\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \int \cos^2 x \, \mathrm{d}x$$

Metoda *per partes* tedy v tuto chvíli nebyla vhodná.

3. Nyní zkusíme využít známého vzorce pro goniometrické funkce $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ a přepsat výraz jako $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Tedy máme:

$$\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \int (1 - \sin^2 x) \, \mathrm{d}x$$

Nejprve použijeme větu o rozdílu integrálů:

$$\int (1 - \sin^2 x) \, \mathrm{d}x = \int 1 \, \mathrm{d}x - \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x =$$

Dále vyřešíme první integrál podle tabulky vzorců a druhý vypočítáme metodou *per partes*:

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \sin x & v' = \sin x \\ & \\ u' = \cos x & v = -\cos x \end{array}}$$

$$= x - \Big[-\sin x \cdot \cos x - \int (-\cos^2 x) \ \mathrm{d}x \Big] = x + \sin x \cdot \cos x - \int \cos^2 x \ \mathrm{d}x$$

Zrekapitulujme si, co jsme doposud spočítali:

$$\int \cos^2 x \ \mathrm{d}x = x + \sin x \cdot \cos x + c - \int \cos^2 x \ \mathrm{d}x$$

Opět se podíváme na dosavadní řešení jako na rovnici a převedeme $\int \cos^2 x \ \mathrm{d}x$ na jednu stranu:

$$2 \int \cos^2 x \ \mathrm{d}x = x + \sin x \cdot \cos x + c$$

Nyní už stačí jen celou rovnici vydělit dvěma a máme výsledek:

$$\int \cos^2 x \ \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot (x + \sin x \cdot \cos x + c)$$

Úloha 2.2.6. *Vypočítejte* $\int \frac{\ln x}{x} \ \mathrm{d}x$.

- Podíl přepíšeme jako součin:

$$\frac{\ln x}{x} = \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

  Tedy:

$$\int \frac{\ln x}{x} \ \mathrm{d}x = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} \ \mathrm{d}x$$

- Oba činitelé mají mnoho společného – derivací $\ln x$ získáme $\frac{1}{x}$, naopak integrací $\frac{1}{x}$ dostaneme $\ln |x|$. Nyní se pokusíme příklad řešit oběma integračními metodami.

1. **Substituční metoda**
   Podle výše uvedené úvahy by mělo být zřejmé, jak vypadá vhodná substituce:

$$\begin{aligned} t &= \ln x \\ \mathrm{d}t &= \frac{1}{x} \ \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Pomocný výpočet bude vypadat takto:

$$\ln x \cdot \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = t \cdot \frac{1}{x} \cdot x\ \mathrm{d}t = t\ \mathrm{d}t$$

Integrujeme podle tabulky vzorců, pak je:

$$\int t\ \mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} + c$$

Nakonec nesmíme zapomenout na dosazení, $t = \ln x$:

$$\frac{t^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

Závěr:

$$\int \frac{\ln x}{x}\ \mathrm{d}x = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

2. **Metoda *per partes***
Nejprve určíme, který člen součinu budeme derivovat a který integrovat. Rozhodnutí vychází z prvotní úvahy na začátku řešení úlohy:

$$\int \frac{\ln x}{x}\ \mathrm{d}x = \int \ln x \cdot \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x =$$

$u = \ln x$	$v' = \frac{1}{x}$
$u' = \frac{1}{x}$	$v = \ln \lvert x \rvert$

$$= \ln x \cdot \ln |x| - \int \frac{1}{x} \cdot \ln |x|\ \mathrm{d}x$$

Již ze zadání je zřejmé, že $x > 0$. Absolutní hodnotu tedy můžeme vynechat:

$$= \ln x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \ln x\ \mathrm{d}x = \ln^2 x - \int \frac{1}{x} \cdot \ln x\ \mathrm{d}x$$

Vidíme, že bychom dále počítali znovu stejný integrál. Na výpočet se tedy podíváme jako na rovnici a převedeme $\int \frac{1}{x} \cdot \ln x\ \mathrm{d}x$ na jednu stranu.

$$2 \int \frac{1}{x} \cdot \ln x\ \mathrm{d}x = \ln^2 x + c$$

Nyní už stačí jen celou rovnici vydělit dvěma a dostáváme výsledek:

$$\int \frac{\ln x}{x}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \left(\ln^2 x + c\right)$$

V tomto případě tedy obě metody vedly ke správnému výsledku.

Úloha 2.2.7. *Vypočítejte* $\int \frac{7}{(x+5)^6}\ \mathrm{d}x$.

- Nejprve převedeme podíl na součin takto:

$$\int \frac{7}{(x+5)^6}\ \mathrm{d}x = \int 7 \cdot \frac{1}{(x+5)^6}\ \mathrm{d}x$$

- Nyní použijeme větu o vytknutí konstanty a vytkneme číslo 7 před integrál:

$$\int 7 \cdot \frac{1}{(x+5)^6}\ \mathrm{d}x = 7 \cdot \int \frac{1}{(x+5)^6}\ \mathrm{d}x$$

- Uvědomíme si, jakým způsobem lze napsat jmenovatele zlomku pomocí mocniny:

$$7 \cdot \int \frac{1}{(x+5)^6}\ \mathrm{d}x = 7 \cdot \int (x+5)^{-6}\ \mathrm{d}x$$

- Získali jsme výraz umocněný na -6. Při srovnání výrazu s tabulkou vzorců zjistíme, že je zde uveden vzorec pro $y = x^r$. Bylo by tedy vhodné použít **substituci** tak, abychom v integrálu místo mocniny mnohočlenu měli jen mocninu proměnné.

  Označme tedy:

$$\begin{aligned} t &= x+5 \\ \mathrm{d}t &= 1\ \mathrm{d}x \end{aligned}$$

  Dosaďme:

$$7 \cdot \int (x+5)^{-6}\ \mathrm{d}x = 7 \cdot \int t^{-6}\ \mathrm{d}t$$

- Nyní už snadno integrujeme podle tabulky vzorců, $r = -6$ (uvědomíme si, že $-6+1=-5$) a upravíme:

$$7 \cdot \int t^{-6}\ \mathrm{d}t = 7 \cdot \frac{t^{-5}}{-5} + c = -\frac{7}{5t^5} + c$$

- Na závěr dosadíme za t, $t = x+5$:

$$-\frac{7}{5t^5} + c = -\frac{7}{5(x+5)^5} + c$$

- Závěr:

$$\int \frac{7}{(x+5)^6}\ \mathrm{d}x = -\frac{7}{5(x+5)^5} + c$$

Úloha 2.2.8. *Vypočítejte* $\int x^2 e^x \, \mathrm{d}x$.

- Integrál obsahuje součin dvou funkcí, který nelze dále zjednodušit. Použijeme jednu z integračních metod.

- Derivací jednoho z činitelů nevznikne druhý činitel (ani jemu podobný) člen. Vhodnější bude využít metodu *per partes*.

- Rozhodneme se, který činitel budeme integrovat a který derivovat. Oba činitele je možné integrovat i derivovat, rozhodnutí tak záleží na tom, co je výhodnější. Jelikož je jedním činitelem x^2, bude vhodné tento činitel derivovat, čímž snížíme stupeň mocniny. Integraci činitele e^x nalezneme v tabulce vzorců. Počítáme:

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x^2 & v' = e^x \\ u' = 2x & v = e^x \end{array}}$$

$$\int x^2 e^x \, \mathrm{d}x = x^2 e^x - \int 2x e^x \, \mathrm{d}x$$

- Využijeme větu o vytknutí konstanty:

$$x^2 e^x - \int 2x e^x \, \mathrm{d}x = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, \mathrm{d}x$$

- Získali jsme integrál součinu, přičemž se nám podařilo snížit mocninu u x. Pokud opětovně použijeme metodu *per partes*, člen x nám „zmizí". Konstantu vytknutou před integrálem zatím opisujeme:

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x & v' = e^x \\ u' = 1 & v = e^x \end{array}}$$

$$x^2 e^x - 2 \int x e^x \, \mathrm{d}x = x^2 e^x - 2\Big(x e^x - \int e^x \, \mathrm{d}x\Big)$$

- Integrál již nyní snadno vypočítáme a upravíme:

$$x^2 e^x - 2\Big(x e^x - \int e^x \, \mathrm{d}x\Big) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c = e^x(x^2 - 2x + 2) + c$$

- Závěr:

$$\int x^2 e^x \, \mathrm{d}x = e^x(x^2 - 2x + 2) + c$$

2.2.7 Úlohy

V této kapitole jsou uvedeny některé **stejné** úlohy jako v předchozí části. Liší se v tom, že krokované řešení je zde uvedeno **bez slovního komentáře**.

Pokud Vám jakýkoli krok výpočtu není jasný, jeho vysvětlení naleznete v kapitole **Úlohy s komentářem**, kde je řešená buď totožná úloha, nebo úloha obdobná.

Řešení úlohy je uváděno bez ověření správnosti. Pro ověření správnosti výpočtu nalezenou primitivní funkci derivujte.

Úloha 2.2.9. *Vypočítejte* $\int x \cdot \cos x \; \mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int x \cdot \cos x \; \mathrm{d}x = x \cdot \sin x + \cos x + c$$

Podrobné řešení se slovním komentářem viz Úloha 2.2.3.

Úloha 2.2.10. *Vypočítejte* $\int (x^4 + 3x^2 - 5x + 6) \; \mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int (x^4 + 3x^2 - 5x + 6) \; \mathrm{d}x = \frac{x^5}{5} + x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + c$$

Podrobné řešení se slovním komentářem viz Úloha 2.2.4.

Úloha 2.2.11. *Vypočítejte* $\int \cos^2 x \; \mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int \cos^2 x \; \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot (x + \sin x \cdot \cos x + c)$$

Podrobné řešení se slovním komentářem viz Úloha 2.2.5.

Úloha 2.2.12. *Vypočítejte* $\int \frac{\ln x}{x} \; \mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int \frac{\ln x}{x} \; \mathrm{d}x = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

Podrobné řešení se slovním komentářem viz Úloha 2.2.6.

Úloha 2.2.13. *Vypočítejte* $\int \frac{7}{(x+5)^6} \; \mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int \frac{7}{(x+5)^6} \; \mathrm{d}x = -\frac{7}{5(x+5)^5} + c$$

Podrobné řešení se slovním komentářem viz Úloha 2.2.7.

Úloha 2.2.14. *Vypočítejte* $\int x^2 e^x \; \mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int x^2 e^x \; \mathrm{d}x = e^x(x^2 - 2x + 2) + c$$

Podrobné řešení se slovním komentářem viz Úloha 2.2.8.

Úloha 2.2.15. *Vypočítejte* $\int \frac{x^6+2x^2+5}{3x^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int \frac{x^6+2x^2+5}{3x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x^5}{5}+2x-\frac{5}{x}\right)+c$$

Řešení obdobné úlohy se slovním komentářem viz Úloha 2.2.4.

Úloha 2.2.16. *Vypočítejte* $\int e^x \cos x\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int e^x \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot e^x(\sin x+\cos x)+c$$

Řešení obdobné úlohy se slovním komentářem viz Úloha 2.2.5.

Úloha 2.2.17. *Vypočítejte* $\int e^{2x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x}+c$$

Řešení obdobné úlohy se slovním komentářem viz Úloha 2.2.5.

Úloha 2.2.18. *Vypočítejte* $\int \sin 5x\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int \sin 5x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\cos 5x+c$$

Řešení obdobné úlohy se slovním komentářem viz Úloha 2.2.6.

Úloha 2.2.19. *Vypočítejte* $\int \sin^2 x\ \cos^3 x\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int \sin^2 x\ \cos^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+c$$

Řešení obdobné úlohy se slovním komentářem viz Úloha 2.2.6.

Úloha 2.2.20. *Vypočítejte* $\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x^2+1|+c$$

Řešení obdobné úlohy se slovním komentářem viz Úloha 2.2.7.

Úloha 2.2.21. *Vypočítejte* $\int (5x+7)^8\,\mathrm{d}x$

Řešení:

$$\int (5x+7)^8\,\mathrm{d}x = \frac{(5x+7)^9}{45}+c$$

Podrobné řešení se slovním komentářem viz Příklad 2.2.8 v kapitole Substituční metoda.

Úloha 2.2.22. *Vypočítejte* $\int x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x = \sin x - x\cdot\cos x+c$$

Podrobné řešení se slovním komentářem viz Příklad 2.2.5 v kapitole Metoda *per partes*.

2.2.8 Důkazy

Níže jsou uvedeny důkazy některých vět uvedených v kapitole *Neurčitý integrál.*

Integrační konstanta

Věta 2.2.8. *Je-li funkce F v intervalu $(a;b)$ primitivní funkcí k funkci f, pak každá primitivní funkce k funkci f je ve tvaru $F(x)+c$, kde c je reálná konstanta.*

Důkaz

- Nechť funkce F a G jsou dvě různé primitivní funkce k funkci f v intervalu $(a;b)$. Pak v tomto intervalu platí:

$$F'(x) = f(x) \wedge G'(x) = f(x).$$

- Dále nechť je zavedena funkce H, pro kterou platí:

$$H(x) = F(x) - G(x)$$

- Jak bude vypadat derivace takovéto funkce?

$$H'(x) = F'(x) - G'(x).$$

- Z definice funkcí F a G (tedy z bodu 1.) plyne:

$$H'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

- Derivace funkce H je tedy rovna nule. Z toho vyplývá, že

$$H = c$$

  (Derivace konstanty je nula.)

- Dosaďme tento výsledek do vztahu z bodu 2:

$$c = F(x) - G(x)$$

- Snadnou úpravou pak dostáváme:

$$F(x) = G(x) + c$$

$\square$

Odvození vzorce pro *per partes*

Věta 2.2.9. *Jsou dány funkce u, v, které mají na intervalu $(a;b)$ spojité derivace. Na tomto intervalu platí:*

$$\int u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x$$

Poznámka 2.2.13. *Uvedený vztah zapisujeme stručněji ve tvaru:*

$$\int uv' = uv - \int u'v$$

Důkaz

Použijte vzorec pro derivaci součinu $u \cdot v$. Získaný výraz dále upravte tak, abyste dostali výše uvedený.

Poznámka 2.2.14. Pro snazší vysvětlení prováděných úprav budeme během důkazu nahlížet na vztah pro derivaci součinu jako na rovnici. Tento úhel pohledu není matematicky zcela korektní, ale při provádění důkazu zjednoduší jeho pochopení.

- Vztah pro derivaci součinu dvou funkcí vypadá takto:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

- Výrazy na obou stranách zintegrujeme:

$$\int (uv)' = \int u'v + \int uv'$$

- Všimneme si, že na levé straně rovnice výraz derivujeme i integrujeme. Získáváme tedy původní výraz:

$$uv = \int u'v + \int uv'$$

- Nyní již jen převedeme jeden integrál z pravé strany rovnice na levou:

$$uv - \int u'v = \int uv'$$

- A na závěr zaměníme obě strany rovnice a doplníme, podle jaké proměnné integrujeme:

$$\int uv'\ \mathrm{d}x = uv - \int u'v\ \mathrm{d}x$$

$\square$

Odvození vzorce pro substituční metodu

Věta 2.2.10. *Nechť funkce $F(t)$ je primitivní funkcí k funkci $f(t)$ v intervalu $(\alpha;\beta)$. Nechť funkce $t = g(x)$ má derivaci $g'(x)$ v intervalu (a,b). Pro každé $x \in (a;b)$ nechť hodnota $g(x)$ patří do intervalu $(\alpha;\beta)$. Pak v intervalu $(a;b)$ je funkce $F(g(x))$ primitivní funkcí k funkci $f(g(x)) \cdot g'(x)$, tj.*

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \; \mathrm{d}x = F(g(x)) + c$$

Důkaz

Připomeneme si vztah pro **derivaci** složené funkce $y = f(g(x))$ v bodě x_0:

$$[f(g(x_0))]' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Uvažujme nyní funkci $y = f(t)$ proměnné t, ke které existuje na intervalu $(\alpha;\beta)$ primitivní funkce $F(t)$, tj.

$$\int f(t) \; dt = F(t),$$

neboli pro každé $t \in (\alpha;\beta)$ platí

$$F'(t) = f(t).$$

Dále nechť $t = g(x)$. Funkce $y = g(x)$ má derivaci pro každé $x \in (a;b)$ a pro každé takové x náleží $g(x)$ intervalu $(\alpha;\beta)$.
Dosaďme nyní do funkce $F(t)$ za t hodnotu $g(x)$. Tím získáme složenou funkci $F(g(x))$. Nyní tuto složenou funkci zderivujeme:

$$[F(g(x))]' = F'(g(x)) \cdot g'(x) =$$

Dosadíme $g(x) = t$ a upravíme:

$$= F'(t) \cdot g'(x) = f(t) \cdot g'(x) =$$

a dále $t = g(x)$:

$$= f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Po úpravách získáme:

$$[F(g(x))]' = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

To tedy znamená, že $F(g(x))$ je primitivní funkcí k funkci $f(g(x)) \cdot g'(x)$. Můžeme napsat

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \; \mathrm{d}x = F(g(x)) + c$$

Na pravé straně rovnosti máme funkci $F(g(x)) = F(t) = \int f(t) \; dt$. Lze tedy provést následující závěrečnou úpravu

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \; \mathrm{d}x = \int f(t) \; dt = F(t) + c.$$

$\square$

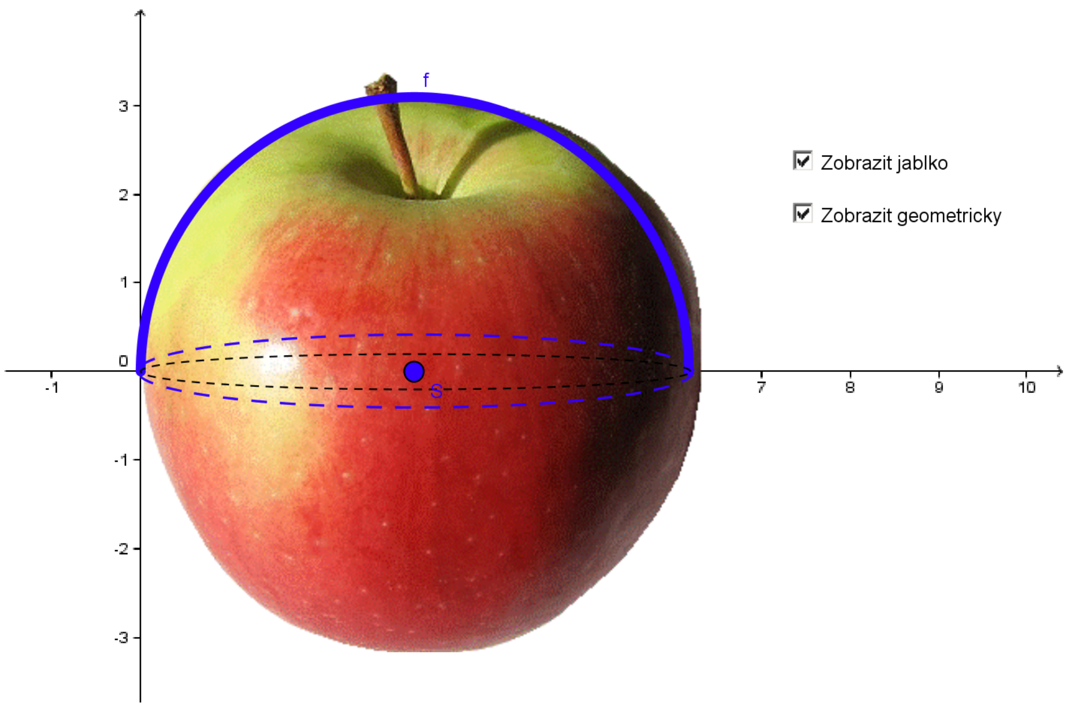
2.3 Určitý integrál

2.3.1 Motivace

Na níže uvedeném appletu je zobrazeno jablko, jehož tvar přibližně odpovídá kouli. Řekněme, že chceme znát jeho objem, ale neznáme vzorec pro tento výpočet. K tomu nám pomůže určitý integrál. Praktický výpočet si vysvětlíme v další kapitole.

Nyní si pomocí zaškrtávacích políček a spuštění animace prohlédněte, jak lze aproximovat obrys jablka křivkou.

1. Na začátku je zaškrtnuta volba viditelnosti jablka. Zaškrtněte také tlačítko pro geometrické zobrazení. Nyní tedy vidíte polokružnici f nad kružnicí se středem S.
2. Dále odškrtněte možnost zobrazení jablka a šipkou v levém dolním rohu appletu spusťte animaci. Můžete pozorovat rotaci polokružnice f kolem osy x a vykreslování kulové plochy.



Obrázek 2.13: Applet – Jablko

2.3.2 Součtová definice určitého integrálu

V této části si intuitivně přiblížíme, co znamená pojem určitý integrál. Implicitní zavedení zde nebudeme uvádět. Zájemci ho mohou vyhledat např. v učebnici [3].

Je dána funkce $f(x) = e^{-x}$. Její graf je uveden na následujícím appletu. Pokusíme se aproximovat obsah útvaru vymezeného grafem funkce $f(x)$, osou x a přímkou $x = -2$ obsahem obdélníků. Pro co nejlepší odhad tohoto obsahu využijeme dvě různé možnosti aproximace pomocí dvou typů obdélníků, jejichž jedna strana vždy leží na ose x. Tyto aproximace pojmenujeme jako *Dolní* a *Horní součet*.

1. Pojmem **Dolní součet** označíme součet obsahů těch obdélníků, jež se celé nachází **pod** grafem $f(x)$ a jejichž právě jeden horní vrchol se tohoto grafu dotýká. V appletu jsou tyto obdélníky vyznačené modrou barvou.

2. Pojmem **Horní součet** budeme nazývat součet obsahů obdélníků, jejichž jeden horní vrchol se grafu $f(x)$ dotýká a druhý horní vrchol leží **nad** tímto grafem. V appletu jsou tyto obdélníky vyznačené zelenou barvou.

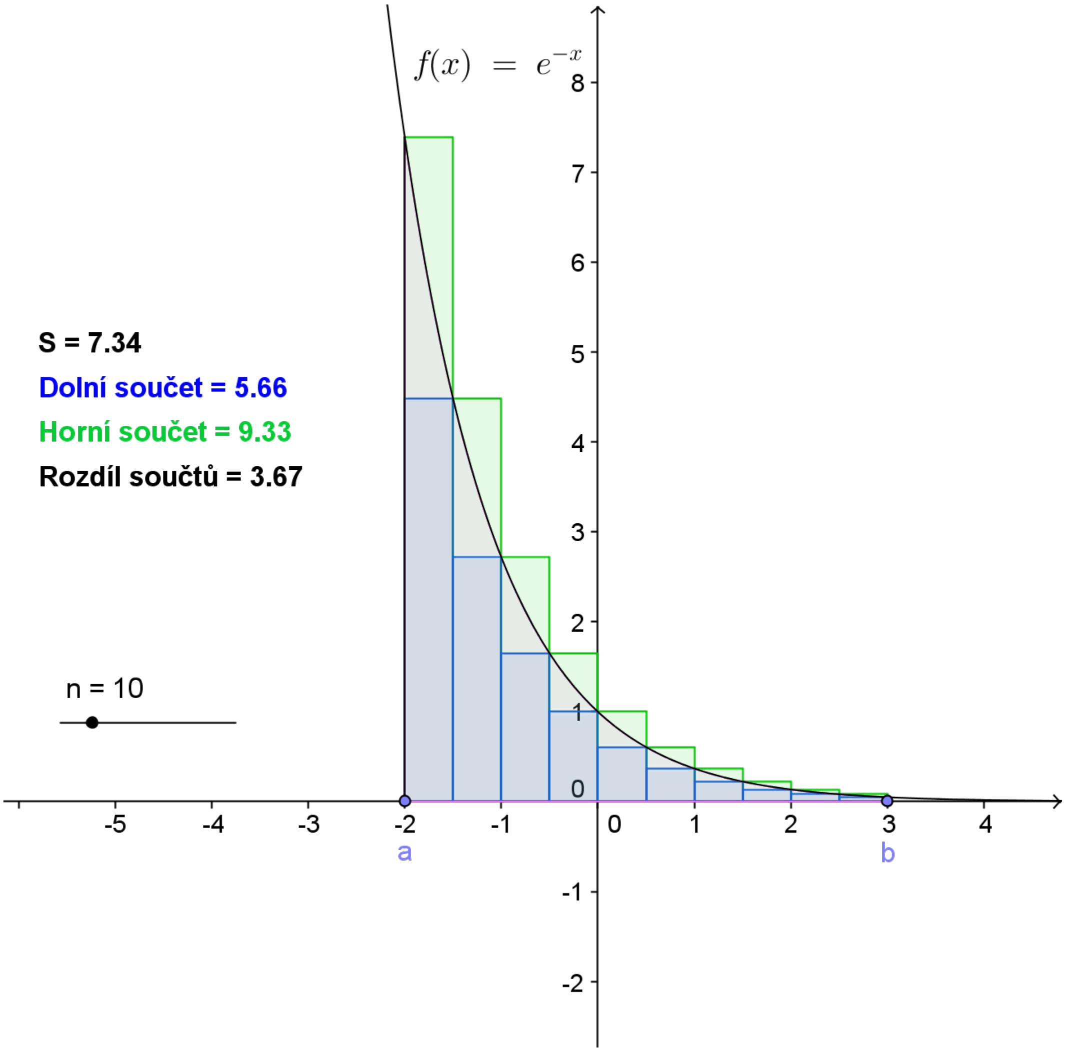
Šířka obdélníků

Výška obdélníků je tedy daná grafem funkce $f(x)$, šířku zvolíme tak, aby ji všechny obdélníky měly vždy shodnou, a postupně ji budeme měnit. Počet obdélníků, které se „vejdou“ na daný interval, tedy přímo souvisí s jejich šířkou. Tento počet je v appletu značen jako n.

Applet

Pomocí posuvníku nebo tlačítka animace si prohlédněte

- jakým způsobem se mění součet obsahů obdélníků nad (Horní součet) a pod (Dolní součet) grafem funkce $f(x)$ na daném intervalu $\langle a, b\rangle$, když se postupně zmenšuje šířka těchto obdélníků;
- jak se se zmenšující šířkou obdélníků k sobě hodnoty Dolních a Horních součtů přibližují;
- jak tyto součty souvisí se skutečným obsahem S plochy pod křivkou na tomto intervalu (určitým integrálem).



Obrázek 2.14: Applet – Riemannův integrál

Z appletu je zřejmé, že vždy platí

Dolní součet $<$ **Obsah** S **útvaru** $<$ **Horní součet**,

přičemž s rostoucím počtem obdélníků (se zmenšující se šířkou) se k sobě tyto hodnoty čím dál více přibližují (jejich rozdíl se tedy zmenšuje).

S pojmem „přiblížení se hodnotě“ jste se již dříve setkali v učivu o **limitě funkce**. Na základě znalosti limit můžeme vyslovit následující tvrzení:

Definice 2.3.1. Nechť f je funkce omezená v intervalu $\langle a, b \rangle$. Se vzrůstajícím počtem obdélníků, tedy s jejich zmenšující se šířkou, se hodnoty dolního i horního součtu limitně přibližují ke stejné hodnotě, označme tuto hodnotu S.
Číslo S nazýváme *určitým integrálem funkce f od a do b* a píšeme

$$S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka 2.3.1. Určitý integrál S je shodný s obsahem útvaru ohraničeného funkcí $f(x)$, $f(x) \geq 0$ na $\langle a, b \rangle$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$.

Poznámka 2.3.2. Výše uvedený způsob zavedení určitého integrálu se nazývá **Newton-Leibnitzova formule**.

2.3.3 Definice určitého integrálu

Definice 2.3.2. Nechť F je primitivní funkce k funkci f v uzavřeném intervalu I. Rozdíl $F(b)-F(a)$ funkčních hodnot funkce F v libovolných bodech a, b tohoto intervalu, se nazývá **určitý integrál funkce** f **v mezích od** a **do** b a značí se

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zapisujeme:

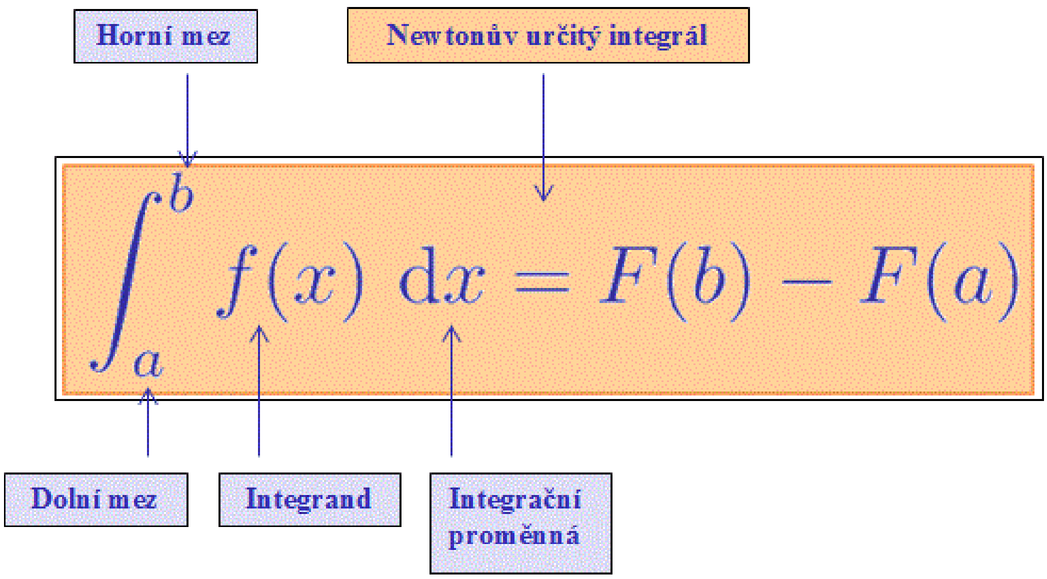
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Určitý integrál je tedy **reálné číslo** dané funkcí f a mezemi a, b.

Poznámka 2.3.3. V rozdílu $F(b) - F(a)$ se integrační konstanta c odečte. Při výpočtu s ní tedy nebudeme počítat.

Poznámka 2.3.4. Uvedený integrál se nazývá **Newtonův integrál**.

Terminologie



Obrázek 2.15: Terminologie – určitý integrál

Zápis

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

čteme takto:

„určitý integrál funkce $f(x)$ od a do b podle proměnné x“.

Poznámka 2.3.5. Pro čísla a, b může platit $a < b$, $b < a$ i $a = b$. Pro $a = b$ ale je:

$$\int_b^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(b) - F(b) = 0.$$

Při výpočtu určitého integrálu obvykle nejprve vypočítáme odpovídající neurčitý integrál, tedy bez dosazení mezí. Postup zapisujeme takto:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Příklad 2.3.1. *Vypočítejte* $\int_1^2 2x\ \mathrm{d}x$.

Řešení
V našem případě platí $a = 1$, $b = 2$, $f(x) = 2x$, $F(x) = \frac{2x^2}{2} = x^2$. Při výpočtu použijeme výše uvedený zápis.

$$\int_1^2 2x\ \mathrm{d}x = [x^2]_1^2.$$

Nyní dosadíme meze. Nejprve **horní mez** $b = 2$, poté **dolní** mez $a = 1$ a vypočítáme:

$$[x^2]_1^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$$

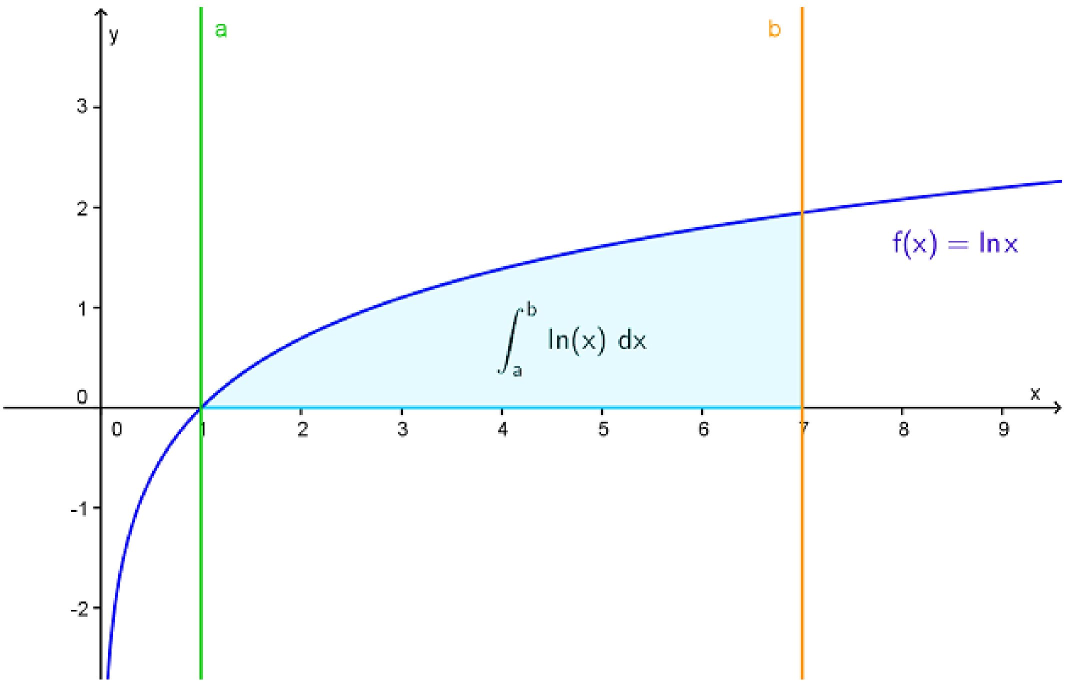
Závěr:

$$\int_1^2 2x\ \mathrm{d}x = 3$$

Poznámka 2.3.6. Pro výpočet určitého integrálu je tedy stěžejní dovednost výpočtu integrálu neurčitého.

Geometrická interpretace určitého integrálu

Pokud $f(x)$ je funkce spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, $a < b$, $f(x) \geq 0$, pak $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ udává **obsah útvaru** ohraničeného grafem funkce $f(x)$, osou x a přímkami $x = a, x = b$.



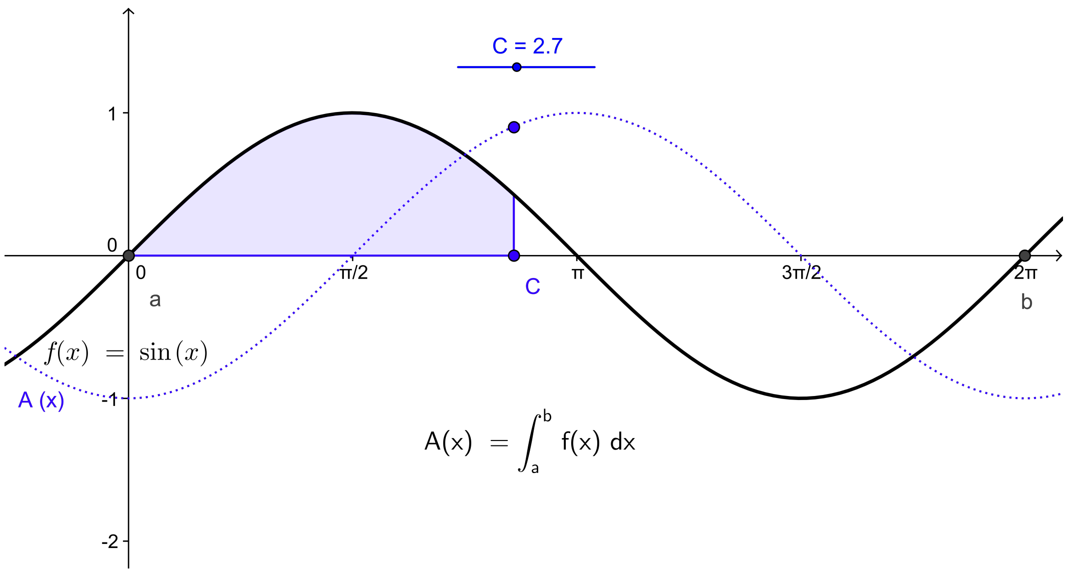
Obrázek 2.16: Geometrická interpretace určitého integrálu

Vztah určitého a neurčitého integrálu

Níže je uvedený graf známé funkce $y = \sin x$. Pohybujte bodem C pomocí posuvníku nebo animace. Všímejte si:

1. kde se vykresluje útvar ohraničený grafem funkce $y = \sin x$ a osou x, jehož obsah je shodný se součtem určitého integrálu pro $f(x) \geq 0$ a absolutní hodnoty určitého integrálu pro $f(x) \leq 0$. Pozornost věnujte také tomu, že se útvar vykresluje nad i pod osou x

2. vykreslení odpovídající „křivky neurčitého integrálu“ (čárkovaná čára), tj. že platí $\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + c$ v každém bodě daného intervalu.



Obrázek 2.17: Vztah určitého a neurčitého integrálu

2.3.4 Věty pro výpočet určitých integrálů

Věty o integraci součtu a vytknutí konstanty

Pro výpočet určitých integrálů platí analogické věty jako pro integrály neurčité (viz podkapitola 2.2.3 Věty pro výpočet neurčitého integrálu).

Věta 2.3.1. Nechť f, g jsou spojité funkce v uzavřeném intervalu I; a, b jsou libovolné body z I a c je libovolná reálná konstanta. Potom platí:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$$

$$\int_a^b cf(x)\ \mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

Příklad 2.3.2. *Vypočítejte* $\int_0^3 (2x^3 + 5x - 7)\ \mathrm{d}x$.

Řešení

$$\int_0^3 (2x^3 + 5x - 7)\ \mathrm{d}x = 2\int_0^3 x^3\ \mathrm{d}x + 5\int_0^3 x\ \mathrm{d}x - 7\int_0^3 1\ \mathrm{d}x =$$

Výpočet se zatím nijak neliší od výpočtu integrálu neurčitého. Nyní nalezneme primitivní funkce a uvedeme meze, které budeme dosazovat.

$$= 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^3 + 5\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 - 7[x]_0^3 =$$

Dále už zbývá pouze správně dosadit horní i dolní mez a vypočítat výsledek.

$$= 2\Big(\frac{3^4}{4} - \frac{0^4}{4}\Big) + 5\Big(\frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2}\Big) - 7(3 - 0) =$$

$$= 2\left(\frac{81}{4} - 0\right) + 5\left(\frac{9}{2} - 0\right) - 21 =$$

$$= \frac{81}{2} + \frac{45}{2} - \frac{42}{2} = \frac{84}{2} = 42$$

Závěr:

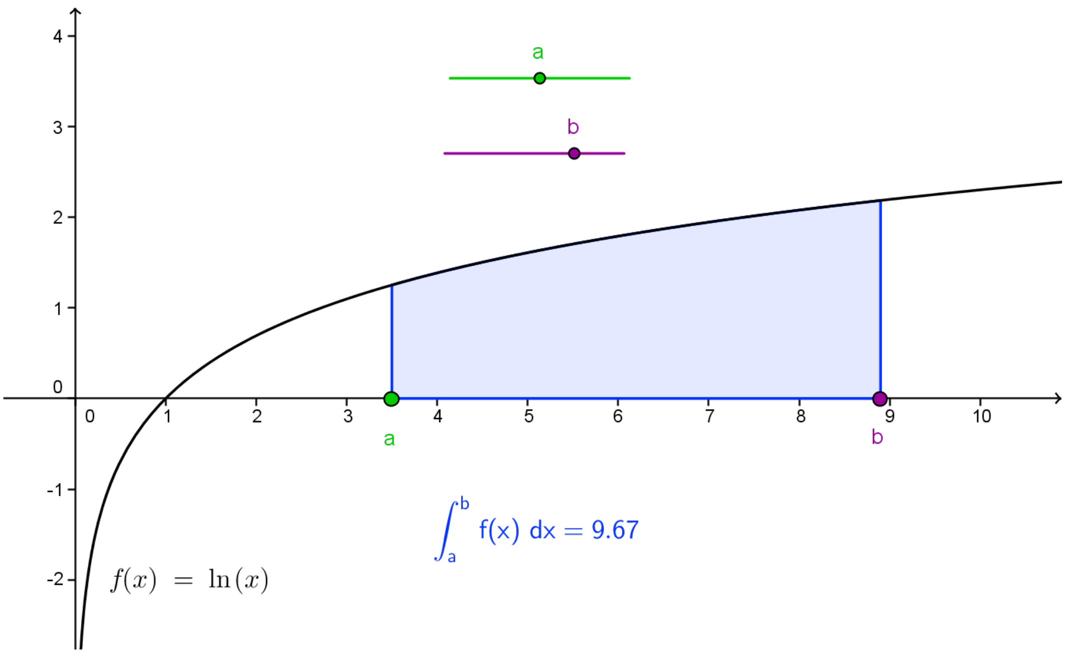
$$\int_0^3 (2x^3 + 5x - 7)\ \mathrm{d}x = 42$$

Poznámka 2.3.7. Všimněte si, že pokud je dolní mez rovna 0, „stačí dosazovat pouze mez horní“.

Meze určitého integrálu

Na níže uvedeném appletu si prohlédněte, jak souvisí hodnoty mezí (a – dolní mez, b – horní mez) s hodnotou určitého integrálu funkce $f(x) = \ln x$ na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Pohybujte posuvníkem a pro změnu meze a, posuvníkem b pro změnu meze b a sledujte, jak se mění určitý integrál.



Obrázek 2.18: Applet – Meze určitého integrálu

Zřejmě platí následující věta:

Věta 2.3.2. Je-li f spojitá a nezáporná funkce v intervalu $\langle a, b \rangle$, pak

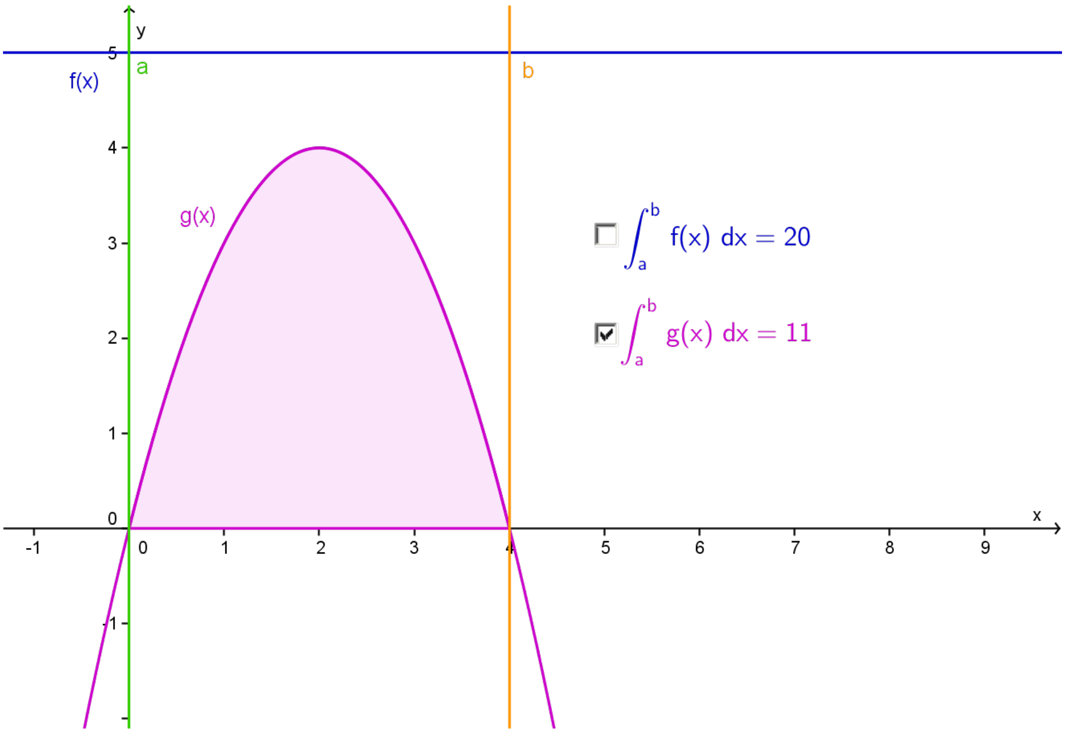
$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \geq 0.$$

Určitý integrál dvou funkcí

Věta 2.3.3. Jsou-li f, g spojité funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$ a pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ platí $f(x) \geq g(x)$, pak

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Výše uvedená věta je ilustrována na následujícím appletu. Pomocí zaškrtávacích tlačítek můžete zobrazit/skrýt určité integrály dvou funkcí $f(x), g(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$, pro něž na tomto intervalu platí pro všechna x: $f(x) \geq g(x)$.



Obrázek 2.19: Applet – Určitý integrál dvou funkcí

Záměna mezí

Věta 2.3.4. Při záměně mezí určitého integrálu platí

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Důkaz:

Důkaz vychází z definice určitého integrálu:

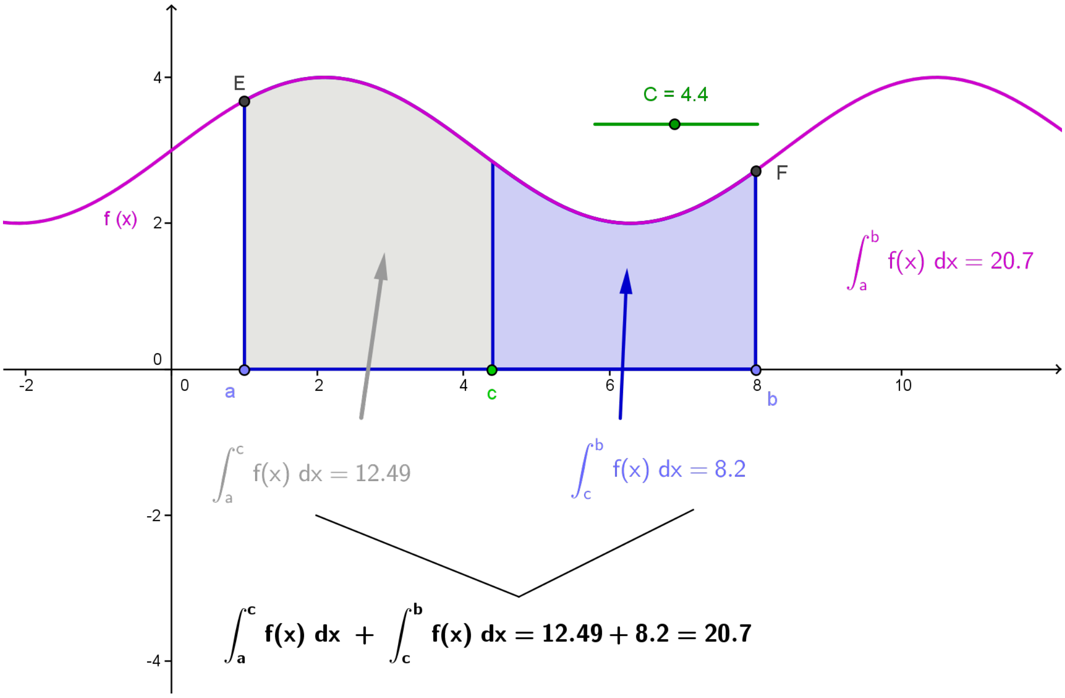
$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)\ \mathrm{d}x.$$

$\square$

Věta o aditivnosti určitého integrálu

Někdy se může stát, že je vhodné počítat určitý integrál jako součet dvou či více určitých integrálů. V takovém případě je třeba dobře si rozmyslet volbu mezí, na kterých integrujeme.

Na níže uvedeném appletu je znázorněn graf funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ a dále bod c, který leží mezi body a, b. Podívejte se, jakým způsobem se mění obsahy jednotlivých útvarů vymezených grafem funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ a osou x a jak součet těchto obsahů souvisí s „celkovou hodnotou určitého integrálu“.
Pro změnu umístění bodu c využijte posuvník nebo animaci.



Obrázek 2.20: Applet – Aditivnost určitého integrálu

Věta 2.3.5. Je-li f spojitá funkce v intervalu I, který obsahuje body a, b, c, $a \le b \le c$ pak platí:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

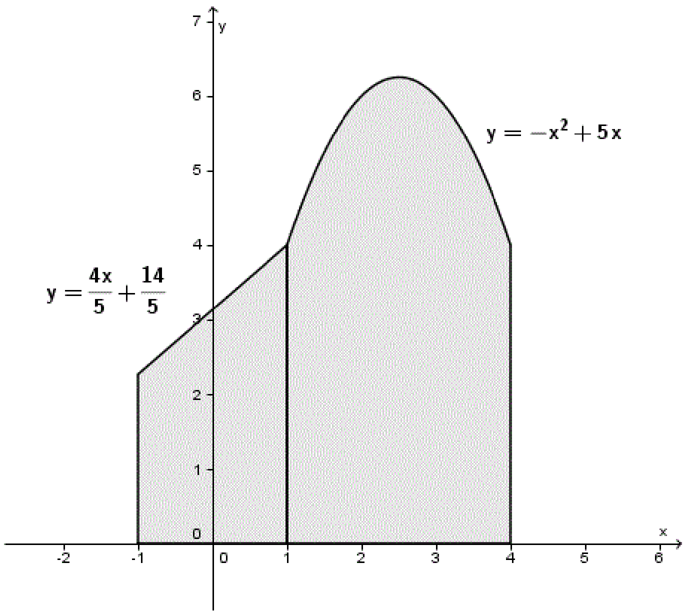
Důkaz

Důkaz opět vychází z definice určitého integrálu:

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$\square$

Příklad 2.3.3. *Vypočítejte integrál* $\int_{-1}^{4} f(x)\ \mathrm{d}x$*, je-li* $f(x) = \frac{4x}{5} + \frac{14}{5}$ *pro* $x \in \langle -1, 1\rangle$ *a* $f(x) = -x^2 + 5x$ *pro* $x \in \langle 1, 4\rangle$.



Obrázek 2.21: Náčrtek k Příkladu 2.3.3

Řešení

Podle věty o aditivnosti můžeme celý integrál rozdělit na součet dvou integrálů takto:

$$\int_{-1}^{4} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_{1}^{4} f(x)\ \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{4x}{5} + \frac{14}{5}\right)\ \mathrm{d}x + \int_{1}^{4} (-x^2 + 5x)\ \mathrm{d}x =$$

Nyní již snadno vypočteme oba určité integrály a tyto hodnoty na závěr sečteme.

$$= \frac{4}{5}\int_{-1}^{1} x\ \mathrm{d}x + \frac{14}{5}\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x - \int_{1}^{4} x^2\ \mathrm{d}x + 5\int_{1}^{4} x\ \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{4}{5}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} + \frac{14}{5}\left[x\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{1}^{4} + 5\left[\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{4} =$$

$$= \frac{4}{5}\left[\frac{1^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2}\right] + \frac{14}{5}\left[1 - (-1)\right] - \left[\frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right] + 5\left[\frac{4^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right] =$$

$$= \frac{4}{5}\cdot 0 + \frac{14}{5}\cdot 2 - \frac{63}{3} + 5\cdot\frac{15}{2} =$$

$$= \frac{28\cdot 6 - 63\cdot 10 + 75\cdot 15}{30} = \frac{663}{30} \doteq 22,1$$

2.3.5 Výpočetní metody pro určitý integrál

Metoda *per partes* pro určitý integrál

Pro určitý integrál funguje tato metoda zcela analogicky jako pro integrál neurčitý (viz podkapitola 2.2.4 Metoda per partes pro neurčitý integrál).

Věta 2.3.6. Jsou-li $u = u(x)$, $v = v(x)$ funkce mající v intervalu $\langle a, b\rangle$ spojité derivace, pak platí:

$$\int_a^b uv' \,\mathrm{d}x = [uv]_a^b - \int_a^b u'v \,\mathrm{d}x$$

Příklad 2.3.4. *Vypočítejte* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x \,\mathrm{d}x$.

Řešení

Příklad nejprve řešíme stejným způsobem, jako by se jednalo o neurčitý integrál. Musíme si tedy uvědomit, který činitel je pro nás výhodné integrovat a který derivovat. V našem případě je rozhodnutí jasné – snížíme stupeň mocniny u x derivací a tedy $y = \cos x$ budeme integrovat.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x \,\mathrm{d}x =$$

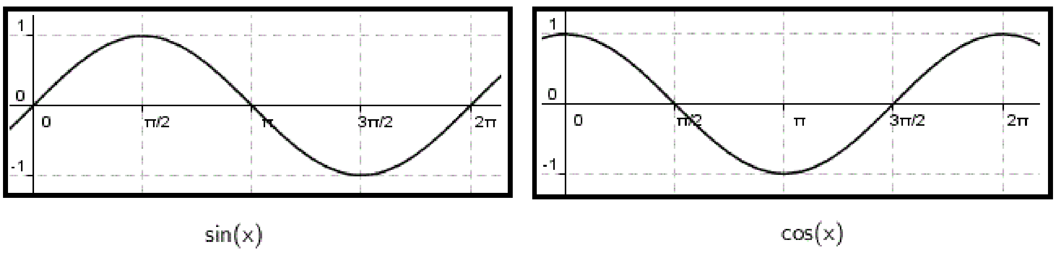
$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{array}}$$

$$= \Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,\mathrm{d}x = \Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

Nyní dosadíme meze

$$= \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0 + \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 =$$

Při dosazování mezí potřebujeme v tomto případě znát hodnoty funkcí sinus a kosinus v dosazovaných bodech. Pro připomenutí uvádíme grafy těchto funkcí na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$:



Obrázek 2.22: Grafy funkcí sinus, kosinus

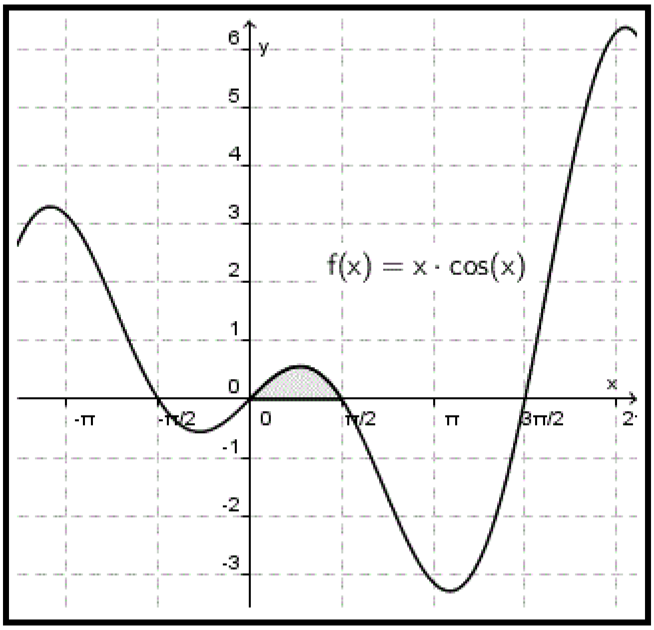
Zvláštní pozornost zaslouží dosazení nuly do argumentu $y = \cos x$. Uvědomte si, že $\cos 0 = 1$ (viz výše uvedené grafy goniometrických funkcí).

$$= \frac{\pi}{2} \cdot 1 - 0 + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

Závěr:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - 1$$

Pro lepší představu toho, co jsme právě vypočítali, je níže zobrazena čát grafu funkce $y = x \cos x$ se zvýrazněným úsekem, na němž jsme určitý integrál počítali.



Obrázek 2.23: Náčrtek k Příkladu 2.3.4

Substituční metoda pro určitý integrál

Také se substituční metodou jste se již seznámili v kapitole o neurčitém integrálu. Při výpočtu určitého integrálu existují dvě možnosti jejího použití.

1. Nejdříve určíme primitivní funkci (vlastně počítáme neurčitý integrál). Do výsledné primitivní funkce pak jen dosadíme meze.

2. Užijeme variantu substituční metody pro určitý integrál. Postupovat budeme podle následující věty.

Věta 2.3.7. Jsou-li funkce $t = g(x)$ a její derivace $g'(x)$ spojité v intervalu $\langle a, b\rangle$ a je-li zároveň spojitá i funkce $f(t)$ pro všechna $t = g(x)$, kde $x \in \langle a, b\rangle$, pak platí

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'x \, \mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) \, \mathrm{d}t.$$

Nové meze v substituci $t = g(x)$ určíme tedy jako funkční hodnoty $g(a)$, $g(b)$.

Při použití této varianty substituce tedy nesmíme zapomenout na **přepočítání mezí**.

Příklad 2.3.5. *Vypočítejte* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, \mathrm{d}x$.

Řešení
Příklad vyřešíme oběma výše uvedenými metodami. Sami tak můžete posoudit, který způsob užití metody je pro Vás výhodnější. Při dalších výpočtech samozřejmě používejte jen jednu metodu; tu, která Vám bude vyhovovat lépe.

1. Bez přepočítání mezí, přes neurčitý integrál.

$$\int \sin^2 x \cos x \, \mathrm{d}x =$$

$$\begin{array}{rcl} t & = & \sin x \\ \mathrm{d}t & = & \cos x \, \mathrm{d}x \end{array}$$

$$= \int t^2 \, \mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} + c$$

$t = \sin x$:

$$\frac{t^3}{3} = \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

Nyní dosadíme původní meze (integrační konstantu neuvažujeme - viz podkapitola 2.3.3 Definice určitého integrálu):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin^3 \frac{\pi}{2}}{3} - \frac{\sin^3 0}{3} = \frac{1^3}{3} = \frac{1}{3}$$

Závěr:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

2. Substituci provedeme s přepočítáním mezí, bez přechodu na neurčitý integrál.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, \mathrm{d}x = \int_0^1 t^2 \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{array}{rclcrcl} t & = & \sin x & \qquad & t_1 & = & \sin 0 = 0 \\ \mathrm{d}t & = & \cos x \, \mathrm{d}x & \qquad & t_2 & = & \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{array}$$

Závěr:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

Oba výpočty tedy zřejmě vedou ke stejnému výsledku, jen mírně odlišnou cestou.

2.3.6 Úlohy se slovním komentářem

Tato kapitola obsahuje řešené úlohy se slovním komentářem, ve kterých jsou ukázány různé metody řešení určitých integrálů.
Stejné úlohy bez slovního komentáře, **tedy pouze krokované, a další podobné úlohy, jsou uvedeny v dalším menu stručně nazvaném Úlohy**.
Úlohy nejsou děleny podle metod, abyste se sami pokusili vhodnou metodu stanovit.

Řešení je krokované, tj. vždy se zobrazí jen jeden následující krok výpočtu. Doporučuji Vám nezobrazit hned celé řešení, ale používat jednotlivé kroky pouze jako nápovědu.

Řešení úloh je uváděno bez ověření správnosti. Pro ověření správnosti výpočtu nalezenou primitivní funkci derivujte.

Úloha 2.3.1. *Vypočítejte* $\int_1^2 (5x^4 + 3x^2 + 8x - 10)\,\mathrm{d}x$.

- Pro řešení integrálu využijeme větu o integraci součtu a rozepíšeme si určitý integrál jako součet určitých integrálů:

$$\int_1^2 (5x^4+3x^2+8x-10)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 5x^4\,\mathrm{d}x + \int_1^2 3x^2\,\mathrm{d}x + \int_1^2 8x\,\mathrm{d}x - \int_1^2 10\,\mathrm{d}x =$$

- Integrály vyřešíme s využitím tabulky vzorců. Vyznačíme meze.

$$= \left[\frac{5x^5}{5}\right]_1^2 + \left[\frac{3x^3}{3}\right]_1^2 + \left[\frac{8x^2}{2}\right]_1^2 - \left[10x\right]_1^2 =$$

- Výrazy v hranatých závorkách zkrátíme pro usnadnění budoucích výpočtů.

$$= \left[x^5\right]_1^2 + \left[x^3\right]_1^2 + \left[4x^2\right]_1^2 - \left[10x\right]_1^2 =$$

- Do každého výrazu dosadíme nejprve horní mez, poté mez dolní. Zvláštní pozornost věnujte znaménkům před jednotlivými číselnými výrazy.

$$= \left(2^5 - 1^5\right) + \left(2^3 - 1^3\right) + \left(4\cdot 2^2 - 4\cdot 1^2\right) - \left(10\cdot 2 - 10\cdot 1\right) =$$

- Vypočítáme hodnoty výrazů v závorkách:

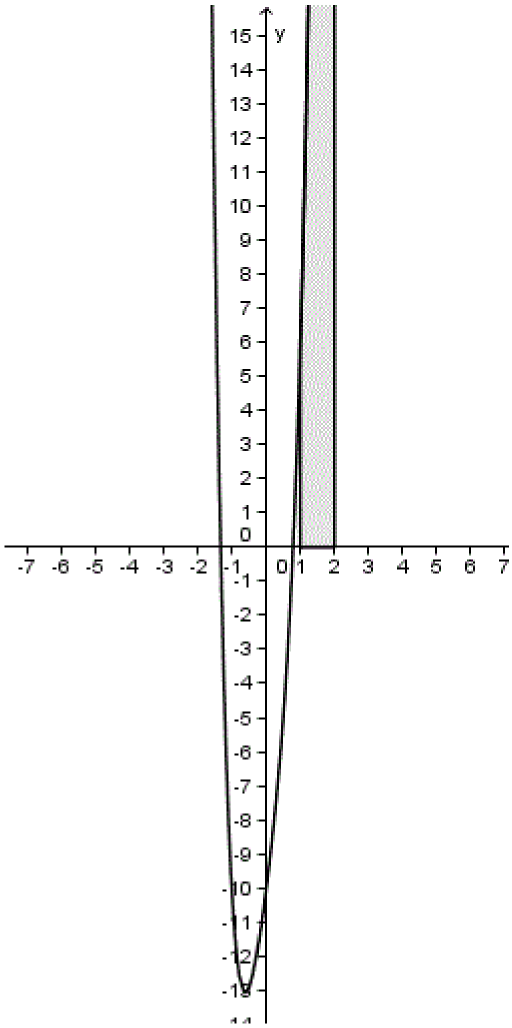
$$= (32-1) + (8-1) + (16-4) - (20-10) =$$

-

$$= 31 + 7 + 12 - 10 = 40$$

- Závěr:

$$\int_1^2 (5x^4 + 3x^2 + 8x - 10)\,\mathrm{d}x = 40$$



Obrázek 2.24: Náčrtek k Úloze 2.3.1

Úloha 2.3.2. *Vypočítejte* $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin x \ \cos^2 x \ \mathrm{d}x$.

- Úloha vede na substituční metodu řešení. Aplikaci metody si ukážeme bez i s přepočítáním mezí.

- **Bez přepočítání mezí**

  Nejprve vypočítáme odpovídající neurčitý integrál. Ten dále řešíme substituční metodou, $t = \cos x$.

$$\int \sin x \ \cos^2 x \ \mathrm{d}x =$$

$$\begin{aligned} t &= \cos x \\ \mathrm{d}t &= -\sin x \ \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Pomocný výpočet:

$$\sin x \cdot t^2 \cdot \left(\frac{-1}{\sin x}\right) \ \mathrm{d}t = -t^2 \ \mathrm{d}t$$

Rozmyslete si: Pokud si nejste jistí, proč jsme zvolili substituci právě za kosinus, zkuste si provést subtituci za sinus. Zjistíte, že se při této substituci „vykrátí“ pouze „jeden $\cos x$“", a tak v integrálu budete mít dvě proměnné x a t, což není přípustné.

- Při substituci $t = \cos x$ se výraz $\sin x$ „vykrátí“. Získaný výraz integrujeme s využitím tabulky vzorců pro výpočet neurčitého integrálu. Nezapomeneme připsat integrační konstantu.

$$= -\int t^2 \ \mathrm{d}t = -\frac{t^3}{3} + c$$

- Na základě použité substituce $t = \cos x$ platí:

$$\int \sin x \ \cos^2 x \ \mathrm{d}x = -\frac{\cos^3 x}{3} + c$$

- Nyní již přejdeme k určitému integrálu, kde již nepíšeme integrační konstantu. Nezapomeneme připsat původní meze určitého integrálu.

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin x \ \cos^2 x \ \mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos^3 x}{3}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} =$$

- Meze postupně dosadíme a dopočítáme.

$$= \left(-\frac{\cos^3 \pi}{3}\right) - \left(-\frac{\cos^3 \frac{\pi}{3}}{3}\right) =$$

-

$$= -\frac{(-1)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} = \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{8}}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

- Závěr:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin x \ \cos^2 x \ \mathrm{d}x = \frac{3}{8}$$

- **S přepočítáním mezí**

Pokud nechceme počítat přes neurčitý integrál, užijeme substituční metodu ve tvaru pro určitý integrál, tedy s přepočítáním mezí. Meze dosazujeme za proměnnou do substituované funkce.

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin x \ \cos^2 x \ \mathrm{d}x =$$

$$\begin{array}{rcl} t & = & \cos x \\ \mathrm{d}t & = & -\sin x \ \mathrm{d}x \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} t_1 & = & \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ t_2 & = & \cos\pi = -1 \end{array}$$

- Integrujeme a dosadíme přepočítané meze:

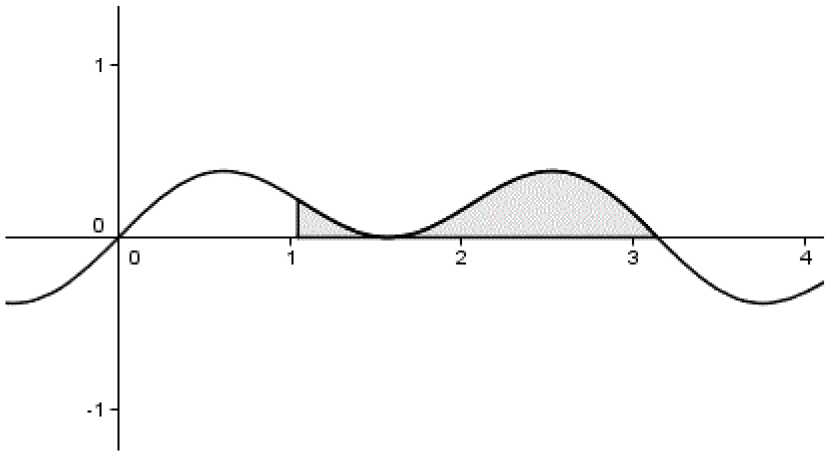
$$= -\int_{\frac{1}{2}}^{-1} t^2 \ \mathrm{d}t = \left[\frac{-t^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{-1} = -\frac{(-1)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} =$$

- Upravíme:

$$= \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{8}}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

- Závěr:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin x \ \cos^2 x \ \mathrm{d}x = \frac{3}{8}$$



Obrázek 2.25: Náčrtek k Úloze 2.3.2

Úloha 2.3.3. *Vypočítejte* $\int_2^4 (6x-5)\ln x \ \mathrm{d}x.$

- Zadání úlohy je typickým případem pro využití metody *per partes*, jelikož integrujeme součin dvou funkcí. Činitel $\ln x$ je navíc vhodné derivovat, mnohočlen $(6x-5)$ tedy budeme integrovat.

$$\int_2^4 (6x-5)\ln x \ \mathrm{d}x =$$

$u = \ln x$	$v' = 6x - 5$
$u' = \frac{1}{x}$	$v = 3x^2 - 5x$

$$= \Big[\ln x(3x^2-5x)\Big]_2^4 - \int_2^4 \frac{3x^2-5x}{x} \ \mathrm{d}x =$$

- Výrazy vykrátíme pro zjednodušení dalších výpočtů.

$$= \Big[\ln x(3x^2 - 5x) \Big]_2^4 - \int_2^4 (3x - 5)\ \mathrm{d}x =$$

- Dále řešíme podle věty o integraci součtu, integrujeme každý člen zvlášť. Nezapomeneme na meze.

$$= \Big[\ln x(3x^2 - 5x) \Big]_2^4 - \Big[\frac{3x^2}{2} - 5x \Big]_2^4 =$$

- Meze dosadíme takto:

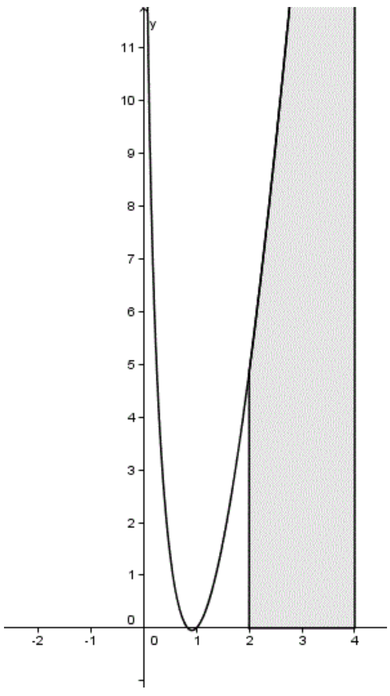
$$= ((3\cdot 4^2 - 5\cdot 4)\ln 4) - ((3\cdot 2^2 - 5\cdot 2)\ln 2) - \Big(\frac{3\cdot 4^2}{2} - 5\cdot 4\Big) + \Big(\frac{3\cdot 2^2}{2} - 5\cdot 2\Big) =$$

- Číselný výraz dále upravíme s využitím znalosti práce s logaritmy.

$$= 28\ln 4 - 2\ln 2 - (24 - 20) + (6 - 10) = 28\ln 4 - \ln 4 - 4 - 4 = 27\ln 4 - 8$$

- Závěr:

$$\int_2^4 (6x - 5)\ln x\ \mathrm{d}x = 27\ln 4 - 8$$



Obrázek 2.26: Náčrtek k Úloze 2.3.3

Úloha 2.3.4. *Vypočítejte* $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{5}{\cos^2 x} - 6x^3\right) \mathrm{d}x$.

- Podle věty o integraci rozdílu si určitý integrál rozepíšeme jako rozdíl určitých integrálů.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{5}{\cos^2 x} - 6x^3\right) \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} 6x^3 \,\mathrm{d}x =$$

- Integrujeme podle tabulky integračních vzorců. Nepřipisujeme integrační konstantu, zato nezapomeneme uvést meze.

$$= \Big[5\mathrm{tg}\; x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[6 \cdot \frac{x^4}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

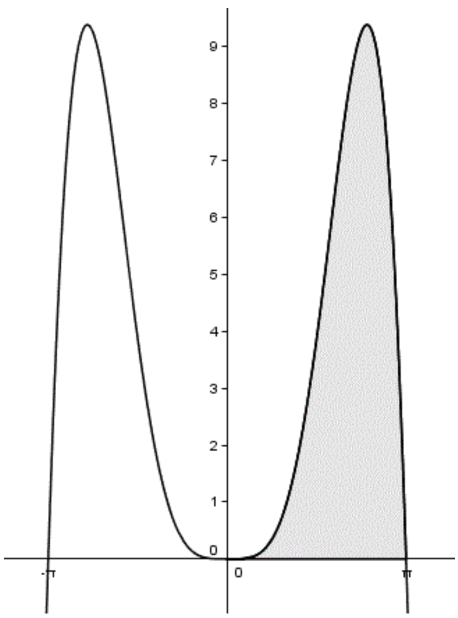
- Dosadíme meze a na základě znalosti hodnot goniometrické funkce tangens vypočítáme číselný výraz.

$$= 5 \cdot \mathrm{tg}\; \frac{\pi}{4} - 5 \cdot \mathrm{tg}\; 0 - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{\pi^4}{4}\right) + \frac{3}{2} \cdot 0^4 =$$

$$= 5 \cdot 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi^4}{256} = 5 - \frac{3\pi^4}{512}$$

- Závěr:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{5}{\cos^2 x} - 6x^3\right) \mathrm{dx} \;= 5 - \frac{3\pi^4}{512}$$



Obrázek 2.27: Náčrtek k Úloze 2.3.4

Úloha 2.3.5. *Vypočítejte* $\int_0^1 \frac{2e^x}{e^x+5}\,\mathrm{d}x$.

- Úloha vede na řešení substituční metodou. Aplikaci metody si ukážeme bez i s přepočítáním mezí.

- **Bez přepočítávání mezí**

  Nejdříve vypočítáme odpovídající neurčitý integrál. Ten dále řešíme substituční metodou. Substituujeme za celý jmenovatel, tedy výraz $(e^x + 5x)$.

$$\int \frac{2e^x}{e^x+5}\,\mathrm{d}x =$$

$$\begin{aligned} t &= e^x + 5x \\ \mathrm{d}t &= e^x\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Pomocný výpočet:

$$\frac{2e^x}{t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{e^x} = \frac{2}{t}\,\mathrm{d}t$$

- Vytkneme konstantu a integrujeme podle tabulky vzorců. Nezapomeneme připsat integrační konstantu.

$$= \int \frac{2}{t}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 2\ln|t| + c$$

- Na základě použité substituce platí $t = (e^x + 5)$ a tedy:

$$2\ln|t| + c = 2\ln|e^x+5| + c = 2\ln(e^x+5) + c$$

- Nyní již přejdeme k určitému integrálu, kde již nepíšeme integrační konstantu. Nezapomeneme uvést původní meze určitého integrálu.

$$\int_0^1 \frac{2e^x}{e^x+5}\,\mathrm{d}x = \Big[2\cdot\ln(e^x+5)\Big]_0^1 =$$

- Meze postupně dosadíme a výraz vypočítáme s využitím znalostí práce s logaritmy.

$$= 2\cdot\ln(e^1+5) - 2\cdot\ln(e^0+5) = 2\cdot\ln(e+5) - 2\cdot\ln 6 = 2\cdot\ln\frac{e+5}{6}$$

- Závěr:

$$\int_0^1 \frac{2e^x}{e^x+5}\,\mathrm{d}x = 2\cdot\ln\frac{e+5}{6}$$

- **S přepočítáváním mezí**

  Pokud nechceme pracovat s neurčitým integrálem, užijeme substituční metodu ve tvaru pro určitý integrál, tedy s přepočítáním mezí. Meze dosazujeme za proměnnou do substituované funkce.

$$\int_0^1 \frac{2e^x}{e^x+5}\,\mathrm{d}x = \int_6^{e+5} \frac{2}{t}\,\mathrm{d}t =$$

$$\begin{aligned} t &= e^x+5 \qquad & t_1 &= e^0+5=6 \\ \mathrm{d}t &= e^x\,\mathrm{d}x \qquad & t_2 &= e^1+5=e+5 \end{aligned}$$

- Dosadíme přepočítané meze.

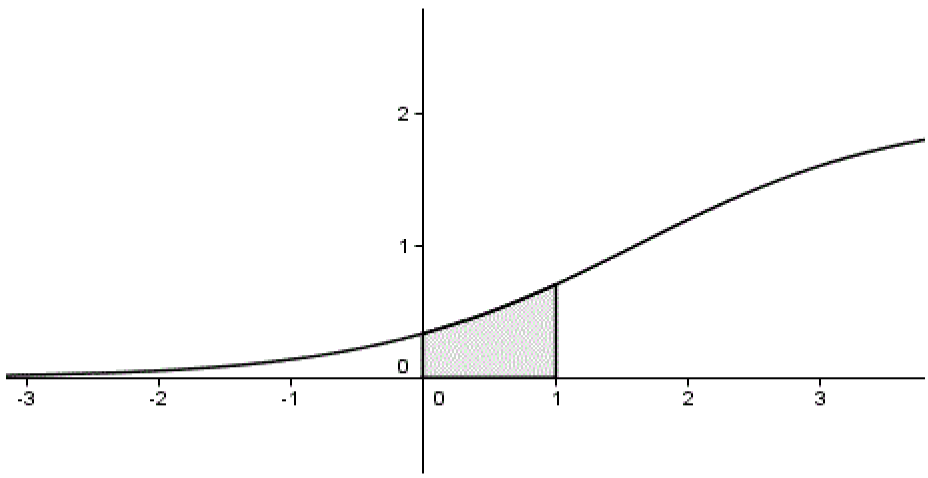
$$= 2\int_6^{e+5} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 2\Big[\ln|t|\Big]_6^{e+5} =$$

- Upravíme na základě znalosti věty pro logaritmus podílu. Argumentu logaritmu je stále nezáporný, můžeme tedy odstranit absolutní hodnotu.

$$= 2(\ln|e+5| - \ln|6|) = 2\cdot\ln\frac{e+5}{6}$$

- Závěr:

$$\int_0^1 \frac{2e^x}{e^x+5}\,\mathrm{d}x = 2\cdot\ln\frac{e+5}{6}$$



Obrázek 2.28: Náčrtek k Úloze 2.3.5

Úloha 2.3.6. *Vypočítejte* $\int_0^\pi x^3 \sin x \; \mathrm{d}x$.

- Integrujeme součin, nabízí se tedy využití metody *per partes*. Jelikož je možné oba činitele snadno integrovat i derivovat, budeme derivovat jednočlen x^3 pro snížení jeho stupně. Třetí mocnina napovídá, že bude nutné použít metodu *per partes* opakovaně.

$$\int_0^\pi x^3 \sin x \; \mathrm{d}x =$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x^3 & v' = \sin x \\ u' = 3x^2 & v = -\cos x \end{array}}$$

$$= \Big[-x^3 \cos x\Big]_0^\pi + \int_0^\pi 3x^2 \cos x \; \mathrm{d}x$$

- Získaný integrál opět obsahuje součin. Znovu aplikujeme metodu *per partes*, nyní již budeme derivovat jednočlen jen v druhé mocnině.

$$\Big[-x^3 \cos x\Big]_0^\pi + \int_0^\pi 3x^2 \cos x \; \mathrm{d}x =$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = 3x^2 & v' = \cos x \\ u' = 6x & v = \sin x \end{array}}$$

$$= \Big[-x^3 \cos x\Big]_0^\pi + \Big[3x^2 \sin x\Big]_0^\pi - \int_0^\pi 6x \sin x \; \mathrm{d}x$$

- Stále integrujeme součin a potřetí tak využijeme metodu *per partes*. Jednočlen je již jen v první mocnině, další derivací tedy proměnná „zmizí“. Při opakovaných integracích funkcí sinus a kosinus bereme zřetel na znaménka.

$$\Big[-x^3 \cos x\Big]_0^\pi + \Big[3x^2 \sin x\Big]_0^\pi - \int_0^\pi 6x \sin x \; \mathrm{d}x =$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = 6x & v' = \sin x \\ u' = 6 & v = -\cos x \end{array}}$$

$$= \Big[-x^3 \cos x\Big]_0^\pi + \Big[3x^2 \sin x\Big]_0^\pi + \Big[6x \cos x\Big]_0^\pi - \int_0^\pi 6 \cos x \; \mathrm{d}x =$$

- Dostáváme:

$$= \Big[-x^3\cos x\Big]_0^{\pi} + \Big[3x^2\sin x\Big]_0^{\pi} + \Big[6x\cos x\Big]_0^{\pi} - \Big[6\sin x\Big]_0^{\pi} =$$

- Dosadíme meze.

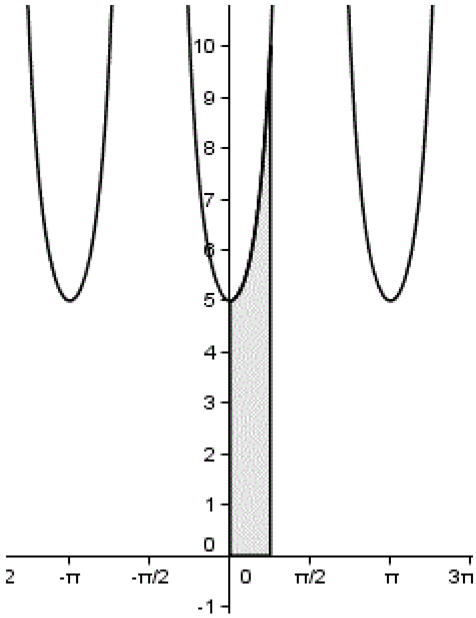
$$(-\pi^3\cos\pi + 0) + (3\pi^2\sin\pi - 0) + (6\pi\cos\pi - 0) - (6\sin\pi - 6\sin 0) =$$

- Na základě znalosti hodnot goniometrických funkcí sinus, kosinus vypočítáme a upravíme.

$$= -\pi^3\cdot(-1) + 3\pi^2\cdot 0 + 6\pi\cdot(-1) - 6\cdot 0 + 6\cdot 0 = \pi^3 - 6\pi$$

- Závěr:

$$\int_0^{\pi} x^3\sin x\ \mathrm{d}x = \pi^3 - 6\pi$$



Obrázek 2.29: Náčrtek k Úloze 2.3.6

2.3.7 Úlohy

V této kapitole jsou uvedeny některé **stejné** úlohy jako v předchozí části. Liší se v tom, že krokované řešení je zde uvedeno **bez slovního komentáře**.

Pokud Vám jakýkoli krok výpočtu není jasný, jeho vysvětlení naleznete v podkapitole 2.3.6 Úlohy s komentářem, kde je řešená buď totožná úloha, nebo úloha obdobná; případně ve výkladovém textu.

Řešení úlohy je uváděno bez ověření správnosti. Výsledek výpočtu lze zkontrolovat podle náčrtku. Z toho lze odhadnout výsledný obsah např. pomocí pomyslné čtvercové sítě.

Úloha 2.3.7. *Vypočítejte* $\int_1^2 (5x^4 + 3x^2 + 8x - 10)\ \mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int_1^2 (5x^4 + 3x^2 + 8x - 10)\ \mathrm{d}x = 40$$

Podrobné řešení se slovním komentářem viz Úloha 2.3.1.

Úloha 2.3.8. *Vypočítejte* ***bez přepočítání*** *mezí* $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin x\ \cos^2 x\ \mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin x\ \cos^2 x\ \mathrm{d}x = \frac{3}{8}$$

Podrobné řešení se slovním komentářem viz Úloha 2.3.2.

Úloha 2.3.9. *Vypočítejte* ***s přepočítáním*** *mezí* $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin x\ \cos^2 x\ \mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin x\ \cos^2 x\ \mathrm{d}x = \frac{3}{8}$$

Podrobné řešení se slovním komentářem viz Úloha 2.3.2.

Úloha 2.3.10. *Vypočítejte* $\int_2^4 (6x-5)\ln x\ \mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int_2^4 (6x-5)\ln x\ \mathrm{d}x = 27\ln 4 - 8$$

Podrobné řešení se slovním komentářem viz Úloha 2.3.3.

Úloha 2.3.11. *Vypočítejte* $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{5}{\cos^2 x} - 6x^3\right)\ \mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{5}{\cos^2 x} - 6x^3\right)\ \mathrm{d}x\ = 5 - \frac{3\pi^4}{512}$$

Podrobné řešení se slovním komentářem viz Úloha 2.3.4.

Úloha 2.3.12. *Vypočítejte* $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{5}{\cos^2 x} - 6x^3\right)\ \mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{5}{\cos^2 x} - 6x^3\right)\ \mathrm{d}x\ = 5 - \frac{3\pi^4}{512}$$

Podrobné řešení se slovním komentářem viz Úloha 2.3.4.

Úloha 2.3.13. *Vypočítejte* ***bez přepočítání*** *mezí* $\int_0^1 \frac{2e^x}{e^x+5}\ \mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int_0^1 \frac{2e^x}{e^x+5}\ \mathrm{d}x = 2 \cdot \ln\frac{e+5}{6}$$

Podrobné řešení se slovním komentářem viz Úloha 2.3.5.

Úloha 2.3.14. *Vypočítejte* ***s přepočítáním*** *mezí* $\int_0^1 \frac{2e^x}{e^x+5}\ \mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int_0^1 \frac{2e^x}{e^x+5}\ \mathrm{d}x = 2 \cdot \ln\frac{e+5}{6}$$

Podrobné řešení se slovním komentářem viz Úloha 2.3.5.

Úloha 2.3.15. *Vypočítejte* $\int_0^{\pi} x^3 \sin x \, \mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int_0^{\pi} x^3 \sin x \, \mathrm{d}x = \pi^3 - 6\pi$$

Podrobné řešení se slovním komentářem viz Úloha 2.3.6.

Úloha 2.3.16. *Vypočítejte* $\int_1^2 2x \, \mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int_1^2 2x \, \mathrm{d}x = 3$$

Podrobné řešení se slovním komentářem viz Příklad 2.3.1 v podkapitole Definice určitého integrálu.

Úloha 2.3.17. *Vypočítejte* $\int_0^3 (2x^3 + 5x - 7) \, \mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int_0^3 (2x^3 + 5x - 7) \, \mathrm{d}x = 42$$

Podrobné řešení se slovním komentářem viz Příklad 2.3.2 v podkapitole Věty pro výpočet určitých integrálů.

Úloha 2.3.18. *Vypočítejte integrál* $\int_{-1}^4 f(x) \, \mathrm{d}x$, *je-li* $f(x) = \frac{4x}{5} + \frac{14}{5}$ *pro* $x \in \in \langle -1, 1 \rangle$ *a* $f(x) = -x^2 + 5x$ *pro* $x \in \langle 1, 4 \rangle$.

Řešení:

$$\int_{-1}^4 f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{663}{30} \doteq 22{,}1$$

Podrobné řešení se slovním komentářem viz Příklad 2.3.3 v podkapitole Věty pro výpočet určitých integrálů.

Úloha 2.3.19. *Vypočítejte* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, \mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - 1$$

Podrobné řešení se slovním komentářem viz Příklad 2.3.4 v podkapitole Metoda *per partes* pro určitý integrál.

Úloha 2.3.20. *Vypočítejte* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, \mathrm{d}x$ ***bez přepočítání*** *mezí.*

Řešení:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

Podrobné řešení se slovním komentářem viz Příklad 2.3.5 v podkapitole Věty pro výpočet určitých integrálů.

2.4 Využití integrálního počtu

2.4.1 Úvod

Na středoškolské úrovni integrální počet nejčastěji využíváme ve dvou případech:

- zjišťujeme obsah rovinného útvaru ohraničeného křivkami
- zjišťujeme objem rotačního tělesa

K oběma typům těchto výpočtů využíváme určitý integrál, což vyplývá z jeho geometrické interpretace.

V následujících dvou podkapitolách budeme počítat zmíněné obsahy a objemy. Budeme zde využívat poznatky z předchozího studia, zejména grafy funkcí a jejich průsečíky.

Ve výpočtech nebudeme uvažovat jednotky délky či obsahu, neboť pro podstatu výpočtu nejsou důležité.

2.4.2 Obsah rovinného útvaru

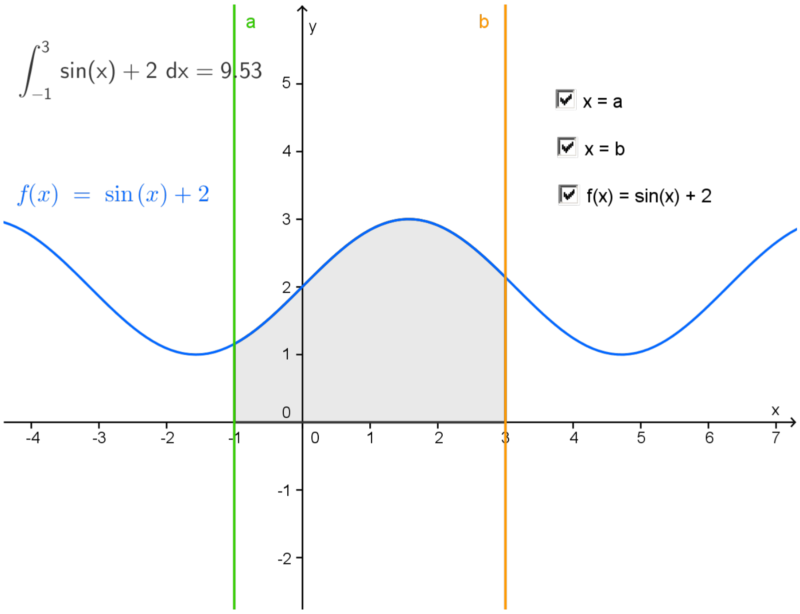
První využití určitého integrálu je nasnadě – jedná se o obsah útvaru vymezeného grafy funkcí. Seznámíme se třemi základními typy příkladů, se kerými se při výpočtech můžeme setkat.

Obsah útvaru ohraničeného grafem funkce a osou x, který se nachází na daném intervalu na jedné straně od osy x

S tímto typem příkladu jste se již seznámili v předchozích kapitolách o určitém integrálu. Rovinný útvar je zde ohraničen grafem funkce $f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$. Podívejme se na dva případy, které mohou nastat.

1. Graf funkce ohraničující útvar, jehož obsah chceme určit, leží na daném intervalu $\langle a, b\rangle$ **nad** nebo na ose x. Příklad takového útvaru je zobrazen na následujícím appletu.

   Pomocí zaškrtávacích tlačítek můžete zobrazit/skrýt graf funkce, jenž daný útvar ohraničuje shora, a dále přímky $x = a, x = b$.

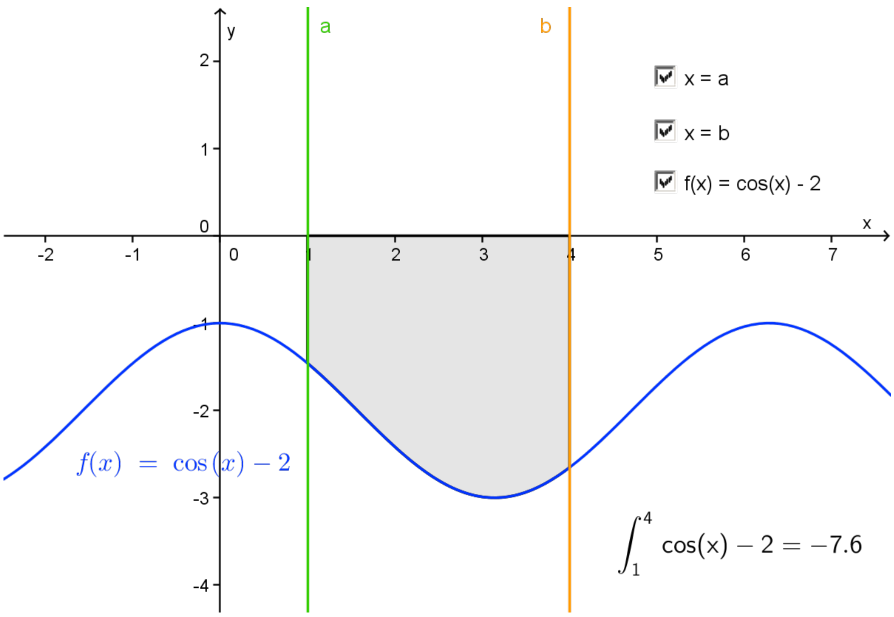


Obrázek 2.30: Applet

Dále si všimněte, že výsledný určitý integrál je **kladný**, což odpovídá představě o obsahu (záporný obsah nedává smysl).

2. Graf funkce ohraničující útvar, jehož obsah chceme určit, leží na daném intervalu $\langle a, b\rangle$ **pod** osou x. Příklad takového útvaru je zobrazen na následujícím appletu.

   Pomocí zaškrtávacích tlačítek můžete zobrazit/skrýt graf funkce, jenž daný útvar ohraničuje zdola, a dále přímky $x = a, x = b$.



Obrázek 2.31: Applet

Dále si všimněte, že určitý integrál vyšel v tomto případě **záporný**. Obsah útvaru ale musí být kladné číslo.

Z výše uvedeného vyplývá:

Obsah $S(U)$ útvaru U ohraničeného grafem funkce $f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$ určíme jako

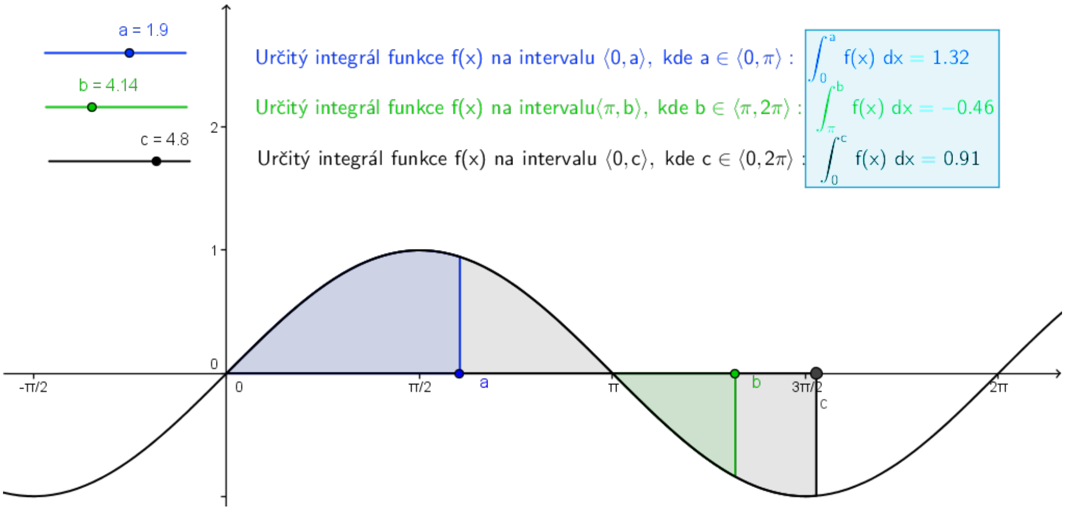
$$\boxed{\begin{array}{rcll} S(U) & = & \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x, & \text{je-li } f(x) \geq 0 \text{ pro všechna } x \in \langle a, b \rangle, \\ S(U) & = & \left| \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \right| = -\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x, & \text{je-li } f(x) \leq 0 \text{ pro všechna } x \in \langle a, b \rangle. \end{array}}$$

Obsah útvaru ohraničeného osou x a grafem funkce, který se nachází na daném intervalu nad i pod osou x

Podívejte se na graf funkce $f(x) = \sin x$. Pomocí změny posuvníků si prohlédněte, jak se liší určité integrály (v modrém rámečku), pokud graf probíhá nad osou x (posuvník a) a pod osou x (posuvník b).

Zejména se pak zaměřte na posuvník c, který umožňuje zobrazit určitý integrál funkce $f(x)$ na celém intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Sledujte, jak se mění určitý integrál při přechodu grafu funkce z poloroviny nad osou x do poloroviny pod osou x.



Obrázek 2.32: Applet

Jak je vidět z uvedeného appletu, určitý integrál na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ je roven 0. Obsah vymezeného útvaru ale roven nule jistě není. Z předcházejících poznatků snadno odvodíme, že obsah takovéhoto útvaru vypočítám vhodnou kombinací výše uvedených vzorců pro útvary, které leží v jedné polorovině nad/pod osou x. V tomto konkrétním případě tedy bude pro výpočet obsahu útvaru ohraničeného grafem funkce $f(x)$ a osou x platit:

$$S(U) = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\, \mathrm{d}x,$$

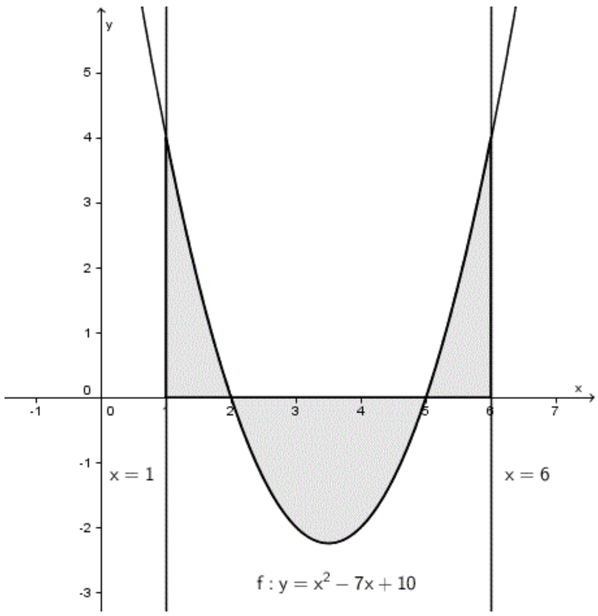
kde $a,\ b,\ c$ jsou hraniční body intervalů, na kterých leží útvar v jedné polorovině.

Příklad 2.4.1. *Vypočítejte obsah útvaru ohraničeného grafem funkce f: $f(x) = x^2 - 7x + 10$, a dále přímkami $x = 1$, $x = 6$, $y = 0$.*

Řešení

Nejdříve zadaný útvar načrtneme pro získání představy o poloze útvaru vůči ose x (zadaná rovnici $y = 0$).

Náčrtek:



Obrázek 2.33: Náčrtek k Příkladu 2.4.1

(Pro náčrtek paraboly využijeme nulových bodů kvadratické funkce.)

Z náčrtku je již zřejmé, jakým způsobem výpočet integrálu rozdělíme a který integrál bude mít kladné/záporné znaménko:

- Na intervalech $\langle 1, 2\rangle$ a $\langle 5, 6\rangle$ leží útvar **nad** a na ose x. Určité integrály s těmito mezemi tedy budou mít **kladné** znaménko.
- Na intervalu $\langle 2, 5\rangle$ leží útvar **pod** nebo na ose x. Určitý integrál s těmito mezemi bude mít tedy **záporné** znaménko.

Dostáváme:

$$S(U) = \int_1^2 (x^2 - 7x + 10)\ \mathrm{d}x - \int_2^5 (x^2 - 7x + 10)\ \mathrm{d}x + \int_5^6 (x^2 - 7x + 10)\ \mathrm{d}x =$$

Počítáme takto:

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 10x\right]_1^2 - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 10x\right]_2^5 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 10x\right]_5^6 =$$

$$= \Big[\Big(\frac{2^3}{3}-\frac{7\cdot 2^2}{2}+10\cdot 2\Big)-\Big(\frac{1^3}{3}-\frac{7\cdot 1^2}{2}+10\cdot 1\Big)\Big]-\Big[\Big(\frac{5^3}{3}-\frac{7\cdot 5^2}{2}+10\cdot 5\Big)-\Big(\frac{2^3}{3}-\frac{7\cdot 2^2}{2}+10\cdot 2\Big)\Big]+$$

$$+\Big[\Big(\frac{6^3}{3}-\frac{7\cdot 6^2}{2}+10\cdot 6\Big)-\Big(\frac{5^3}{3}-\frac{7\cdot 5^2}{2}+10\cdot 5\Big)\Big]=$$

$$=\Big[\frac{8}{3}-14+20-\frac{1}{3}+\frac{7}{2}-10\Big]-\Big[\frac{125}{3}-\frac{175}{2}+50-\frac{8}{3}+14-20\Big]+\Big[\frac{216}{3}-\frac{252}{2}+60-\frac{125}{3}+\frac{175}{2}-50\Big]=$$

$$=\frac{7}{3}-4+\frac{7}{2}-\frac{117}{3}+\frac{175}{2}-44+\frac{91}{3}-\frac{77}{2}+10=$$

$$=-\frac{19}{3}+\frac{105}{2}-38=\frac{49}{6}\doteq 8,17$$

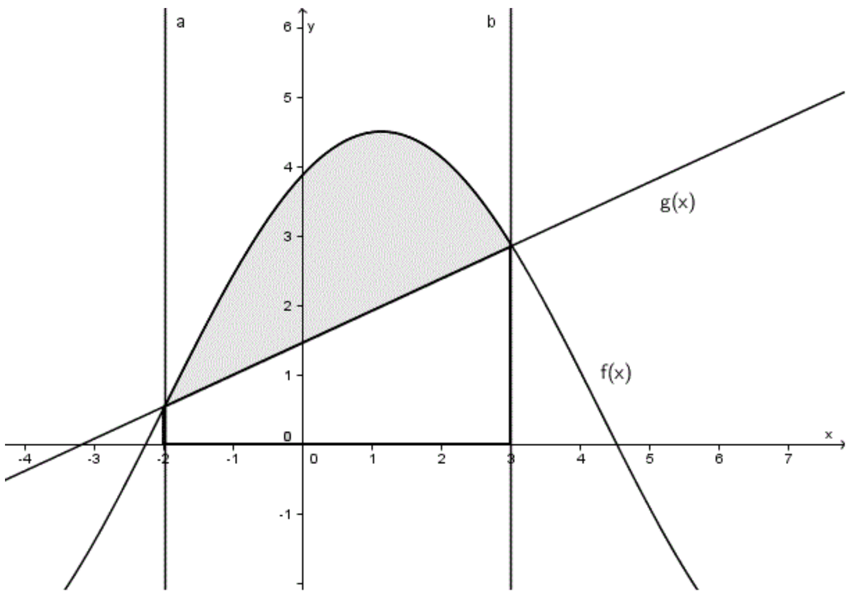
Závěr:

$$S(U)\doteq 8,17$$

Poznámka 2.4.1. Výsledek výpočtu je vhodné zkontrolovat podle náčrtku, ze kterého odhadnout výsledný obsah např. s využitím čtvercové sítě.

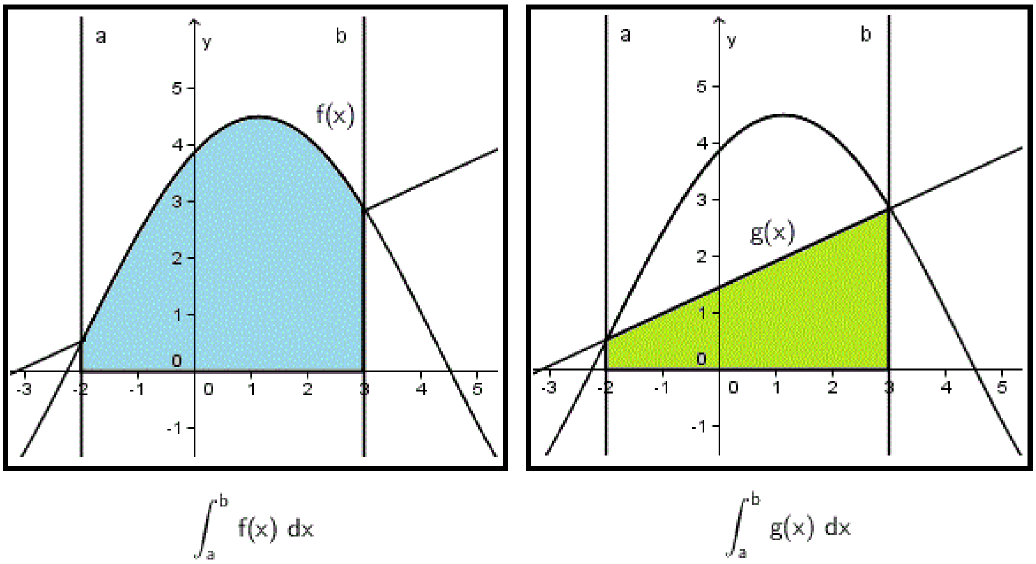
Obsah útvaru ohraničeného grafy dvou funkcí

Další typ příkladů, se kterými se setkáváme, se liší od předcházejících tím, že zde nefiguruje osa x. Útvar, jehož obsah hledáme, je určen grafy dvou funkcí a případně přímkami $x = a$, $x = b$. Příklad takového útvaru je zobrazen na Obrázku 2.34.



Obrázek 2.34: Útvar ohraničený grafy dvou funkcí

Při určení obsahu takového útvaru vyjdeme z toho, co již umíme vypočítat. Takové útvary jsou zobrazeny na Obrázku 2.35:



Obrázek 2.35: Pomocné útvary

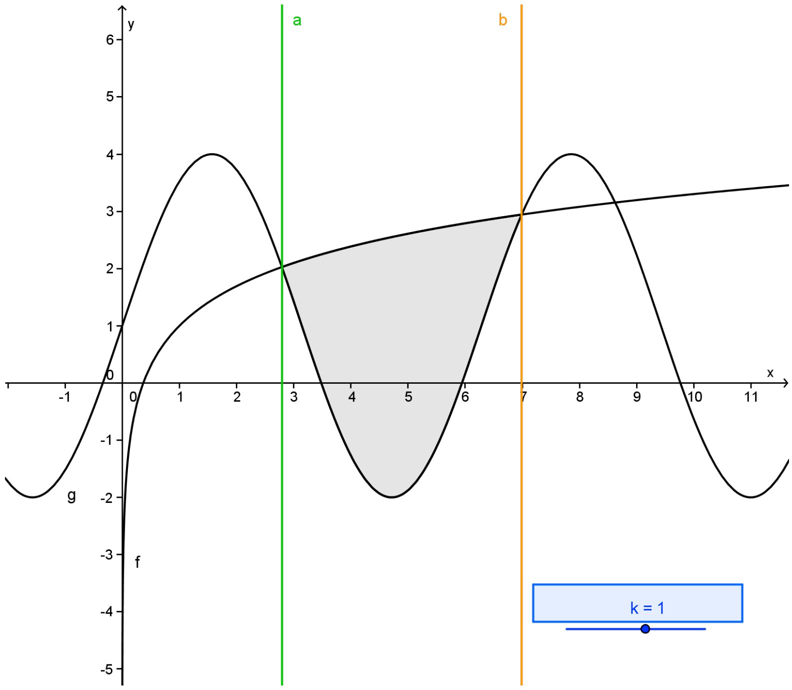
Snadnou úvahou nyní odvodíme, že obsah původního šedivého útvaru vypočítáme, když odečteme obsah zeleného útvaru od obsahu útvaru modrého.
Uvedený závěr nyní shrneme do věty.

Věta 2.4.1. *Nechť U je útvar ohraničený grafy funkcí $y = f(x)$, $y = g(x)$ a přímkami $x = a$, $x = b$, přičemž $f(x) \geq g(x)$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$. Obě funkce jsou na daném intervalu spojité a nezáporné. Potom obsah S útvaru U vypočítáme jako*

$$S(U) = \int_a^b [f(x) - g(x)]\ \mathrm{d}x.$$

Výše uvedená věta byla formulována pro případ, že jsou obě funkce na daném intervalu nezáporné. Pokusme se nyní zamyslet nad tím, zda bude vztah platit i tehdy, když aspoň jedna z funkcí bude nabývat na intervalu také záporných hodnot.

Pro ilustraci je níže zobrazen útvar, jehož jeden hraniční graf funkce nabývá v části daného intervalu $\langle a, b\rangle$ také záporných hodnot. Pomocí modrého posuvníku k lze grafy obou funkcí $f(x)$, $g(x)$ zároveň posouvat o stejnou hodnotu „nahoru“ a „dolů“. Co se děje s obsahem útvaru?



Obrázek 2.36: Applet

Posouváním grafů obou funkcí stejným směrem o stejnou konstantu se zřejmě **nemění** obsah jimi ohraničeného útvaru.

Pokud pohneme posuvníkem tak, aby již obě funkce nabývaly na daném intervalu pouze nezáporných hodnot, převedeme tento příklad na předchozí.

Závěr: Vzorec

$$S(U) = \int_a^b [f(x) - g(x)] \, \mathrm{d}x$$

lze použít také pro výpočet obsahu útvaru, jehož alespoň jedna hraniční funkce nabývá na daném intervalu záporných hodnot.

Důkaz

Uvědomme si, že posunutí posuvníku v appletu znamená přičtení konstanty k předpisu funkce. K oběma funkcím přičítáme **stejnou** konstantu. Označme tuto konstantu c. Dále víme, že přičtením stejné konstanty k oběma funkcím se obsah útvaru, a tedy i určitý integrál, nemění. Platí:

$$S(U) = \int_a^b [(f(x)+c)-(g(x)+c)] \, \mathrm{d}x = \int_a^b [f(x)+c-g(x)-c] \, \mathrm{d}x = \int_a^b [f(x)-g(x)] \, \mathrm{d}x$$

$\square$

Příklad 2.4.2. *Vypočítejte obsah útvaru ohraničeného grafy funkcí* $f: y = -x^2 + 5x + 2$ *a* $g: y = 7 - x$.

Řešení

V zadání nemáme dáno, na jakém intervalu počítáme, ani to, zda je na tomto intervalu $f(x) \geq g(x)$ nebo $g(x) \geq f(x)$. To určíme z náčrtku a z výpočtu průsečíků grafů těchto funkcí.

Připomeňme, že průsečíky grafů dvou funkcí získáme takto:

$$-x^2 + 5x + 2 = 7 - x$$

Odtud:

$$-x^2 + 6x - 5 = 0$$

Dále řešíme tuto kvadratickou rovnici (např. přes diskriminant):

$$\begin{aligned} D &= 36 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5) = 16 \\ \sqrt{D} &= 4 \\ x_{1,2} &= \tfrac{-6 \pm 4}{-2} \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= 5 \end{aligned}$$

Dostali jsme dvě řešení, tedy dvě x-ové souřadnice dvou průsečíků. Nyní pro oba dopočítáme y-ovou souřadnici.

$x_1 = 1$:

$$\begin{aligned} y_1 &= 7 - x_1 \\ y_1 &= 7 - 1 \\ y_1 &= 6 \end{aligned}$$

První průsečík má tedy souřadnice:

$$P_1 = [1; 6]$$

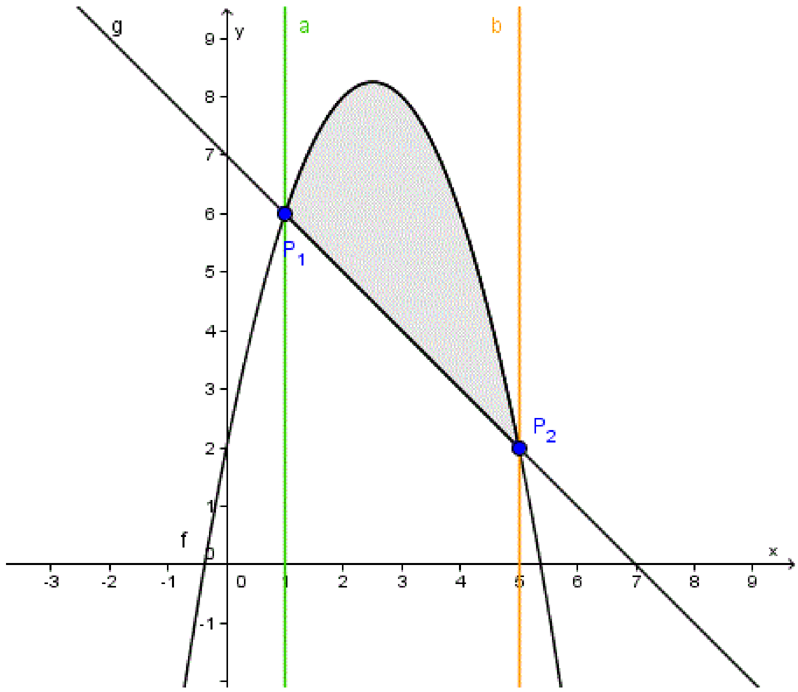
$x_2 = 5$:

$$\begin{aligned} y_2 &= 7 - x_2 \\ y_2 &= 7 - 5 \\ y_2 &= 2 \end{aligned}$$

Druhý průsečík má tedy souřadnice:

$$P_2 = [5; 2]$$

Náčrtek situace je uveden na Obrázku 2.37:



Obrázek 2.37: Náčrtek

V náčrtku jsou zvýrazněné i hraniční přímky. Nyní již vidíme, že integrovat budeme na intervalu $\langle 1,5\rangle$ a že na celém tomto intervalu je $f(x) \geq g(x)$.
Platí:

$$S(U) = \int_1^5 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_1^5 (-x^2+5x+2-7+x)\,\mathrm{d}x = \int_1^5 (-x^2+6x-5)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{-x^3}{3} + 3x^2 - 5x\right]_1^5 = \left(\frac{-5^3}{3} + 3\cdot 5^2 - 5\cdot 5\right) - \left(\frac{-1^3}{3} + 3\cdot 1^2 - 5\cdot 1\right) =$$

$$= -\frac{125}{3} + 75 - 25 + \frac{1}{3} - 3 + 5 = -\frac{124}{3} + 52 = \frac{32}{3} \doteq 10,7$$

Závěr: Obsah útvaru je přibližně $10,7$.

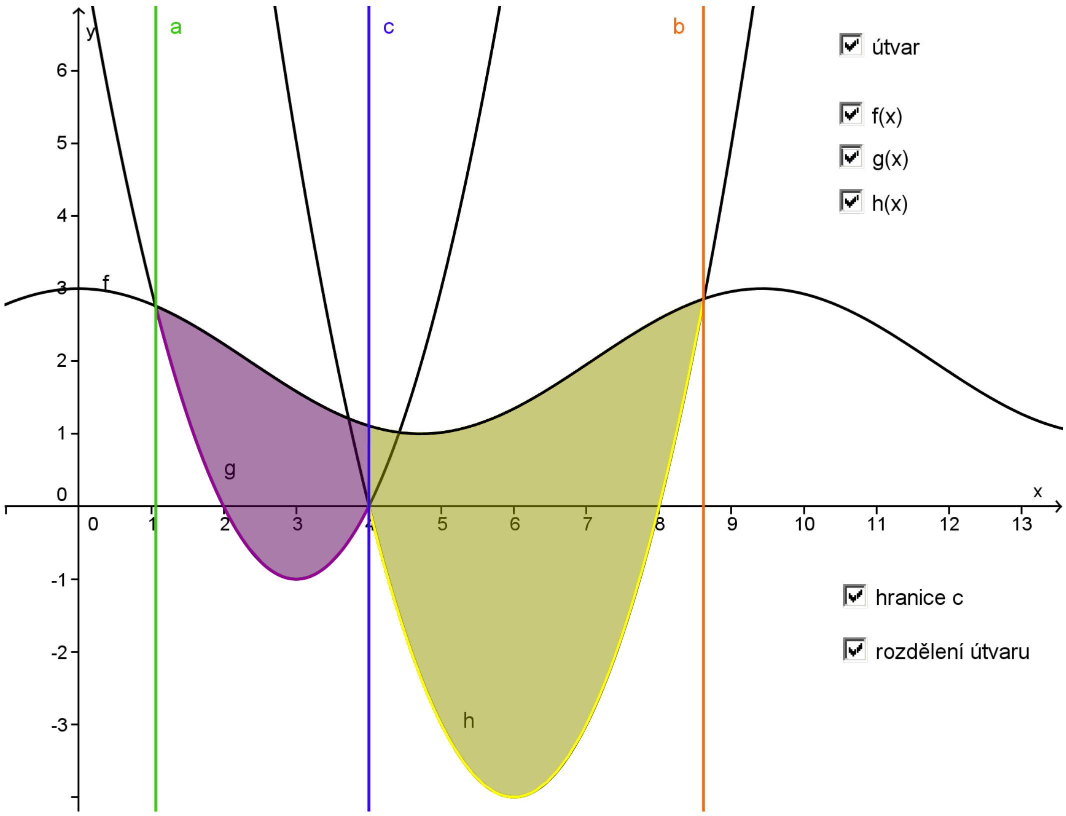
Obsah útvaru ohraničeného grafy tří funkcí

Poslední typ příkladů v sobě spojuje všechny dosavadní znalosti o výpočtech obsahů rovinných útvarů. Pojďme si ukázat příklad takového rovinného útvaru.

Níže uvedený útvar je shora ohraničený grafem funkce f a zdola částečně grafem funkce g a částečně grafem funkce h.

Všechny grafy si můžete postupně zobrazit zaškrtnutím příslušných políček. Pokud zaškrtnete také políčko „hranice c“, zobrazí se přímka rozdělující daný útvar na dva útvary. Každý už ohraničují jen dva grafy a hraniční přímka. Tím jsme úlohu převedli na předchozí případ.

Obsah celého útvaru určíme tak, že vypočítáme obsahy dvou dílčích útvarů (v appletu je zobrazíte zaškrtnutím políčka „rozdělení útvaru“) a ty poté sečteme – využijeme větu o aditivnosti určitého integrálu.



Obrázek 2.38: Applet

Jsou dány dva rovinné útvary U_1, U_2. Za podmínek $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $U = U_1 \cup U_2$ platí:

$$S(U) = S(U_1) + S(U_2),$$

kde

$$S(U_1) = \int_a^c (f(x) - g(x))\ \mathrm{d}x$$

$$S(U_2) = \int_c^b (f(x) - h(x))\ \mathrm{d}x$$

Připomeňme, že menšencem v rozdílu je vždy ta funkce, jejíž funkční hodnoty jsou na daném intervalu větší nebo rovny než funkční hodnoty funkce, která je menšitelem.

Příklad 2.4.3. *Určete obsah útvaru ohraničeného grafy funkcí $f : y = 5x - 2$, $g : y = -\frac{x}{3} + \frac{26}{3}$ a $h : y = x^2 - 5x + 7$, který celý leží v* ***pravé*** *polorovině od osy y.*

Řešení

V zadání není dáno, na jakém intervalu se útvar nachází. Abychom nalezli hraniční body intervalu, vypočítáme průsečíky grafů daných funkcí. Poté grafy funkcí načrtneme a z náčrtku odvodíme, na jakých mezích budeme integrovat.

Výpočet průsečíků
Průsečíky nalezneme tak, že položíme předpisy příslušných funkcí do rovnosti. Tím zjistíme x-ovou souřadnici průsečíku. Pro dopočítání y-ové souřadnice stačí dosadit vypočtené x do předpisu jedné z funkcí, jejichž průsečík hledáme.

1. f a g:

$$\begin{aligned} 5x-2 &= -\tfrac{x}{3}+\tfrac{26}{3} \quad && / \cdot 3 \\ 15x-6 &= -x+26 \\ 16x &= 32 && / : 16 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Dosadíme za x do předpisu funkce f:

$$\begin{aligned} y &= 5x-2 \\ y &= 5\cdot 2-2 \\ y &= 8 \end{aligned}$$

První průsečík má tedy souřadnice:

$$P_1 = [2; 8]$$

2. g a h:

$$\begin{aligned} -\tfrac{x}{3}+\tfrac{26}{3} &= x^2-5x+7 \quad && / \cdot 3 \\ -x+26 &= 3x^2-15x+21 \\ 3x^2-14x-5 &= 0 \\ D &= 196-4\cdot 3\cdot(-5) \\ D &= 256 \\ \sqrt{D} &= 16 \\ x_{2,3} &= \tfrac{14\pm 16}{6} \\ x_2 &= 5 \\ x_3 &= -\tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Dostali jsme dvě řešení. Podle náčrtku později snadno určíme, které je pro dané zadání hraničním bodem. Nyní dopočítáme y-ové souřadnice.

$x_2 = 5$:

$$\begin{aligned} y &= x^2-5x+7 \\ y &= 7 \end{aligned}$$

Druhý průsečík má tedy souřadnice:

$$P_{2a} = [5; 7]$$

$x_3 = -\frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 5x + 7 \\ y &= \frac{79}{9} \end{aligned}$$

Třetí průsečík má tedy souřadnice:

$$P_{2b} = \left[-\frac{1}{3}; \frac{79}{9}\right]$$

3. f a h:

$$\begin{aligned} 5x - 2 &= x^2 - 5x + 7 \\ x^2 - 10x + 9 &= 0 \\ D &= 100 - 4 \cdot 9 \\ D &= 64 \\ \sqrt{D} &= 8 \\ x_{4,5} &= \tfrac{10 \pm 8}{2} \\ x_4 &= 9 \\ x_5 &= 1 \end{aligned}$$

Opět jsme dostali dvě řešení. Vypočítáme příslušné y-ové souřadnice a z náčrtku určíme, které je pro dané zadání hraničním bodem.

$x_4 = 9$:

$$\begin{aligned} y &= 5x - 2 \\ y &= 43 \end{aligned}$$

Čtvrtý průsečík má tedy souřadnice:

$$P_{3a} = [9; 43]$$

$x_5 = 1$:

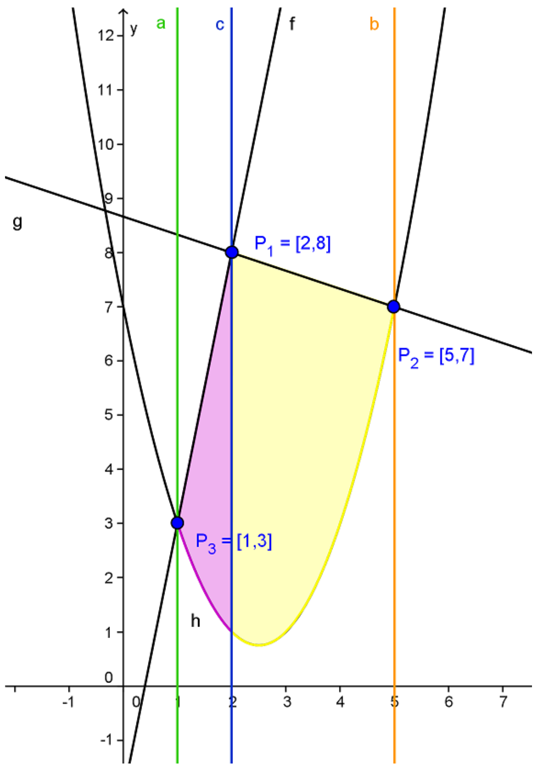
$$\begin{aligned} y &= 5x - 2 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Pátý průsečík má tedy souřadnice:

$$P_{3b} = [1; 3]$$

Náčrtek
Náčrtek je zobrazen v podobě appletu. Na začátku jsou zobrazeny grafy všech tří funkcí. Z náčrtku je patrné, že tyto grafy ohraničují dva útvary. Zaškrtnutím políčka „útvar“ zobrazíte ten, který leží celý napravo od osy y, jak bylo uvedeno v zadání příkladu. Jeho obsah tedy budeme počítat. Dále v náčrtku můžete zobrazit průsečíky, které nám určují hraniční body útvaru. Jejich x-ové souřadnice určí rovnice hraničních přímek. Také ty lze zobrazit pomocí zaškrtávacího políčka.

Přestože je útvar ohraničen třemi grafy, jeho obsah snadno vypočítáme tak, že úlohu převedeme na známý případ útvaru ohraničeného jen dvěma grafy. K tomu nám dopomáhá hraniční přímka c.



Obrázek 2.39: Applet

Nyní již vidíme, že daný útvar rozdělíme přímkou c na dva, jejichž obsahy známým způsobem vypočítáme. Pro získání celkového obsahu je poté sečteme. Útvary v appletu zobrazíte, když zaškrtnete políčko „rozdělení útvaru“.

Průsečíky, které nám určují hraniční přímky, jsou tedy tyto:

$$\begin{aligned} P_1 &= [2;8] \\ P_{2a} &= [5;7] \\ P_{3b} &= [1;3] \end{aligned}$$

Určují **hraniční přímky** o rovnicích:

$$\begin{aligned} a: \quad x &= 1 \\ b: \quad x &= 5 \\ c: \quad x &= 2 \end{aligned}$$

Počítat tedy budeme:

1. Obsah útvaru ohraničeného grafy funkcí $f : y = 5x - 2$, $h : y = x^2 - 5x + 7$ a přímkou $x = 2$, přičemž hodnoty mezí jsou $a = 1$, $b = 2$.
2. Obsah útvaru ohraničeného grafy funkcí $g : y = -\frac{x}{3} + \frac{26}{3}$, $h : y = x^2 - 5x + 7$ a přímkou $x = 2$, přičemž hodnoty mezí jsou $a = 2$, $b = 5$.

Integrujeme takto:

1.

$$S(U_1) = \int_1^2 [f(x) - h(x)]\,\mathrm{d}x = \int_1^2 (5x - 2 - x^2 + 5x - 7)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 (-x^2 + 10x - 9)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \Big[-\frac{x^3}{3} + 5x^2 - 9x\Big]_1^2 = \Big(-\frac{2^3}{3} + 5 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2\Big) - \Big(-\frac{1^3}{3} + 5 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1\Big) =$$

$$= -\frac{8}{3} + 20 - 18 + \frac{1}{3} - 5 + 9 = -\frac{7}{3} + 6 = \frac{11}{3} \doteq 3,7$$

$$S(U_1) \doteq 3,7$$

2.

$$S(U_2) = \int_2^5 [g(x) - h(x)]\,\mathrm{d}x = \int_2^5 \Big(\frac{-x}{3} + \frac{26}{3} - x^2 + 5x - 7\Big)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \Big[\frac{-x^2}{6} + \frac{26}{3}x - \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 7x\Big]_2^5 = \Big[\frac{-x^3}{3} + \frac{14x^2}{6} + \frac{5}{3}x\Big]_2^5 = \frac{1}{3}\Big[-x^3 + 7x^2 + 5x\Big]_2^5 =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot [(-5^3 + 7 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5) - (-2^3 + 7 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2)] =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot [-125 + 175 + 25 + 8 - 28 - 10] = \frac{1}{3} \cdot 45 = 15$$

$$S(U_2) = 15$$

Platí:

$$\begin{aligned}
S(U) &= S(U_1) + S(U_2) \\
S(U) &= \frac{11}{3} + 15 \\
S(U) &\doteq 18,7
\end{aligned}$$

Závěr: Obsah útvaru je přibližně 18, 7.

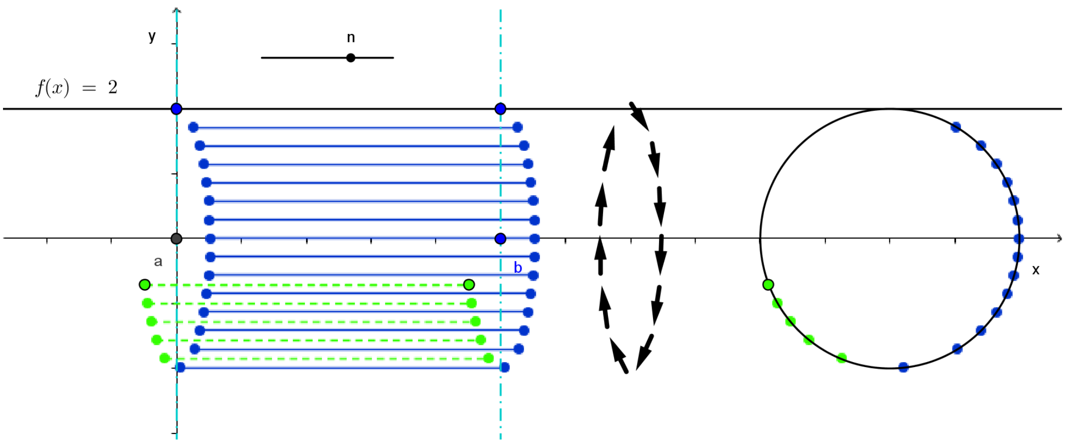
2.4.3 Objem rotačního tělesa

Rotační těleso je takové těleso, které vznikne rotací rovinného útvaru kolem dané přímky. Příklady dvou nejznámějších rotačních těles jsou uvedeny na následujících appletech.

Rotační válec

Podívejte, se jak vzniká plášť rotačního válce. Na následujícím appletu je zobrazen graf funkce $f(x) = 2$, jedná se tedy o rovnoběžku s osou x procházející bodem 2 na ose y. Tuto přímku necháme rotovat kolem osy x. Aby nám vznikl plášt válce o výšce $b-a$, omezíme se na rotaci pro $x \in \langle a, b\rangle$, tedy na rotaci úsečky.

Pomocí posuvníku nebo animace pozorujte vznik pláště válce. Vlevo od rotačních šipek je znázorněn pohled z boku, vpravo pohled zdola.

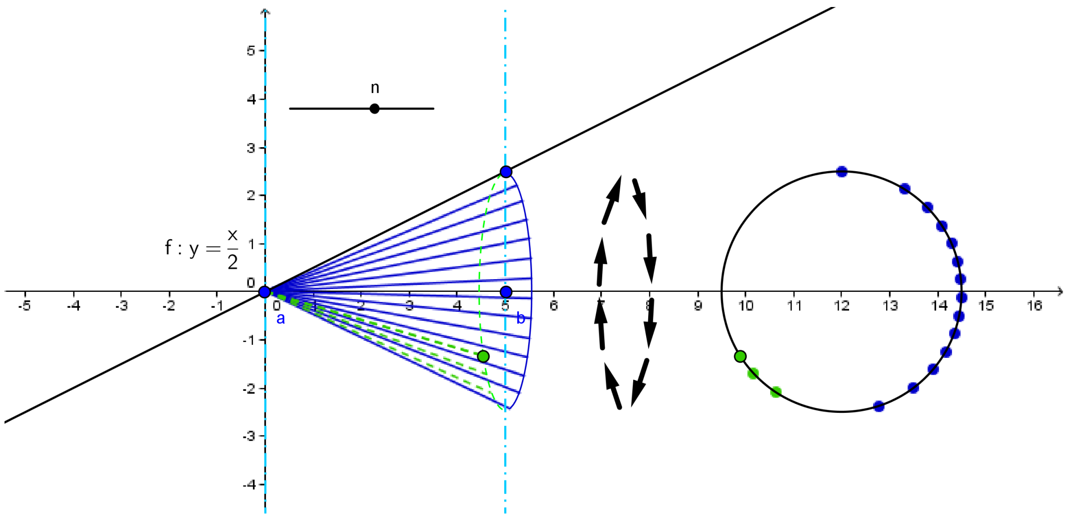


Obrázek 2.40: Applet – rotační válec

Rotační kužel

Na níže uvedeném appletu je znázorněn graf funkce $y = \frac{x}{2}$. Také tuto přímku necháme rotovat kolem osy x, přičemž se omezíme na rotaci pro $x \in \langle a, b\rangle$, tedy na rotaci úsečky.

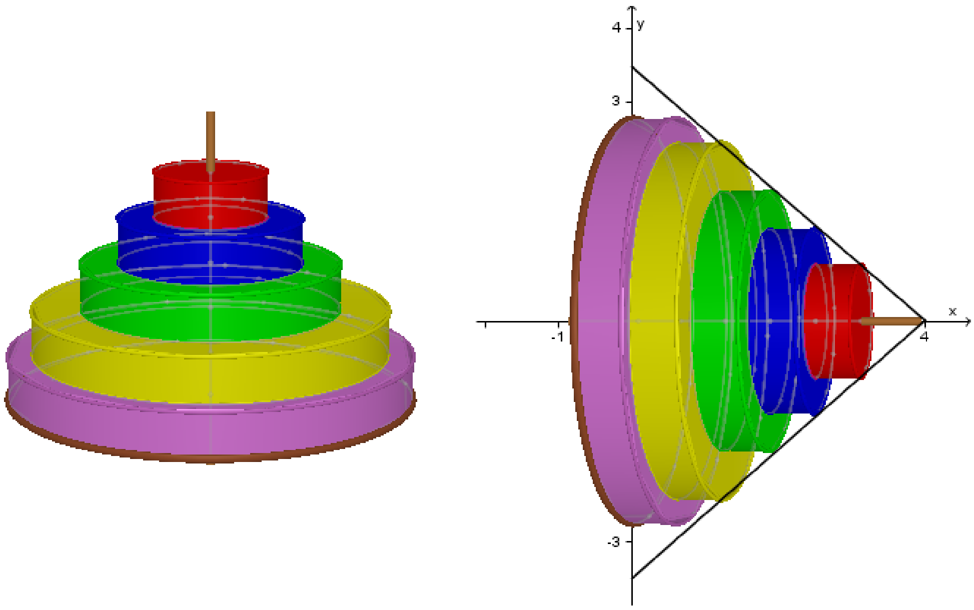
Pomocí posuvníku nebo animace pozorujte vznik kuželové plochy. V levé části appletu je znázorněn pohled z boku, vpravo pohled zdola.



Obrázek 2.41: Applet – rotační kužel

Odvození vzorce

Nyní odvodíme vzorec pro výpočet objemu rotačního tělesa. Pro vysvětlení principu použijeme následující obrázek dětské hračky – několik kroužků (vlastně válečků) na sobě. Jistě jste se s takovou hračkou setkali. Má pevnou kruhovou podstavu, jejímž středem prochází tyčka, na kterou se kroužky navlékají.



Obrázek 2.42: Dětský kužel

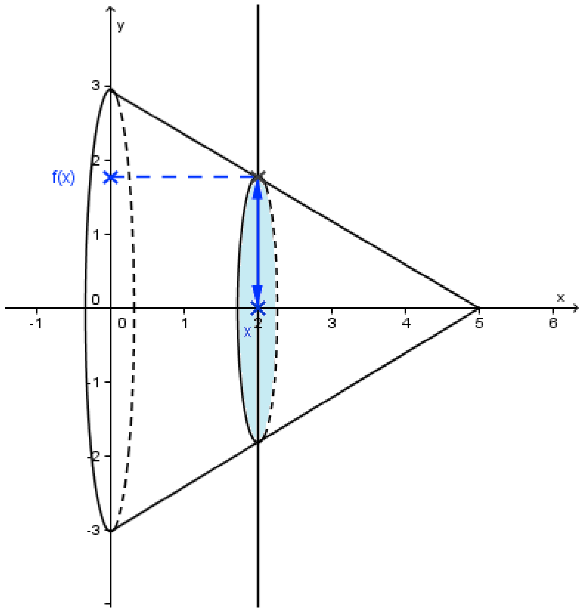
Představme si, že pevná kruhová podstava hračky odpovídá podstavě kužele a tyčka jeho ose. V pravé části obrázku je tato úvaha naznačená.

Jak bychom spočítali objem celé hračky? Sečetli bychom objem jednotlivých kroužků a přičetli objem tyčky.

Tato představa nám pomůže při odvození vzorce pro výpočet objemu rotačního tělesa. Každé rotační těleso lze rozdělit na kroužky, tak tenké, že jsou to vlastně kruhy (zanedbáváme výškuválečků v dětské hře). Využijeme tedy známý vztah pro obsah kruhu s poloměrem r:

$$S = \pi r^2$$

Zbývá určit poloměr jednotlivých kruhů. Ten se mění v závislosti na křivce, která rotuje kolem osy x. Podívejte se na následující obrázek obrysu kužele. Z obrázku je zřejmé, že poloměr r kruhu se středem v bodě x je $f(x)$. Hodnoty $f(x)$ odvodíme ze součtové definice určitého integrálu.



Obrázek 2.43: Kužel

Dosažené poznatky můžeme shrnout takto:

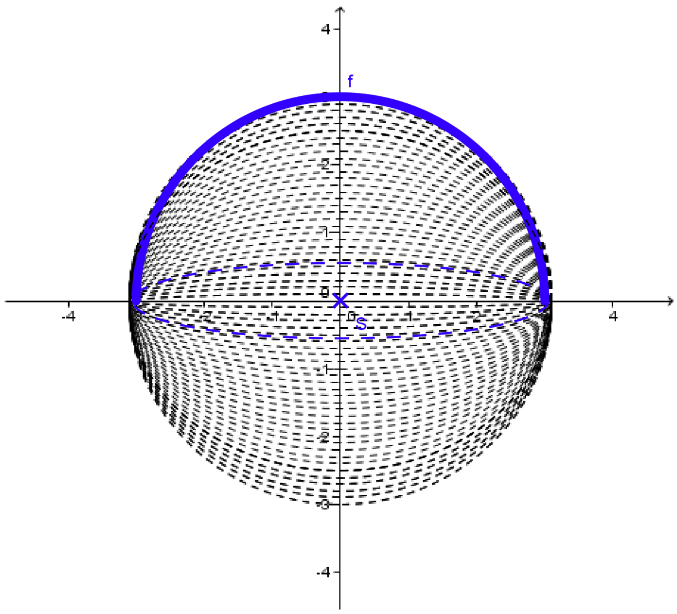
Objem V rotačního tělesa, jehož plášť vznikne rotací křivky f na intervalu $\langle a, b \rangle$ kolem osy x, vypočítáme podle vzorce

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\ \mathrm{d}x.$$

Příklad 2.4.4. *S využitím integrálního počtu vypočítejte objem koule s poloměrem $r = 3$ cm.*

Řešení

Plášť koule vznikne například rotací polokružnice s poloměrem $r = 3$ cm kolem osy x, jak ukazuje níže uvedený applet po spuštění animace.



Obrázek 2.44: Applet – koule

Nyní musíme určit předpis rotující křivky. Polokružnici umístíme na kružnici se středem v bodě $[0, 0]$ a poloměrem $r = 3$ cm:

$$x^2 + y^2 = 9$$

Analytické vyjádření půlkružnice vyjádříme předpisem například takto:

$$y = \sqrt{9 - x^2}$$

Integrovat tedy budeme funkci $f : y = \sqrt{9 - x^2}$ na intervalu $\langle -3, 3 \rangle$.

$$V = \pi \int_{-3}^{3} (\sqrt{9 - x^2})^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_{-3}^{3} (9 - x^2) \, \mathrm{d}x = \pi \Big[9x - \frac{x^3}{3} \Big]_{-3}^{3} =$$

$$= \pi \Big[\Big(9 \cdot 3 - \frac{3^3}{3} \Big) - \Big(9 \cdot (-3) - \frac{(-3)^3}{3} \Big) \Big] = \pi \Big(27 - \frac{27}{3} + 27 - \frac{27}{3} \Big) =$$

$$= \pi \Big(54 - \frac{54}{3} \Big) = \pi(54 - 18) = 36\pi$$

Závěr: Objem koule o poloměru 3 cm je 36 π.

Poznámka 2.4.2. *Díky známým vzorcům pro objemy těles lze provést snadnou kontrolu správnosti výpočtu.*

Platí:

$$V_{koule} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Po dosazení dostaneme:

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 \\ V &= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 27 \\ V &= 36\pi \end{aligned}$$

2.4.4 Úlohy

Tato kapitola obsahuje řešené úlohy na výpočty objemů rotačních těles a obsahů rovinných útvarů ohraničených grafy funkcí nebo přímkami. Pro řešení úloh tohoto typu jsou často nezbytné poznatky o funkcích a jejich předpisech a dále znalosti z analytické geometrie.

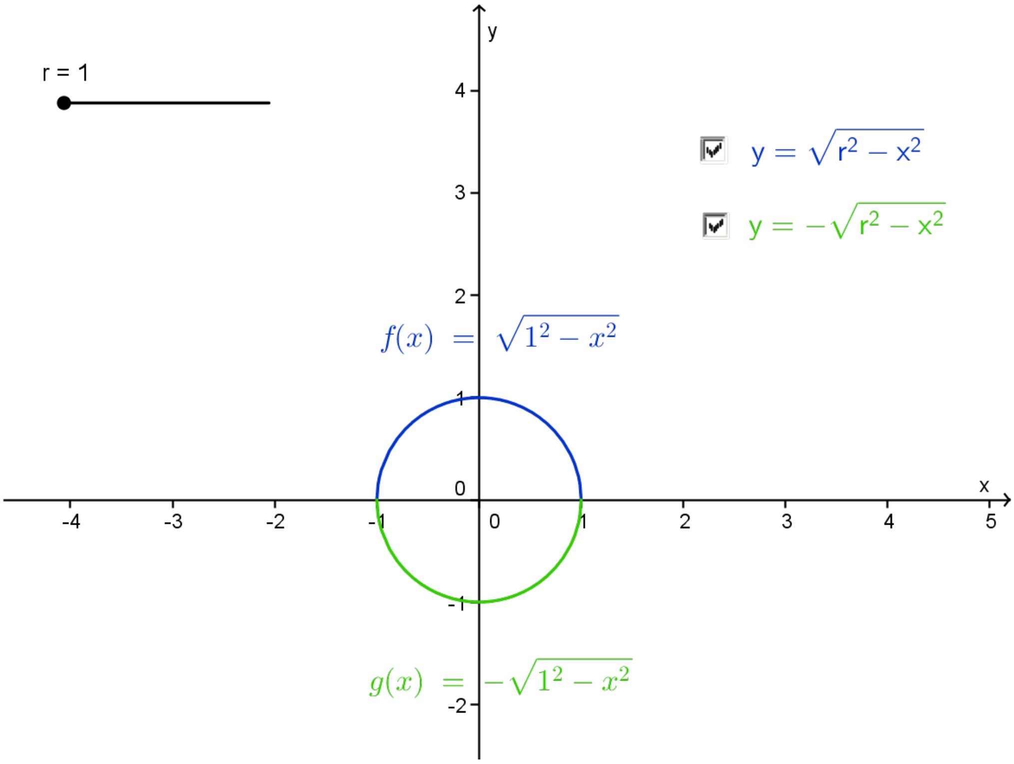
Úloha 2.4.1. *Odvoďte vzorec pro objem V koule s poloměrem r.*

- Kouli v tomto případě chápeme jako rotační těleso, které vznikne rotací **polokruhu** se středem v počátku os souřadnic kolem osy x. Stěžejní je nalezení předpisu rotující křivky. Vyjdeme z analytického vyjádření kružnice se středem v počátku a poloměrem r, z něhož vyjádříme y. Zvláštní pozornost zaslouží poslední krok úpravy, kdy odmocňujeme.

  $$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \\ y^2 &= r^2 - x^2 \\ |y| &= \sqrt{r^2 - x^2} \\ y &= \pm\sqrt{r^2 - x^2} \end{aligned}$$

  Pomocí zaškrtávacího tlačítka zobrazte či skryjte obě možnosti předpisu funkce získané po odmocnění výše. Pro přehlednost jsou křivky barevně odlišeny. Pro rotaci nám stačí jen jedna z křivek.

  V appletu je dále zobrazen posuvník pro poloměr r. Změnou posuvníku se poloměr polokružnic zvětšuje/zmenšuje, předpis se příslušně mění.



Obrázek 2.45: Applet – polokružnice

- Zvolený předpis funkce dosadíme do vzorce pro objem rotačního tělesa. Meze opět odvodíme z appletu. Zřejmě integrujeme od $-r$ do r.

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\ \mathrm{d}x$$

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 \mathrm{d}x =$$

- Umocníme a integrál vypočítáme s využitím tabulky vzorců. Nezapomeneme na meze. Integrační konstantu nepřipisujeme.

$$= \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\ \mathrm{d}x = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} =$$

- Do každého výrazu dosadíme nejprve horní mez, poté mez dolní. Zvláštní pozornost věnujte znaménkům před jednotlivými číselnými výrazy.

$$= \pi \left(r^2 \cdot r - \frac{r^3}{3} - r^2 \cdot (-r) + \frac{-r^3}{3}\right) =$$

- Dále jen upravujeme výraz v závorce.

$$= \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \pi \left(2r^3 - \frac{2r^3}{3}\right) = \pi \frac{6r^3 - 2r^3}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

- Závěr:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Úloha 2.4.2. *Vypočítejte obsah S rovinného útvaru omezeného křivkami, které mají rovnice $xy = 5$, $x + y - 6 = 0$.*

- Křivky nejsou zadané ve tvaru, který využíváme při integraci. Vyjádříme ze zadaných rovnic neznámou y, čímž vlastně dostaneme předpis funkce.

$$\begin{aligned} xy &= 5 \\ y &= \frac{5}{x} \\ f(x) : y &= \frac{5}{x} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x + y - 6 &= 0 \\ y &= -x + 6 \\ g(x) : y &= -x + 6 \end{aligned}$$

- Dále v zadání nemáme dané, na jakém intervalu počítáme, ani to, zda je na tomto intervalu $f(x) \geq g(x)$ nebo $g(x) \geq f(x)$. Toto určíme z náčrtku a z výpočtu průsečíků grafů těchto funkcí.

- Průsečíky:

$$\begin{aligned} -x + 6 &= \frac{5}{x} \\ -x^2 + 6x - 5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 36 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5) \\ D &= 16 \\ \sqrt{D} &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-6 \pm 4}{-2} \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= 5 \end{aligned}$$

- Dostali jsme dvě řešení, tedy dvě x-ové souřadnice dvou průsečíků. Nyní pro oba dopočítáme y-ovou souřadnici.

- $x_1 = 1$:

$$\begin{aligned} y_1 &= -x_1 + 6 \\ y_1 &= 5 \end{aligned}$$

První průsečík má tedy souřadnice:

$$P_1 = [1; 5]$$

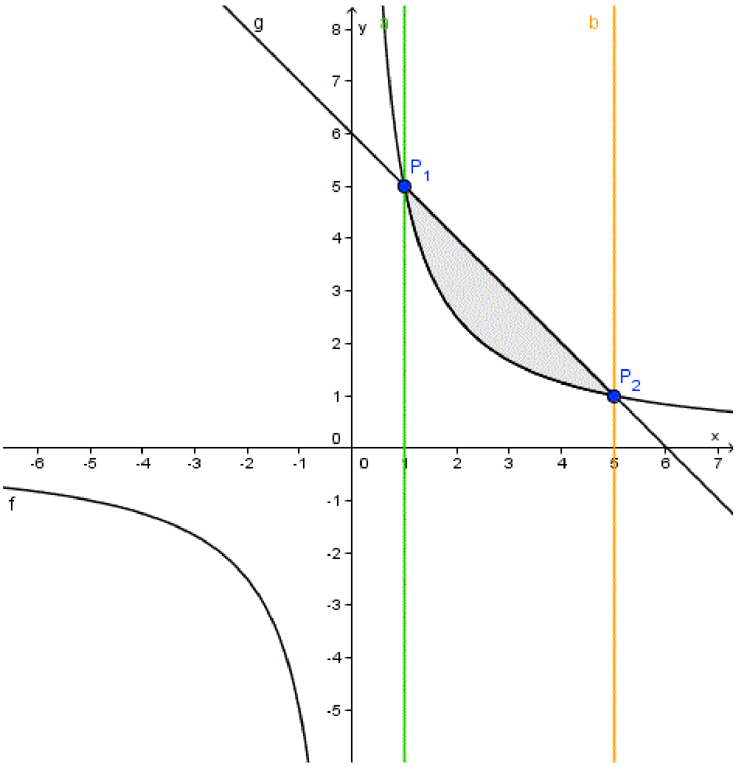
- $x_2 = 5$:

$$\begin{aligned} y_2 &= -x_2 + 6 \\ y_2 &= 1 \end{aligned}$$

  Druhý průsečík má tedy souřadnice:

$$P_2 = [5; 1]$$

- Nyní již snadno vytvoříme náčrtek. Známe body, kde se grafy funkcí protínají, a víme, že jde o graf hyperboly ($f(x)$) a přímky ($g(x)$).



Obrázek 2.46: Náčrtek k Úloze 2.4.2

-

- Do náčrtku si můžeme zvýraznit i hraniční přímky. Poté již jasně vidíme, že integrovat budeme na intervalu $\langle 1, 5\rangle$ a že na celém tomto intervalu je $g(x) \geq f(x)$.

  Integrujeme takto:

$$S(U) = \int_1^5 [g(x) - f(x)]\ \mathrm{d}x = \int_1^5 (-x + 6 - \frac{5}{x})\ \mathrm{d}x =$$

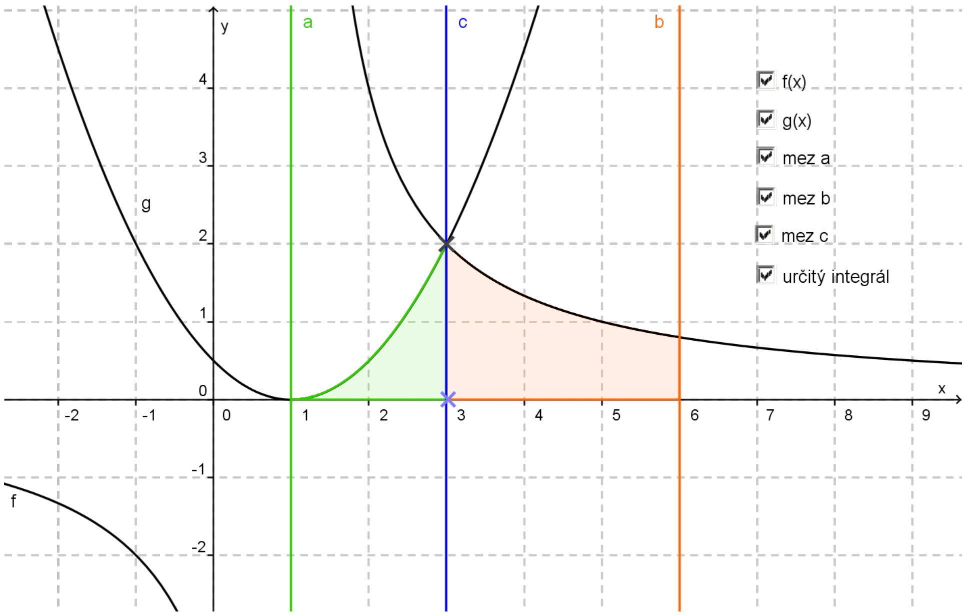
$$= \left[\frac{-x^2}{2} + 6x - 5\ln|x|\right]_1^5 = \left(\frac{-5^2}{2} + 6\cdot 5 - 5\ln 5\right) - \left(\frac{-1^2}{2} + 6\cdot 1 - 5\ln 1\right) =$$

$$= -\frac{25}{2} + 30 - 5\ln 5 + \frac{1}{2} - 6 = -\frac{24}{2} + 24 - 5\ln 5 = 12 - 5\ln 5 \doteq 3,95$$

- **Závěr**: Obsah útvaru je $12 - 5\ln 5$ (přibližně $3,95$).

Úloha 2.4.3. *Vypočítejte* $\int_1^4 f(x)\ \mathrm{d}x$, *je-li* $f(x) = \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}$ *pro* $x \in \langle 1,3\rangle$ *a* $f(x) = \frac{4}{x-1}$ *pro* $x \in \langle 3,6\rangle$.

- Před začátkem výpočtu si rozmyslíme, co vlastně počítáme. Pro tyto účely je vhodné vytvořit náčrtek, zde ve formě appletu.



Obrázek 2.47: Applet

- Nyní již vidíme, že sečteme-li určité integrály na daných intervalech, získáme obsah útvaru ohraničeného grafy funkcí $f(x)$ a přímkami $x = 1$ a $x = 6$. Využijeme zde větu o součtu určitých integrálů.

  Počítáme:
$$\int_1^3 \left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}\right)\ \mathrm{d}x + \int_3^6 \frac{4}{x-1}\ \mathrm{d}x =$$

- Nejprve si vypočítáme samostatně $\int_3^6 \frac{4}{x-1}\ \mathrm{d}x$.

- Využijeme substituční metodu:

$$\int_3^6 \frac{4}{x-1}\ \mathrm{d}x =$$

$$\begin{aligned} t &= x-1 & t_1 &= 3-1=2 \\ \mathrm{d}t &= 1\,\mathrm{d}x & t_2 &= 6-1=5 \end{aligned}$$

- $$= \int_2^5 \frac{4}{t}\,\mathrm{d}t = 4\int_2^5 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t =$$

- $$= 4\cdot\Big[\ln|t|\Big]_2^5 = 4\cdot(\ln 5 - \ln 2) = 4\cdot\ln\frac{5}{2}$$

- Dále vypočítáme určitý integrál na intervalu $\langle 1, 3\rangle$:

$$\int_1^3 \left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x\right]_1^3 \mathrm{d}x =$$

- $$= \left(\frac{3^3}{6} - \frac{3^2}{2} + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1^3}{6} - \frac{1^2}{2} + \frac{1}{2}\right) =$$

- $$= \frac{27}{6} - \frac{9}{2} + \frac{3}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} =$$

- $$= \frac{26}{6} - \frac{6}{2} = \frac{26-18}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

- Vypočítali jsme zvlášť oba určité integrály. Podle zadání a náčrtku je pro konečný výsledek stačí sečíst. Přirozený logaritmus nebudeme pro přehlednost vyčíslovat.

$$\int_1^3 \left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x + \int_3^6 \frac{4}{x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3} + 4\ln\frac{5}{2}$$

Úloha 2.4.4. *Vypočítejte obsah útvaru ohraničeného grafem funkce: $f : y = x^2 - 7x + 10$ a přímkami $x = 1$, $x = 6$, $y = 0$.*

Řešení

$$S(U) \doteq 8,17$$

Podrobné řešení se slovním komentářem viz Příklad 2.4.1 v podkapitole Obsah útvaru ohraničeného osou x a grafem funkce, který se nachází na daném intervalu nad i pod osou x.

Úloha 2.4.5. *Vypočítejte obsah útvaru ohraničeného grafy funkcí $f : y = -x^2 + 5x + 2$ a $g : y = 7 - x$.*

Řešení

$$S(U) \doteq 10,7$$

Podrobné řešení se slovním komentářem viz Příklad 2.4.2 v podkapitole Obsah útvaru ohraničeného grafy dvou funkcí.

Úloha 2.4.6. *Určete obsah útvaru ohraničeného grafy funkcí* $f : y = 5x - 2$, $g : y = -\frac{x}{3} + \frac{26}{3}$ *a* $h : y = x^2 - 5x + 7$, *který celý leží v* ***pravé*** *polorovině od osy* y.

Řešení

$$S(U) \doteq 18,7$$

Podrobné řešení se slovním komentářem viz Příklad 2.4.3 v podkapitole Obsah útvaru ohraničeného grafy tří funkcí.

Úloha 2.4.7. *S využitím integrálního počtu vypočítejte objem koule s poloměrem* $r = 3$ *cm.*

Řešení

$$V = 36\pi$$

Podrobné řešení se slovním komentářem viz Příklad 2.4.4 v podkapitole Objem rotačního tělesa.

2.5 Něco navíc – objem těles

2.5.1 Motivace

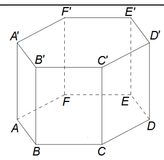
V kapitole 2.4 Využití integrálního počtu jsme se setkali s výpočtem objemů některých těles. Odvodili jsme si zde vztah pro výpočet objemu rotačního tělesa.

Z historického úvodu víme, že diferenciální počet je poměrně novodobou záležitostí, jeho počátky pocházejí ze 17. století. Potřeba počítat objemy těles se ale objevovala už v nejstarších dochovaných matematických textech, např. ze starověkého Egypta či Mezopotámie. Praktickým případem využití znalosti objemů těles je výpočet objemu sýpky pro ukládání obilí, která mohla mít různé tvary.

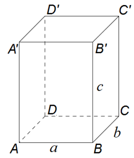
Je tedy zřejmé, že se objemy těles dříve počítaly i bez znalosti integrálního počtu. Některé takové postupy odvození vztahů pro objemy známých těles si ukážeme v následujících podkapitolách.

Přehled vzorců pro výpočet objemů známých těles

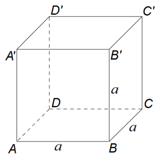
Pro úplnost uvádíme dále přehled objemů známých těles. Tento přehled je možné si stáhnout ve formátu .pdf.



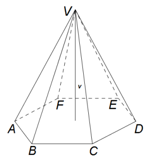
Hranol $V = S_p \cdot v$



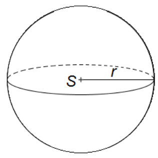
Kvádr $V = abc$



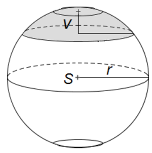
Krychle $V = a^3$



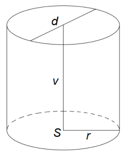
Jehlan $V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$



Koule $V = \frac{4}{3} \pi r^3$



Kulová úseč $V = \pi v^2 \left(\frac{3r - v}{3} \right)$



Válec $V = \pi r^2 v = \frac{\pi d^2}{4} v$

2.5.2 Přeskupování těles

Základní metoda, která nám pomůže odvodit například objem jehlanu, je založena na rozdělení původních těles. Budeme zde vycházet ze znalosti vztahů pro objem krychle $V = a^3$ a kvádru $V = abc$. Odvodíme si zde tvrzení, že

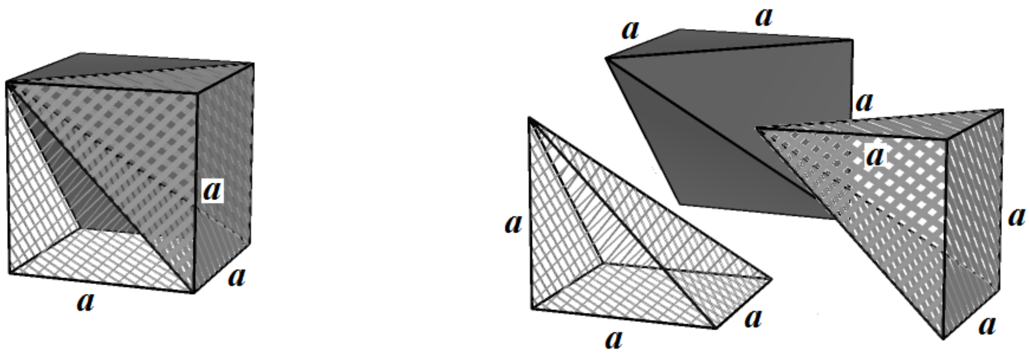
Tvrzení 2.5.1. *Objem jehlanu je roven jedné třetině objemu hranolu se stejnou podstavou a výškou,*

nebo-li

objem jehlanu je roven jedné třetině součinu obsahu jeho podstavy a výšky.

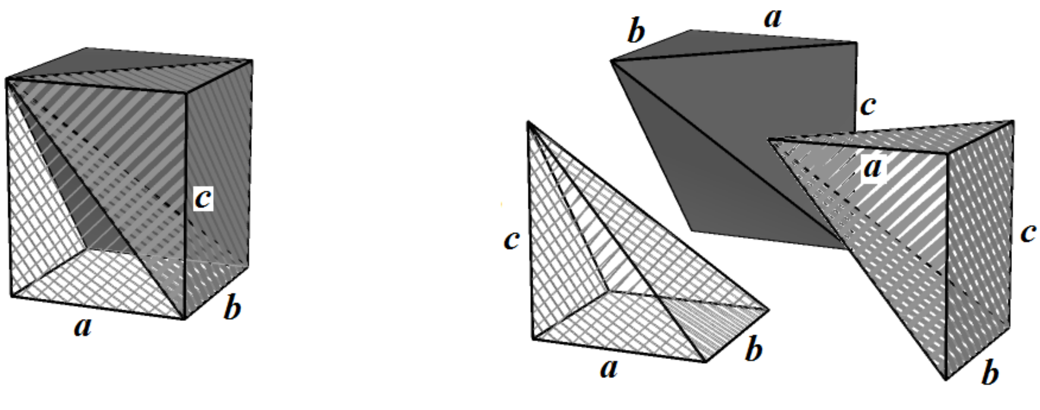
Objem jehlanu je roven jedné třetině objemu hranolu se stejnou podstavou a výškou

V důkazu se omezíme na takové čtyřboké jehlany, jejichž dvě hrany jsou na sebe kolmé. Na těchto tělesech lze vztah pěkně demonstrovat. Můžeme si snadno představit, že krychli lze rozdělit na tři takové shodné čtyřboké jehlany:



Obrázek 2.48: Rozdělení krychle

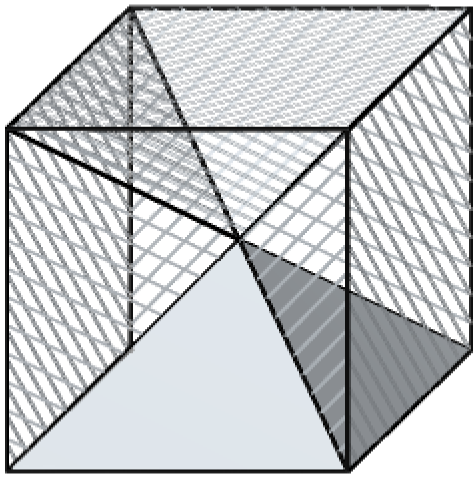
O něco složitější situace je v případě kvádru. Ten nelze rozložit na tři shodné čtyřboké jehlany, ale lze jej rozdělit na tři čtyřboké jehlany (jejichž právě dvě hrany jsou na sebe kolmé) se stejným objemem. A to tak, že délkami hran podstavy a výšky jsou vždy čísla a, b, c.



Obrázek 2.49: Rozdělení kvádru

Objem jehlanu je roven jedné třetině součinu obsahu podstavy a výšky

Objem jehlanu se pomocí krychle dá ukázat ještě dalším způsobem. Krychle je totiž složená právě ze šesti shodných jehlanů; podstavou každého jehlanu je jedna stěna krychle, všechny jehlany pak mají společný hlavní vrchol, a to ve středu krychle:



Obrázek 2.50: Jiné rozdělení krychle

Víme, že pro objem V_k krychle o straně a platí $V_k = a^3$. Krychle je vyplněna šesti shodnými nepřekrývajícími se jehlany, objem V_j každého je tak

$$V_j = \frac{V_k}{6} = \frac{a^3}{6},$$

což odpovídá objemu jehlanu se čtvercovou podstavou (strana a, obsah $S = a^2$) a výškou $v = \frac{a}{2}$:

$$V_j = \frac{a^3}{6} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{3} S_p \cdot v$$

2.5.3 Cavalieriho princip

Při odvozování vztahů pro objemy některých těles lze také využít takzvaný **Cavalieriho princip**.

Věta 2.5.1. Cavalieriho princip říká, že tělesa se stejně velkými podstavami (tj. podstavami, které mají stejný obsah) a výškami mají stejný objem, pokud řezy rovnoběžné s podstavami vedené ve stejné vzdálenosti od podstav mají stejné obsahy.

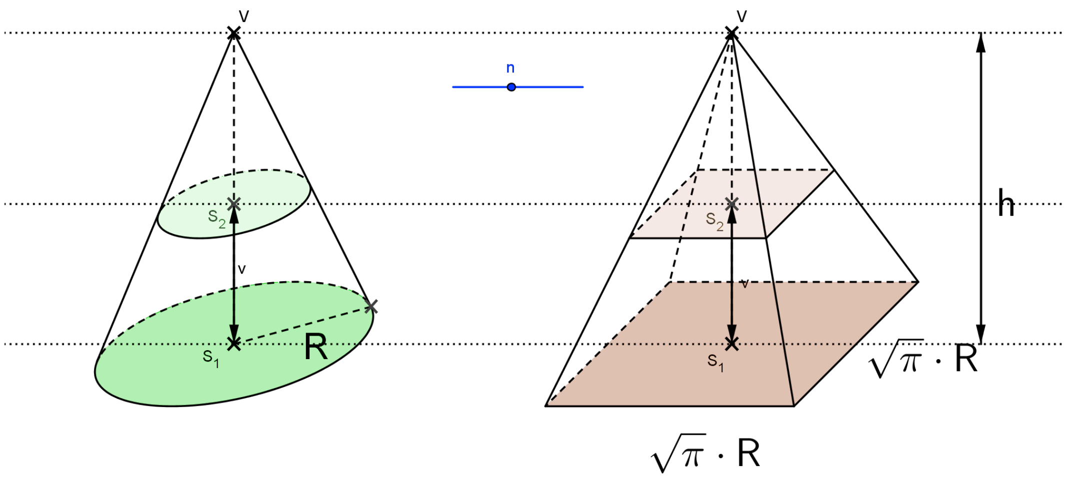
Jinak řečeno, vezmeme dvě tělesa, která mají stejný obsah podstavy a stejnou výšku. Provedeme řez těmito tělesy rovinou vedenou v libovolné výšce rovnoběžně s podstavou a zjistíme obsah vzniklých řezů. Jestliže se obsahy shodují pro řez vedený v libovolné výšce, tělesa mají stejný objem.

Objem kužele

V podkapitole 2.5.2 Přeskupování těles jsme ze vztahu pro objem kvádru odvodili vztah pro objem jehlanu. Tentokrát pro nás bude výchozím tělesem právě jehlan, z jehož objemu odvodíme vztah pro objem **kužele**.

Abychom co nejlépe ilustrovali Cavalieriho princip, budeme uvažovat kužel s poloměrem podstavy R a výškou h a pravidelný čtyřboký jehlan se stejnou výškou a čtvercovou podstavou o straně $a = \sqrt{\pi} \cdot R$. Díky takto zvoleným rozměrům jsou obsahy podstav obou těles stejné. Tato tělesa jsou uvedena na níže uvedeném appletu.

Spusťte animaci nebo pohybujte modrým posuvníkem. Vidíte řez kuželem a jehlanem vedený rovnoběžně s podstavou vždy ve shodné výšce. Cavalieriho princip říká, že pokud budou obsahy vyznačených rovinných útvarů vždy stejné (bez ohledu na výšku, ve které je veden řez), mají obě tělesa stejný objem.



Obrázek 2.51: Applet – Cavalieriho princip – jehlan a kužel

Výpočet

Ukažme si nyní pomocí výpočtu, že obsahy řezů vedených v libovolné výšce, jsou skutečně vždy shodné. Při vysvětlení budeme používat následující obrázek. [1]

Nejprve vypočítáme obsah podstav obou těles. Uvědomme si, že kužel má podstavu tvaru kruhu, jehlan tvaru čtverce.

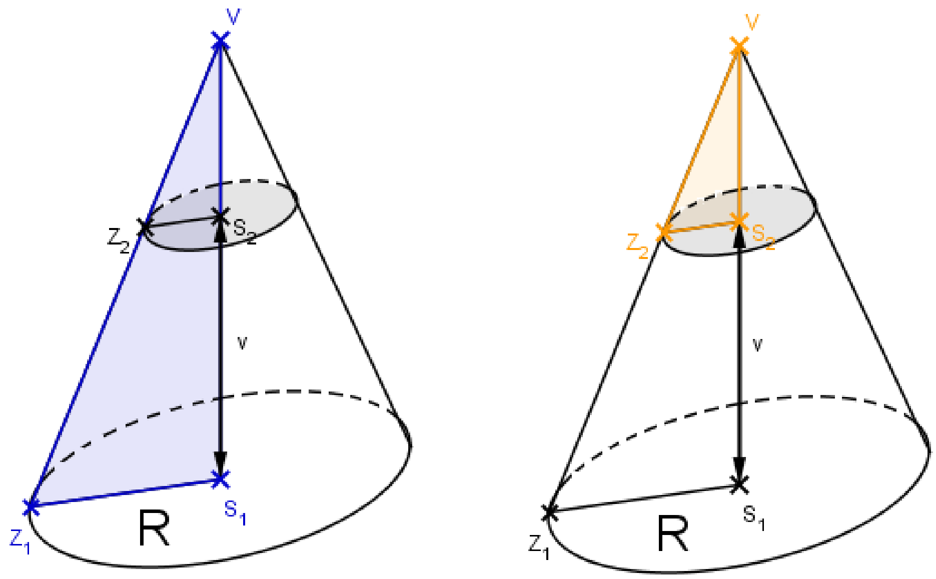
- **Kužel**
  Obsah kruhu o poloměru R je $S = \pi R^2$.
- **Jehlan**
  Obsah čtverce o straně $a = \sqrt{\pi} \cdot R$ je $S = (\sqrt{\pi} \cdot R)^2 = \pi R^2$.

Obě tělesa mají tedy stejný obsah podstav.

[1] Obrázek byl vytvořen z appletu na Obrázku 2.51, který je v tiskové verzi ve formě obrázku. Pro další výpočet budeme vycházet z tohoto obrázku.

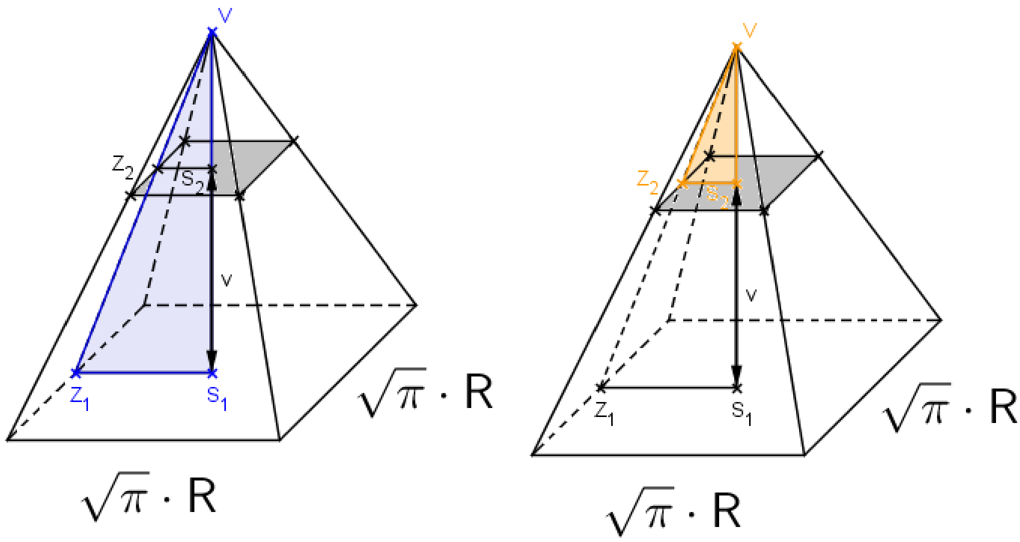
Podívejme se nyní na řez oběma tělesy rovinou rovnoběžnou s rovinami podstav, vedený ve stejné (libovolné) výšce v. Tato rovina protne kužel v kruhu a jehlan ve čtverci. Podle Cavalieriho principu potřebujeme znát obsahy těchto řezů. Pro jejich určení nám stačí znát jen vzdálenost středu řezu od „okraje“ tělesa (na obrázku bod Z_2). V případě kruhu tak získáme poloměr, v případě čtverce polovinu strany a.

- **Kužel**



Obrázek 2.52: Řez kuželem

- **Jehlan**



Obrázek 2.53: Řez jehlanem

Jak je patrné z výše uvedených obrázků, vyznačený modrý a oranžový trojúhelník jsou podobné podle věty uu s koeficientem podobnosti k, přičemž $k \in (0,1)$. Vzdálenost středu řezu S_2 od bodu Z_2 je tedy rovna k-násobku vzdálenosti S_1 od Z_1, a to v případě jehlanu i kuželu. Tedy si budou rovny i obsahy řezů těchto těles v libovolné výšce, čímž je splněna podmínka Cavalieriho principu. Získáváme tedy vztah pro objem kužele:

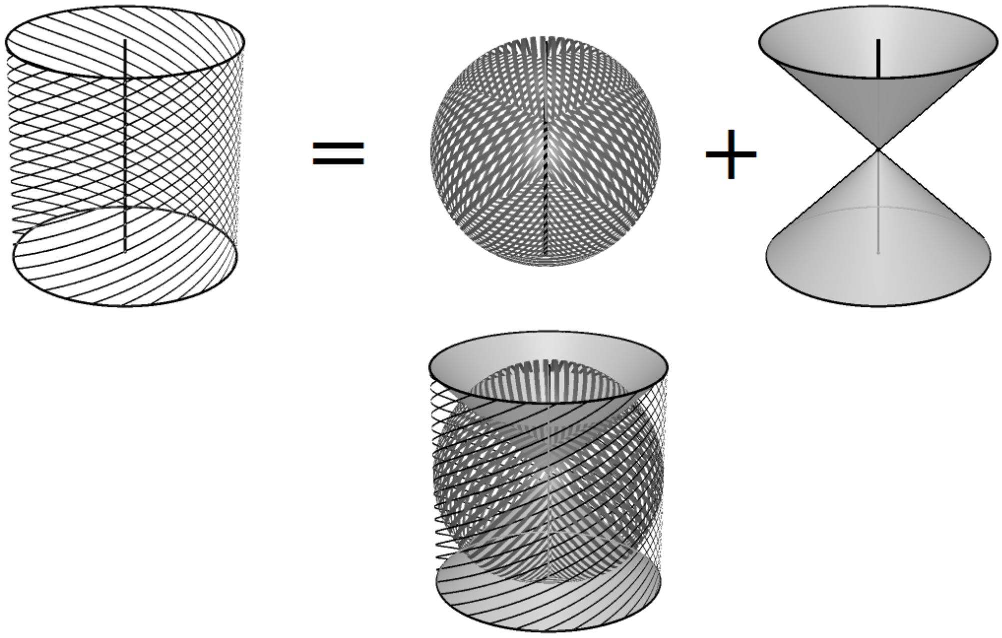
$$V_k = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}S_p \cdot h$$

Objem koule

Také vztah pro objem koule odvodíme přes Cavalieriho princip. Ukážeme si platnost následujícího tvrzení.

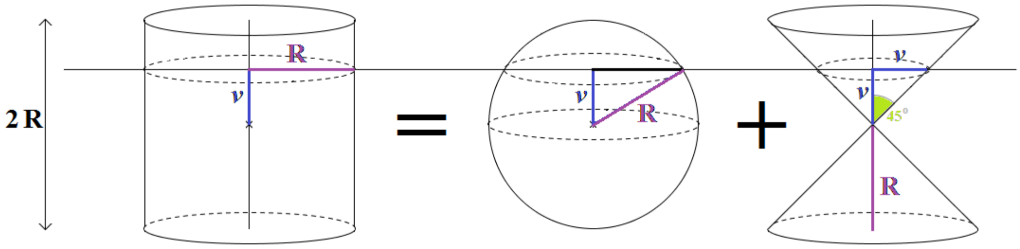
Tvrzení 2.5.2. *Objem koule o poloměru R je roven objemu válce o průměru podstavy R, výšce $2R$, od něhož odečteme objem dvou kuželů o výšce R a poloměru podstavy R.*

Na níže uvedeném obrázku je tvrzení pro lepší přehlednost znázorněno pouze s využitím plášťů těles.



Obrázek 2.54: Ilustrace Tvrzení 2.5.2

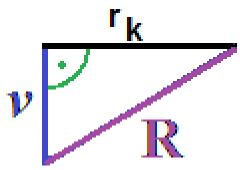
Na následujícím obrázku jsou znázorněna tři tělesa o stejné výšce $2R$ - válec, koule a „dvojkužel". Dále je zde graficky naznačeno úvodní tvrzení „objem válce je roven součtu objemu koule a objemu dvou kuželů".



Obrázek 2.55: Válec, koule, „dvojkužel“

Podívejme se opět, jak vypadá řez těmito tělesy vedený rovnoběžně s podstavami (resp. průměrem) ve stejné výšce v od středu těles. Podle Cavalieriho principu: Pokud bude mít řez válcem stejný obsah jako je součet obsahů řezů koule a dvojkužele, pak bude objem válce roven součtu objemů koule a dvojkužele (pro každý řez vedený ve stejné libovolné výšce v).

- **Válec**
  Řez válcem je zřejmě kruh o poloměru R (v každé výšce v řezu), tedy obsah tohoto řezu je:
  $$S_v = \pi R^2$$
- **Koule**
  Řezem koule bude jistě také kruh, ovšem s jeho poloměrem r_k je to obtížnější.



Obrázek 2.56: Poloměr řezu koule

Podle Pythagorovy věty platí:

$$\begin{aligned} R^2 &= v^2 + r_k^2 \\ r_k^2 &= R^2 - v^2 \\ r_k &= \sqrt{R^2 - v^2} \end{aligned}$$

Rozmyslete si: Při poslední úpravě rovnice bychom měli uvažovat více možných výsledků – kladný, záporný a nulu. Záporný poloměr ovšem nemá smysl, proto bereme v potaz jen jedno řešení.

Poloměr kruhu r_k je tedy závislý na výšce v, ve které vedeme řez, a je roven $r_k = \sqrt{R^2 - v^2}$. Obsah S_k řezu bude tedy:

$$S_k = \pi \cdot (\sqrt{R^2 - v^2})^2 = \pi \cdot (R^2 - v^2)$$

- **Dvojkužel**
  Dále potřebujeme zjistit, jak vypadá řez kuželem. Tím bude opět kruh, tentokrát s poloměrem rovným výšce v.

  Rozmyslete si: Strana kužele svírá s jeho podstavou úhel o velikosti 45°, řez je prováděn kolmo k ose vedoucí tělesem. Zbývající úhel pravoúhlého trojúhelníku tedy musí mít velikost 45° (součet úhlů v trojúhelníku je 180°), trojúhelník je tedy rovnoramenný.

  Tedy dostáváme
  $$S_d = \pi v^2.$$

Porovnejme nyní obsah řezu válce se součtem obsahů řezů koule a dvojkužele:

$$\begin{aligned}
S_v &= \pi R^2 \\
S_k &= \pi(R^2 - v^2) \\
S_d &= \pi v^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_k + S_d &= \pi(R^2 - v^2) + \pi v^2 \\
S_k + S_d &= \pi((R^2 - v^2) + v^2) \\
S_k + S_d &= \pi R^2 \\
S_k + S_d &= S_v
\end{aligned}$$

Připomeňme nyní, že se snažíme odvodit objem koule přes Cavalieriho princip, přičemž dáváme do „rovnosti“ objem válec na jedné straně, objemy koule a dvojkužele na straně druhé.

V libovolné výšce v je tedy obsah řezu válcem roven součtu obsahů řezů koulí a dvojkuželem. Je tedy splněna podmínka Cavalieriho principu a platí, že objem válce je roven součtu objemu koule a objemu dvojkužele (dané výšky a poloměru).

Známe-li vztah pro objem válce o poloměru r a výšce v

$$V_v = \pi r^2 v$$

a objem kužele o poloměru r a výšce v:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v,$$

snadno dosadíme za poloměr R a za výšku $2R$ a dopočítáme zbývající vztah pro objem koule. Nezapomeňte, že jsme uvažovali „dvojkužel“, vztah pro objem kužele tedy musíme započítat dvakrát (výška každého kužele je R). Platí:

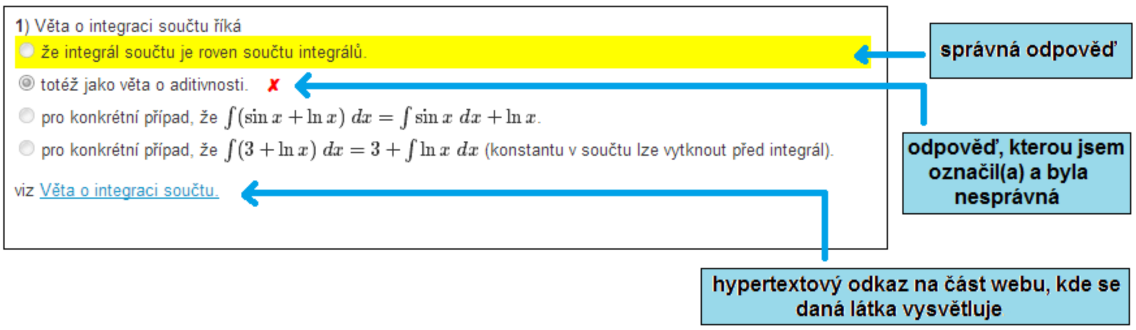
$$
\begin{aligned}
V\ (\text{válec}) &= V\ (\text{koule}) + V\ (\text{dvojkužel}) \\
\pi R^2 \cdot 2R &= V\ (\text{koule}) + 2 \cdot \tfrac{1}{3}\pi R^2 \cdot R \\
2\pi R^3 &= V\ (\text{koule}) + \tfrac{2}{3}\pi R^3 \\
V\ (\text{koule}) &= 2\pi R^3 - \tfrac{2}{3}\pi R^3 \\
V\ (\text{koule}) &= \tfrac{4}{3}\pi R^3
\end{aligned}
$$

2.6 Zaškrtávací test

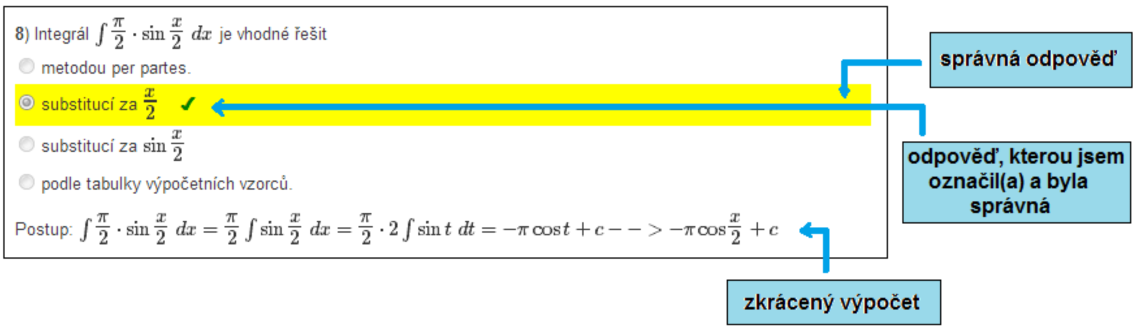
Zaškrtávací test je klasický test s výběrem odpovědí. Každý test obsahuje devět otázek poskládaných ze třech tematických celků (z každého tematického celku 3 otázky):

- Otázky zaměřené na teoretickou část výkladu.
- Otázky zaměřené na základní výpočty integrálů a použití výpočetních metod.
- Další typové příklady, které se objevují v některých sbírkách (viz Literatura).

U každé z otázek zaškrtáváte právě jednu odpověď, kterou považujete za správnou. Po ukončení testu klikněte na tlačítko Vyhodnotit.
Kromě bodového zisku a známky naleznete na stránce odpovědí také vysvětlení principu řešení jednotlivých otázek.



Obrázek 2.57: Zaškrtávací test, špatná odpověď



Obrázek 2.58: Zaškrtávací test, správná odpověď

Generovat nový zaškrtávací test.

2.6.1 Vzorový test

Webová aplikace generuje vždy nový test obsahující devět otázek, databáze jich obsahuje celkem padesát.

1. Z uvedených funkcí $\sin x,\ e^x,\ \ln x, \operatorname{tg} x$ dokážeme integrovat podle tabulky vzorců:

   - všechny
   - jen $\sin x$ a $\operatorname{tg} x$
   - jen e^x a $\ln x$
   - jen $\sin x$ a e^x (správná)

   Řešení: viz Tabulka 2.1 – Tabulka výpočetních vzorců.

2. Metodu *per partes* obecně není vhodné použít, integrujeme-li:

   - součin
   - podíl
   - součet (správná)
   - jedinou funkci

   Řešení: viz podkapitola 2.2.4 Metoda *per partes*.

3. Primitivní funkcí k funkci f:

   - je taková funkce F, pro kterou platí: $\int F(x)\ \mathrm{d}x = f(x) + c$
   - je taková funkce F, pro kterou platí: $F'(x) = f(x)$ (správná)
   - je taková funkce F, pro kterou platí: $f'(x) = F(x)$
   - je taková funkce F, pro kterou platí: $\int F(x)\ \mathrm{d}x = f(x)$

   Řešení: viz podkapitola 2.2.2 Primitivní funkce.

4. Výsledek určitého integrálu $\int_{-2}^{2}(x^2+3)\ \mathrm{d}x$ je:

   - 0
   - $\frac{26}{3}$
   - 12
   - $\frac{52}{3}$ (správná)

   Postup:

$$\int_{-2}^{2}(x^2+3)\ \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}+3x\right]_{-2}^{2} = \left[\frac{2^3}{3}+3\cdot 2\right] - \left[\frac{(-2)^3}{3}+3\cdot(-2)\right] =$$

$$= \frac{8}{3}+6+\frac{8}{3}+6 = \frac{52}{3}$$

5. Integrál $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\ \mathrm{d}x$ je vhodné řešit:

   - vytknutím $\cos x$ před integrál
   - substitucí za $\sin x$ (správná)
   - substitucí za $\cos x$
   - využitím goniometrických vzorců $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

   Postup:

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\ \mathrm{d}x = \dots |t = \sin x| \dots = \int \frac{1}{t^2}\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{t}$$

$$t = \sin x \to \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{\sin x}$$

6. Integrál $\int x^2 \sin x\ \mathrm{d}x$ je vhodné řešit:

   - substituční metodou, $t = x^2$
   - metodou per partes, kde x^2 derivujeme, $\sin x$ integrujeme (správná)
   - metodou per partes, kde x^2 integrujeme, $\sin x$ derivujeme
   - substituční metodou, $t = \sin x$

   Postup:

$$\int x^2 \sin x\ \mathrm{d}x = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x\ \mathrm{d}x = -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x\ \mathrm{d}x =$$

$$-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$$

7. Určete hodnotu parametru $p \in R$ tak, aby pro funkci $h(x) = x^3 + p$ platilo $\int_0^2 h(x)\ \mathrm{d}x = 10$:

   - $\frac{12}{4}$ (správná)
   - 5
   - 12
   - $\frac{5}{3}$

   Postup:

$$\int_0^2 (x^3 + p)\ \mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} + px\right]_0^2 = \left[\frac{2^4}{4} + 2p\right] - \left[\frac{0^4}{4} + 0 \cdot p\right] = \frac{16}{4} + 2p - 0 = 4 + 2p$$

$$4 + 2p = 10 \to p = 3 = \frac{12}{4}$$

8. Z následujících funkcí $F_1(x) = \frac{\cos^2 x}{5}$, $F_2(x) = \frac{-\cos 2x}{2}$, $F_3(x) = 4{+}\sin^2 x$, $F_4(x) = = -\mathrm{cotg}^2 x{\cdot}\sin^2 x{+}13$ vyberte ty, které jsou primitivními funkcemi ke STEJNÉ funkci:

   - F_1, F_2 (správná)
   - F_2, F_3, F_4
   - F_3, F_4
   - F_1, F_3, F_4

9. Určete hodnoty parametrů $u,\ v \in R$ tak, aby pro funkci $f(x) = ux^2 + v$ platilo $\int_0^3 f(x)\ \mathrm{d}x = 63$ a zároveň $\int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x = 17$:

   - $u = 3,\ v = 6$
   - $u = 6,\ v = 3$ (správná)
   - $u = 12, v = 9$
   - $u = 9, v = 12$

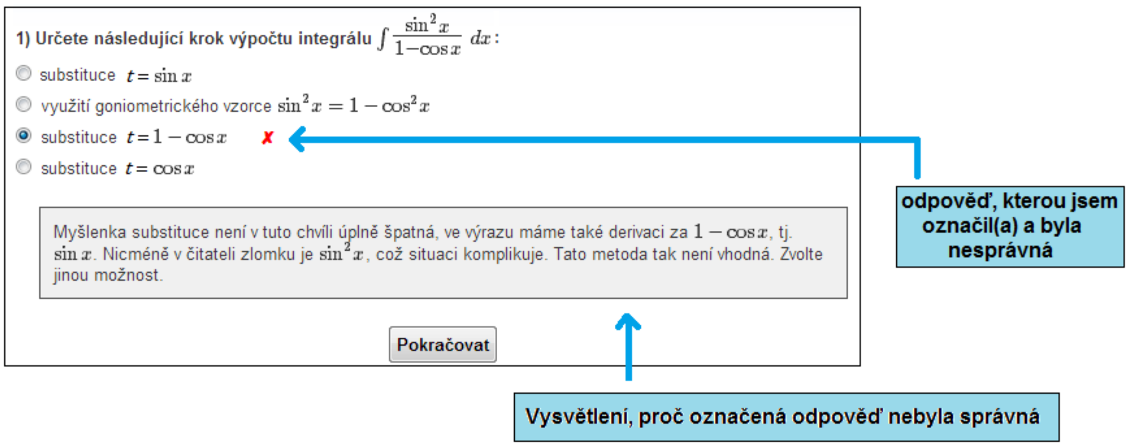
2.7 Test – Postupný výpočet

Tento test simuluje reálný výpočet složitějších příkladů. Výběrem z nabízených odpovědí určujete následující krok výpočtu. Pokud Vámi zvolená metoda není v danou chvíli vhodná, zobrazí se Vám vysvětlení, proč tomu tak je. Následně jste vyzváni k jiné volbě. Ve chvíli vhodně zvoleného postupu se přesouváte na další krok výpočtu. Každou další volbu i přechod na další krok výpočtu potvrzujete kliknutím na tlačítko „Pokračovat“. Tímto způsobem vyřešíte celý příklad.

Poznámka 2.7.1. *Zadání byla inspirována příklady z nejčastěji využívaných sbírek na středních školách a gymnáziích.*

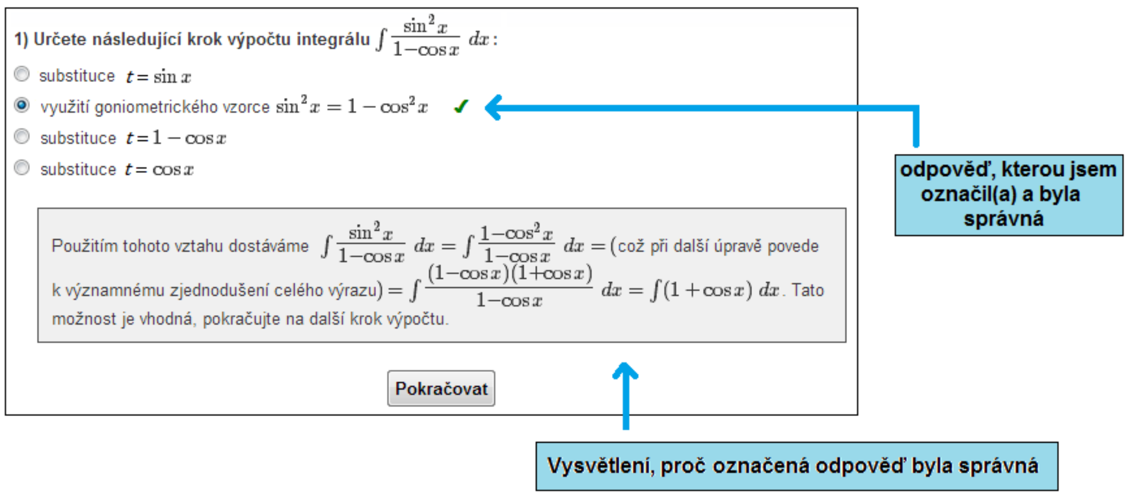
2.7.1 Práce s testem

Špatná odpověď



Obrázek 2.59: Špatná odpověď

Správná odpověď



Obrázek 2.60: Správná odpověď

Spusťte náhodný příklad nebo vyberte ze seznamu:

Generovat náhodně postupný test.

Přejít na příklad 1: $\int x \cdot \sin x \, \mathrm{d}x$	Přejít na příklad 10: $\int \frac{\sin 2x}{3 \sin x} \, \mathrm{d}x$
Přejít na příklad 2: $\int \sin^2(3x+1) \, \mathrm{d}x$	Přejít na příklad 11: $\int \sin^2 3x \, \mathrm{d}x$
Přejít na příklad 3: $\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} \, \mathrm{d}x$	Přejít na příklad 12: $\int \cos^2 \frac{x}{5} \, \mathrm{d}x$
Přejít na příklad 4: $\int \frac{x^2-6x+7}{x-3} \, \mathrm{d}x$	Přejít na příklad 13: $\int (5\cos^{-2} x + 2\sin^{-2} x) \, \mathrm{d}x$
Přejít na příklad 5: $\int 2x \cdot \sqrt{4x^2-3} \, \mathrm{d}x$	Přejít na příklad 14: $\int (2\mathrm{tg}^2\mathrm{x} - \frac{2}{\cos^2 \mathrm{x}}) \, \mathrm{dx}$
Přejít na příklad 6: $\int \frac{\sin x}{5-3\cos x} \, \mathrm{d}x$	Přejít na příklad 15: $\int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} \, \mathrm{d}x$
Přejít na příklad 7: $\int 6x \cdot (x^2-4)^5 \, \mathrm{d}x$	Přejít na příklad 16: $\int \frac{2x^3}{1-x^4} \, \mathrm{d}x$
Přejít na příklad 8: $\int 4x^2 e^x \, \mathrm{d}x$	Přejít na příklad 17: $\int \frac{\sqrt{x^3}+8}{\sqrt{x}+2} \, \mathrm{d}x$
Přejít na příklad 9: $\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x} \, \mathrm{d}x$	Přejít na příklad 18: $\int (x-4)^5 \, \mathrm{d}x$

2.7.2 Vzorový test

Pro ilustraci tohoto testu byl vybrán příklad 15. Pro každý další krok výpočtu jsou uvedeny všechny tři, resp. čtyři, možnosti, které mohl uživatel zaškrtnout.

1. Určete následující krok výpočtu integrálu

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x$$

a. použití goniometrického vzorce $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, úprava výrazu (správná)

b. substituce $t = 2x$

c. metoda per partes, kde $\cos 2x$ integrujeme, $\frac{1}{\sin x+\cos x}$ derivujeme

d. substituce $t = \sin x$

Odpovědi:

ad a. Aplikací výše uvedeného vzorce získáme $\int \frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$, což lze dále upravit na $\int \frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$ a po vykrácení získáme $\int(\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x$. Pokračujte na další krok výpočtu.

ad b. Při použití substituční metody pro výše zvolenou substituci dostaneme výraz, ve kterém se nachází proměnná x i proměnná t. Tato metoda tak není vhodná. Zvolte jinou možnost.

ad c. Podílový tvar lze triviální úpravou převést na součinový, použití per partes se v součinu nabízí. Metoda per partes je ovšem vhodná tehdy, kdy dochází ke zjednodušování jednoho z činitelů, což se v případě dvou goniometrických funkcí nestane. Zvolte jinou možnost.

ad d. Při použití substituční metody pro výše zvolenou substituci dostaneme výraz, ve kterém se nachází proměnná x i proměnná t. Tato metoda tak není vhodná. Zvolte jinou možnost.

2. Určete následující krok výpočtu integrálu

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}\, \mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x}\, \mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x}\, \mathrm{d}x = \int (\cos x - \sin x)\, \mathrm{d}x :$$

a. substituce $t = \cos x$

b. substituce $t = \sin x$

c. použití věty o integraci součtu, dále integrace podle tabulky vzorců (správná)

Odpovědi:

ad a. Při použití substituční metody pro výše zvolenou substituci dostaneme výraz, ve kterém se nachází proměnná x i proměnná t. Tato metoda tak není vhodná. Zvolte jinou možnost.

ad b. Při použití substituční metody pro výše zvolenou substituci dostaneme výraz, ve kterém se nachází proměnná x i proměnná t. Tato metoda tak není vhodná. Zvolte jinou možnost.

ad c. Výpočet bude vypadat takto: $\int (\cos x - \sin x)\, \mathrm{d}x = \int \cos x\, \mathrm{d}x - \int \sin x\, \mathrm{d}x = \sin x + \cos x + c$. Pokračujte na shrnutí výpočtu.

3. Celý výpočet vypadá takto:

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}\, \mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x}\, \mathrm{d}x = \int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x}\, \mathrm{d}x =$$

$$= \int (\cos x - \sin x)\, \mathrm{d}x = \int \cos x\, \mathrm{d}x - \int \sin x\, \mathrm{d}x = \sin x + \cos x + c$$

2.8 Používané matematické symboly

(a, b)	otevřený interval, množina $\{x \in R;\ a < x < b\}$
$\langle a, b\rangle$	uzavřený interval, množina $\{x \in R; a \leq x \leq b\}$
f	funkce f
$f(x)$	hodnota funkce f v bodě x
$f'(x),\ y'$	první derivace funkce $y = f(x)$
$\int f(x)\ \mathrm{d}x$	neurčitý integrál z funkce $y = f(x)$
$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$	určitý integrál z funkce $y = f(x)$ od a do b

Tabulka 2.2: Používané matematické symboly

3. Dotazníkové šetření

Pro ověření výsledků práce bylo provedeno dotazníkové šetření. Vzhledem k tomu, že je učivo integrálního počtu v současné době v hodinách matematiky na střední škole často vynecháváno, byli respondenty studenti prvního ročníku vysokých škol, a to Masarykovy univerzity v Brně a Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze. Průměrný věk studentů se tak pohyboval okolo 20 let. Problémem šetření byla nízká návratnost vyplněného dotazníku, který byl rozdán cca 50 studentům, přičemž dotazník nakonec odevzdalo 9 dívek a 6 chlapců. Výsledky šetření jsou tak spíše orientační.

Otázky byly uzavřené s výběrem ze čtyř odpovědí, přičemž bylo možné zaškrtnout jednu nebo více dle názoru respondenta, a dále s možností doplnění slovního komentáře. V následující části bude proveden krátký rozbor odpovědí studentů na základě jejich četnosti. Znění otázky je uvedeno nad tabulkou výsledku šetření.

Otázka 1

První otázka se týkala grafické úpravy webových stránek. Zjišťovala, na kolik uvedené rozložení studentům vyhovuje.

Znění otázky: Rozložení webových stránek bych označil/a jako

Nabízené možnosti	**Počet odpovědí**
Velmi přehledné	8
Přehledné	6
Spíše nepřehledné	0
Velmi nepřehledné	0

Tabulka 3.1: Výsledky – otázka 1

Velmi dobré hodnocení bylo uděleno za přehlednost webových stránek. Studentům umožňuje snadnou orientaci při hledání konkétního tématu. Kapitoly v menu na sebe logicky navazují, což také napomáhá pochopení učiva při postupném studiu celého textu.

Otázka 2

Tato otázka se zaměřila na zjištění, co je cílem návštěvy výukových stránek – zda teoretický výklad, podrobně řešené příklady nebo testové úlohy pro zjištění úrovně vlastních znalostí.

Z odpovědí respondentů vyplývá, že studenti více než teorii integrálního počtu vyhledávají metody řešení příkladů, která pravděpodobně častěji potřebují při školním testování znalostí. Největšího úspěchu dosáhly krokovaně řešené úlohy se slovním komentářem, kde je vysvětlován zvolený postup výpočtu průběžně.

Naopak překvapením bylo nevyužívání testů.

Znění otázky: Největší přínos webových stránek vidím v

Nabízené možnosti	**Počet odpovědí**
názornosti výkladu	3
krokovaně řešených úlohách	8
krokovaně řešených úlohách s komentářem	9
testech	0

Tabulka 3.2: Výsledky – otázka 2

Otázka 3

Značná část webových stránek je věnována výkladu učiva, teoretickému základu pro výpočet příkladů. Třetí otázka se věnovala tomu, nakolik studenti tyto kapitoly využívají.

Znění otázky: Výklad využívám

Nabízené možnosti	**Počet odpovědí**
vždy před studiem kapitoly	4
pokud mě na něj odkazuje hypertextový odkaz v úloze	1
pokud mě na něj odkazuje hypertextový odkaz v testu	0
pokud při řešení úloh zjistím, že látce nerozumím	9

Tabulka 3.3: Výsledky – otázka 3

Šetření potvrdilo častý trend ve studiu. Studenti se zaměřují zejména na výpočet příkladů (nejraději s možností „mechanického“ postupu) a teoretický základ považují často za zbytečný.

Otázka 4

Webové stránky mají oproti tištěným učebnicím mimojiné možnost postupného zobrazování jednotlivých kroků výpočtu. Ten se tak studentům nezobrazuje celý najednou, a tím umožňuje více přemýšlet nad dílčími úpravami. Tento typ úloh je na webových stránkách uváděn dvojí formou – s a bez slovního komentáře (slovní komentář do jisté míry supluje pomoc učitele). Další otázka se tedy zaměřila na to, který typ studentům více vyhovuje.

Znění otázky: U krokovaně řešených úloh preferuji

Nabízené možnosti	**Počet odpovědí**
úlohy s komentářem, zobrazuji najednou celé řešení	1
úlohy s komentářem, zobrazuji řešení postupně	12
úlohy bez komentáře, zobrazuji najednou celé řešení	1
úlohy bez komentáře, zobrazuji řešení postupně	0

Tabulka 3.4: Výsledky – otázka 4

Výsledky potvrdily domněnku, že studenti při studiu řešení příkladů vyžadují také slovní komentář jednotlivých kroků.

Otázka 5

Před vlastní tvorbou webových stránek byl proveden rozbor existujících materiálů (aktuální k létu 2012). Tímto šetřením bylo zjištěno, že na webu neexistuje výukový materiál zaměřený na integrální počet, který by využíval možností webového prostředí v takovém rozsahu jako vytvořené webové stránky. Předmětem šesté otázky bylo zjistit, nakolik toto provedení vyhovuje studentům.

Znění otázky: Srozumitelnost výkladu považuji za

Nabízené možnosti	**Počet odpovědí**
lepší než v jiných materiálech díky interaktivním prvkům	9
lepší než v jiných materiálech díky komentovaným úlohám	6
srovnatelnou s jinými materiály	3
horší než v jiných materiálech	0

Tabulka 3.5: Výsledky – otázka 5

Bylo zjištěnno, že studenti považují výukový materiál srozumitelnější díky prvkům, které tištěné učebnice nemohou nabídnout. Bylo tak vyžito potenciálu prostředí, ve kterém výukový materiál vznikl.

Otázka 6

Posledním významným prvkem webových stránek jsou dvě kapitoly věnované testům. Otázky se zaměřují jak na teoretické znalosti, tak i na výpočty určitých a neurčitých integrálů. Bylo tedy zjišťováno, nakolik studenti možnosti samostatného testování znalostí využívají.

Znění otázky: Z testových úloh

Nabízené možnosti	**Počet odpovědí**
využívám zaškrtávací test i postupný výpočet	6
využívám jen zaškrtávací test	2
využívám jen test s postupným výpočtem	2
nevyužívám žádné	4

Tabulka 3.6: Výsledky – otázka 6

Zajímavým výsledkem bylo, že třetina respondentů testy nevyužívá vůbec. Zaměřují se tak nejspíš raději na postupy řešení integrálů.

Otázka 7

Závěrečná otázka byla jediná otevřená. Odpověď tentokrát nebylo možné vybrat z nabídky, ale bylo třeba ji samostatně formulovat.

Znění otázky: Vlastní názor na zlepšení stránek (pro lepší srozumitelnost, pochopitelnost, orientaci na webu i v učivu, apod.)

Níže jsou uvedeny některé zajímavé odpovědi.

- *„V poslední době jsem si oblíbila mluvené tutoriály. Proto bych uvítala i nějakou mluvenou verzi, nebo video se zvukem, kde se vysvětlí i hlouběji daná problematika."*
  žena, 22 let

- *„...velmi oceňuji detailně popsané veškeré značky a symboly, což bohužel není samozřejmostí v mnoha studijních materiálech, ale ne všichni studenti vědí, co který z nich přesně znamená."*
  žena, 21 let

- *„Doplnit třeba odkazy na další příklady."*
  žena, 20 let

- *„Pro přehlednost by bylo dobré v menu oddělit buttony režijní (tj. titulní stránka, odkazy, použité značky, literatura, rejstřík) od vlastních kapitol (tj. neurčitý, určitý, využití, ...)"*
  muž, 19 let

Závěr

Krátkým dotazníkovým šetřením bylo potvrzeno, že vytvořené webové stránky splňují vytyčené cíle. Pomáhají studentům zvládnout učivo integrálního počtu díky srozumitelnosti a využití interaktivních a dalších dynamických prvků.

Závěr

V této práci byl čtenáři představen rozbor existujících webových materiálů pro výuku integrálního počtu. Bylo ukázáno, že je vhodné vytvořit webovou aplikaci, která bude zahrnovat učivo integrálního počtu v rozsahu střední školy a využije předností webového prostředí.

Vytvořené webové stránky zahrnují teoretický výklad, řešené úlohy a testy. Důraz byl kladen na názornost a interaktivní prvky. Využívány byly applety, grafická znázornění a v neposlední řadě vysvětlující text.

Řešené úlohy byly děleny na úlohy se slovním komentářem a bez slovního komentáře. Komentované řešení poskytuje vysvětlení příčiny zvolení dané metody. Často zde byl záměrně nejprve nastíněn špatný postup, aby student došel k místu chybné úvahy a příště se dokázal rozhodnout pro správnou metodu. Úlohy bez slovního komentáře sloužily především pro kontrolu vlastního postupu. V neposlední řadě byly součástí webových stránek dva typy testů. Test nazvaný *Postupný výpočet* simuloval řešení příkladu neurčitého integrálu. Druhým typem byl *Zaškrtávací test* s výběrem odpovědi. Ten zahrnoval výpočty určitých integrálů, ověření teoretických znalostí a dále některé typové úlohy vyskytující se v používaných sbírkách příkladů.

Krátkým dotazníkovým šetřením v květnu 2013 mezi studenty prvního ročníku Univerzity Karlovy v Praze a Masarykovy univerzity v Brně bylo potvrzeno dosažení vytyčených cílů. Respondenti oceňovali zejména ty části práce, které využívaly možností webového prostředí – krokovaně řešené úlohy se slovním komentářem a interaktivní prvky.

Nakládání s prací

Souhlasím s vystavením mojí práce na webových stránkách Katedry didaktiky matematiky MFF UK v Praze. Dále souhlasím s jejími pozdějšími úpravami za účelem jejího zapojení do struktury matematického portálu, který vznikne z této a podobných bakalářských a diplomových prací. Portál vytvoří a bude spravovat právě a jedině Katedra didaktiky matematiky MFF UK či osoba jí pověřená.

Bc. Monika Tvrdá

Seznam použité literatury

[1] KUBÁT, Josef. *Matematika Maturitní minimum – Sbírka úloh z matematiky pro střední školy* . 1. vydání.

Prometheus: Praha, 1996. ISBN 80-7196-030-6.

[2] HRUBÝ, Dag. *Matematická cvičení pro střední školy.* 1. vydání.

Prometheus: Praha, 2008. ISBN 978-80-7196-374-5.

[3] HRUBÝ, Dag, KUBÁT, Josef. *Matematika pro gymnázia, Diferenciální a integrální počet.* 2. upravené vydání.

Prometheus: Praha, 2003. ISBN 80-7196-210-4.

[4] PETÁKOVÁ, J. *MATEMATIKA - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* 1. vydání.

Prometheus: Praha, 1998. ISBN 80-7196-099-3.

[5] KUBEŠOVÁ, N., CIBULKOVÁ, E. *Matematika – přehled středoškolského učiva.* 2. vydání.

edice MATURITA, nakladatelství VYUKA.cz: Třebíč, 2011. ISBN 978-80-86873-05-3.

[6] POLÁK, J. *Přehled středoškolské matematiky.* 6. vydání.

Prometheus: Praha 1997. ISBN 80-85849-78-X.

[7] TVRDÁ, M. *Objem těles.*

Bakalářská práce. MFF UK 2011

Internetové zdroje

[1] *http://matematika-online-a.kvalitne.cz/integralni-pocet.htm.*

[2] *http://www.aristoteles.cz/matematika/integraly/integraly-tabulka.php.*

[3] *http://homen.vsb.cz/ kre40/esfmat2/*

[4] *http://mathonline.fme.vutbr.cz/*

[5] *http://www.mojeskola.cz/*

[6] *http://www.priklady.eu/cs/Matematika/Neurcity-integral.alej*

[7] *http://mathworld.wolfram.com/topics/Integrals.html*

[8] *http://www.geogebratube.org/?lang=cs*