Monika Tvrdá: **Webová aplikace pro výuku integrálního počtu na střední škole**

Posudek oponenta

Hlavním cílem předložené práce bylo vytvoření webových stránek pro výuku integrálního počtu, které by byly vhodné pro středoškolské studenty. Jedná se tedy o další přírůstek do sbírky webových výukových materiálů, které vznikají na KDM MFF UK.
V úvodní části autorka zkoumá existující webové stránky podle předem stanovených kritérií (obsahová přiměřenost, věcná správnost, didaktické zpracování, grafické zpracování, interaktivní prvky). Kriticky hodnotí jak obsah a didaktické zpracování, tak i nedostatečné využívání interaktivních prvků.
Hlavní část práce tvoří samotné webové stránky, které pokrývají běžné středoškolské učivo z oblasti integrálního počtu. V závěru práce pak najdeme vyhodnocení ankety, ve které se k nově vzniklým stránkám vyjádřili studenti.
Kritéria, která autorka zvolila k hodnocení existujících stránek, považuji za velmi rozumná. Pokusím se tedy na jejich základě zhodnotit i nově vzniklé stránky a použiji i stejný způsob hodnocení známkami od 1 (nejlepší) do 4 (nejhorší).

Obsahová přiměřenost

Na str. 5 tištěné verze práce autorka vyjmenovává šest dovedností, které by měl student střední školy po absolvování partie týkající se integrálního počtu ovládat (seznam je převzat z publikace *Matematika – maturitní minimum*). Její práce pokrývá prvních pět témat, chybí téma šesté – nejjednodušší fyzikální aplikace určitého integrálu. Z toho důvodu hodnotím známkou 2.

Věcná správnost

V textu jsem objevil řadu nepřesností, například:

- V úlohách na výpočet primitivní funkce není uvedeno, na jakém intervalu primitivní funkci hledáme (např. příklad 2.2.9 na s. 69, úloha 2.2.7 na s. 78).
- Věta o existenci primitivní funkce na s. 58 neplatí: Spojitost je postačující, ale nikoliv nutnou podmínkou pro existenci primitivní funkce.
- Zavedení určitého integrálu je matoucí. Autorka začíná „součtovou definicí integrálu“, která odpovídá definici Riemannova integrálu pomocí dolních a horních součtů. Přitom tvrdí, že pro každou omezenou funkci *se hodnoty dolního i horního součtu limitně přibližují ke stejné hodnotě*, což není pravda (omezenost nestačí). Dále píše, že tento způsob zavedení „se nazývá Newton-Leibnitzova formule“, což opět není pravda (zmíněná formule je vzorec $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.) V další části pak opět definuje (!) určitý integrál jako rozdíl hodnot primitivní funkce, tj. jako Newtonův integrál. Přitom se navíc dopouští nepřesnosti: pracuje s primitivní funkcí na uzavřeném intervalu, tento pojem však dříve definovala pouze pro otevřené intervaly. Následně hovoří o tom, že integrál lze interpretovat jako obsah útvaru pod grafem nezáporné funkce. Celkově tedy autorka uvádí dvě různé definice, přičemž není zřejmé, zda jsou ekvivalentní a proč tomu tak je. Toto považuji za největší odborný nedostatek: Souvislost mezi počítáním obsahů a hledáním primitivní funkce se právem nazývá „základní větou integrálního počtu“ a je škoda, že tato problematika není v práci řádně vysvětlena.
- Nerozumím appletu, který má ilustrovat vztah určitého a neurčitého integrálu (s. 91). Definice $A(x) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ nedává smysl. Má applet demonstrovat, že určitý integrál jako funkce horní meze představuje primitivní funkci? Pak by mělo být $A(c) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$. To by ovšem znamenalo, že $A(a) = 0$, což neodpovídá čárkované čáře na obrázku.
- Autorka v práci používá pojmy „primitivní funkce“ a „neurčitý integrál“, jako by to byla synonyma. Neurčitý integrál přitom není explicitně definován, autorka jen píše: *Hledáme-li primitivní funkci F k dané funkci f, říkáme též, že počítáme neurčitý integrál.* Z toho ještě nemusí být zřejmé, zda oba termíny znamenají přesně totéž; pro začátečníky to může být matoucí.
- Odvození vzorce pro výpočet objem rotačního tělesa na s. 126–127 je poněkud nejasné. Aproximace tělesa pomocí válečků je názorná, poté však následuje nesrozumitelná věta: *Hodnoty f(x) odvodíme ze součtové definice určitého integrálu.*

Dále jsem objevil chyby u některých otázek zaškrtávacího testu:

- U otázky *Určete hodnoty parametrů a, $b \in \mathbf{Z}$ tak, aby platilo $b - a = 2$ a zároveň $\int_a^b 3/x^2\,\mathrm{d}x = 2$* jsou dvě správné odpovědi. Jedna z nich, $a = -3$ a $b = -1$, je však označena jako špatná.

- U otázky *Určete hodnoty parametrů* a*,* $b \in \mathbf{R}$ *tak, aby platilo* $a + b = 5$ *a zároveň* $\int_a^b 4x \,\mathrm{d}x = 10$ není ani jedna z nabízených odpovědí ($a = 5$, $b = 3$; $a = 3$, $b = 5$; $a = 1$, $b = 4$; $a = 4$, $b = 1$) správná.
- U otázky *Z následujících funkcí* $F_1(x) = (\cos^2 x)/5$*,* $F_2(x) = -(\cos 2x)/2$*,* $F_3(x) = 4 + \sin^2 x$*,* $F_4(x) = -\operatorname{cotg}^2 x \sin^2 x + 13$ *vyberte ty, které jsou primitivními funkcemi ke STEJNÉ funkci* je jako správná označena chybná odpověď F_1, F_2.
- Jedna z otázek směřuje na hodnotu integrálu $\int_2^4 \frac{x^2-7x+12}{x-3} \,\mathrm{d}x$. Integrovaná funkce však není definována v bodě $x = 3$, a pro takové funkce nebyl integrál nikde definován.
- U otázky *Vzorec* $V = \pi\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x$ *lze použít pro výpočet objemu takového tělesa, které* ... je chyba v zadání, správně má být $V = \pi\int_a^b f(x)^2 \,\mathrm{d}x$.
- U otázky *Při určování obsahu útvaru ohraničeného grafy dvou funkcí* je jako správná uvedena odpověď *můžeme bez ohledu na polohu křivek vůči ose* x *použít vzorec* $S(U) = \int_a^b [f(x) - g(x)] \,\mathrm{d}x$. To je však pravda jen za dodatečného předpokladu, že $f \geq g$ na intervalu $[a, b]$.

Vzhledem ke zmíněným nedostatkům hodnotím věcnou správnost známkou 2.

Didaktické zpracování

Text je vhodně koncipován tak, aby byl co nejsrozumitelnější z pohledu středoškolského studenta. Pro ilustraci početních metod volí autorka typické příklady a srozumitelně vysvětluje, proč zvolila příslušný postup řešení. Přesto mám několik kritických připomínek:

- Motivace k zavedení pojmu primitivní funkce mi připadá nedostatečná. Bylo by možné např. zmínit, že derivování odpovídá hledání okamžité rychlosti pohybujícího se objektu. Pomocí primitivní funkce naopak můžeme zrekonstruovat pohyb tělesa, známe-li v každém okamžiku jeho rychlost.
- Motivace k zavedení určitého integrálu (s. 85) mi připadá nesrozumitelná – vůbec není vysvětleno, jak daná úloha (stejně jako příslušný applet) souvisí s integrováním. Domnívám se, že je mnohem lepší motivovat zavedení integrálu klasickým způsobem, tj. úlohou hledání obsahu útvaru pod grafem funkce.
- Jaký je smysl appletu „Vykreslení primitivní funkce“ na s. 55? Dá se z něj vyčíst něco jiného než jen to, jak vypadají grafy funkcí $y = x^2$ a $y = 2x$? Pokud ano (např. to, že primitivní funkce roste tam, kde je původní funkce kladná), měl by na to být čtenář upozorněn. Pokud ne, považuji applet za zbytečný. Stejně tak applet na s. 57 (změna integrační konstanty) nepovažuji za příliš přínosný.
- Nerozumím smyslu mnemotechnické pomůcky pro integraci per partes na s. 64. V čem je zapamatování pomůcky jednodušší než zapamatování příslušného vzorce?
- Na stranách 66 a dále se hovoří o dvou různých zápisech při použití substituce. Nerozumím, v čem jsou tyto zápisy odlišné – připadají mi totožné. Pokud opravdu jsou odlišné, měl by být vysvětleno, čím se liší. Dále by mělo být zmíněno, že při provádění substituce jsou symboly jako $\mathrm{d}x$ nebo $\mathrm{d}t$, které nebyly nikde definovány, pouze formální a nepřisuzujeme jim žádný význam.

Grafické zpracování

Práce je sepsáno velmi kultivovaně, počet překlepů je minimální („fomátu“ na s. 3, 3. řádek zdola, chybějící vlnka v adrese `homen.vsb.cz/~kre40/esfmat2/` na s. 23, „illustrováno“ na s. 25, 3. řádek, „tetx“ na s. 26, 14. řádek, „pokdapitola“ na s. 35, 4. řádek). Velmi oceňuji použití zobrazování matematiky pomocí jsMath fontů, které vypadají hezky a dobře ladí s okolním textem. Upozorňuji pouze na místy nejednotné sázení symbolů pro číselné množiny $\mathbf{R}$ a $\mathbf{N}$, které jsou většinou sázeny blackboard bold fontem, ale na několika místech jsou pouze kurzívou (např. s. 56, 59). Celkově hodnotím grafické zpracování známkou 1.

Interaktivní prvky

Interaktivita je využívána v dostatečné míře. Applety jsou až na výjimky (viz výše) přínosné, náhodně generované testy a řešené úlohy s postupným odkrýváním kroků považuji za velmi zdařilé a hodnotím známkou 1.

Na závěr připojuji několik dalších připomínek:

- Úlohu 2.2.5 na s. 74 lze řešit jednodušeji (bez per partes), stačí použít vzorec $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$, který snadno plyne ze standardních identit $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

- V příkladu 2.2.9 na s. 69–70 není pravda, že substituce $t = \sin x$ nevede k cíli (jen je pracnější):

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x \cos x}{1 - \sin^2 x} \mathrm{d}x = \int \frac{t}{1 - t^2} \mathrm{d}t = -\frac{1}{2} \ln(1 - t^2) = -\ln \cos x$$

- V příkladu ilustrujícím součtovou definici integrálu (s. 86) by asi mělo být uvedenou, že obrazec je navíc omezen přímkou $x = 3$ (soudím tak na základě obrázku).
- V tabulce primitivních funkcí (s. 59) je 4. vzorec speciálním případem 5. vzorce, je tedy zbytečný. V podmínkách platnosti vzorců se vyskytují zápisy jako $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ – co je tím míněno, jestliže primitivní funkce byla definována pouze na otevřeném intervalu (nikoliv na sjednocení intervalů)?
- Není pravda, že na stránkách Mathworld chybí zmínka o substituční metodě (jak uvádí autorka na s. 45). Nachází se pod heslem *Change of Variables Theorem*.
- Při popisu integrace per partes autorka píše (s. 62), že vztah $\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ lze psát ve zkrácené podobě $\int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x$. Tato podoba se pak objevuje i na dalším místech práce. Konvence je ve skutečnosti taková, že při vynechání argumentů funkcí se vynechává i symbol $\mathrm{d}x$, tj. píšeme jen $\int uv' = uv - \int u'v$.
- Před důkazem integrace per partes je napsáno, že *S vědomím mírné matematické nekorektnosti budeme pro účely názorného vysvětlení průběhu důkazu nyní na vztah pro derivaci součinu nahlížet jako na rovnici.* Nerozumím, proč by to mělo být nekorektní.
- Zařazení Cavalieriho principu sice vypadá jako zajímavé zpestření, podle mého názoru však působí poněkud rušivě. Čtenáře přirozeně napadne otázka, zda lze tento princip odvodit pomocí integrálního počtu, odpověď ale bude hledat marně. (To není zase tak překvapivé – Cavalieriho princip lze dokázat pomocí Fubiniovy věty, ta však není součástí středoškolské matematiky.) Autorka dále ukazuje, že objem válce je rovnen součtu objemů koule a dvojitého kužele. Její postup však není v souladu s formulací Cavalieriho principu, kde se porovnávají objemy pouze dvou těles. K formulaci principu mám i jinou připomínku: Není nutné explicitně požadovat rovnost obsahů podstav, neboť jde jen o speciální případ řezů.
- V úloze týkající se odvození objem koule (úloha 2.4.1, s. 129) je poněkud kuriózní věta *Meze opět odvodíme z appletu.* Je přece jasné, že meze jsou průsečíky kružnice s osou x.
- V poznámce 2.3.7 na s. 92 autorka píše *Všimněte si, že pokud je dolní mez rovna 0, „stačí dosazovat pouze mez horní“.* To je dosti nepřesné tvrzení, které platí jen pro funkce typu x^a, $a > 0$. Nepozorný čtenář by ale mohl nabýt dojmu, že platí obecně.
- Poslední dva applety na stránce *Obsah rovinného útvaru* se mi nepodařilo spustit (zobrazuje se jen logo Geogebra). Testoval jsem na dvou počítačích v prohlížečích Firefox 22 a Internet Explorer 10.

Doporučuji předloženou práci uznat jako diplomovou. Domnívám se, že může být velmi užitečnou pomůckou pro středoškolské studenty, a že svou kvalitou výrazně převyšuje existující stránky. Vzhledem k poněkud většímu množství nedostatků však navrhuji hodnocení *velmi dobře.*

V Praze dne 22. 8. 2013

RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
Katedra didaktiky matematiky MFF UK