UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Vztahy mezi prvky trojúhelníku

Relations among elements of a triangle

Autor: Lucie Machovcová

Vedoucí práce: RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.

Praha 2011

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracovala samostatně pod vedením RNDr. Jaroslava Zhoufa, Ph.D. V práci jsou použity informační zdroje uvedené na konci práce v seznamu literatury.

V Praze dne 16. května 2011

____

Lucie Machovcová

Děkuji vedoucímu mé bakalářské práce, RNDr. Jaroslavu Zhoufovi, Ph.D., za velkou ochotu, cenné rady a připomínky, které mi pomohly k realizaci této bakalářské práce.

Obsah

Abstrakt

Práce shrnuje nejen téměř všechny základní prvky, vlastnosti a znalosti o trojúhelníku, ale i takové, které se běžně na základních a středních školách nevyučují. Cílem práce je seznámit čtenáře s těmito prvky a ukázat, jaké mezi nimi existují vztahy. V poslední kapitole jsou řešené konstrukční i početní příklady, které využívají vztahů popsaných v práci a které jsou svojí tematikou nad rámec střední školy. Součástí práce jsou kvůli názornosti také obrázky, aby si čtenář dovedl lépe představit uvedené pojmy a souvislosti. Všechny obrázky jsou vytvořené v geometrickém programu GeoGebra.

Klíčová slova: trojúhelník, strana, úhel, výška, těžnice, obsah, obvod.

Abstract

This thesis summarizes not only most of the basic components and qualities of a triangle but it also brings pieces of information about triangles which are not usually taught at elementary and high schools. The aim of the thesis is to make readers acquainted with those components and to show differences between them. There are solved constructional and arithmetical problems in the last chapter. These problems utilize relations described in the thesis. The topic of these relations goes beyond mathematical curriculum of high schools. A part of the thesis is made of pictures to imagine better the terms described and the relations of components. All of the pictures are designed in a geometrical program called GeoGebra.

Key words: triangle, side, angle, altitude, median, area, perimeter.

Úvod

S pojmem trojúhelníku jsem se seznámila již na základní škole – asi jako každý z nás. Zde jsem se naučila jeho základní prvky a konstrukce podle vět *sss*, *sus*, *usu*. Na gymnáziu jsem ale poznala, že existují ještě i jiné způsoby, jak trojúhelník sestrojit.

Součástí učiva střední školy byly také některé věty, které dávaly do souvislostí vztahy mezi jednotlivými prvky trojúhelníku. To jsem ovšem ještě zdaleka ani netušila, kolik takových vět a nových prvků trojúhelníku existuje.

V prvním ročníku na vysoké škole jsme prohlubovali již dosud známé prvky a vztahy, které jsme se naučili na střední škole, a postupně k nim přidávali nové. Ve druhém ročníku jsem absolvovala předmět „Metody řešení úloh B–I“. Zde jsem se dozvěděla, že v trojúhelníku existuje mnohem více jeho prvků – bodů, kružnic, přímek, a vztahů mezi nimi, než jsem se domnívala.

Vždycky mě bavilo zjišťovat, jak by se dal zkonstruovat trojúhelník, když jsem znala jen nějaké jeho vlastnosti. Pro tyto konstrukce je však velmi důležité umět využívat vztahů mezi jeho prvky. Rozhodla jsem se tedy, že se jimi budu zabývat ve své bakalářské práci.

Chci zde popsat nejznámější prvky trojúhelníku, jako jsou těžnice, výšky, střední příčky, kružnice opsaná i vepsaná, ale i kružnice, přímky a body, které se obvykle v hodinách matematiky nevyučují, např. Lemoinův bod, Tuckerovy kružnice nebo Simsonova přímka. Také chci ukázat, jak lze sestrojit trojúhelník, když jsou zadány některé jeho jiné prvky, než známe ze střední školy.

Práce je rozdělena do šesti kapitol. V první kapitole je definován trojúhelník a jsou zde uvedeny některé důležité věty týkající se trojúhelníku. Druhá kapitola je souhrnem pojmů, které se běžně vyučují na základních i středních školách. Ve třetí a čtvrté kapitole se čtenář seznámí s přímkami, body a kružnicemi trojúhelníku, které nejsou součástí učiva mnohde ani na vysokých školách. V páté kapitole uvádím nejznámější vztahy pro výpočet obvodu a obsahu trojúhelníku. Poslední kapitola je jakýsi souhrn toho, co zde bylo popsáno. V jednotlivých příkladech jsou dány do souvislostí poznatky, na jejichž základě je možné zrealizovat konstrukci trojúhelníku.

Předmět „Metody řešení úloh B–I“ mi byl inspirací pro výběr většiny prvků a vlastností, jež práce obsahuje. V tomto předmětu jsem dostala za úkol stručně objasnit pojem Tuckerova kružnice. Ale pro její sestrojení je zapotřebí znát spoustu dalších pojmů, které jsem tedy musela nastudovat, abych tento úkol mohla splnit. O většině z nich jsem neměla ani tušení, že vůbec existují. Na jiné prvky jsem narazila jen náhodou při rozšiřování znalostí o pojmech, které jsem našla v literatuře.

Jen u některých vět jsou popsány jejich důkazy. Vybírala jsem důkazy méně náročné nebo ty, u kterých se daly využít již věty zde uvedené. Tam, kde nejsou důkazy popsány, jsou alespoň odkazy na to, kde se nechají dohledat.

Práce je psána takovým způsobem, který je přístupný i pro neodborníky v oboru matematiky. Jednotlivé pojmy jsou vysvětlovány na základě jednoduchých znalostí z geometrie. Čtenář zde najde shrnutí nejen toho nejdůležitějšího o trojúhelníku, ale i další zajímavosti, které nejsou běžně publikovány.

1 Definice trojúhelníku

Každý má jistě nějakou představu o tom, co to trojúhelník je a jak vypadá. Trojúhelník lze definovat různými způsoby. Uveďme si zde několik definic.

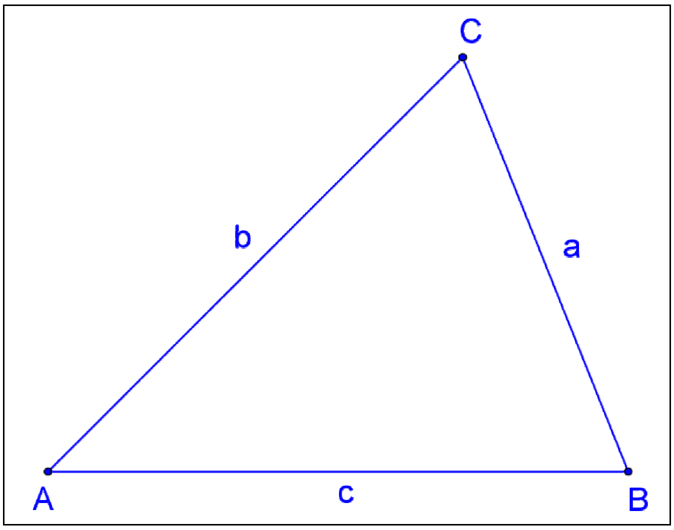
„Tři různé body *A*, *B*, *C*, které neleží v přímce, určují trojúhelník *ABC*“ [1, s. 22].

„Mějme dány tři různé body *A*, *B*, *C*, které neleží v jedné přímce. Trojúhelník *ABC* je průnik polorovin *ABC*, *BCA*, *CAB*, tj. množina všech bodů, jež leží zároveň v těchto třech polorovinách“ [2, s. 379].

Mějme dány tři různé body *A*, *B*, *C*, které neleží v přímce. „Trojúhelník *ABC* lze též definovat jako množinu všech úseček *AX*, kde *X* je libovolný bod úsečky *BC*“ [2, s. 379].

Trojúhelník je rovinný geometrický útvar, mnohoúhelník se třemi stranami a třemi vrcholy [3].

Vrcholy trojúhelníku se značí velkými písmeny, obvykle *A*, *B*, *C*. Úsečky, které spojují jednotlivé vrcholy, se nazývají strany trojúhelníku a značí se malými písmeny – *a*, *b*, *c*. Úsečka *BC* odpovídá straně *a*, úsečka *AC* straně *b* a úsečka *AB* straně *c* (obr. 1).



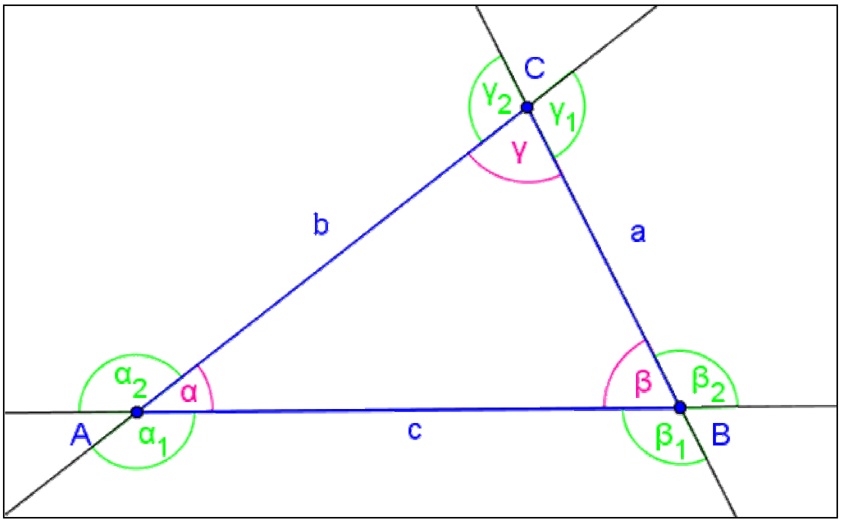
Obr. 1 – Trojúhelník

Pokud sjednotíme všechny tři strany trojúhelníku, dostaneme hranici trojúhelníku. Body, které náleží hranici trojúhelníku, se nazývají hraniční body. Zbývající body trojúhelníku se nazývají vnitřní body trojúhelníku a množina všech vnitřních bodů trojúhelníku se nazývá vnitřkem trojúhelníku [2, s. 379].

1.1 Úhly

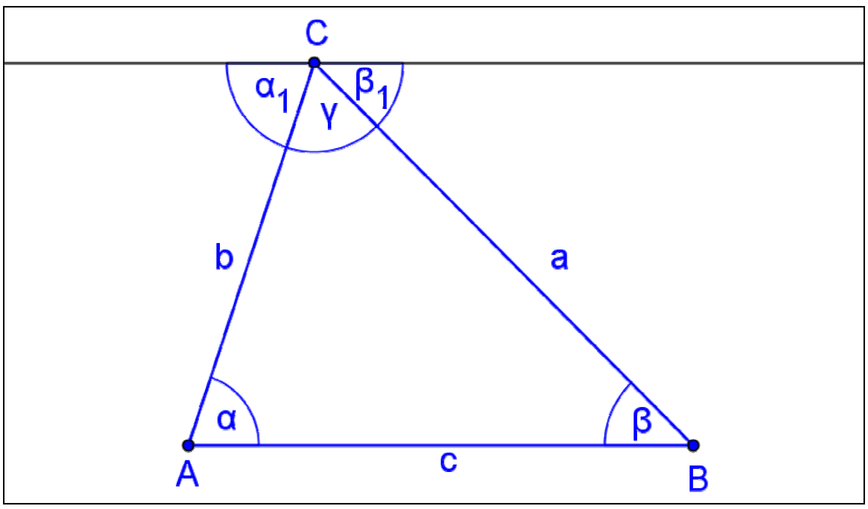
Každý trojúhelník má tři vnitřní úhly a šest úhlů vnějších (obr. 2). Vnitřní úhly se obvykle značí malými písmeny řecké abecedy, a to tak, že úhel u vrcholu *A* odpovídá písmenu α (úhel *BAC*), úhel u vrcholu *B* písmenu β (úhel *CBA*) a úhel u vrcholu *C* písmenu γ (úhel *ACB*).

Vnější úhel je vedlejší úhel ke svému vnitřnímu úhlu. Součet vnitřního a vnějšího úhlu trojúhelníku je vždy 180° [4, s. 33].



Obr. 2 – Vnitřní a vnější úhly trojúhelníku

Pro velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku platí věta: „Součet velikostí vnitřních úhlů je roven 180°, tj. $\alpha + \beta + \gamma = 180°$“ [5, s. 114].



Obr. 3 – Součet vnitřních úhlů trojúhelníku

Důkaz věty je zřejmý z obr. 3. Přímka procházející bodem C je rovnoběžka s úsečkou AB. Úhel α_1 je shodný s úhlem α (úhly střídavé), úhel β_1 je shodný s úhlem β (ze stejného důvodu). Součet úhlů α_1, β_1 a γ musí být 180° – úhel přímý.

Pro velikosti vnějších úhlů platí též jedna důležitá rovnost: Velikost vnějšího úhlu trojúhelníku ABC je součtem velikostí vnitřních úhlů při zbývajících vrcholech, tj. $\alpha_1 = \beta + \gamma$, $\beta_1 = \alpha + \gamma$, $\gamma_1 = \alpha + \beta$ [5, s. 144].

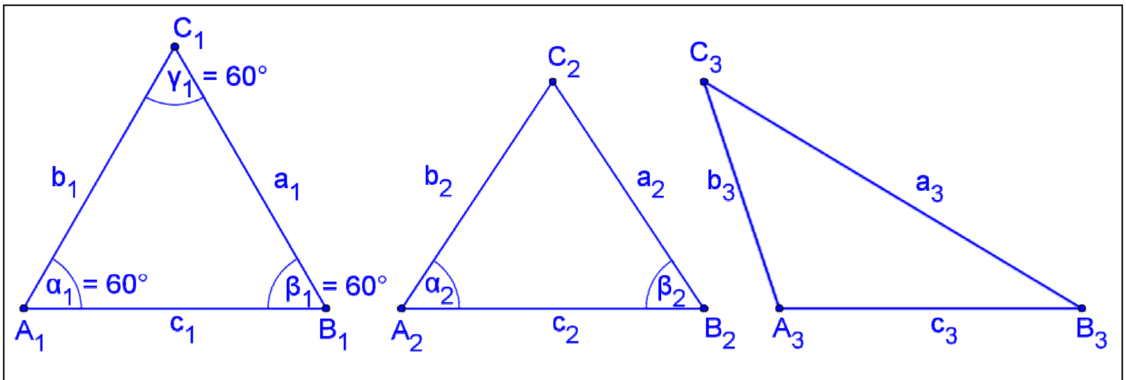
1.2 Druhy trojúhelníků

Trojúhelníky můžeme rozlišovat podle několika kritérií. Zde se budeme zabývat jen délkami stran a velikostmi úhlů. Podle délek stran dělíme trojúhelníky na rovnostranné, rovnoramenné a obecné (obr. 4).

Rovnostranný trojúhelník má všechny své strany stejně dlouhé. Odtud vyplývá, že má i úhly stejně velké, tj. každý z nich má velikost 60°.

Rovnoramenný trojúhelník má právě dvě strany stejně dlouhé a třetí strana má jinou délku. Stejně dlouhé strany se nazývají ramena a třetí strana je základna. Úhly přilehlé k základně jsou shodné.

Obecný (různostranný) trojúhelník má každé dvě strany různě dlouhé.



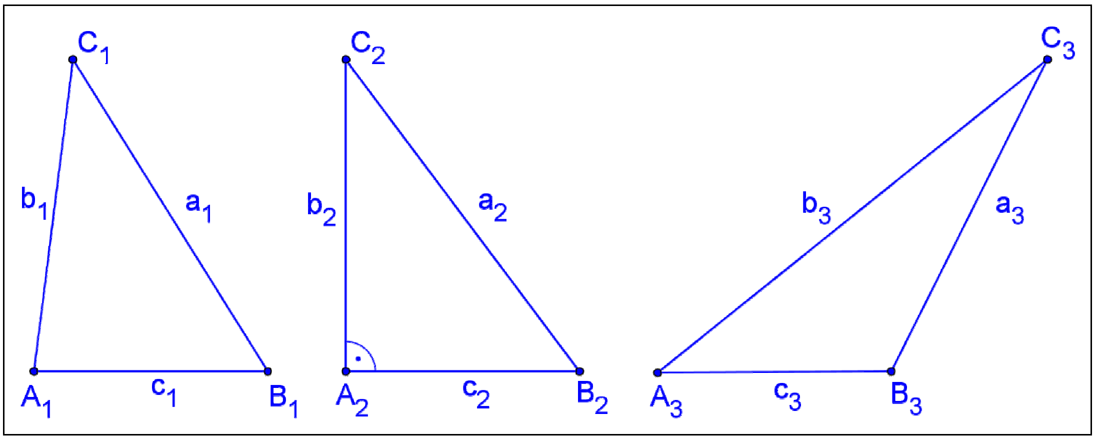
Obr. 4 – Trojúhelníky rozdělené podle délek stran: rovnostranný, rovnoramenný, obecný

Podle velikostí úhlů dělíme trojúhelníky na ostroúhlé, pravoúhlé a tupoúhlé (obr. 5).

Ostroúhlý trojúhelník má všechny vnitřní úhly ostré (menší než 90°).

Pravoúhlý trojúhelník má jeden úhel pravý (roven 90°). Z toho plyne, že zbývající dva úhly musí být ostré. Strany, které svírají pravý úhel, se nazývají odvěsny, nejdelší strana, naproti pravému úhlu, se nazývá přepona.

Tupoúhlý trojúhelník má jeden úhel tupý (větší než 90°). Zbývající dva úhly musí být nutně ostré.



Obr. 5 – Trojúhelníky rozdělené podle velikostí úhlů: ostroúhlý, pravoúhlý, tupoúhlý

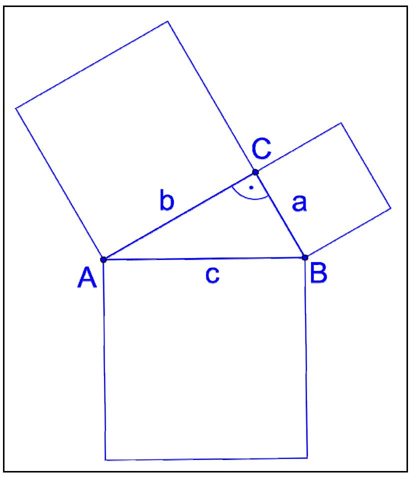
1.3 Vztahy mezi úhly a stranami trojúhelníku

V této podkapitole se seznámíme s důležitými větami, které se týkají vztahů mezi stranami trojúhelníku a vnitřními úhly.

1.3.1 Pythagorova věta

Tato věta je snad nejznámější z vět o trojúhelníku. Učí se ji již děti na základní škole a téměř každý by si jistě vzpomněl na její znění: „Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku se rovná součtu obsahů čtverců sestrojených nad oběma odvěsnami“ [1, s. 75].

Pomocí této věty lze dopočítat zbývající stranu trojúhelníku, když jsou dvě zadané, nebo ověřit, zda je trojúhelník pravoúhlý – pokud známe délky všech tří stran.



Obr. 6 – Pythagorova věta

Na obr. 6 je geometricky vyjádřen součet čtverců nad odvěsnami *a*, *b*, a tedy platí

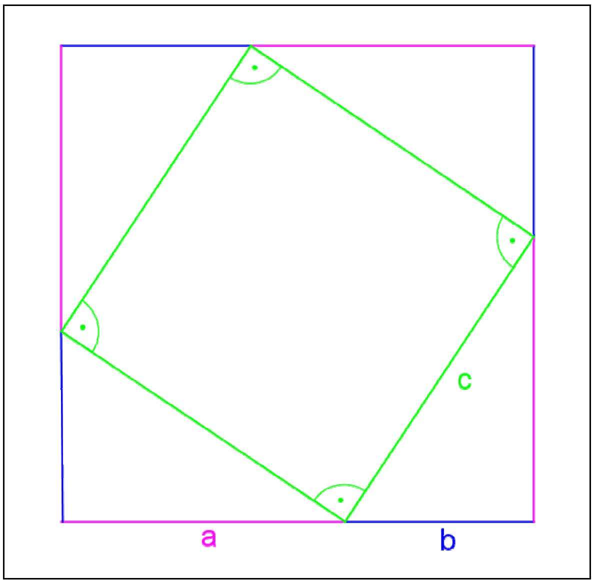
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Důkazů Pythagorovy věty existuje několik. Zde použijeme důkaz založený na obsahu čtverce. Budeme mít libovolný čtverec s délkou strany $a + b$, délky a, b se pravidelně střídají (obr. 7). Uprostřed vznikne menší čtverec, jehož délku strany označíme c. Obsah „velkého“ čtverce lze vypočítat dvěma způsoby – podle vzorce pro obsah čtverce, když známe délku jeho strany, a nebo součtem obsahů jednotlivých obrazců, které ve „velkém“ čtverci vznikly. Vzniklými obrazci jsou čtyři pravoúhlé trojúhelníky s odvěsnami délek a, b a menší čtverec o délce strany c [6, s. 22]. Jelikož obsah čtverce musí vyjít stejně v obou případech, dostáváme postupně rovnosti:

$$(a+b)^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$



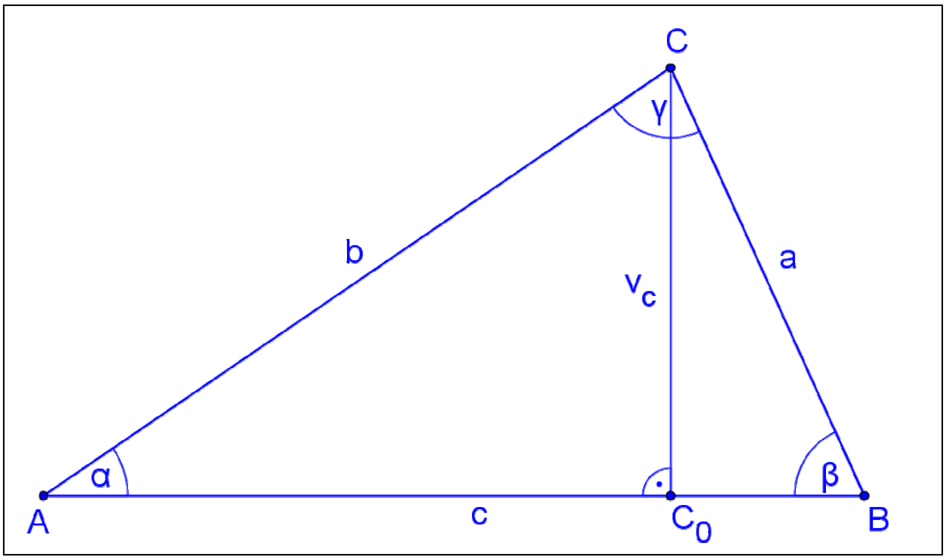
Obr. 7 – Důkaz Pythagorovy věty

1.3.2 Sinová věta

Mějme libovolný trojúhelník ABC se stranami délek a, b, c a úhly o velikostech α, β, γ při standardním značení. Pak platí [7]:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Jinými slovy: „Poměr délek dvou stran trojúhelníku se rovná poměru hodnot funkce sinus protilehlých úhlů“ [8, s. 59].



Obr. 8 – Sinová věta

Důkaz provedeme nejprve pro ostroúhlý trojúhelník. V trojúhelníku *ABC* na obr. 8 označíme C_0 patu výšky z vrcholu *C* na stranu *c*, velikost této výšky pak v_c.

V pravoúhlém trojúhelníku AC_0C platí

$$\sin\alpha = \frac{v_c}{b}.$$

Podobně v pravoúhlém trojúhelníku C_0BC platí

$$\sin\beta = \frac{v_c}{a}.$$

Z obou rovností vyjádříme velikost výšky v_c. Z první rovnosti plyne $v_c = b\sin\alpha$, ze druhé rovnosti dostáváme $v_c = a\sin\beta$.

Jelikož velikost výšky v_c se musí v obou případech rovnat, dostáváme tak rovnost $b\sin\alpha = a\sin\beta$. Další vztahy vyplývají z cyklické záměny.

Pokud by byl například úhel β větší než 90°, ležela by pata výšky v_c (bod C_0) mimo úsečku *AB* a platilo by

$$\sin(180° - \beta) = \frac{v_c}{a}.$$

Protože ale $\sin(180° - \beta) = \sin\beta$, platí sinová věta i v tomto případě.

Zbývá vyšetřit případ, kdy je například úhel β pravý (roven 90°). Zde je výška v_c rovna délce strany *a* a platí

$$\sin\alpha = \frac{a}{b}$$

a zároveň sinus 90° je roven jedné [8, s. 59].

1.3.3 Kosinová věta

Mějme opět libovolný trojúhelník *ABC* se stranami délek *a*, *b*, *c* a úhly o velikostech α, β, γ podle standardního značení. Pak platí

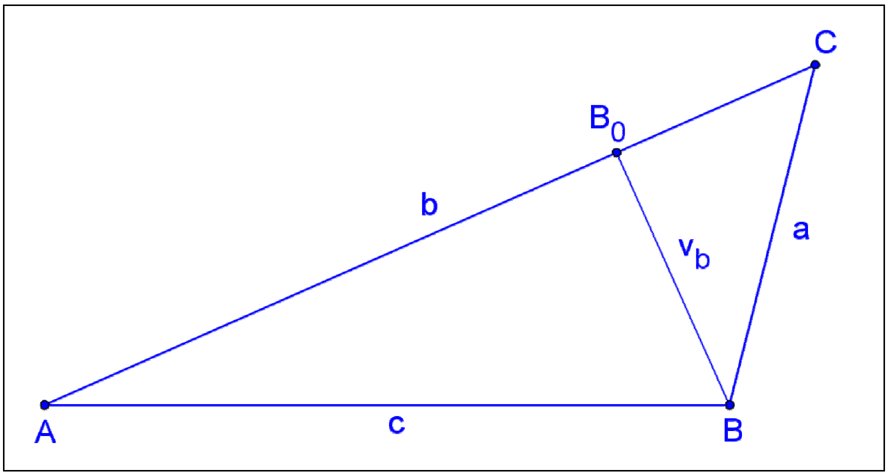
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Cyklickými záměnami dostáváme vztahy [7]

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta.$$

Pokud velikost úhlu γ je 90°, je pak cos γ roven nule a dostáváme Pythagorovu větu.



Obr. 9 – Kosinová věta

Důkaz nám pomůže objasnit obr. 9. Z vrcholu *B* povedeme výšku v_b na stranu *b*. Patu této výšky označíme B_0. Mohou nastat dva případy: pata výšky B_0 leží na úsečce *AC*, nebo leží mino tuto úsečku.

Pokud B_0 leží na této úsečce, je $|AB_0| = b - a\cos\gamma$. Když pata B_0 výšky v_b neleží na úsečce *AC*, je $|AB_0| = b + a\cos(180° - \gamma)$. Protože ale $\cos(180° - \gamma) = -\cos\gamma$, opět platí $|AB_0| = b - a\cos\gamma$. Podobně je tomu se vzdáleností $|BB_0| = a\sin\gamma$ [8, s. 59–60].

Můžeme tedy použít Pythagorovu větu $|AB|^2 = |AB_0|^2 + |BB_0|^2$ a dosadit:

$$c^2 = (b - a\cos\gamma)^2 + (a\sin\gamma)^2$$

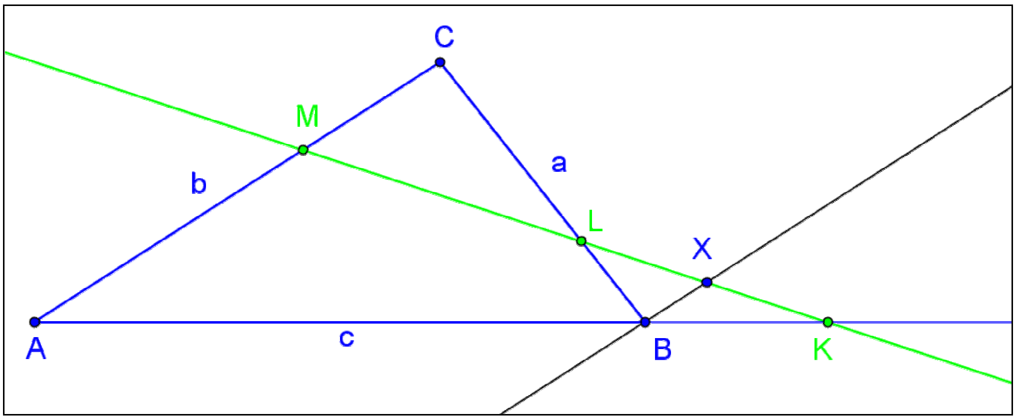
$$c^2 = b^2 - 2ab\cos\gamma + a^2\cos^2\gamma + a^2\sin^2\gamma$$

$$c^2 = b^2 + a^2(\cos^2\gamma + \sin^2\gamma) - 2ab\cos\gamma = b^2 + a^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

1.4 Menelaova věta

„V rovině je dán trojúhelník *ABC*, na přímkách *AB*, *BC*, *CA* leží po řadě body *K*, *L*, *M*, které jsou všechny různé od vrcholů trojúhelníku. Leží-li body *K*, *L*, *M* na společné přímce, pak platí: z bodů *K*, *L*, *M* patří trojúhelníku buď právě dva, nebo žádný a zároveň $\frac{|AK|}{|BK|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = 1$“ [8, s. 52].



Obr. 10 – Menelaova věta

Důkaz této věty provedeme následovně. Budeme předpokládat, že body *K*, *L*, *M* leží na přímce (obr. 10). Z toho je jasné, že z bodů *K*, *L*, *M* náleží trojúhelníku *ABC* právě dva, nebo žádný. Dále sestrojíme rovnoběžku se stranou *AC*, která prochází bodem *B*, a průsečík této rovnoběžky s přímkou *KL* označíme *X*. Potom existuje stejnolehlost se středem *K*, kde obrazem bodu *B* je bod *A* a obrazem bodu *X* je bod *M*. Pak musí platit $\frac{|AK|}{|BK|} = \frac{|AM|}{|BX|}$. Podobně existuje také stejnolehlost se středem v bodě *L*, kde obrazem bodu *C* je bod *B* a obrazem bodu *M* je bod *X* a platí $\frac{|BL|}{|CL|} = \frac{|BX|}{|CM|}$. Vynásobením těchto rovností dostáváme $\frac{|AK|}{|BK|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = 1$ [8, s. 52].

1.5 Cèvova věta

„V rovině je dán trojúhelník *ABC*, na přímkách *AB*, *BC*, *CA* leží po řadě body *K*, *L*, *M*, které jsou všechny různé od vrcholů trojúhelníku *ABC*. Procházejí-li přímky *CK*, *AL*, *BM* jedním bodem, nebo jsou-li rovnoběžné, pak platí: právě jeden z bodů

K, L, M je bodem trojúhelníku ABC, nebo každý z nich je bodem trojúhelníku ABC a zároveň $\frac{|AK|}{|BK|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = 1$" [8, s. 53].

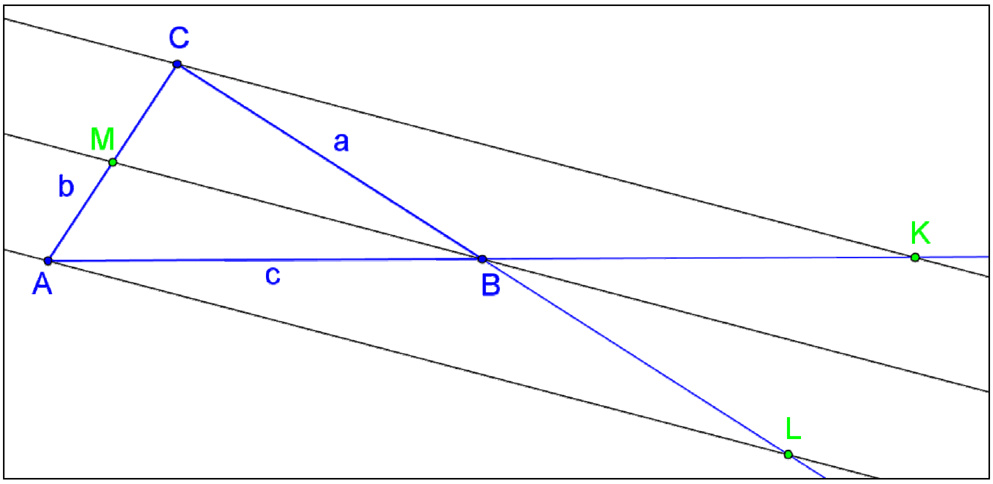
Důkaz: Budeme předpokládat, že přímky CK, AL, BM jsou navzájem rovnoběžné, nebo procházejí týmž bodem. Z toho jasně vyplývá, že právě jeden z bodů K, L, M je bodem trojúhelníku ABC, nebo každý z nich je bodem trojúhelníku ABC.

Pokud by byly přímky CK, AL, BM navzájem rovnoběžné (obr. 11), jen jeden z bodů K, L, M by náležel trojúhelníku ABC; zvolíme například bod M. Potom existují dvě stejnolehlosti, z nichž první, stejnolehlost se středem C, zobrazuje trojúhelník CMB na trojúhelník CAL, druhá, stejnolehlost se středem A, zobrazuje trojúhelník AMB na trojúhelník ACK. Z těchto stejnolehlostí vyplývají rovnosti

$$\frac{|AK|}{|BK|} = \frac{|CA|}{|CM|}, \quad \frac{|BL|}{|CL|} = \frac{|AM|}{|CA|}.$$

Když tyto rovnosti vynásobíme, dostáváme rovnost [8, s. 54]:

$$\frac{|AK|}{|BK|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = 1$$



Obr. 11 – Cèvova věta – přímky rovnoběžné

Musíme ale také uvažovat případ, kdy přímky CK, AL, BM procházejí jedním bodem N (obr. 12). Použijeme Menelaovu větu na trojúhelník AKC a přímku BM. Odtud dostáváme

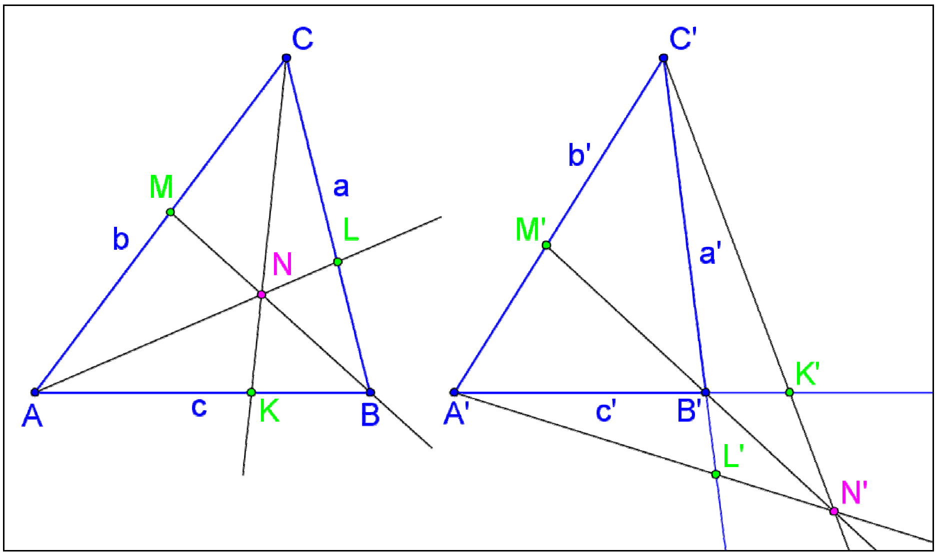
$$\frac{|AB|}{|BK|} \cdot \frac{|KN|}{|CN|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = 1.$$

Stejně použijeme Menelaovu větu na trojúhelník *BCK* a přímku *AL*. Dostáváme rovnost

$$\frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CN|}{|KN|} \cdot \frac{|AK|}{|BK|} = 1.$$

Pokud tyto rovnosti vynásobíme, vyjde nám vztah [8, s. 54]:

$$\frac{|AK|}{|BK|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = 1$$



Obr. 12 – Cèvova věta – přímky procházející jedním bodem

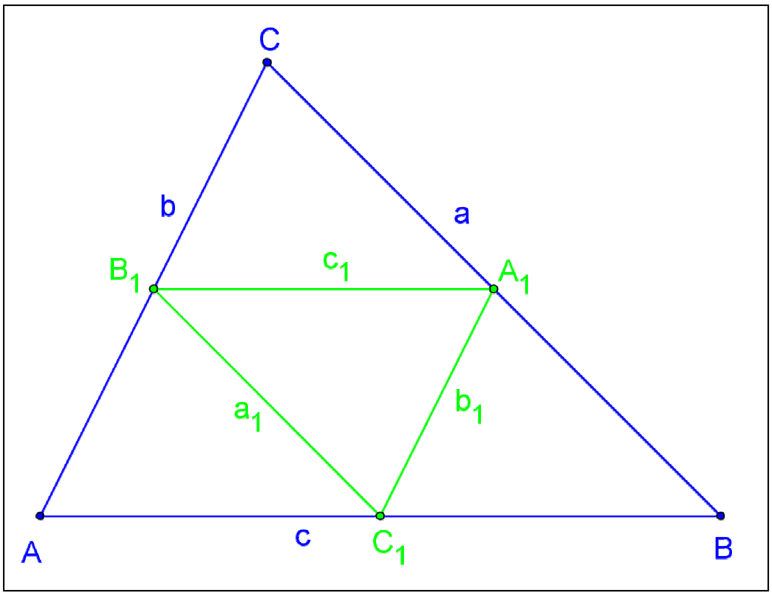
2 Základní prvky trojúhelníku

Abychom mohli s trojúhelníkem dále pracovat a definovat složitější útvary v něm, je potřeba seznámit se s jeho základními prvky, jako je střední příčka, těžnice, výška, dále pak kružnice opsaná, vepsaná a kružnice připsané. Tyto vlastnosti se probírají již na druhém stupni základní školy, a tak by měly být známé téměř každému.

2.1 Střední příčky

„Střední příčka trojúhelníku je úsečka, spojující středy dvou stran trojúhelníku. Každá střední příčka trojúhelníku je rovnoběžná s tou stranou trojúhelníku, jejíž střed nespojuje. Její délka je rovna polovině délky této strany“ [1, s. 25–26].

Na obr. 13 jsou středními příčkami trojúhelníku *ABC* úsečky a_1, b_1, c_1.



Obr. 13 – Střední příčky trojúhelníku

Podle obr. 13 platí

$$|B_1A_1| = \frac{1}{2}|AB|, \quad |C_1B_1| = \frac{1}{2}|BC|, \quad |C_1A_1| = \frac{1}{2}|AC|,$$

$$B_1A_1 \parallel AB, \quad C_1B_1 \parallel BC, \quad C_1A_1 \parallel AC\,.$$

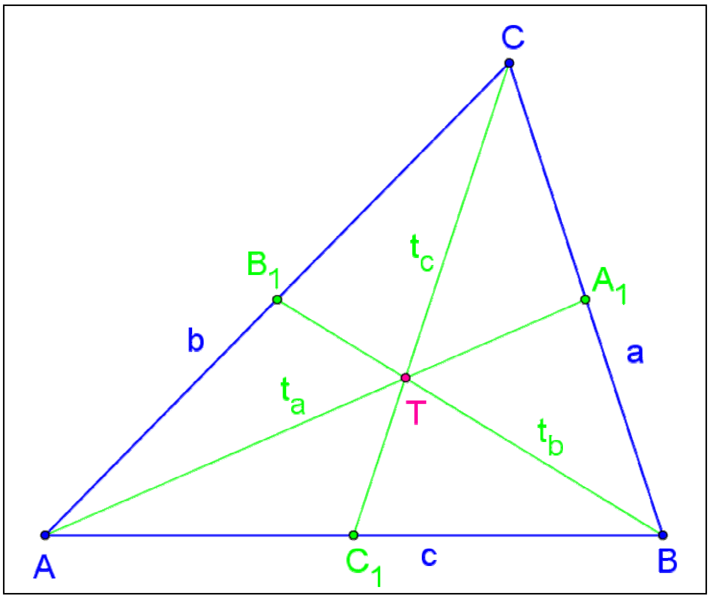
Trojúhelník $A_1B_1C_1$ se nazývá **příčkový trojúhelník** trojúhelníku *ABC* a je s ním podobný podle věty *sss* (oba trojúhelníky se shodují v poměrech délek příslušných stran) s poměrem podobnosti $k = \frac{1}{2}$.

Střední příčky dělí trojúhelník *ABC* na čtyři shodné trojúhelníky [3]. Jsou jimi trojúhelníky AC_1B_1, C_1BA_1, $A_1B_1C_1$, B_1A_1C. Jsou shodné podle věty *sss* – odpovídající si strany trojúhelníků jsou stejně dlouhé.

2.2 Těžnice

„Těžnice trojúhelníku je úsečka, spojující vrchol trojúhelníku se středem jeho protější strany“ [1, s. 26].

Všechny tři těžnice trojúhelníku se protínají v jednom bodě. Tento bod se nazývá těžiště trojúhelníku a obvykle se značí velkým písmenem *T*.



Obr. 14 – Těžnice trojúhelníku

Důkaz provedeme pomocí Cèvovy věty. V trojúhelníku *ABC* na obr. 14 platí

$$\frac{|AC_1|}{|BC_1|}\cdot\frac{|BA_1|}{|CA_1|}\cdot\frac{|CB_1|}{|AB_1|}=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}=1\,.$$

Z toho plyne, že těžnice t_a, t_b a t_c prochází jedním bodem.

Těžiště má tu vlastnost, že jeho vzdálenost od vrcholu trojúhelníku je rovna dvěma třetinám délky příslušné těžnice. Těžiště tedy dělí těžnici v poměru 2:1, přičemž delší část tvoří spojnice vrcholu a těžiště (obr. 14).

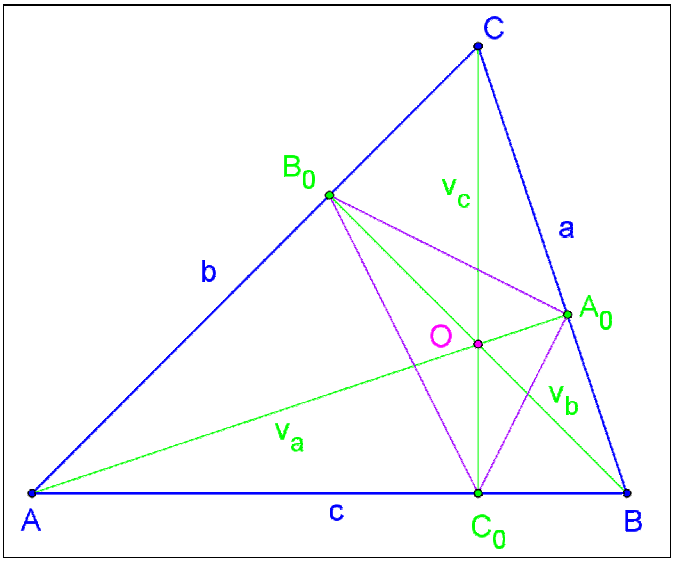
Těžnice se obvykle značí t_a – těžnice příslušná vrcholu *A*, t_b – těžnice příslušná vrcholu *B*, t_c – těžnice příslušná vrcholu *C*.

2.3 Výšky

Výška trojúhelníku je úsečka, jejíž krajní body tvoří vrchol trojúhelníku a pata kolmice vedené z tohoto vrcholu na protější stranu [1, s. 26].

V každém trojúhelníku existují právě tři jeho výšky. Přímky, na nichž leží výšky, se protínají v jednom bodě, který se nazývá ortocentrum a značí se obvykle velkým písmenem *O* (obr. 15). Poloha ortocentra je závislá na druhu trojúhelníku – pokud je trojúhelník ostroúhlý, leží ortocentrum uvnitř trojúhelníku, pokud je trojúhelník pravoúhlý, splývá ortocentrum s vrcholem trojúhelníku při jeho pravém úhlu, a pokud je trojúhelník tupoúhlý, nachází se ortocentrum vně trojúhelníku [3].

Paty výšek A_0, B_0, C_0 vytváří trojúhelník, který se nazývá **ortický** [9, s. 35]. V pravoúhlém trojúhelníku však tento trojúhelník neexistuje, protože dvě ze tří pat výšek splynou v jeden bod.

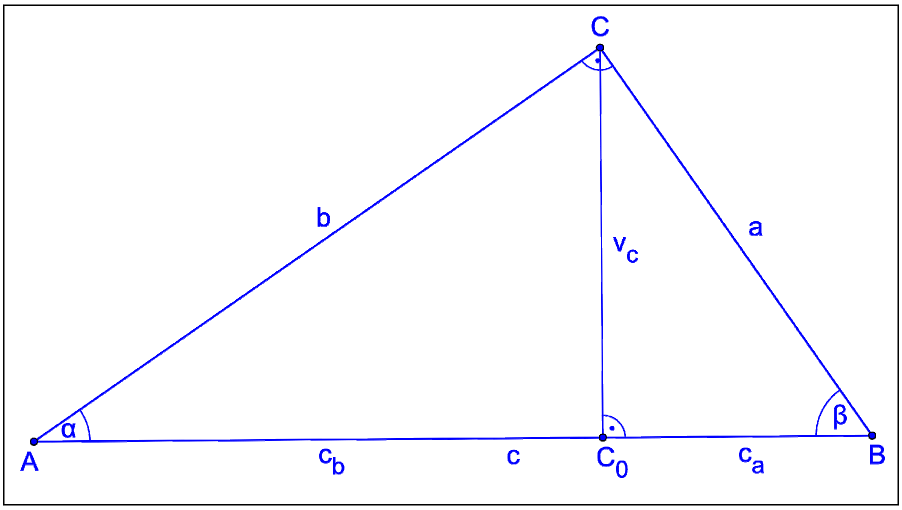


Obr. 15 – Výšky trojúhelníku

2.3.1 Euklidovy věty

Euklidovy věty jsou dvě a týkají se pravoúhlého trojúhelníku. Jedna z vět mluví o výšce, druhá o odvěsně.

Budeme uvažovat pravoúhlý trojúhelník *ABC* s pravým úhlem při vrcholu *C*. Patu výšky vedenou z vrcholu *C* na přeponu *AB* označíme C_0, dále úsečky AC_0, C_0B označíme po řadě c_b, c_a. Úsečka c_a se nazývá úsek přepony přilehlý k odvěsně *a*, podobně úsečka c_b je úsek přepony přilehlý k odvěsně *b* (obr. 16).



Obr. 16 – Euklidovy věty

Euklidova věta o výšce zní: „V každém pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina výšky k přeponě rovna součinu délek obou úseků přepony“ [1, s. 74].

Euklidova věta o odvěsně říká: „V každém pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina délky odvěsny rovna součinu délek přepony a přilehlého úseku“ [1, s. 74].

Podle označení na obr. 16 a první věty platí $v_c^2 = c_a c_b$. Druhá věta lze přepsat pomocí délek jako $a^2 = cc_a$ a obdobně $b^2 = cc_b$.

Důkaz těchto tvrzení je následující. Součet velikostí úhlů $\alpha + \beta = 90°$. Když sečteme velikosti ostrých úhlů v pravoúhlém trojúhelníku AC_0C, opět dostáváme velikost 90°, z čehož plyne, že velikost úhlu ACC_0 musí být β. Obdobně je vidět, že velikost úhlu C_0CB je α.

Z obr. 16 je pak vidět, že každé dva z trojúhelníků ABC, ACC_0, CBC_0 jsou podobné (podle věty *uu*). Proto platí

$$\frac{c_b}{v_c} = \frac{v_c}{c_a}, \qquad \frac{a}{c} = \frac{c_a}{a}, \qquad \frac{b}{c} = \frac{c_b}{b}.$$

Z těchto rovností pak dostáváme $v_c^2 = c_a c_b$, $a^2 = cc_a$, $b^2 = cc_b$ [8, s. 44].

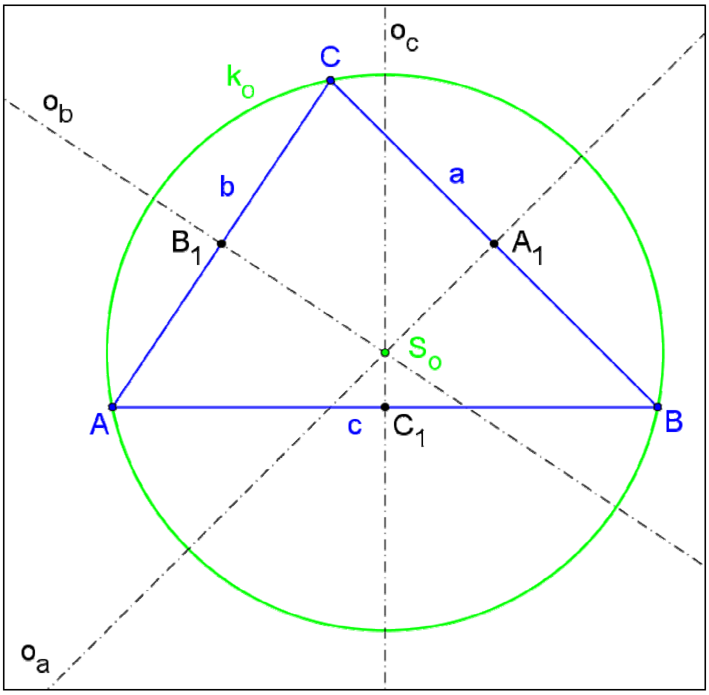
2.4 Kružnice

V trojúhelníku lze sestrojit několik typů kružnic. Nejznámější jsou kružnice opsaná, vepsaná a kružnice připsané. V této podkapitole si ukážeme, kde tyto kružnice mají svůj střed a jak se sestrojují. Ostatními kružnicemi se budeme zabývat v následujících kapitolách z důvodu nutnosti znát další prvky trojúhelníku.

2.4.1 Kružnice opsaná

Budeme uvažovat libovolný trojúhelník *ABC*. Osy jeho stran *BC*, *AC*, *AB* označíme po řadě o_a, o_b, o_c. Pak platí věta: „Osy stran trojúhelníku procházejí týmž bodem. Vzdálenosti tohoto bodu od všech tří vrcholů jsou stejné“ [9, s. 43].

Průsečík os stran trojúhelníku označíme S_o. Kružnice se středem v bodě S_o a poloměrem $r = |S_o A| = |S_o B| = |S_o C|$ se nazývá kružnice opsaná trojúhelníku *ABC*.



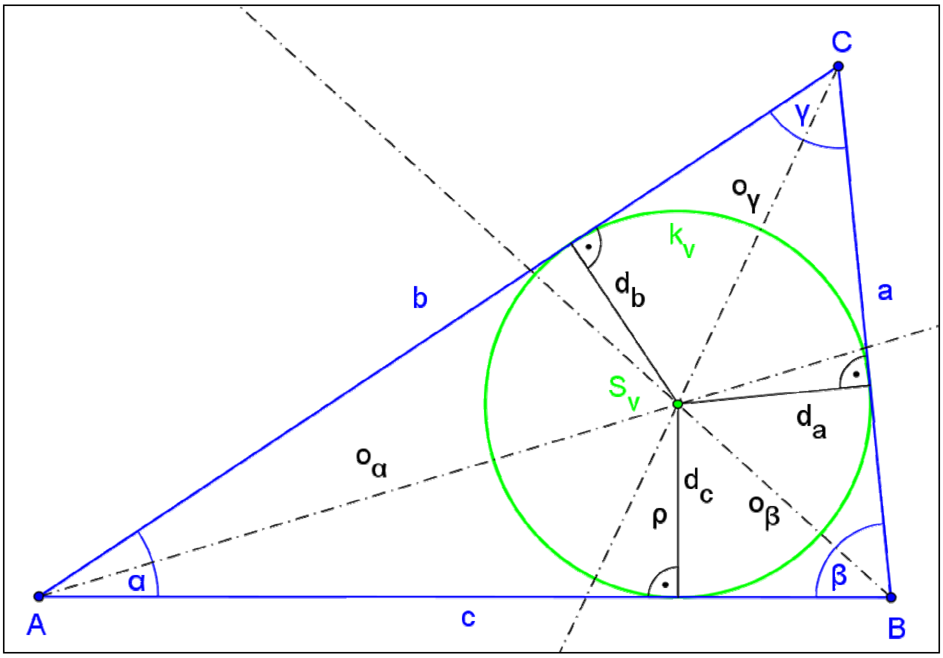
Obr. 17 – Kružnice opsaná

Důkaz tvrzení můžeme sledovat na obr. 17. Bod S_o leží na ose o_a, z vlastnosti osy strany platí $|BS_o| = |CS_o|$. Dále bod S_o leží na ose o_b a platí $|AS_o| = |CS_o|$. Z těchto dvou rovností plyne, že $|AS_o| = |BS_o|$, a to znamená, že bod S_o leží i na ose o_c.

2.4.2 Kružnice vepsaná

Budeme opět uvažovat libovolný trojúhelník *ABC*. Pak platí: „Osy vnitřních úhlů trojúhelníku *ABC* procházejí týmž bodem. Vzdálenosti tohoto bodu od všech tří přímek *BC*, *CA*, *AB* jsou stejné“ [9, s. 38].

Průsečík os vnitřních úhlů nazveme S_v. Kružnici se středem v bodě S_v a poloměrem $\rho = |S_v c| = |S_v b| = |S_v a|$ nazveme kružnicí vepsanou trojúhelníku *ABC* (obr. 18).



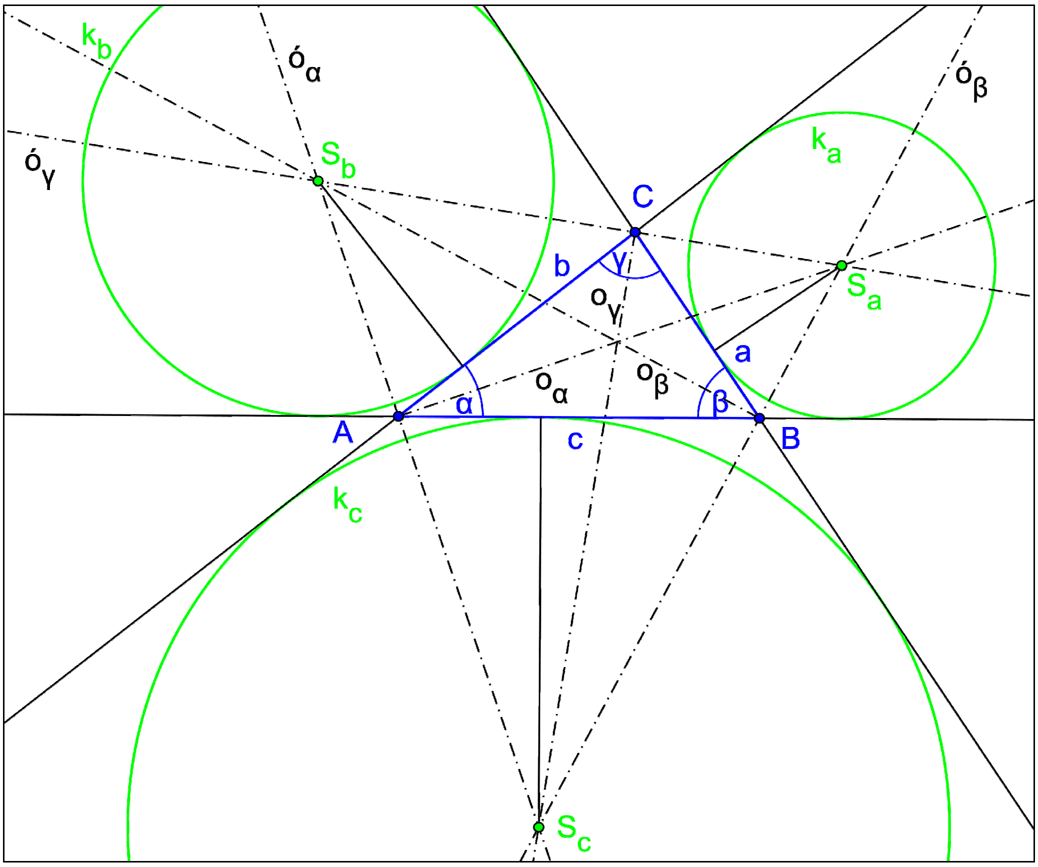
Obr. 18 – Kružnice vepsaná

Důkaz, že osy vnitřních úhlů trojúhelníku procházejí jedním bodem, nám opět pomůže pochopit obr. 18. Průsečík os vnitřních úhlů při vrcholech *A*, *B* označíme S_v. Dále vzdálenosti stran *a*, *b*, *c* od bodu S_v označme po řadě d_a, d_b, d_c. Bod S_v leží na ose úhlu $o_α$, proto $d_b = d_c$. Obdobně bod S_v leží také na ose $o_β$, proto $d_c = d_a$. Z toho plyne, že bod S_v leží také na ose $o_γ$, a tudíž vzdálenosti $d_a = d_b = d_c = ρ$.

2.4.3 Kružnice připsané

„Osy vnějších úhlů při dvou vrcholech trojúhelníku a osa vnitřního úhlu při třetím vrcholu procházejí týmž bodem. Vzdálenosti každého takového bodu (tyto body jsou tři) od všech tří přímek *AB*, *BC*, *AC* jsou stejné“ [10, s. 32]. Kružnice se středy v těchto bodech (obr. 19) a poloměry rovnými vzdálenostem od příslušné strany trojúhelníku se nazývají kružnice vně připsané stranám trojúhelníku *ABC*. Každý trojúhelník má tři takové kružnice. Středy připsaných kružnic leží vždy vně trojúhelníku [1, s. 28].

Důkaz je obdobný jako u středu kružnice vepsané – bod ležící na ose úhlu má od obou ramen úhlu stejnou vzdálenost.



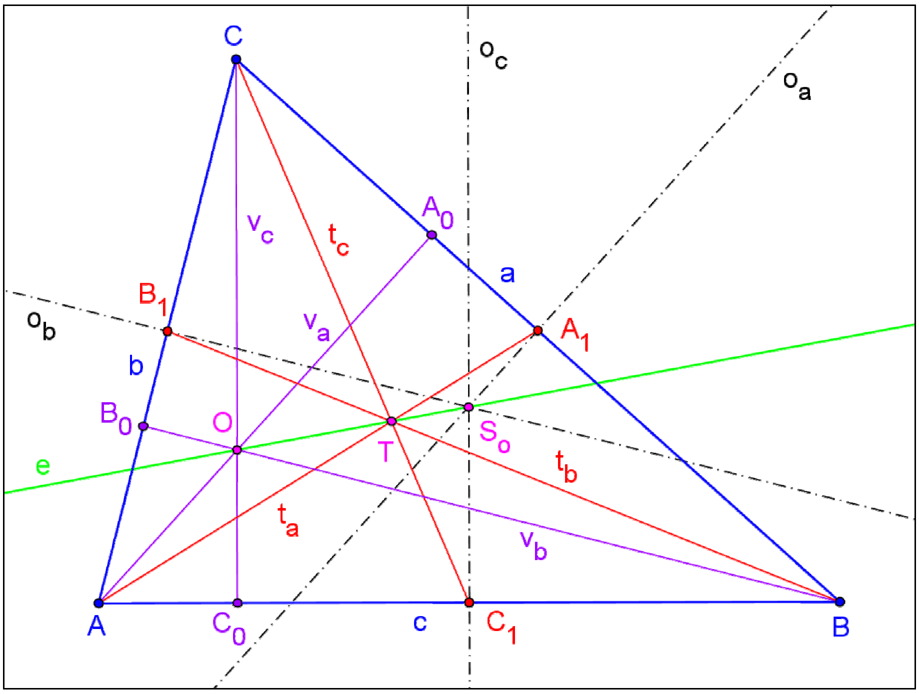
Obr. 19 – Kružnice připsané

3 Ostatní přímky a body

Tato kapitola nás seznámí s prvky trojúhelníku, které se na středních školách běžně nevyučují. Jsou jimi přímky a body, které v trojúhelníku vzniknou, pokud již některé známé body zobrazíme ve středové, nebo osové souměrnosti, nebo proložíme přímky již některými známými body.

3.1 Eulerova přímka

Eulerova přímka je přímka, na níž leží významné body trojúhelníku. Jsou jimi těžiště, střed kružnice opsané a ortocentrum (obr. 20). Ne však každý trojúhelník tuto přímku má. V rovnostranném trojúhelníku tyto význačné body splývají v jeden, a tak přímka neexistuje.



Obr. 20 – Eulerova přímka

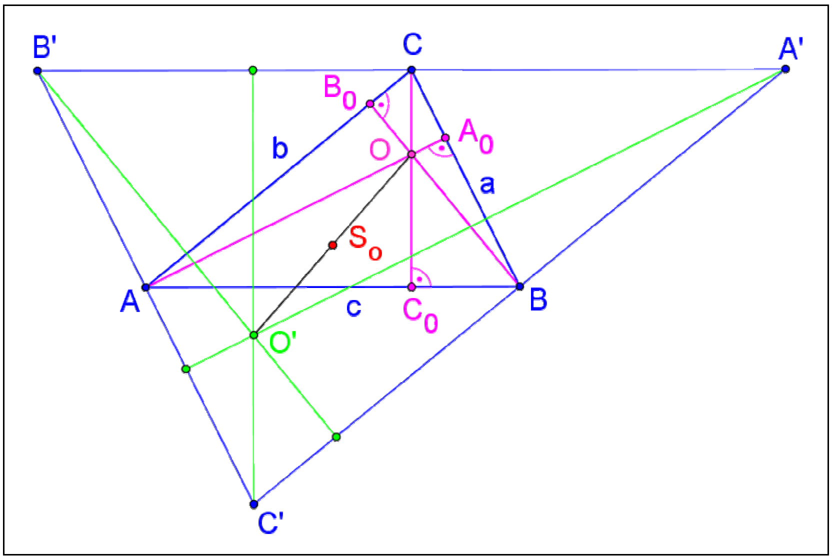
Důkaz, že tyto body skutečně leží na jedné přímce, je následující. Existuje stejnolehlost se středem v bodě T a koeficientem $\kappa = -0{,}5$, která zobrazuje trojúhelník ABC na jeho příčkový trojúhelník $A_1B_1C_1$. Protože stejnolehlost zachovává úhly, zobrazí se ortocentrum O na střed kružnice opsané S_o [9, s. 47–48].

Úsečka, jejíž krajní body tvoří ortocentrum a střed kružnice opsané, je dělena těžištěm v poměru 1:2, $|S_oT|:|TO| = 1:2$ [11].

3.2 Longchampův bod

Longchampův bod trojúhelníku *ABC* je bod, který je středově souměrný s ortocentrem *O* (průsečíkem výšek) trojúhelníku *ABC* podle středu S_o kružnice opsané trojúhelníku *ABC* (obr. 21).

Jeho vlastností je, že je také ortocentrem trojúhelníku, kde strany trojúhelníku *ABC* tvoří jeho střední příčky [12].



Obr. 21 – Longchampův bod

Longchampův bod *O´* také leží na Eulerově přímce – z důvodu středové souměrnosti podle středu S_o kružnice opsané.

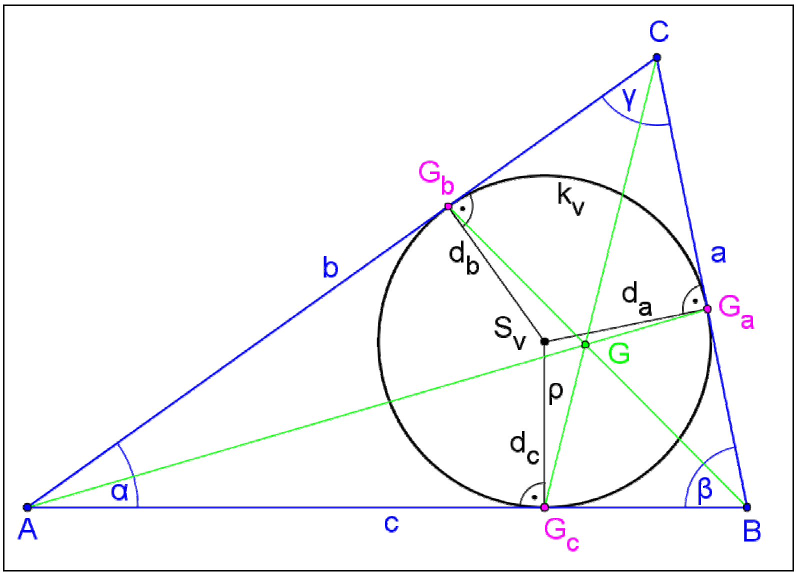
3.3 Gergonnův bod

Dotykové body kružnice vepsané trojúhelníku *ABC* se stranami *a*, *b*, *c* označíme po řadě G_a, G_b, G_c. Pak přímky AG_a, BG_b, CG_c procházejí jedním bodem. Tento bod se nazývá Gergonnův bod – na obr. 22 je označen písmenem *G*. Vždy se nachází uvnitř trojúhelníku [10, s. 33].

Důkaz, že přímky AG_a, BG_b, CG_c procházejí jedním bodem, provedeme pomocí Cèvovy věty. Víme, že všechny tři dotykové body leží na stranách trojúhelníku *ABC* a jsou různé od vrcholů trojúhelníku *ABC*. Z obr. 22 vidíme, že $|AG_c| = |AG_b|$, $|BG_c| = |BG_a|$, $|CG_a| = |CG_b|$. Nyní vynásobíme poměry vzdáleností dotykových bodů od vrcholů trojúhelníku *ABC* [10, s. 32]:

$$\frac{|AG_c|}{|BG_c|}\cdot\frac{|BG_a|}{|CG_a|}\cdot\frac{|CG_b|}{|AG_b|}=1$$

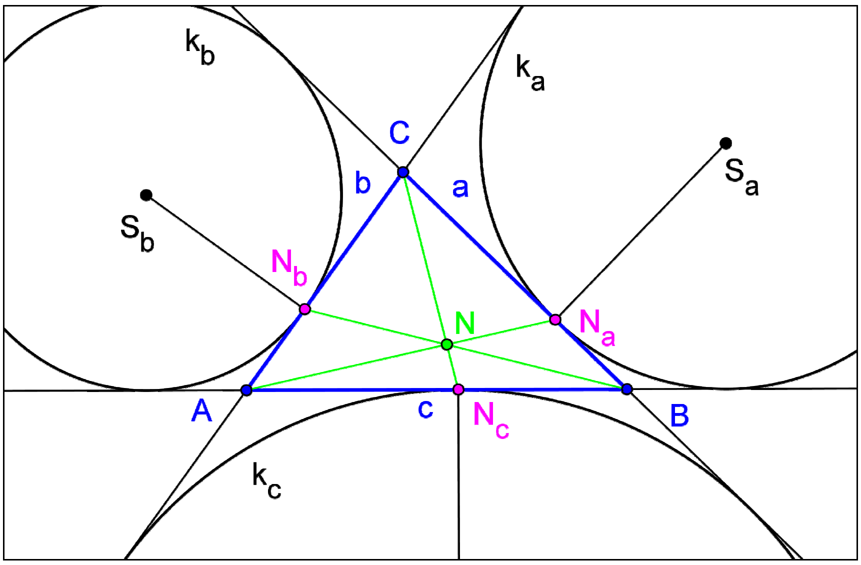
Podle Cèvovy věty pak přímky AG_a, BG_b, CG_c procházejí týmž bodem.



Obr. 22 – Gergonnův bod

3.4 Nagelův bod

Body N_a, N_b, N_c jsou dotykové body kružnic připsaných stranám a, b, c s těmito stranami. Přímky AN_a, BN_b, CN_c procházejí týmž bodem, který se nazývá Nagelův bod. Tento bod leží opět uvnitř trojúhelníku ABC [10, s. 34]. Na obr. 23 je označen písmenem N.



Obr. 23 – Nagelův bod

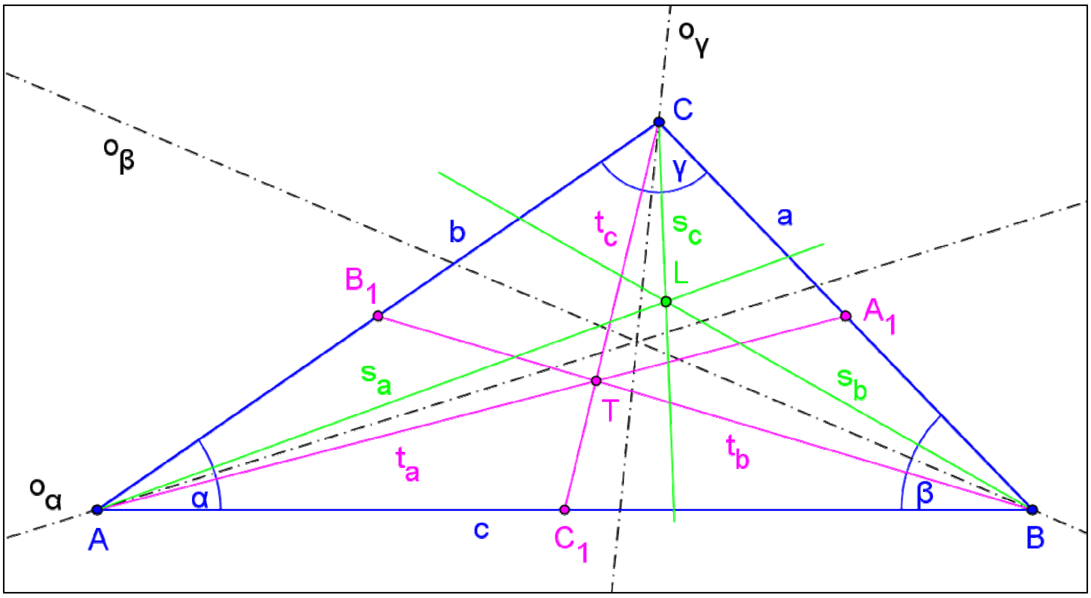
Důkaz, že přímky AN_a, BN_b, CN_c procházejí jedním bodem je opět založen na Cèvově větě. Je zde ovšem ještě zapotřebí použít vztahy, které nejsou v této práci popsány. Podrobný důkaz je uveden v publikaci [9, s. 40–41].

3.5 Lemoinův bod

Abychom mohli definovat Lemoinův bod, potřebujeme nejprve vědět, co to je symediána a jak vzniká.

3.5.1 Symediána

„Buď *ABC* libovolný trojúhelník. Symediánou z vrcholu *A* trojúhelníku *ABC* nazveme přímku souměrně sdruženou podle osy úhlu *BAC* s těžnicí (přímkou) z tohoto vrcholu. Analogicky se definují symediány z dalších vrcholů trojúhelníku“ [10, s. 51].



Obr. 24 – Lemoinův bod

Na obr. 24 jsou symediánami přímky s_a, s_b, s_c, které jsou osově souměrné podle os úhlů o_α, o_β, o_γ s těžnicemi t_a, t_b, t_c.

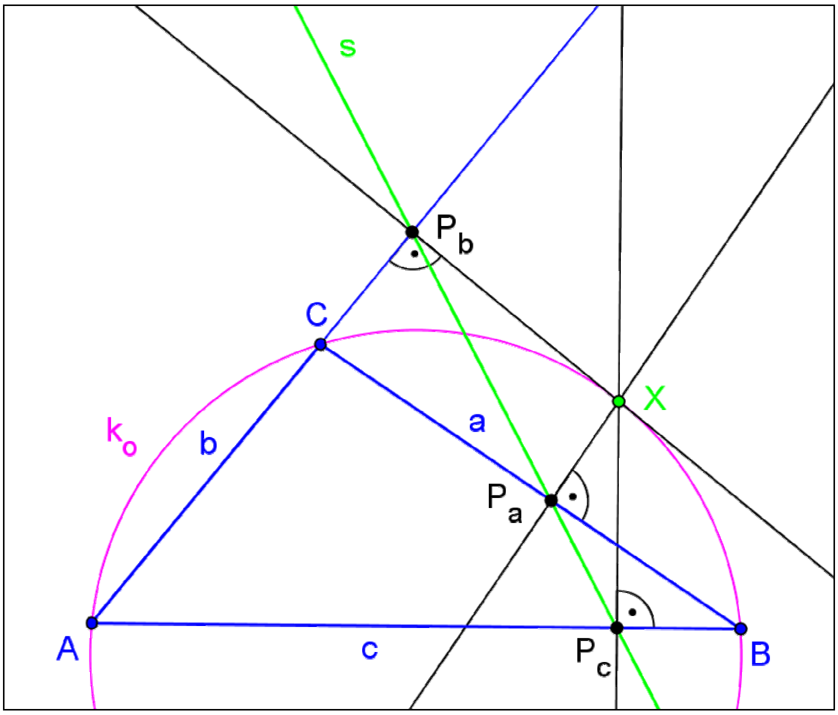
V každém trojúhelníku existují tři symediány, protože existují tři těžnice. Tyto symediány se protínají v jednom bodě, který se nazývá Lemoinův bod [10, s. 52–53]. Na obr. 24 je označen písmenem *L*.

Důkaz, že symediány procházejí jedním bodem je popsán v publikaci [9, s. 60].

3.6 Simsonova přímka

Mějme libovolný trojúhelník *ABC* a jeho kružnici opsanou k_o. Zvolíme-li libovolný bod *X* na kružnici opsané a spustíme z tohoto bodu kolmice na jednotlivé strany trojúhelníku, pak paty těchto kolmic P_a, P_b, P_c leží na přímce, která se nazývá Simsonova přímka příslušná bodu *X*, nebo též Wallaceova přímka (obr. 25) [10, s. 46].

Simsonových přímek může mít trojúhelník nekonečně mnoho. Simsonova přímka je vždy vztažená k nějakému bodu, který náleží kružnici trojúhelníku opsané.



Obr. 25 – Simsonova přímka

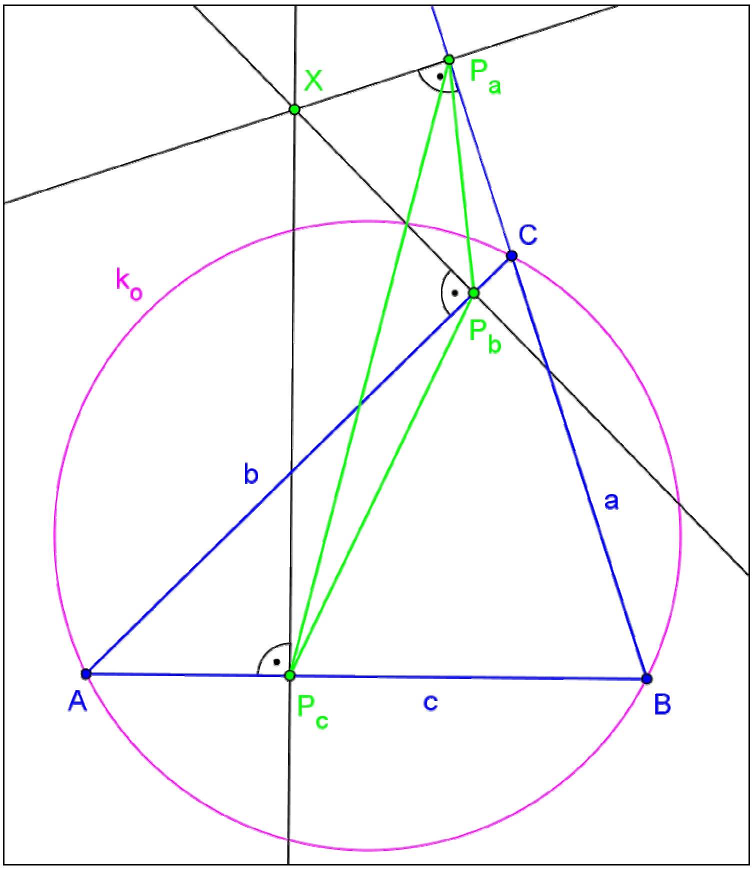
Důkaz provedeme následovně. Víme, že bod *X* leží na kružnici opsané k_o trojúhelníku *ABC*. Zaměříme se na čtyřúhelník CP_aXP_b. Velikosti úhlů XP_aC a CP_bX jsou 90° a z toho plyne, že tomuto čtyřúhelníku můžeme opsat kružnici. Podle věty o obvodových úhlech vyplývá, že velikosti úhlů P_bP_aC a P_bXC jsou stejné. Obdobně čtyřúhelník BXP_aP_c má velikosti úhlů P_cP_aB a P_cXB stejné. Z těchto rovností vyplývá $|\angle P_bP_aC| = |\angle P_bXP_c| - |\angle CXP_c|$, $|\angle P_cP_aB| = |\angle CXB| - |\angle CXP_c|$.

Nyní máme čtyřúhelník AP_cXP_b, kde velikosti úhlů XP_cA a AP_bX jsou 90°. Opět mu tedy lze opsat kružnici. Z toho dostáváme rovnost $|\angle P_bXP_c| = 180° - |\angle BAC|$. Podobně ve čtyřúhelníku *CABX* dostáváme rovnost $|\angle CXB| = 180° - |\angle BAC|$. Z toho plyne, že velikosti úhlů P_bXP_c a *CXB* jsou stejné. Pak jsou také stejně velké úhly P_bP_aC a P_cP_aB, takže body P_a, P_b, P_c leží v přímce [9, s. 51–52].

Bod X také ovšem může splynout s jedním z vrcholů trojúhelníku ABC. Pak ale splynou i dvě ze tří pat kolmic na jednotlivé strany a Simsonova přímka je tak určena jen těmito dvěma body.

3.6.1 Úpatnicový trojúhelník

Kolmice na strany trojúhelníku můžeme vést i z bodu, který na kružnici opsané neleží. Potom ale paty kolmic neleží v přímce. Určují trojúhelník, který se nazývá úpatnicový trojúhelník příslušný tomuto bodu [9, s. 56].



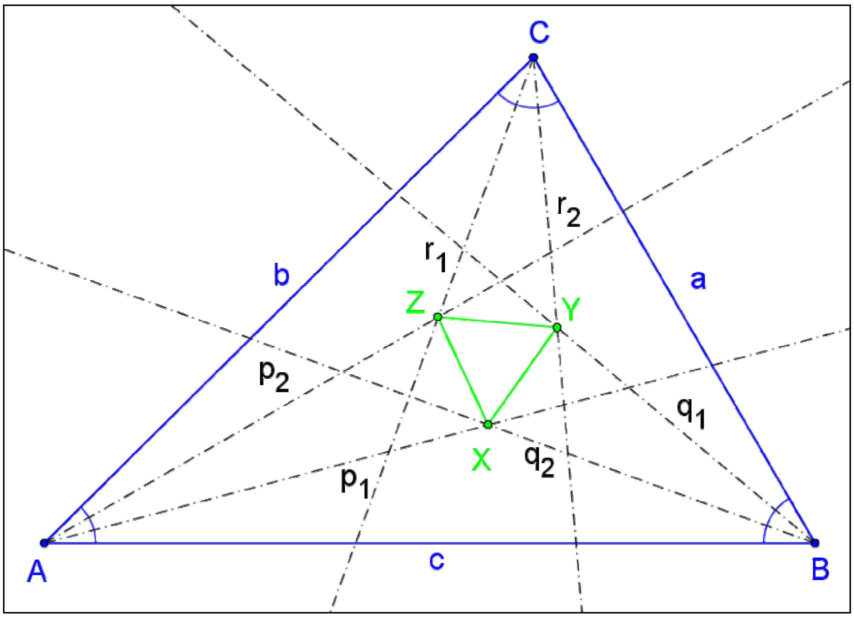
Obr. 26 – Úpatnicový trojúhelník

Na obr. 26 je bodu X příslušný úpatnicový trojúhelník $P_aP_bP_c$, kde P_a, P_b, P_c jsou paty kolmic vedených z bodu X ke stranám trojúhelníku ABC.

3.7 Morleyova věta

„V trojúhelníku ABC veďme vrcholem A přímky p_1, p_2 dělící úhel BAC na třetiny, vrcholem B přímky q_1, q_2 dělící na třetiny úhel CBA a vrcholem C přímky r_1, r_2 dělící na třetiny úhel ACB. Přitom přímky p_1, p_2, resp. q_1, q_2, resp. r_1, r_2 volíme tak, aby při otáčení roviny kolem bodu A, resp. B, resp. C v kladném směru o úhel velikosti

$\frac{1}{3}|\angle BAC|$, resp. $\frac{1}{3}|\angle CBA|$, resp. $\frac{1}{3}|\angle ACB|$ přecházela přímka p_1 v přímku p_2, resp. přímka q_1 v přímku q_2, resp. přímka r_1 v přímku r_2 (obr. 27). Buď X průsečík přímek p_1 a q_2, Y průsečík přímek q_1 a r_2 a Z průsečík přímek r_1 a p_2. Body X, Y, Z tvoří rovnostranný trojúhelník“ [10, s. 67].



Obr. 27 – Morleyova věta

Důkaz této věty je zdlouhavý a nebudeme ho zde uvádět. Podrobně je vysvětlen v publikaci [10, s. 67–69]. Tato věta byla však do práce zařazena, protože je velmi zajímavá tím, že vznikne rovnostranný trojúhelník. Objevil ji Frank Morley v roce 1904 [9, s. 75].

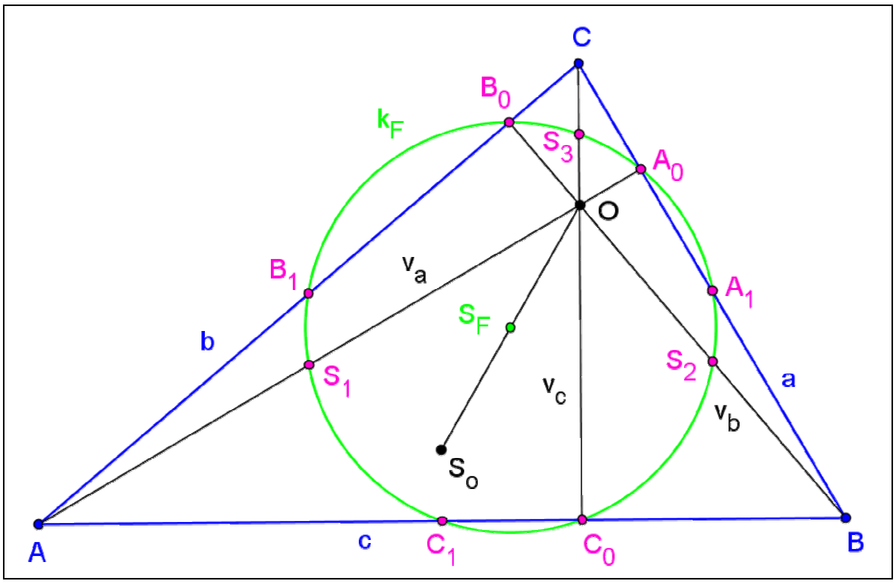
4 Ostatní kružnice v trojúhelníku

Kromě již zmíněných kružnic ve druhé kapitole existují v trojúhelníku ještě další kružnice, které opět nejsou součástí učiva na středních školách. V této kapitole se s nimi seznámíme.

4.1 Feuerbachova kružnice

Feuerbachova kružnice prochází devíti význačnými body trojúhelníku, proto se též nazývá kružnice devíti bodů. Je pojmenována po německém matematikovi Karlu Wilhelmu Feuerbachovi, protože dokázal, že se tato kružnice dotýká kružnice vepsané a kružnic připsaných [13].

„Kružnice procházející středy stran trojúhelníku, patami jeho výšek a středy úseček spojujících ortocentrum s vrcholy trojúhelníku se nazývá Feuerbachova kružnice trojúhelníku“ [9, s. 47].



Obr. 28 – Feuerbachova kružnice

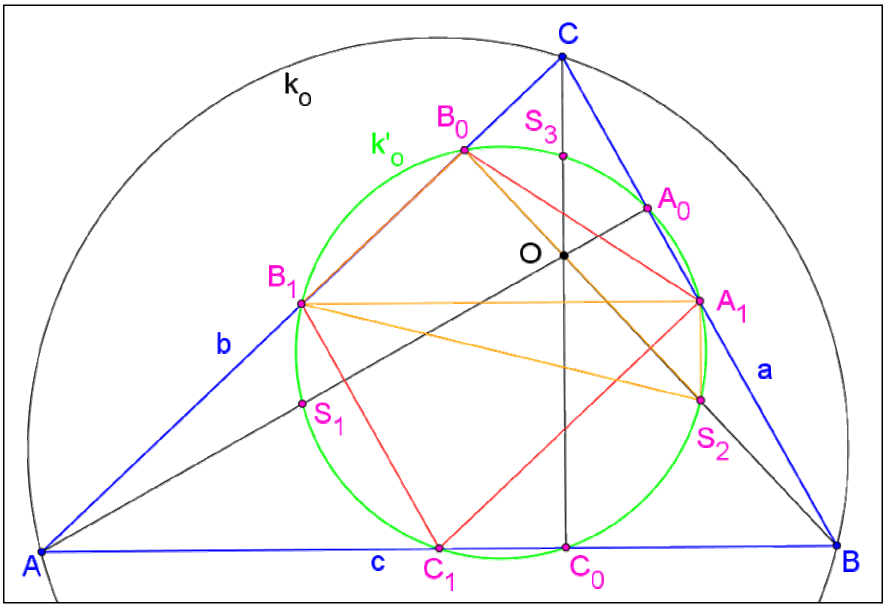
Na obr. 28 jsou body A_1, B_1, C_1 středy stran trojúhelníku ABC, body A_0, B_0, C_0 jsou paty výšek a body S_1, S_2, S_3 jsou středy úseček AO, BO, CO – spojnic vrcholů trojúhelníku s ortocentrem.

Nyní dokážeme, že tyto body leží na kružnici. Víme, že existuje stejnolehlost se středem T a koeficientem $\kappa = -0{,}5$, jež zobrazuje trojúhelník ABC na trojúhelník $A_1B_1C_1$. Tato stejnolehlost tedy zobrazuje kružnici opsanou k_o trojúhelníku ABC na kružnici k_o', která je kružnicí opsanou trojúhelníku $A_1B_1C_1$ (obr. 29).

Trojúhelník BA_1B_0 je rovnoramenný, z čehož plyne $|B_0A_1| = |BA_1| = \frac{1}{2}|BC|$. Z této stejnolehlosti ještě dostáváme vztah $\frac{1}{2}|BC| = |B_1C_1|$ a vidíme, že $|B_0A_1| = |B_1C_1|$.

Nyní se zaměříme na lichoběžník $C_1A_1B_0B_1$. Vidíme, že je rovnoramenný a z toho plyne $|\angle C_1B_0A_1| = |\angle C_1B_1A_1|$. Podle věty o obvodových úhlech bod B_0 musí ležet na kružnici k_o'. Při použití principu cyklické záměny dostaneme, že na této kružnici k_o' leží i body C_0 a A_0.

Nyní budeme pracovat s trojúhelníkem *COB*. Jeho jedna střední příčka je úsečka A_1S_2, a je tedy rovnoběžná s úsečkou *CO*. Z toho plyne, že $|\angle B_1A_1S_2|$ je rovna 90°. Jsou zde tedy dva pravoúhlé trojúhelníky $B_1S_2A_1$ a $B_1S_2B_0$, které mají společnou přeponu B_1S_2. Oběma těmto trojúhelníkům musí být společná jejich kružnice opsaná, kterou je v tomto případě kružnice k_o'. Leží na ní tedy bod S_2 a s pomocí principu cyklické záměny zde leží i body S_3 a S_1 [9, s. 47].



Obr. 29 – Důkaz Feuerbachovy kružnice

Kružnice devíti bodů je podobná kružnici opsané trojúhelníku *ABC*, a to tak, že je obrazem kružnice opsané ve stejnolehlosti (homotetii) se středem v těžišti trojúhelníku *ABC* a koeficientem $\kappa = -0{,}5$. Její poloměr je proto roven polovině poloměru kružnice opsané [13]. Střed Feuerbachovy kružnice je středem úsečky, jejímiž krajními body jsou ortocentrum a střed kružnice opsané [10, s. 40].

Střed Feuerbachovy kružnice tedy také leží na Eulerově přímce.

4.2 Tuckerovy kružnice

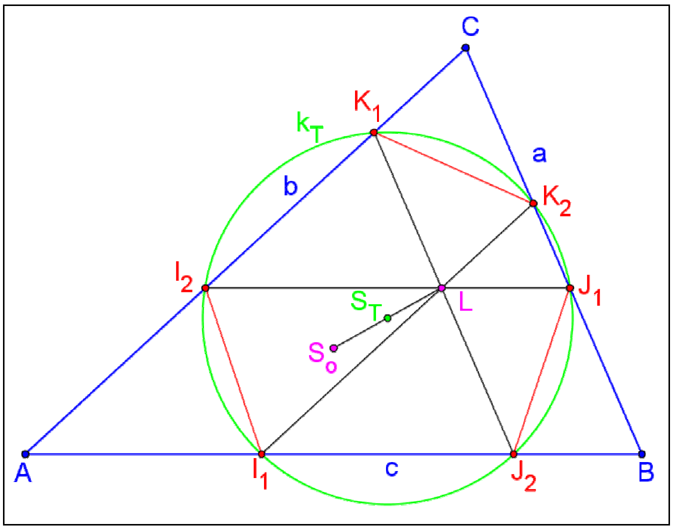
Budeme uvažovat libovolný trojúhelník *ABC* a na otevřených polopřímkách *AB*, *AC*, *BC*, *BA*, *CA*, *CB* po řadě body I_1, I_2, J_1, J_2, K_1, K_2. Jestliže platí, že přímka I_1I_2 je antirovnoběžná s přímkou *BC* vzhledem k ose úhlu *BAC*, přímka J_1J_2 je antirovnoběžná s přímkou *AC* vzhledem k ose úhlu *ABC*, přímka K_1K_2 je antirovnoběžná s přímkou *AB* vzhledem k ose úhlu *ACB* a zároveň $|I_1I_2| = |J_1J_2| = |K_1K_2|$, pak body I_1, I_2, J_1, J_2, K_1, K_2 leží na kružnici [9, s. 65–66]. (Antirovnoběžná přímka vzhledem k ose úhlu je přímka, která je osově souměrná podle této osy.)

Ke každému trojúhelníku *ABC* existuje nekonečně mnoho Tuckerových kružnic. Každá šestice bodů, která splňuje předcházející dvě podmínky, určuje Tuckerovu kružnici. Důkaz je uveden v publikaci [10, s. 57–60].

V této podkapitole se seznámíme se třemi nejznámějšími Tuckerovými kružnicemi. Jsou jimi první Lemoinova kružnice, druhá Lemoinova kružnice a Taylorova kružnice.

4.2.1 První Lemoinova kružnice

Budeme uvažovat trojúhelník *ABC* a jeho Lemoinův bod *L*. Bodem *L* povedeme rovnoběžky se stranami trojúhelníku *ABC*. Průsečíky těchto rovnoběžek se stranami trojúhelníku označíme I_1, I_2, J_1, J_2, K_1, K_2 (obr. 30). Tyto body splňují obě podmínky uvedené v úvodu této podkapitoly, a tudíž leží na Tuckerově kružnici. Tato kružnice se nazývá první Lemoinova kružnice a její střed je středem úsečky spojující Lemoinův bod a střed kružnice opsané [10, s. 60].



Obr. 30 – První Lemoinova kružnice

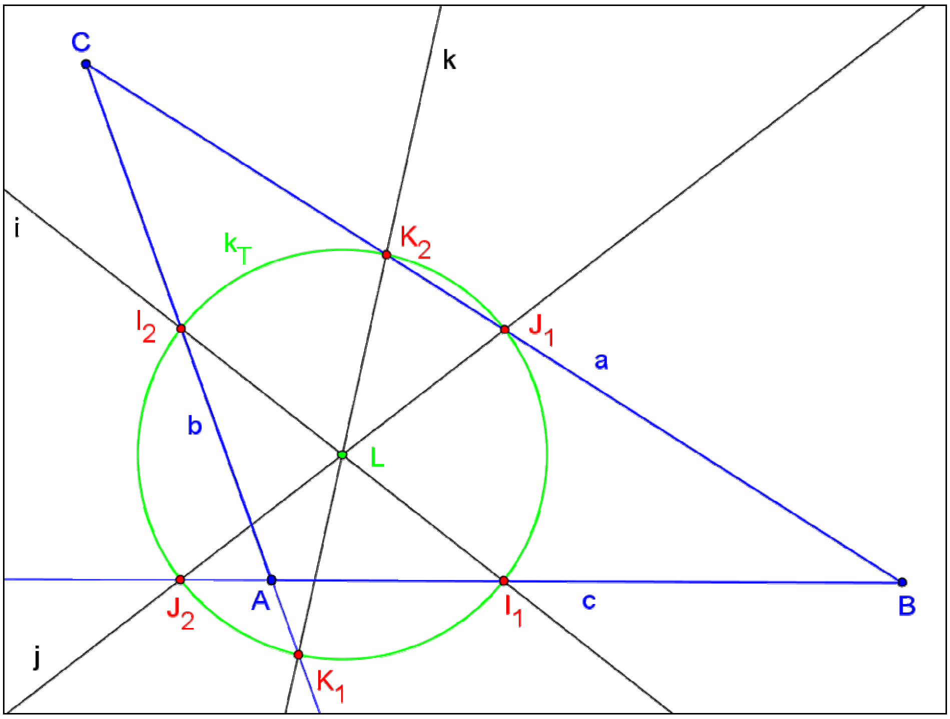
Důkaz je popsán v publikaci [10, s. 56–57].

Pokud je trojúhelník *ABC* rovnostranný, těžnice jsou totožné s osami úhlů, a tudíž obraz těžnice v osové souměrnosti podle osy úhlu je právě tato osa úhlu. Symediánou je pak ta samá přímka.

Průsečík symedián – Lemoinův bod – tudíž splývá s průsečíkem těžnic *T* (těžištěm) a v rovnostranném trojúhelníku i s průsečíkem os stran, tedy se středem kružnice opsané, protože osy úhlů jsou zároveň osami stran. Pak je středem první Lemoinovy kružnice právě tento bod – střed kružnice opsané.

4.2.2 Druhá Lemoinova kružnice

Opět budeme uvažovat trojúhelník *ABC* a jeho Lemoinův bod *L*. Bodem *L* povedeme přímku *i*, která je antirovnoběžná s přímkou *BC* podle osy úhlu *BAC*, přímku *j*, která je antirovnoběžná s přímkou *CA* podle osy úhlu *CBA*, a přímku *k*, která je antirovnoběžná s přímkou *AB* podle osy úhlu *BCA* [9, s. 71]. Průsečík přímky *i* se stranami *AB* a *AC* označíme I_1, I_2, průsečíky přímky *j* se stranami *BC* a *AB* označíme J_1, J_2 a průsečíky přímky *k* se stranami *AC* a *BC* označíme K_1, K_2 (obr. 31).



Obr. 31 – Druhá Lemoinova kružnice

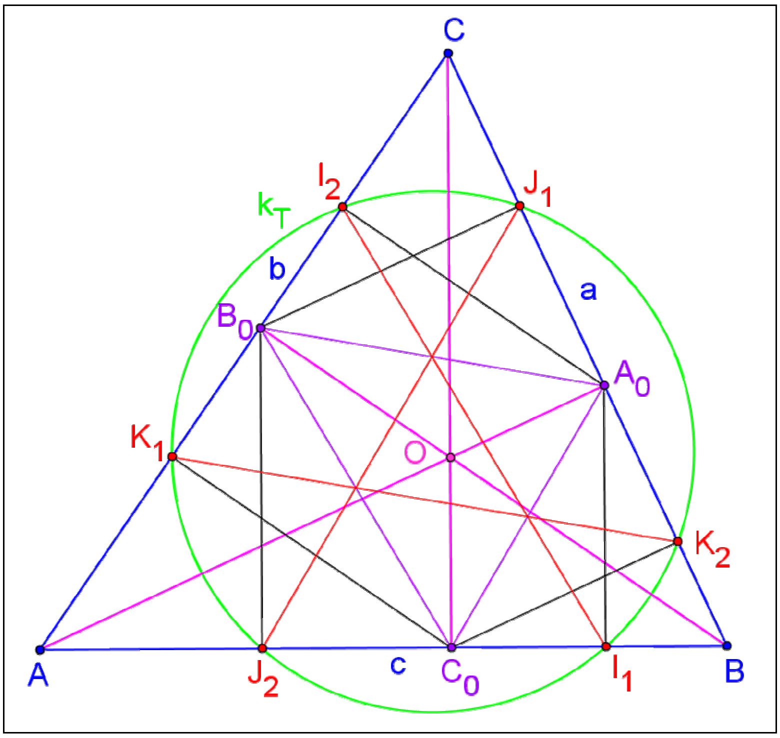
Šestice těchto bodů opět splňuje podmínky uvedené v úvodu této podkapitoly, a tudíž leží na kružnici. Tato kružnice se nazývá druhá Lemoinova kružnice a její střed je právě Lemoinův bod trojúhelníku [9, s. 72].

Důkaz je uveden v publikaci [10, s. 62].

4.2.3 Taylorova kružnice

Uvažujme trojúhelník *ABC*, paty jeho výšek A_0, B_0, C_0, průsečík jeho výšek *O* (ortocentrum). Na obr. 32 jsou body I_1, I_2 paty kolmic vedených z bodu A_0 na přímky *AB*, *AC*, body J_1, J_2 jsou paty kolmic vedených z bodu B_0 na přímky *BC*, *AB* a body K_1, K_2 jsou paty kolmic vedených z bodu C_0 na přímky *AC*, *BC* [9, s. 73].

Šestice bodů I_1, I_2, J_1, J_2, K_1, K_2 opět splňuje dvě podmínky z úvodu této podkapitoly, a tak leží na kružnici. Tato kružnice se nazývá Taylorova kružnice. „Střed Taylorovy kružnice trojúhelníku *ABC* splývá se středem kružnice vepsané příčkovému trojúhelníku ortického trojúhelníku $A_0B_0C_0$“ [9, s. 75].



Obr. 32 – Taylorova kružnice

Důkaz je uveden v publikaci [10, s. 64–67].

5 Obvod, obsah trojúhelníku

V této kapitole se seznámíme s nejznámějšími vzorci pro výpočet obvodu a obsahu trojúhelníku. Ukážeme si, jak některé z nich odvodíme pomocí jiných.

5.1 Obvod trojúhelníku

Obvodem trojúhelníku, a vlastně i jakéhokoli jiného mnohoúhelníku, se rozumí délka lomené čáry, která jej ohraničuje. U libovolného trojúhelníku ABC je to součet délek jeho stran a, b, c. Platí tedy vzorec pro obvod trojúhelníku ABC [1, s. 65]:

$$o = a + b + c$$

U rovnostranného trojúhelníku jsou délky všech jeho stran shodné, tedy $a = b = c$. Vzorec pro obvod tohoto trojúhelníku se pak zjednoduší na $o = 3a$.

Pokud je trojúhelník rovnoramenný, dvě strany, ramena, mají stejnou délku. Předpokládejme, že základnou je strana c, pak ramena mají délky $a = b$. V tomto případě vzorec pro obvod trojúhelníku je $o = 2a + c$.

5.2 Obsah trojúhelníku

Obsahem trojúhelníku nebo i jiného mnohoúhelníku rozumíme velikost plochy, kterou v rovině zaujímá. Udává se v jednotkách čtverečních. Základním vzorcem pro obsah trojúhelníku je polovina součinu jedné strany a k ní příslušné výšky [1, s. 65]:

$$S = \frac{av_a}{2}, \qquad S = \frac{bv_b}{2}, \qquad S = \frac{cv_c}{2}$$

Dále můžeme obsah trojúhelníku vypočítat, když známe délky dvou stran a velikost úhlu jimi sevřeného podle vzorce [14, s. 22]:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma, \qquad S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha, \qquad S = \frac{1}{2}ac\sin\beta$$

Důležitým vzorcem pro výpočet obsahu trojúhelníku je také Heronův vzorec. Abychom podle tohoto vzorce vypočítali obsah, stačí nám znát délky všech tří stran:

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

kde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Tento vzorec lze odvodit pomocí kosinové věty a vzorce $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, který upravíme na tvar $4S = 2ab\sin\gamma$ a kosinovou větu použijeme ve tvaru $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos\gamma$. Tyto rovnosti umocníme a poté sečteme a dále postupně upravíme [8, s. 61]:

$$4S = 2ab\sin\gamma$$

$$\underline{a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos\gamma}$$

$$\underline{\left.\begin{aligned} 16S^2 &= 4a^2b^2\sin^2\gamma \\ \left(a^2+b^2-c^2\right)^2 &= 4a^2b^2\cos^2\gamma \end{aligned}\right\}+}$$

$$16S^2 + \left(a^2+b^2-c^2\right)^2 = 4a^2b^2\left(\sin^2\gamma + \cos^2\gamma\right)$$

$$16S^2 = 4a^2b^2 - \left(a^2+b^2-c^2\right)^2 = \left(2ab + a^2 + b^2 - c^2\right)\left(2ab + c^2 - a^2 - b^2\right)$$

$$16S^2 = \left\{(a+b)^2 - c^2\right\}\cdot\left\{c^2 - (a-b)^2\right\} = (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)$$

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Pro následující vzorec potřebujeme znát délky všech tří stran trojúhelníku a poloměr kružnice opsané r [8, s. 72]:

$$S = \frac{abc}{4r}$$

Pro odvození použijeme vzorec $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Víme, že $2r = \frac{c}{\sin\gamma}$ [15, s. 105]. Vyjádříme $\sin\gamma$ a dosadíme:

$$S = \frac{1}{2}ab\cdot\frac{c}{2r} = \frac{abc}{4r}$$

Pro poslední vzorec pro obsah trojúhelníku, kterým se zde budeme zabývat, je zapotřebí znát délky všech tří stran a poloměr kružnice vepsané:

$$S = \frac{a+b+c}{2}\cdot\rho$$

Pokud spojíme střed kružnice vepsané s vrcholy trojúhelníku, vzniknou tři menší trojúhelníky, které mají výšku rovnu právě tomuto poloměru a strana příslušná k této výšce je vždy jedna ze stran původního trojúhelníku. Po sečtení obsahů menších trojúhelníků dostáváme obsah původního trojúhelníku [8, s. 71–72]:

$$S = \frac{a\rho}{2} + \frac{b\rho}{2} + \frac{c\rho}{2} = \frac{1}{2}\rho(a+b+c) = \rho s$$

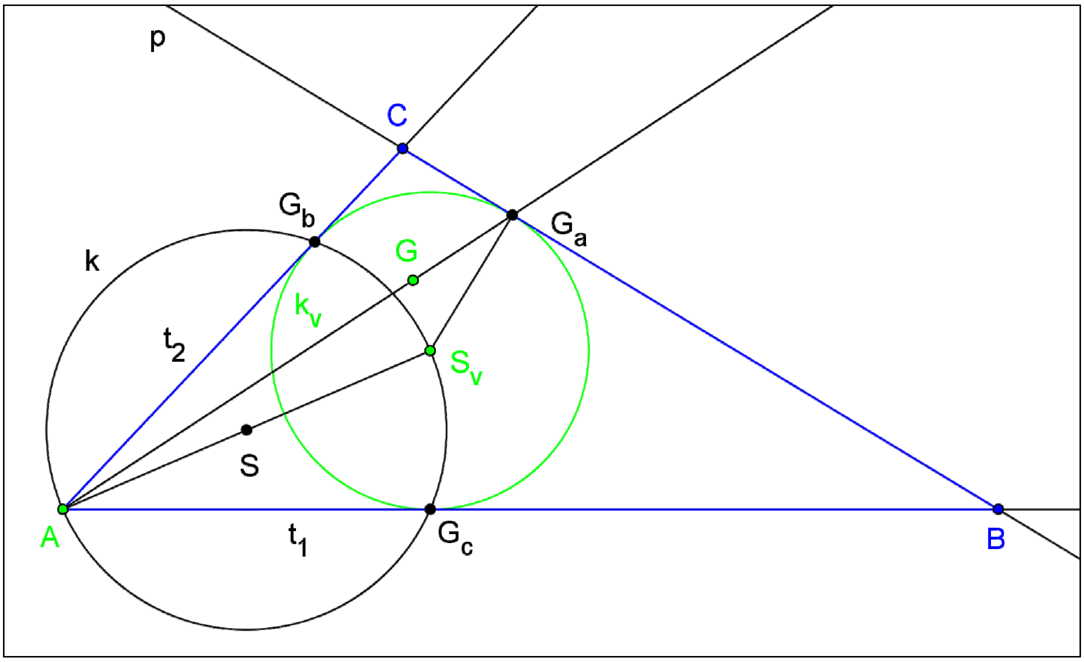
6 Příklady

V poslední kapitole se budeme zabývat několika příklady, konstrukčními, ale i početními, týkajícími se trojúhelníku, kde využijeme poznatků z předešlých kapitol této práce. Je to v podstatě „využití v praxi“, ukázka toho, jak se dají jednotlivé vlastnosti využít.

Uvedeme zde pouze příklady, které jsou sestrojitelné. Nebudeme u nich provádět diskusi řešitelnosti ani uvádět počet řešení.

Příklad 1: Sestrojte trojúhelník *ABC*, jsou-li dány vrchol ***A***, Gergonnův bod ***G***, kružnice vepsaná $\boldsymbol{k_v}$.

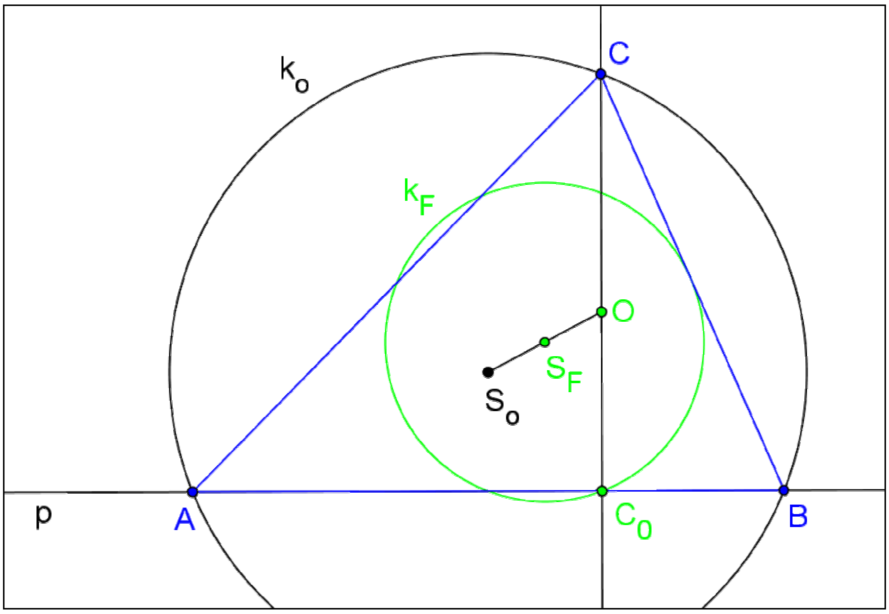
Řešení (obr. 33): V rovině si zvolíme vrchol *A*, kružnici vepsanou k_v a Gergonnův bod *G*. Sestrojíme střed *S* úsečky AS_v a sestrojíme kružnici *k* s poloměrem $|AS|$ a středem v bodě *S*. Průsečíky kružnic k_v a *k* jsou dotykové body G_b a G_c kružnice vepsané se stranami *AC*, *AB*. Z vrcholu *A* sestrojíme tečny t_1 a t_2 ke kružnici k_v. Dále narýsujeme polopřímku *AG*. Průsečík kružnice k_v a polopřímky *AG* je dotykový bod G_a. Bodem G_a vedeme přímku *p* kolmo na úsečku S_vG_a tak, že bod G_a leží na přímce *p*. Průsečík přímky *p* a tečny t_1 je vrchol *B*, podobně průsečík přímky *p* a tečny t_2 je vrchol *C*. Narýsujeme trojúhelník *ABC*.



Obr. 33 – Konstrukce trojúhelníku z př. 1

Příklad 2: Sestrojte trojúhelník *ABC*, jsou-li dány Feuerbachova kružnice $\boldsymbol{k_F}$, pata výšky $\boldsymbol{C_0}$, ortocentrum $\boldsymbol{O}$.

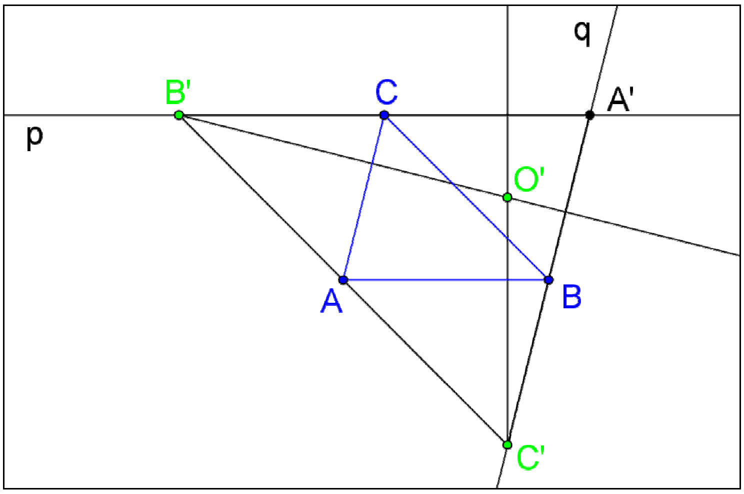
Řešení (obr. 34): V rovině si zvolíme Feuerbachovu kružnici k_F, na ní bod C_0 a průsečík výšek *O* uvnitř kružnice k_F. Ve středové souměrnosti podle středu S_F se bod *O* zobrazí na bod S_o. Sestrojíme kružnici opsanou k_o se středem v bodě S_o a poloměrem dvakrát větším, než je poloměr k_F. Nyní body C_0 a *O* proložíme přímku. Průnik kružnice k_o a přímky C_0O je vrchol *C*. Bodem C_0 vedeme přímku *p* kolmou k přímce C_0O. Průnik kružnice opsané k_o a přímky *p* jsou vrcholy *A*, *B*. Poté už jen narýsujeme trojúhelník *ABC*.



Obr. 34 – Konstrukce trojúhelníku z př. 2

Příklad 3: Sestrojte trojúhelník *ABC*, jsou-li dány Longchampův bod ***O´***, dva vrcholy ***B´***, ***C´*** trojúhelníku *A´B´C´*, kde trojúhelník *ABC* tvoří jeho příčkový trojúhelník.

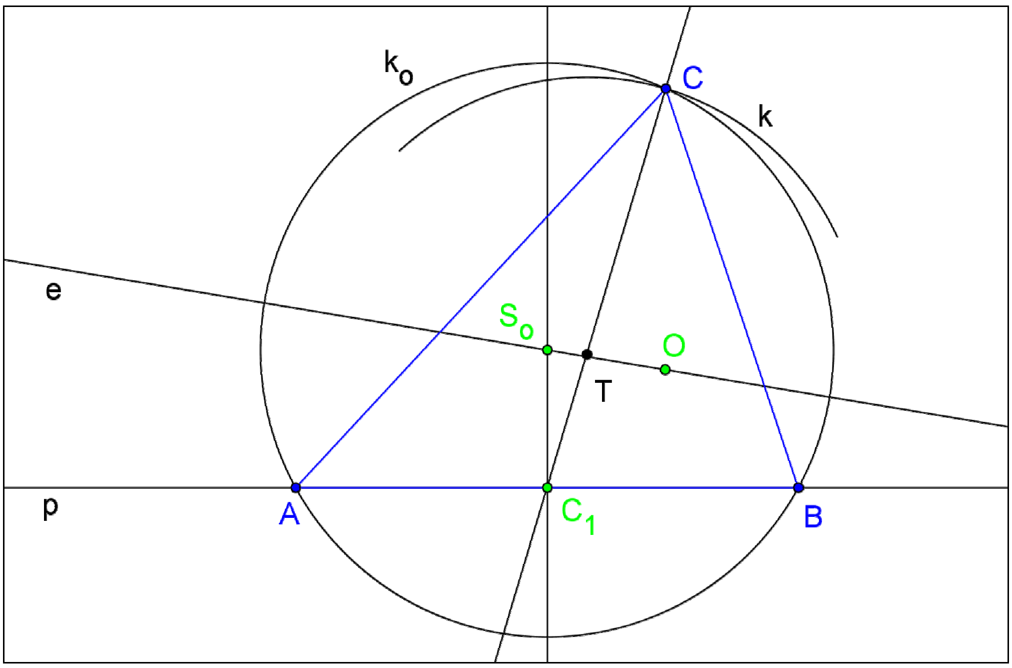
Řešení (obr. 35): Zvolíme si body *O´*, *B´*, *C´*. Střed úsečky *B´C´* je vrchol *A*. Body *B´*, *O´* proložíme polopřímku, podobně body *C´*, *O´* také proložíme polopřímku. Nyní vedeme přímku *p* kolmo na polopřímku *C´O´* tak, aby bod *B´* ležel na přímce *p*. Dále vedeme přímku *q* kolmo na polopřímku *B´O´* tak, aby bod *C´* ležel na přímce *q*. Průsečík přímek *p* a *q* je bod *A´*. Nyní máme trojúhelník *A´B´C´*. Střed strany *A´B´* je vrchol *C*, podobně střed strany *A´C´* je vrchol *B*. Narýsujeme trojúhelník *ABC*.



Obr. 35 – Konstrukce trojúhelníku z př. 3

Příklad 4: Sestrojte trojúhelník *ABC*, jsou-li dány ortocentrum ***O***, střed kružnice opsané $\boldsymbol{S_o}$, střed $\boldsymbol{C_1}$ strany *AB*.

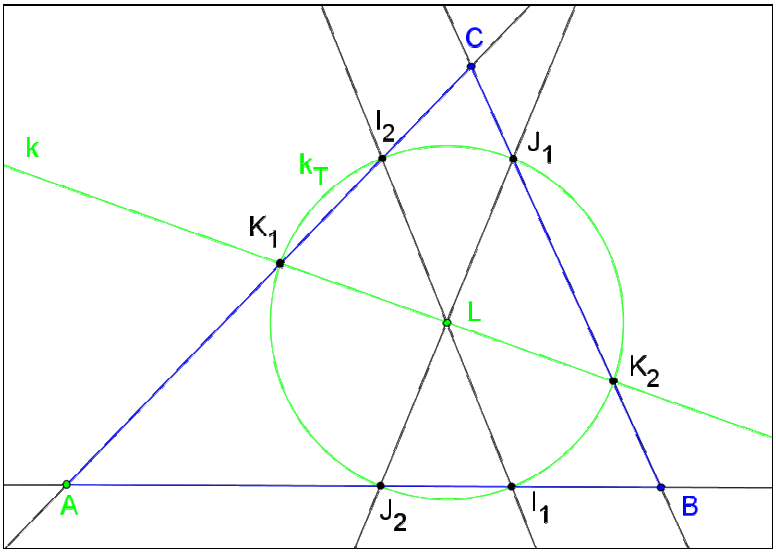
Řešení (obr. 36): Máme Eulerovu přímku určenou body *O* a S_o, dále zadaný střed C_1 strany *AB*. Z vlastnosti Eulerovy přímky nalezneme těžiště *T* tak, že $|TS_o|:|OS_o| = 1:3$. Body C_1 a *T* proložíme polopřímku. Sestrojíme kružnici *k* s poloměrem $2\,|C_1T|$ a se středem *T*. Průsečík polopřímky C_1T a kružnice *k* je vrchol *C*. Ze středu S_o sestrojíme kružnici k_o o poloměru $|S_oC|$. Body C_1 a S_o vedeme přímku. V bodě C_1 narýsujeme přímku *p* kolmou na přímku C_1S_o tak, aby bod C_1 ležel na přímce *p*. Průsečíky přímky *p* a kružnice k_o jsou vrcholy *A*, *B*. Nyní narýsujeme trojúhelník *ABC*.



Obr. 36 – Konstrukce trojúhelníku z př. 4

Příklad 5: Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li dány vrchol $\boldsymbol{A}$, druhá Lemoinova kružnice $\boldsymbol{k_T}$, přímka $\boldsymbol{k}$, která prochází Lemoinovým bodem L.

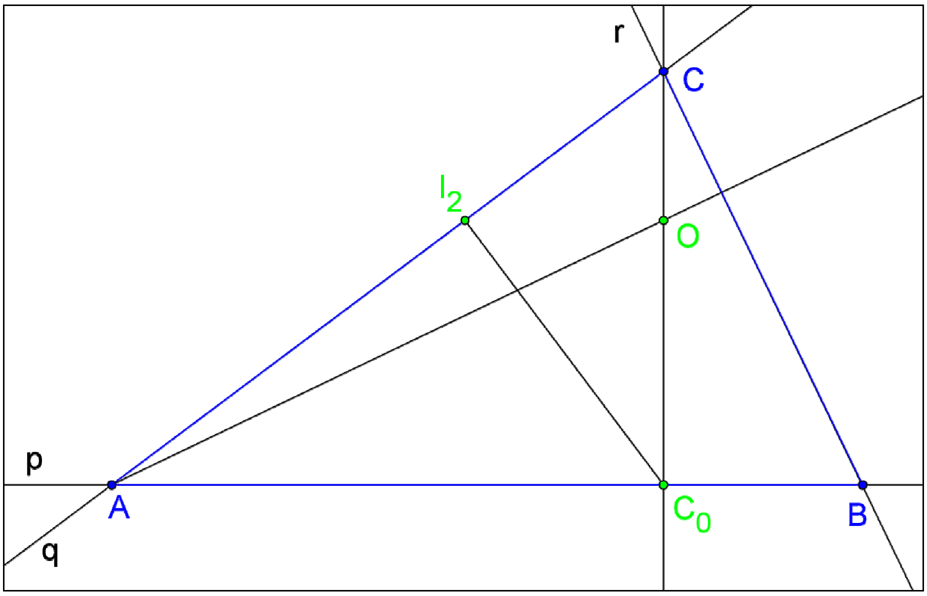
Řešení (obr. 37): Zvolíme vrchol A, druhou Lemoinovu kružnici k_T a přímku k, o které víme, že prochází středem druhé Lemoinovy kružnice – bodem L. Průsečíky přímky k s kružnicí k_T jsou body K_1 a K_2. Nyní narýsujeme přímku AK_1. Průsečík této přímky a kružnice k_T je bod I_2. Body I_2 a L proložíme přímku. Průsečík přímky I_2L a kružnice k_T je bod I_1. Body A a I_1 proložíme přímku. Průsečík přímky AI_1 a kružnice k_T je bod J_2. Body J_2 a L opět proložíme přímku. Průsečík přímky J_2L a kružnice k_T je bod J_1. Body K_2 a J_1 proložíme přímku. Průsečík přímky AI_1 s přímkou K_2J_1 je vrchol B. Podobně průsečík přímek AK_1 a K_2J_1 je vrchol C. Poté už jen narýsujeme trojúhelník ABC.



Obr. 37 – Konstrukce trojúhelníku z př. 5

Příklad 6: Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li dány ortocentrum $\boldsymbol{O}$, pata $\boldsymbol{C_0}$ výšky v_c a bod $\boldsymbol{I_2}$, který je průsečíkem Taylorovy kružnice a strany AC.

Řešení (obr. 38): Zvolíme body O, C_0 a I_2. Body O a C_0 proložíme přímku. Bodem C_0 vedeme přímku p kolmo na přímku OC_0 tak, že bod C_0 leží na přímce p. Dále vedeme přímku q kolmo na úsečku C_0I_2 tak, aby bod I_2 ležel na přímce q. Průsečík přímek p a q je vrchol A. Průsečík přímek C_0O a q je vrchol C. Body A a O vedeme polopřímku. Narýsujeme přímku r kolmo na polopřímku AO tak, aby bod C ležel na přímce r. Průsečík přímek r a p je vrchol B. Narýsujeme trojúhelník ABC.



Obr. 38 – Konstrukce trojúhelníku z př. 6

Příklad 7: Určete délky stran a velikosti úhlů v trojúhelníku *ABC*, je-li dáno: a = 5 cm, b = 6 cm, α = 45° [8, s. 60]

Řešení: Použijeme sinovou větu a postupně počítáme potřebné hodnoty:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}\Rightarrow \sin\beta=\frac{b}{a}\cdot\sin\alpha=\frac{6}{5}\cdot\sin 45^\circ=\frac{6}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{5}$$

$$\beta \doteq 58^\circ 10' \Rightarrow \gamma \doteq 180^\circ-(45^\circ+58^\circ 10') \doteq 76^\circ 50'$$

$$\beta' \doteq 121^\circ 50' \Rightarrow \gamma' \doteq 180^\circ-(45^\circ+121^\circ 50') \doteq 13^\circ 10'$$

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma}\Rightarrow$$

$$c=\frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}=\frac{5\sin 76^\circ 50'}{\sin 45^\circ}\doteq 5\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\sin 76^\circ 50' \doteq 6{,}88\,\mathrm{cm}$$

$$c'=\frac{a\sin\gamma'}{\sin\alpha}\doteq\frac{5\sin 13^\circ 10'}{\sin 45^\circ}\doteq 5\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\sin 13^\circ 10' \doteq 1{,}61\,\mathrm{cm}$$

Příklad 8: V trojúhelníku *ABC* určete délky stran a velikosti úhlů, pokud znáte jeho obsah S = 84 cm^2, α = 60°, $b + c$ = 28 cm.

Řešení: Z funkce sinus úhlu α vyjádříme výšku v_c:

$$\sin\alpha=\frac{v_c}{b} \;\Rightarrow\; v_c=b\sin\alpha=b\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}b$$

Dále vyjádříme délku strany c pomocí strany b:

$$b+c=28 \;\Rightarrow\; c=28-b$$

Do vzorce pro obsah trojúhelníku $S = \frac{cv_c}{2}$ dosadíme známé hodnoty a vypočítáme délku strany *b*:

$$84 = \frac{(28-b)\sqrt{3}b}{2 \cdot 2} = \frac{28\sqrt{3}b - \sqrt{3}b^2}{4}$$

$$336 = -\sqrt{3}b^2 + 28\sqrt{3}b$$

$$\sqrt{3}b^2 - 28\sqrt{3}b + 336 = 0$$

$$b_{1,2} = \frac{28\sqrt{3} \pm \sqrt{2\,352 - 1344\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}$$

$$b_1 \doteq 15{,}42\ \text{cm} \ \Rightarrow c_1 = 28 - b_1 = 28 - 15{,}42 \doteq 12{,}58\ (\text{cm})$$
$$b_2 \doteq 12{,}58\ \text{cm} \ \Rightarrow c_2 = 28 - b_2 = 28 - 12{,}58 \doteq 15{,}42\ (\text{cm})$$

Délku strany *a* dopočteme podle kosinové věty:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cos\alpha = 15{,}42^2 + 12{,}58^2 - 2 \cdot 15{,}42 \cdot 12{,}58 \cdot \cos 60°\ (\text{cm})$$

$$a^2 = 202{,}049\,2\ (\text{cm}^2)$$
$$a \doteq 14{,}21\ (\text{cm})$$

Pomocí sinové věty a věty pro součet vnitřních úhlů v trojúhelníku dopočteme velikosti zbývajících úhlů:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$$

$$\sin\beta_1 = \frac{15{,}42\sin 60°}{14{,}21} \ \Rightarrow \beta_1 \doteq 70°$$

$$\gamma_1 = 180° - (\alpha + \beta_1) = 180° - (60° + 70°) = 50°$$

$$\sin\beta_2 = \frac{12{,}58\sin 60°}{14{,}21} \ \Rightarrow \beta_2 \doteq 50°$$

$$\gamma_2 = 180° - (\alpha + \beta_2) = 180° - (60° + 50°) = 70°$$

Závěr

Práce shrnuje nejznámější pojmy, vlastnosti a věty o trojúhelníku a útvarech, které se k němu vztahují, ale jsou zde popsány a vysvětleny i prvky a věty, které nejsou součástí učiva mnohde ani na vysokých školách. Cílem práce bylo seznámit čtenáře s těmito pojmy, a rozšířit tak vědomosti týkající se trojúhelníku.

Práce je rozdělena do šesti kapitol. V první kapitole je uvedeno několik definic trojúhelníku, jsou zde popsány druhy trojúhelníků podle délek stran a velikostí úhlů a věty, které udávají vztahy mezi délkami stran trojúhelníku a velikostmi jeho úhlů; jsou jimi Pythagorova věta, sinová a kosinová věta.

Druhá kapitola prezentuje základní prvky trojúhelníku, mezi něž patří střední příčky, těžnice, výšky a kružnice opsaná, vepsaná a kružnice připsané.

Třetí kapitola shrnuje významné body a přímky, z nichž některé se probírají až na vysokých školách a některé nejsou vyučovány vůbec. Mezi tyto významné body a přímky jsou zařazeny Longchampův bod, Gergonnův bod, Nagelův bod, Lemoinův bod, Eulerova přímka a Simsonova přímka.

Ve čtvrté kapitole je možné seznámit se ještě s dalšími kružnicemi, které se k trojúhelníku vztahují. Jsou jimi Feuerbachova kružnice, nebo také kružnice devíti bodů, a Tuckerovy kružnice. Tyto kružnice se vyučují až na některých vysokých školách, a tak běžný student, který absolvoval střední školu s maturitou, se o těchto pojmech jen stěží něco dozví.

V páté kapitole jsou uvedeny nejznámější vzorce pro výpočet obvodu a obsahu trojúhelníku a jejich odvození pomocí jiných vzorců.

V poslední kapitole jsou využity poznatky, se kterými jsme se seznámili výše, a propojili jednotlivé vlastnosti a vztahy mezi trojúhelníkem a jeho nově prezentovanými prvky. V konstrukčních příkladech je ukázáno, jak využít zde popsané vlastnosti pro sestrojení trojúhelníku při zadání určité kombinace jeho prvků, které nejsou známé ze střední školy. V početních úlohách jsme za pomoci vzorečků a vět zjišťovali chybějící údaje o trojúhelníku.

Zpracování tohoto tématu mě obohatilo o poznatky z geometrie trojúhelníku, s nimiž bych se při běžném studiu matematiky neseznámila. Sama jsem v literatuře a na internetu vyhledávala téměř neznámé pojmy a věty vztahující se k trojúhelníku, a rozšiřovala tak své znalosti o trojúhelníku a jeho prvcích.

Neodmyslitelnou součástí práce jsou názorné obrázky, které napomáhají lepší představivosti o pojmech a vztazích mezi nimi. Díky zpracování práce do této podoby jsem měla možnost naučit se ovládat geometrický program GeoGebra, ve kterém jsou všechny obrázky vytvořeny. Je to program volně stažitelný, tudíž dostupný každému, kdo má připojení na internet a vlastní počítač. Manipulace a práce v něm je poměrně jednoduchá. Já sama nejsem žádný počítačový expert, a přesto jsem se veškeré dovednosti v programu, potřebné pro tuto práci, naučila sama a věřím, že je využiji nejen při dalším studiu, ale i později ve školní praxi.

Konstrukční příklady v poslední kapitole jsem vymýšlela a následně pak konstruovala sama. Při vymýšlení příkladů jsem si tak ještě více prohloubila a dala do souvislostí méně známé vlastnosti a vztahy trojúhelníku, kterým jsem se přiučila.

Nedostatek práce vidím v tom, že se mi dosud nepodařilo vymyslet konstrukční příklad, kde by se mezi zadanými prvky vyskytoval Lemoinův bod, symediána, Simsonova přímka nebo nějaký její bod.

V budoucnu bych práci chtěla rozšířit o stručné životopisy a zajímavosti ze života autorů, podle nichž je nazvána většina prvků. Dále bych chtěla provést výzkum na některých středních a vysokých školách týkající se znalostí nebo alespoň povědomí o těchto méně známých prvcích trojúhelníku a srovnat mezi sebou školy například na úrovni gymnázií se zaměřením na matematiku a školy bez zvláštní specializace.

Práce se nechá využít zejména pro studenty matematiky v oboru geometrie jako studijní či doplňující materiál o vlastnostech a prvcích trojúhelníku. Najdou zde přehled nejzákladnějších pojmů a vět, ale i takové, které nejsou součástí běžného učiva.

Literatura

[1] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia : planimetrie*. 3. vydání. Praha : Prometheus, 1996. 207 s. ISBN 80-7196-045-4.

[2] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. Páté přepracované vydání. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1991. 608 s. ISBN 80-04-22885-2.

[3] WIKIPEDIE. *Trojúhelník* [online]. [cit. 2011-03-08]. Dostupné z WWW: http://cs.wikipedia.org/wiki/Troj%C3%BAheln%C3%ADk

[4] ODVÁRKO, Oldřich; KADLEČEK, Jiří. *Matematika pro 6. ročník základní školy: 3, Úhel, trojúhelník, osová souměrnost, krychle a kvádr*. 2. vydání. Praha : Prometheus, 1999. 88 s. ISBN 80-7196-144-2.

[5] ČERMÁK, Pavel; ČERVINKOVÁ, Petra. *Odmaturuj! Z matematiky*. 2. vydání. Brno : DIDAKTIS, 2003. 208 s. ISBN 80-86285-97-9.

[6] ČUČKA, Michal. *Pythagorova věta a její důkazy*. Brno : Masarykova univerzita v Brně, 2007. Diplomová práce. Dostupné z WWW: http://is.muni.cz/th/79355/pedf_m/Diplomova_prace.pdf

[7] MOTYČKOVÁ, Marie. *Využití internetu ve výuce goniometrie na střední škole*. Praha : Univerzita Karlova v Praze, 2006. Diplomová práce. Dostupné z WWW: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~robova/stranky/motyckova/Stranky_s_aplety/index.html

[8] BOČEK, Leo; ZHOUF, Jaroslav. *Planimetrie*. 1. vydání. Praha : Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy v Praze, 2009. 148 s. ISBN 978-80-7290-404-4.

[9] ŠVRČEK, Jaroslav; VANŽURA, Jiří. *Geometrie trojúhelníka*. 1. vydání. Praha : SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1988. 248 s. ISBN 04-017-88.

[10] ŠVRČEK, Jaroslav. *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka.* 2. přepracované vydání. Praha : Karolinum, 2004. 148 s. ISBN 80-246-0814-6.

[11] PANOŠ, Miroslav. *Zvláštní přímky a kružnice trojúhelníku*. 2006. Dostupné z WWW: <http://www.walter-fendt.de/m14cz/dreieck_cz.htm.> [cit. 2011-03-04]

[12] ŠRUBAŘ, Jiří. *Vlastnosti trojúhelníku*. 2006. Dostupné z WWW: http://mat.fsv.cvut.cz/gcg/sbornik/srubar.pdf [cit. 2011-03-11]

[13] WIKIPEDIE. *Kružnice devíti bodů* [online]. [cit. 2011-03-12]. Dostupné z WWW: http://cs.wikipedia.org/wiki/Kru%C5%BEnice_dev%C3%ADti_bod%C5%AF

[14] ODVÁRKO, Oldřich. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia : Goniometrie*. 1. vydání. Praha : Prometheus, 1997. 44 s. ISBN 80-7196-053-5

[15] ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia : goniometrie*. 2. vydání. Praha : Prometheus, 1995. 127 s. ISBN 80-7196-000-4.

Přílohy

Součástí práce je také přiložené CD na zadních deskách. Obsahuje všechny applety obrázků použitých v práci. Jsou vytvořené v programu GeoGebra (přípona ggb). Dále se na CD nachází instalační program pro tento software.

Seznam souborů na CD:

Vztahy mezi prvky trojúhelníku.doc

Vztahy mezi prvky trojúhelníku.pdf

Obsah složky Obrázky:

Obr. 1 – Trojúhelník.ggb

Obr. 2 – Vnitřní a vnější úhly trojúhelníku.ggb

Obr. 3 – Součet vnitřních úhlů trojúhelníku.ggb

Obr. 4 – Trojúhelníky rozdělené podle délek stran.ggb

Obr. 5 – Trojúhelníky rozdělené podle velikostí úhlů.ggb

Obr. 6 – Pythagorova věta.ggb

Obr. 7 – Důkaz Pythagorovy věty.ggb

Obr. 8 – Sinová věta.ggb

Obr. 9 – Kosinová věta.ggb

Obr. 10 – Menealova věta.ggb

Obr. 11 – Cèvova věta – přímky rovnoběžné.ggb

Obr. 12 – Cèvova věta – přímky procházející jedním bodem.ggb

Obr. 13 – Střední příčky trojúhelníku.ggb

Obr. 14 – Těžnice trojúhelníku.ggb

Obr. 15 – Výšky trojúhelníku.ggb

Obr. 16 – Euklidovy věty.ggb

Obr. 17 – Kružnice opsaná.ggb

Obr. 18 – Kružnice vepsaná.ggb

Obr. 19 – Kružnice připsané.ggb

Obr. 20 – Eulerova přímka.ggb

Obr. 21 – Longchampův bod.ggb

Obr. 22 – Gergonnův bod.ggb

Obr. 23 – Nagelův bod.ggb

Obr. 24 – Lemoinův bod.ggb

Obr. 25 – Simsonova přímka.ggb

Obr. 26 – Úpatnicový trojúhelník.ggb

Obr. 27 – Morleyova věta.ggb

Obr. 28 – Feuerbachova kružnice.ggb

Obr. 29 – Důkaz Feuerbachovy kružnice.ggb

Obr. 30 – První Lemoinova kružnice.ggb

Obr. 31 – Druhá Lemoinova kružnice.ggb

Obr. 32 – Taylorova kružnice.ggb

Obr. 33 – Konstrukce trojúhelníku z př. 1.ggb

Obr. 34 – Konstrukce trojúhelníku z př. 2.ggb

Obr. 35 – Konstrukce trojúhelníku z př. 3.ggb

Obr. 36 – Konstrukce trojúhelníku z př. 4.ggb

Obr. 37 – Konstrukce trojúhelníku z př. 5.ggb

Obr. 38 – Konstrukce trojúhelníku z př. 6.ggb

Obsah složky Instalační program:

GeoGebra 3.2.exe