Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Viktor Hruška

Řešené úlohy z teoretické mechaniky do elektronické sbírky úloh

Katedra didaktiky fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Leoš Dvořák CSc.

Konzultantka: RNDr. Zdeňka Koupilová Ph.D.

Studijní program: Fyzika
Studijní obor: Fyzika zaměřená na vzdělávání

Praha 2011

Na tomto místě bych chtěl velmi poděkovat především svému vedoucímu práce doc. RNDr. Leoši Dvořákovi CSc. a své konzultantce RNDr. Zdeňce Koupilové Ph.D. za trpělivost, povzbuzování a cenné rady po celou dobu vznikání práce. Dále mé díky patří všem, kdo mi během psaní této práci pomohli radou i skutkem a byli mi oporou.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V …...... dne............ podpis

Název práce: *Řešené úlohy z teoretické mechaniky do elektronické sbírky úloh*

Autor: *Viktor Hruška*

Katedra: *Katedra didkatiky fyziky*

Vedoucí bakalářské práce: *doc. RNDr. Leoš Dvořák CSc., katedra didkatiky fyziky*

Konzultantka: *RNDr. Zdeňka Koupilová Ph.D., katedra didkatiky fyziky*

Abstrakt: Hlavním cílem této práce bylo vytvořit v rámci Elektronické sbírky řešených úloh z fyziky soubor úloh z oblasti teoretické mechaniky, konkrétně z kapitol Princip virtuální práce a Lagrangeův formalismus. Celkem vzniklo 16 úloh určených především vysokoškolským studentům přírodovědných a technických oborů. Strukturované řešení s nápovědami a řadou postupných kroků má provést studenta řešením úlohy způsobem natolik jasným a detailním, aby byl v rámci samostudia dostatečný, tj. aby procvičování probrané látky na úlohách mohlo probíhat bez asistence vyučujícího.

Klíčová slova: teoretická mechanika, princip virtuální práce, Lagrangeův formalismus, Lagrangeovy rovnice II. druhu, eletronická sbírka úloh, strukturovaná řešení úloh

Title: *Solved Problems in Theoretical Mechanics to Electronic Database of Solved Tasks*

Author: *Viktor Hruška*

Department: *Department of Physics Education*

Supervisor: *doc. RNDr. Leoš Dvořák CSc., Department of Physics Education*

Consultant: *RNDr. Zdeňka Koupilová Ph.D. , Department of Physics Education*

Abstract: The main goal of this bachelor thesis was to create set of tasks with structural hints and detailed solution in the field of theoretical mechanics. 16 tasks were created and published within The Electronic Collection of Solved Problems in Physics on the web. The tasks are meant to serve the university level students and they are adapted for self study.

Keywords: theoretical mechanics, principle of virtual work, Lagrange equations of the second kind, electronic collection of tasks, structured solutions of tasks

Obsah

1 Úvod ... 1
2 Rozdíly ve zpracování úloh ve vybrané literatuře a v této práci ... 2
3 Úlohy zpracované v rámci této práce ... 4
3.1 Kriteria výběru úloh ... 4
3.1.1 Princip virtuální práce ... 4
3.1.2 Lagrangeův formalismus ... 4
3.2 Přehled zpracovaných úloh ... 5
3.2.1 Princip virtuální práce ... 5
3.2.2 Kapitola Lagrangeův formalismus – problémy s jedním stupněm volnosti ... 6
3.2.3 Lagrangeův formalismus – problémy s více stupni volnosti ... 8
3.2.3 Lagrangeův formalismus – ostatní úlohy ... 10
4 Závěr ... 11
5 Literatura ... 12
6 Přílohy ... 13
6.1 Wattův regulátor ... 13
6.2 Hmotný bod na nakloněné rovině ... 24
6.3 Hmotný bod na rovnoměrně se otáčející nakloněné rovině ... 32
6.4 Dvojkyvadlo ... 44

1 Úvod

Tato práce vznikala v rámci projektu *Elektronické sbírky řešených úloh z fyziky* přístupného na webové adrese www.fyzikalniulohy.cz, která vznikla a je rozvíjena na Katedře didaktiky fyziky Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy.

Práce má za cíl založit novou tématickou oblast *Teoretická mechanika*. Jedná se o první výlučně vysokoškolskou oblast v rámci sbírky publikovanou. Určena je zejména posluchačům přírodovědných a technických oborů. Cílem práce je rozšířit stávající možnosti přístupu studentů k úlohám z oblasti teoretické mechaniky, zejména k úvodním problémům ze zvolených kapitol *Princip virtuální práce* a *Lagrangeův formalismus*.

Vzhledem k počtu prací, které již v rámci tohoto projektu vznikly, jsem nezařadil do textu této práce rozsáhlejší informace o konceptu a provedení *Elektronické sbírce řešených úloh z fyziky*, ale ponechávám na tomto místě jen malý souhrn (bližší detaily lze nalézt například v bakalářských pracech Michaly Pfefrčkové [1], a Markéty Popové [2]).

Hlavním autorem webového rozhraní sbírky je RNDr. Zdeňka Koupilová Ph.D. Text úloh je psán v jazyce XHTML, vzorce využívají formát LaTeX a obrázky jsou tvořeny v programu *CorelDRAW*. Grafy v mé práci byly vytvořeny v programu *Wolfram Mathematica*. Cílem strukturovaného řešení s řadou postupných kroků je zejména provést studenta řešením úlohy způsobem natolik jasným a detailním, aby byl v rámci samostudia dostatečný, tj. aby procvičování probrané látky na úlohách mohlo probíhat bez asistence vyučujícícho. Opomíjena není ani matematická stránka řešení fyzikálních úloh. Všechny úlohy v databázi jsou funkční a umožňují postupné rozkrývání postupu řešení formou nápověd, které má uživatel sbírky k dispozici v podobě aktivních záložek.

V rámci této práce také pokračuje spolupráce s *Multimediální Encyklopedií Fyziky* (http://fyzika.jreichl.com, [3]), jejímž autorem je Mgr. Jaroslav Reichel.

2 Rozdíly ve zpracování úloh ve vybrané literatuře a v této práci

Sbírek úloh z oblasti teoretické mechaniky není mnoho, už jen proto, že studentská obec, které jsou určeny je pouze vysokoškolská. Jedny z mála v češtině psaných sbírek byly vytvořeny a publikovány pro pro účely stavebních fakult ČVUT a VUT (např. lit. [4]). Tvorba a zadávání úloh je tak velmi často pouze v působnosti konkrétních přednášejících a cvičících. V tomto smyslu bývají úlohy přístupné i na internetu, zpravidla však nejsou příliš komentovány, protože cvičící si pochopitelně ponechává širší komentář v záloze pro vlastní výuku.

Několik úloh, které by do oblasti teoretické mechaniky přibližně spadaly, se nachází na výukovém serveru www.aldebaran.cz [5], který spravuje katedra fyziky fakulty elektrotechnické ČVUT. Netvoří však ucelený soubor a jejich řešení nejsou detailní, pouze ukazují směr úvah.

V učebnicích, které se teoretickou mechanikou zabývají, bývá na konci kapitol zařazeno několik příkladů ukazujících použití právě probraných metod řešení problémů. Ty však zpravidla nemůžou být považovány za plnohodnotné řešené úlohy ve výše naznačeném smyslu. I pokud v některých případech tvoří řešení úloh zvláštní kapitolu, dávají autoři učebnic, při omezeném prostoru, který mohou využít, přednost pokročilejším úlohám (např. [6]), navíc obvykle bez širšího komentáře k matematické stránce řešení úloh, která často bývá velmi netriviální. Jsou-li na koncích kapitol příklady k procvičení, pak nebývají řešené, ale pouze s odpovědí (např. [7]).

Hlubší rešerše, zejména v cizích jazycích (např. v doporučené literatuře v [8]), by bezpochyby odkryla další možné zdroje řešených úloh. Předchozí odstavce však dostatečně naznačily aspekty, kterými chce tato práce nabídku úloh z teoretické mechaniky rozšířit a doplnit. Jsou to zejména:

- zařazení i jednodušších úloh,
- detailně vypracované řešení,
- komentář i k matematické stránce řešení.

Tato práce si tedy klade za cíl **vytvořit tématicky ucelený soubor detailně řešených úloh z teoretické mechaniky, který se zatím v česky psané literatuře vyskytuje spíše vzácně a který by bylo možno v rámci *Elektronické sbírky řešených úloh z fyziky* zpřístupnit všem zájemcům.**

Cílem je též vytvořit určitý základ úloh z teoretické mechaniky, na který by mohli v budoucnu další autoři úloh v elektronické sbírce navázat.

3 Úlohy zpracované v rámci této práce

3.1 Kriteria výběru úloh

Výběr úloh vznikal na základě sylabu cvičení k přednášce *Teoretická mechanika* pro studenty oboru *Fyzika zaměřená na vzdělávání* na MFF UK, konzultací s vedoucím práce a konzultantkou a na základě mých osobních zkušeností s procesem porozumění základních principů této oblasti fyziky.

Jako výchozí pro tvorbu úloh byly zvoleny kapitoly *Princip virtuální práce* a *Lagrangeův formalismus*.

3.1.1 Princip virtuální práce

Princip virtuální práce, respektive jeho zobecněná varianta, bývá jednou z prvních aplikací teorie pohybu hmotných bodů podrobených vazbám, se kterou se studenti setkají. Vybrané úlohy mají řešitele především uvést do základů práce s tímto principem a ilustrovat rozdíly oproti newtonovskému pojetí, které se při řešení úloh objeví. Smyslem je zejména přimět studenty k zamyšlení se nad algoritmem řešení „včas“, tedy dokud před sebou mají ještě relativně velmi jednoduché úlohy.

3.1.2 Lagrangeův formalismus

Důkladné seznámení s odvozením, formalismem a použitím Lagrangeovy funkce a Lagrangeových rovnic II. druhu patří k nejdůležitějším krokům při studiu teoretické mechaniky. Řešení úloh za pomoci těchto rovnic je asi nejnázornějším uvedením studenta do formalismu zobecněných souřadnic a veličin. Tvoří vhodný překlenovací můstek mezi newtonovským řešením úloh pomocí vektorových diagramů na jedné straně a popisem systémů pomocí skalárních funkcí na straně druhé. Je tedy cenným tréninkem a přípravou nejen pro mechaniku hamiltonovskou, ale například také pro popisný aparát kvantové mechaniky nebo statistické fyziky.

S ohledem na výše řečené byly pro kapitolu Lagrangeovský formalismus vybírány tři typy úloh:

- Úlohy jednoduché, snadno řešitelné i pomocí 2. Newtonova zákona nebo 2. věty impulzové, na kterých jsou ukazována specifika lagrangeovských postupů a procvičovány základní návyky práce s příslušným formalismem (např. *Hmotný bod na nakloněné rovině*).
- Úlohy složitější, jejichž výpočet pomocí Newtonova formalismu je prakticky jen velmi obtížně proveditelný a představují tedy pro studenty rozšíření jejich možností řešení fyzikálních problémů. Do této kategorie spadají například všechny úlohy zabývající se specifickou problematikou malých kmitů soustav hmotných bodů (např. *Dvojkyvadlo*).
- Úlohy směřující k teoretické fyzice. V zadání nebývá konkrétní reálná situace, studenti mají pracovat s matematickým popisem pomocí Lagrangeovy funkce bez náčrtků a spojitost s reálnou situací je diskutována až v závěru úlohy (např. *Lineární harmonický oscilátor*).

3.2 Přehled zpracovaných úloh

Pořadová číslovka před názvem úlohy odpovídá pořadí úloh v dané kapitole. Číslo v závorce za názvem úlohy je vnitřním identifikačním číslem úlohy v rámci celé sbírky.

3.2.1 Princip virtuální práce

1. Matematické kyvadlo (919)

Úloha často probíraná na přednáškách jako jeden úvodních problémů. Úkolem je najít rovnovážné polohy matematického kyvadla. Studenti jsou vedeni k tomu, aby si na této téměř intuitivně řešitelné úloze vyzkoušeli práci ve dvou různých parametrizacích. V komentáři za odpovědí jsou diskutovány rozdíly v přístupu k řešení úlohy, pokud by vazba, jíž je kyvadlo podrobeno, byla pouze jednostranná (tj. uvažovali bychom závěs kyvadla, který by se mohl zkrátit).

2. Kulička v elektrostatickém a gravitačním poli (710)

Jedna z nejjednodušších úloh na procvičení hledání rovnovážných poloh hmotných bodů. Jsou z ní dobře patrné shody i rozdílnosti mezi newtonovským řešením a použitím pokročilejších diferenciálních principů klasické mechaniky. V komentáři za odpovědí je pro srovnání doplněno řešení pomocí nulového součtu momentů působících aktivních sil.

3. Wattův regulátor (id 922)

Jediná složitější z vybraných úloh. Úkolem je najít rovnovážné polohy Wattova odstředivého regulátoru. Studenti si mají možnost připomenout rozdíly mezi popisem dynamiky pohybu v inerciální a neinerciální soustavě. Je komentován praktický inženýrský význam výsledků získaných teoretickou cestou.

3.2.2 Kapitola Lagrangeův formalismus – problémy s jedním stupněm volnosti

1. Bod na nakloněné rovině (632)

Nejzákladnější úloha sloužící k osvojení postupů nalézání lagrangiánu a získávání rovnic jeho derivacemi. Úkolem je napsat rovnici pohybu hmotného bodu na nakloněné rovině bez tření.

Na tomto jednoduchém příkladu, jehož řešení je pro studenty již obeznámené s klasickou newtonovskou mechanikou doslova intuitivní, se ukazují některé specifické vlastnosti Lagrangeových rovnic II. druhu, zejména jejich nezávislost na konstantách v Lagrangeově funkci. Konkrétně je například komentována možnost volit si nulovou hladinu potenciální energie libovolně, protože pro Lagrangeovy rovnice II. druhu je podstatný pouze její funkční průběh vzhledem k zobecněným souřadnicím.

2. Válec na nakloněné rovině (664)

Zadání v podstatě jen rozvíjí úlohu předešlou. Valící se válec koná translační i rotační pohyb, takže si student může vyzkoušet výhody lagrangeovských postupů spojených pouze s výpočtem kinetické a potenciální energie ve srovnání s vektorovými úvahami nutnými k popisu pohybu pomocí druhého Newtonova zákona a druhé věty impulzové.

Aby se řešení úloh neomezilo pouze na mechanické dodržování postupů, jsou do úlohy zařazeny i otázky vyžadující fyzikální úvahu, a sice určení počtu veličin nutných k popisu kinetické energie homogenního válce a rozhodnutí, zda se bude lišit růst rychlosti na nakloněné rovině u válce nebo hmotného bodu stejné hmotnosti.

3. Vozík na nakloněné rovině (633)

Opět se de facto jedná o rozšíření předchozího zadání. Díváme se na vozík jako na objekt, jehož jedna část vykonává pohyb translační i rotační, přičemž druhá pouze translační. Podíl hmotnosti koleček vůči celkové hmotnosti vozíku je zadán jako parametr. Je tedy možné se přesvědčit, že při správném řešení úlohy vyjdou pro extrémy parametru pohybové rovnice válce na nakloněné rovině, resp. hmotného bodu na nakloněné rovině.

Úloha rovněž ilustruje nezávislost řešení pohybových rovnic na konstantách v lagrangiánu – ať už je podvozek vozíčku jakkoli vysoký, podstatný je funkční průběh potenciální energie a ten se jeho výškou nemění.

4. Soustava kladek (638)

Řešitel má za úkol pomocí Lagrangeových rovnic II. druhu určit pohybové rovnice dvou závaží na jednoduchém kladkostroji tvořeném jednou pevnou a jednou volnou kladkou. Úkolem je napsat Lagrangeovu funkci pro případ, že kladky můžeme považovat za nehmotné a případ, kdy kladky považujeme za plné válce o zadaných hmotnostech. Lze jednoduše ověřit, že z druhého případu plyne případ první. Opět také můžeme porovnat výhody lagrangeovského výpočtu pomocí energií s newtonovskými úvahami založenými na druhé větě impulzové.

Na tomto jednoduchém příkladě se také ukazuje důležitý postup často využívaný při určování Lagrangeovy funkce: zavést větší počet souřadnic než je nutné, protože tak lze systém jednodušším způsobem popsat, a veličiny pak vyjádřit pouze pomocí jedné zvolené zobecněné souřadnice. Konkrétně zde se jako souřadnice používají vzdálenosti obou závaží měřené od stropu, na kterém je kladkostroj uchycen, ačkoli má soustava pouze jeden stupeň volnosti. Určení kinetické i potenciální energie je tak ovšem přehlednější a transformační vztahy jsou velmi jednoduché.

5. Jednorozměrný harmonický oscilátor (675)

Úloha zadaná „obráceně než je zvykem“. V zadání není reálná situace nebo její model, ale naopak de facto pouze matematický popis děje, konkrétně parabolický tvar pole potenciálu, ve kterém se má nacházet hmotný bod. Řešitelé jsou vyzváni, aby systému dopočítali lagrangián a pohybové rovnice a poté pro ně v úvozovkách „zpětně“ určili příklady reálných situací.

Je zde tedy zřejmá podobnost matematického popisu pohybu kyvadla a pružinky a jsou diskutovány i další možnosti realizace tohoto modelu. Úloha má především za cíl procvičit studenty ve čtení lagrangeovského formalismu a – bráno v širším horizontu – připravit je na situace popsané nikoli náčrtkem, ale funkcí, resp. matematickými vztahy.

6. Matematické kyvadlo (669)

Klasická úloha, kterou bývá uvozována problematika malých kmitů. Úloha má být řešena v přiblížení pro malé výchylky kyvadla z rovnovážné polohy. K odpovědi je připojen širší komentář zabývající se řešením bez přiblížení pro malé kmity a je diskutována významná odlišnost mezi závěry získanými postupy s aproximací a bez ní, tj. neizochronní povaha kmitů kyvadla, která z linearizovaných pohybových rovnic nevyplývá.

7. Fyzické kyvadlo (674)

Zde se rovněž jedná o problém, se kterým se studenti patrně setkali již před studiem teoretické mechaniky. Opět jsme svědky značného zjednodušení postupů oproti newtonovské mechanice.

8. Hmotný bod na rovnoměrně se otáčející nakloněné rovině (741)

Vcelku jednoduché zobecnění pohybu bodu po nakloněné rovině. Úhel jejího náklonu se zadanou rychlostí mění. Řešitelé se tak setkávají s případem, kdy je lagrangián závislý na všech třech možných typech proměnné (zobecněné rychlosti, souřadnici i čase). Její řešení navíc obsahuje ne zcela běžný prvek, a to časovou proměnou v sinu, aniž by se ovšem jednalo o periodický pohyb samotného hmotného bodu.

Úkolem je i určit konstanty v řešení rovnice pro konkrétní situaci: pohyb hmotného bodu na myšlené vteřinové ručičce věžních hodin. Je podrobně diskutován průběh získané funkce a jeho odlišnosti od grafu pohybu hmotného bodu po nakloněné rovině.

3.2.3 Lagrangeův formalismus – problémy s více stupni volnosti

1. Dva vozíky s pružinkou (635)

Úvodní, ne příliš těžká úloha se systémem s více stupni volnosti. Po nakloněné rovině se pohybují dva vozíky známých hmotností spojené pružinkou známé délky a tuhosti. Úkolem je určit a řešit jejich pohybové rovnice. K tomu je ovšem vodné přejít od souřadnic těžišť jednotlivých vozíčků ke zobecněné souřadnici jejich vzájemné vzdálenosti a polohy těžiště soustavy obou vozíčků.

Řešitel si tak procvičí výpočty s pomocí zavedení hmotného středu a redukované hmotnosti dvojice těles, a zároveň může vidět, jak vhodná transformace souřadnic může ze soustavy diferenciálních rovnic udělat rovnice nezávislé.

2. Vozík s kyvadlem (634)

Další z newtonovsky obtížně řešitelných úloh. Na vozíku pohybujícím se na rovině je připevněno kyvadlo. Při určování předpisu kinetické a potenciální energie si student na těžším příkladu procvičí transformaci z kartézských do zobecněných souřadnic. Analytické řešení rovnice je vyžadováno pouze pro malé kmity kyvadla, což řešitele vede k užití Taylorova rozvoje relativně složitější funkce. Zvlášť jsou komentovány některé matematické aspekty řešení úlohy, jako například nelineární povaha výpočtu kinetických energií nebo kontrola počtu integračních konstant, které obsahuje řešení. Nechybí ani diskuse limitních případů (např. pokud je hmotnost kyvadla vůči hmotnosti vozíčku zanedbatelná, pohyby vozíčku a kyvadla se stávají na sobě nezávislými).

3. Dvě pružinky (636)

Jedna ze základních úloh řešení kmitů soustav hmotných bodů. Řešitelé mají za úkol sestavit Lagrangeovu funkci dvou závaží spojených pružinkou, přičemž jedno z nich je další pružinou spojeno s pevným ukotvením. Lagrangeovy rovnice II. druhu se pak řeší pro zjednodušený případ rovnosti hmotností obou závaží a tuhosti obou pružin.

4. Dvojkyvadlo (637)

Patrně nejobtížnější úloha ze souboru. Vyžaduje kombinaci znalostí a dovedností procvičovaných v úlohách předchozích. Je zapotřebí jednak vhodný popis systému kyvadla s pohyblivým závěsem a Taylorův rozvoj pro malé výchylky kmitání (např. úloha *Vozík s kyvadlem*), krom toho ovšem také znalosti řešení soustav diferenciálních rovnic (např. úloha *Dvě pružinky*).

3.2.3 Lagrangeův formalismus – ostatní úlohy

První integrály Lagrangeových rovnic (742)

Základní jednoduchá úloha procvičující práci se zákony zachování, resp. vyšetřování zachovávajících se veličin, v Lagrangeově formalismu. Jsou využívány lagrangiány získané v jiných úlohách.

4 Závěr

Práci tvoří kromě tohoto textu 16 publikovaných úloh přístupných na webové adrese http://fyzikalniulohy.cz/index.php?predmet=14, které naplňují vytyčený cíl založit v *Elektronické sbírce řešených úloh z fyziky* oblast teoretická mechanika tak, aby pokryla i úvodní a jednodušší úlohy a bylo možno na ni jako na pevný základ navázat složitějšími úlohami z daných kapitol (např. cykloidální kyvadlo, spřažená kyvadla, atp.). Stejné poslání má i vůči dosud nevytvořeným kapitolám, jakými jsou například *Hamiltonův formalismus* nebo *Kontinuum*.

Práce je určena především vysokoškolským studentům, kteří si procvičují své znalosti z oblasti teoretické mechaniky. Při vypracovávání úloh bylo pamatováno na to, že potřebné matematické dovednosti nemají často studenti procvičeny natolik, aby je bylo možno nechat bez komentáře nebo dokonce řešení rovnic a práci s výrazy z řešení úlohy zcela vypustit.

Snažil jsem se na zpracovaných úlohách ukázat, že teoretická mechanika je branou do světa teoretické fyziky, ale současně i disciplínou vrcholně praktickou, s obrovským významem pro inženýrské obory.

5 Literatura

[1] Pfefrčková, M.: *Řešené úlohy z elektřiny a magnetismu – Střídavý proud*, Bakalářská práce, vedoucí: Koupilová Z., KDF MFF UK 2008

[2] Popová, M.: *Řešené úlohy z elektřiny a magnetismu – Magnetické pole*, Bakalářská práce, vedoucí: Koupilová Z., KDF MFF UK 2008

[3] Reichl, J.: *Multimediální encyklopedie fyziky*, http://fyzika.jreichl.com [cit. 30. 11. 2011]

[4] Czesaná, B., Kufner, V., Kratěnová, M., Hejnová, O., Kuklík, P.: *Teoretická mechanika – příklady pro studenty fakulty stavební*, ČVUT, Praha 1990

[5] www.aldebaran.cz, výukový server provozovaný katedrou fyziky FEL ČVUT a sdružením Aldebaran Group for Astrophysics. [cit. 30. 11. 2011]

[6] Brdička, M., Hladík, A.: *Teoretická mechanika*, Academia, Praha 1987

[7] Landau, L. D., Lifšic, E. M.: *Lehrbuch der theoretischen Physik – Mechanik,* něm. překl. G. Heber, Akademie-Verlag, Berlin 1973

[8] Hand, L. N., Finch, J. D.: *Analytical Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge 1998

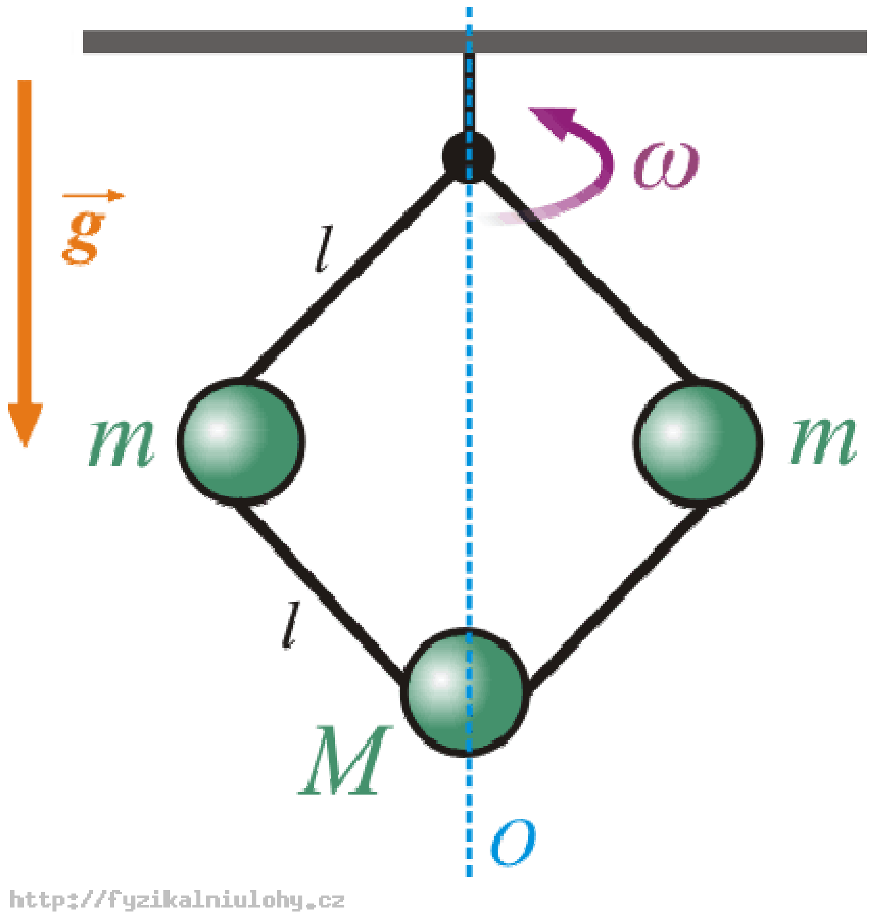
6 Přílohy

Jako ukázka jsou k textu této práce přiloženy 4 zpracované úlohy. Záměrně jsou zde k nahlédnutí úlohy nejen složité úlohy, které tvoří vrchol zpracovaného souboru, ale i úvodní jednoduchá úloha z kapitoly *Lagrangeův formalismus – Problémy s jedním stupněm volnosti*.

6.1 Wattův regulátor

Na obrázku vidíte zjednodušené schéma tzv. Wattova odstředivého regulátoru. Ramena délky l jsou na pevný závěs přichycena kloubem, takže se mohou ohýbat (tření zanedbáme). Celá soustava se otáčí kolem osy O tak, že rovina, ve které se pohybují menší závaží o hmotnosti m, je kolmá na nákresnu i na osu O. Vše se děje v homogenním gravitačním poli tíhové zrychlení míří svisle dolů.

Najděte rovnovážnou polohu závaží o hmotnosti M při dané úhlové rychlosti otáčení ω.



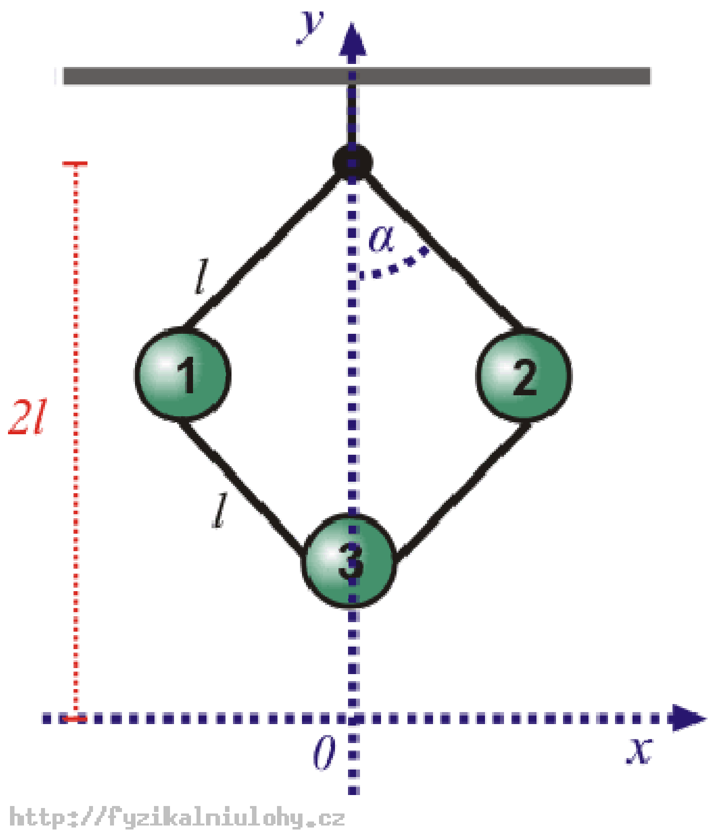
- **Nápověda 1**

Pokud úlohu budeme řešit z hlediska neinerciální soustavy, která se točí společně s osou otáčení, pak nám úlohu stačí řešit de facto jen ve dvou rozměrech (tj. v rovině).

Kolik má tedy soustava stupňů volnosti?

- ► **Řešení nápovědy 1**

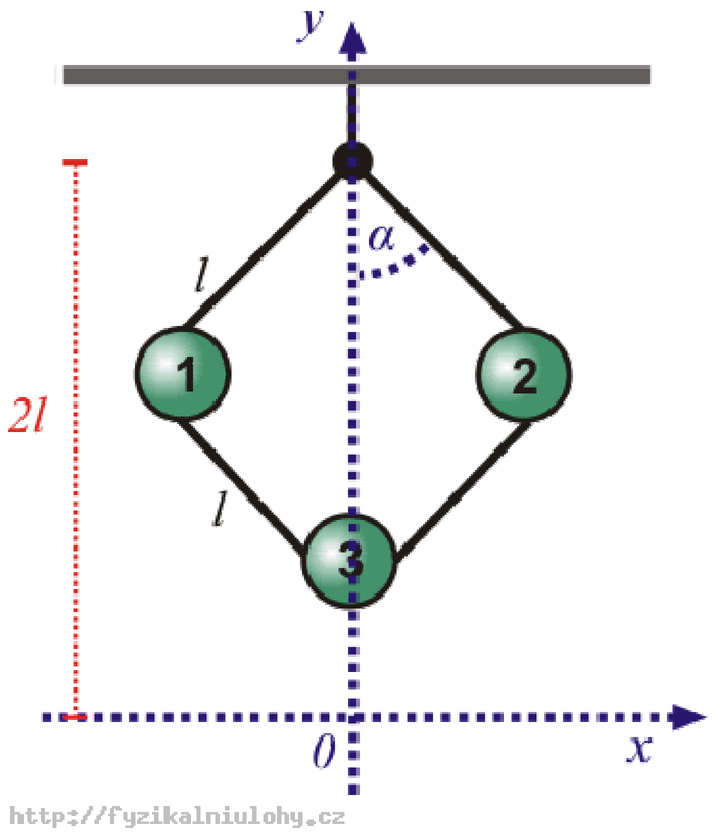
Soustava má jediný stupeň volnosti: pohyb v kloubech u jednotlivých závaží. Ten se dobře popisuje vzhledem k úhlu α (viz obrázek).



- **Nápověda 2**

Popište polohy jednotlivých závaží pomocí úhlu α. Pro konečné řešení úlohy to není až tak podstatné, ale zvolme počátek kartézské soustavy souřadnic tak, aby odpovídal poloze závaží č. 3 při nulovém úhlu α.

Určete i složky vektorů infinitezimálně malého posunutí slučitelného s vazbami pro každé závaží.



o ► **Řešení nápovědy 2**

Polohy jednotlivých závaží:

Závaží	**x**	**y**
1	$x_1 = -l\sin\alpha$	$y_1 = l(2 - \cos\alpha)$
2	$x_2 = l\sin\alpha$	$y_2 = l(2 - \cos\alpha)$
3	$x_3 = 0$	$y_3 = 2l(1 - \cos\alpha)$

A odtud derivováním dostáváme pro posunutí:

Závaží	**dx**	**dy**
1	$dx_1 = -l\cos\alpha d\alpha$	$dy_1 = l\sin\alpha d\alpha$
2	$dx_2 = l\cos\alpha d\alpha$	$dy_2 = l\sin\alpha d\alpha$
3	$dx_3 = 0$	$dy_3 = 2l\sin\alpha d\alpha$

- **<u>Nápověda 3</u>**

Vyjádřete pomocí úhlu *α* složky vektorů aktivních sil působících na jednotlivá závaží.

Těmi jsou zde síla tíhová a síla odstředivá (pozor, nikoli dostředivá, ale skutečně odstředivá – jsme v neinerciální soustavě!).

- ► **<u>Řešení nápovědy 3</u>**

Pro velikost odstředivé síly platí:

$F_d = mr\omega^2$,

pro velikost tíhové síly platí:

$F_g = mg$.

Stačí si uvědomit, že poloměr otáčení závaží *r* je pro náš případ roven absolutním hodnotám souřadnice x_1, resp. x_2.

Pozor na znaménka! Síla je **odstředivá** a osu *y* máme orientovanou **vzhůru**.

Tíhová a odstředivá síla jsou na sebe kolmé. Není tedy těžké psát rovnou složky výslednic sil:

Závaží	F_x	F_y
1	$F_{x1} = -ml\omega^2 \sin\alpha$	$F_{y1} = -mg$
2	$F_{x2} = ml\omega^2 \sin\alpha$	$F_{y1} = -mg$
3	$F_{x3} = 0$	$F_{y3} = -Mg$

- **<u>Nápověda 4</u>**

Zobecněný princip virtuální práce lze zapsat vztahem:

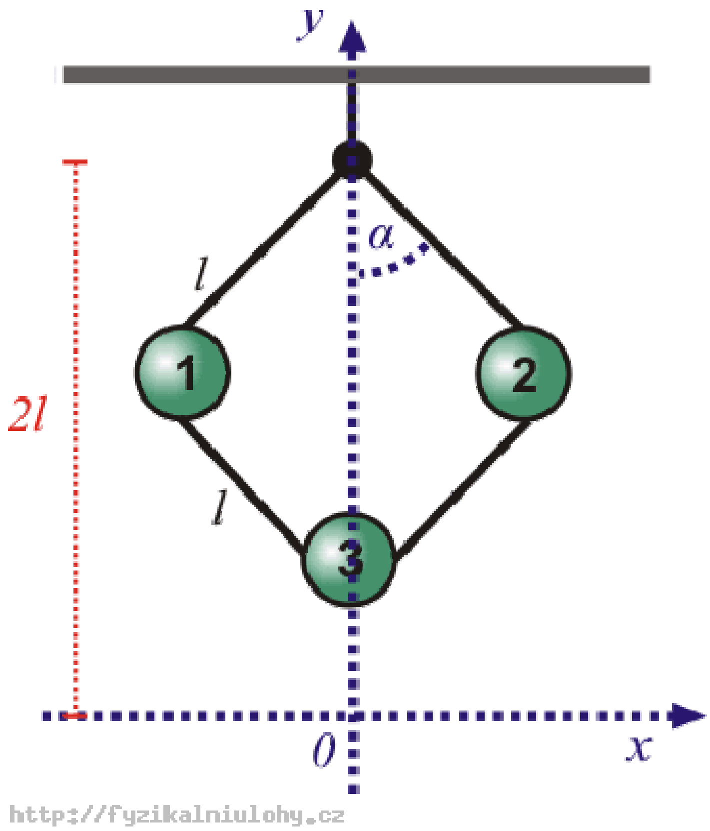
$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

kde N je počet hmotných bodů, které soustavu tvoří, $\vec{F}_i$ je výslednice aktivních sil působících na i-tý bod a $\delta\vec{r}_i$ je jeho infinitezimálně malé, vratné posunutí slučitelné s vazbami.

Teď již stačí dosadit do výše uvedeného vztahu a vyřešit získanou rovnici.

- **<u>Řešení</u>**

Soustava má jen jeden stupeň volnosti. Jako parametr si zvolíme úhel α (viz obrázek).



Pro polohy jednotlivých závaží tedy platí:

Závaží	x	y
1	$x_1 = -l\sin\alpha$	$y_1 = l(2-\cos\alpha)$
2	$x_2 = l\sin\alpha$	$y_2 = l(2-\cos\alpha)$
3	$x_3 = 0$	$y_3 = 2l(1-\cos\alpha)$

A odtud derivováním dostáváme:

Závaží	dx	dy
1	$dx_1 = -l\cos\alpha d\alpha$	$dy_1 = l\sin\alpha d\alpha$
2	$dx_2 = l\cos\alpha d\alpha$	$dy_2 = l\sin\alpha d\alpha$
3	$dx_3 = 0$	$dy_3 = 2l\sin\alpha d\alpha$

Odstředivá a gravitační síla jsou na sebe kolmé. Můžeme tedy jednoduše psát už složky výslednic působících na jednotlivá závaží:

Závaží	F_x	F_y
1	$F_{x1} = -ml\omega^2 \sin\alpha$	$F_{y1} = -mg$
2	$F_{x2} = ml\omega^2 \sin\alpha$	$F_{y1} = -mg$
3	$F_{x3} = 0$	$F_{y3} = -Mg$

Máme již všechny informace, abychom mohli dosadit do zobecněného principu virtuální práce:

$$2ml^2\omega^2 \sin\alpha \cos\alpha d\alpha - 2mgl \sin\alpha d\alpha - 2Mgl \sin\alpha d\alpha = 0 \ .$$

Upravíme:

$$\sin\alpha (ml\omega^2 \cos\alpha - mg - Mg) = 0 \ .$$

Jedním řešením tedy bude:

$$\sin\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_1 = 0$$

a odtud pro souřadnici y_3:

$$y_{31} = 0 \ .$$

Podívejme se nyní na druhý činitel rovnice v součinovém tvaru:

$$ml\omega^2 \cos\alpha - mg - Mg = 0 \ .$$

Upravíme:

$$\cos\alpha = \left(\frac{M+m}{m}\right)\frac{g}{l\omega^2} \ .$$

Odtud pro hledanou souřadnici y_3:

$$y_{32} = 2l(1 - \cos\alpha) =$$

$$= 2l\left(1 - \left(\frac{M+m}{m}\right)\frac{g}{l\omega^2}\right) = 2\left[l - \left(\frac{M+m}{m}\right)\frac{g}{\omega^2}\right] .$$

Je zřejmé, že řešení y_{31} bude existovat vždy, zatímco řešení y_{32} nemusí, protože hodnota kosinu nemůže být větší než 1, což by se ovšem při určitých otáčkách (hodnotě ω) stalo.

Existují tedy určité mezní otáčky, resp. mezní úhlová rychlost ω_0, při které začíná existovat i druhé řešení rovnice. Z podmínek existence funkce kosinus pro ni platí:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{M+m}{m}}\sqrt{\frac{g}{l}} .$$

Odtud tedy možnosti řešení v závislosti na úhlové rychlosti otáčení:

Úhlová rychlost	**Řešení 1**	**Řešení 2**
$\omega < \omega_0$	Stabilní poloha $y_{31} = 0$	Neexistuje
$\omega \geq \omega_0$	Labilní poloha $y_{31} = 0$	Stabilní poloha $y_{32}(\omega) = 2\left[l - \left(\frac{M+m}{m}\right)\frac{g}{\omega^2}\right]$

Při malých otáčkách je jedinou rovnovážnou polohou poloha s nulovým úhlem α. Při překročení mezní rychlosti, tj. při vyšších otáčkách se z ní stane poloha labilní. Pokud se totiž v tomto případě závaží č. 3 nadzvedne, zvětší se poloměr otáčení druhých dvou závaží, čímž vzroste velikost odstředivé síly a závaží č. 3 už se do původní polohy samovolně nevrátí.

- **Odpověď**

Existuje více řešení této úlohy v závislosti na úhlové rychlosti otáčení regulátoru ω:

Úhlová rychlost	Řešení 1	Řešení 2
$\omega < \omega_0$	Stabilní poloha $y_{31} = 0$	Neexistuje
$\omega \geq \omega_0$	Labilní poloha $y_{31} = 0$	Stabilní poloha $y_{32}(\omega) = 2[l - (\frac{M+m}{m})\frac{g}{\omega^2}]$

kde *y* je výška, do které se zvedne závaží o hmotnosti *M* (číslice v indexu označují po řadě číslo závaží a číslo řešení) a ω_0 je mezní úhlová rychlost, pro kterou platí:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{M+m}{m}}\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

- **Komentář – inženýrský význam**

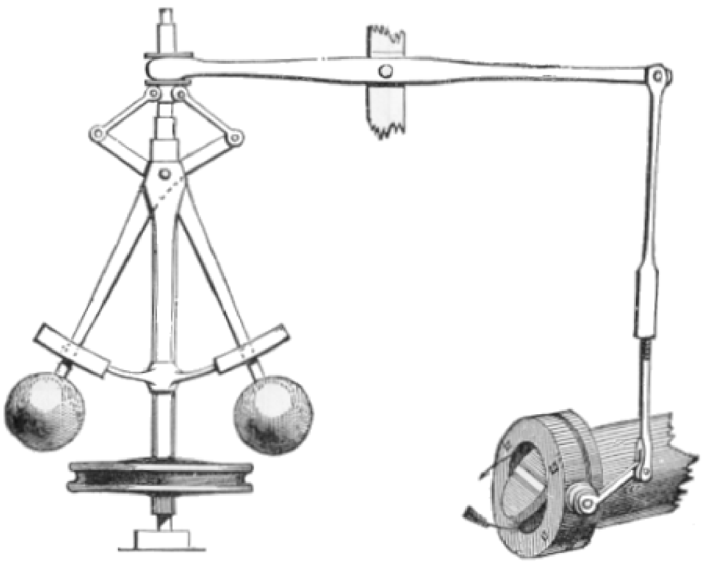
Wattův regulátor v podobě, v jaké byl v této úloze popsán, se nejčastěji používal k regulaci otáček parního stroje. Závaží č. 3 zde slouží jako model zařízení, které se stoupajícími otáčkami postupně přivíralo regulační ventil a snižovalo tak přívod páry.

- **<u>Obrázky</u>**

Laboratorní model Wattova regulátoru

Zdroj: www.pendulum.es

Náčrtek funkce Wattova regulátoru



Zdroj: Wikipedie (http://en.wikipedia.org/wiki/File:Centrifugal_governor.png)

Wattův regulátor v činnosti

U tohoto modelu je jako síla působící proti nadzvedávání závaží použita kromě gravitační síly i síla pružnosti pružiny.

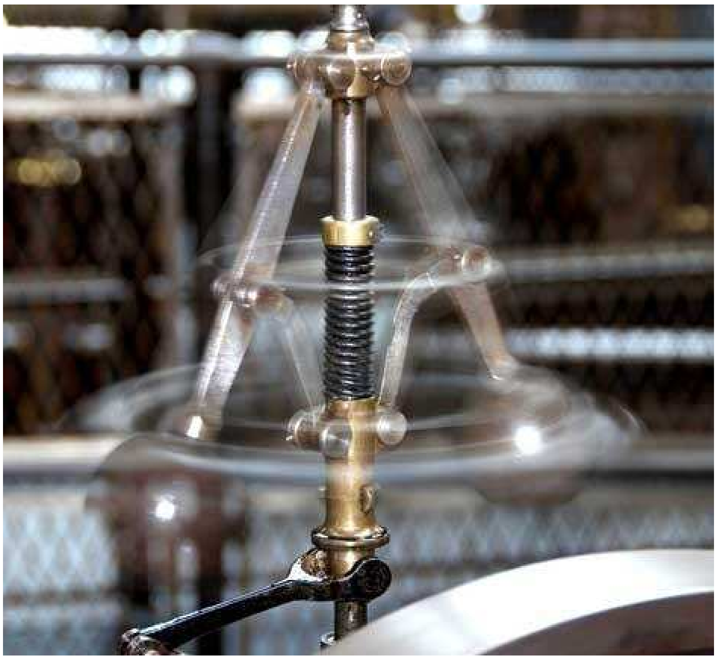


Foto: David Mindell, zdroj: spectrum.ieee.org (http://spectrum.ieee.org/green-tech/advanced-cars/slideshow-victorian-hacking/0)

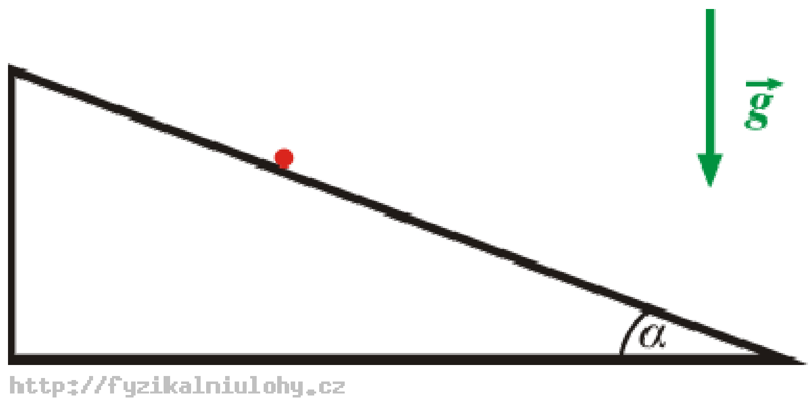
6.2 Hmotný bod na nakloněné rovině

Hmotný bod o hmotnosti m se pohybuje bez tření po nakloněné rovině svírající s vodorovnou podložkou úhel α, gravitační zrychlení má velikost g a míří svisle dolů.

Hmotný bod se po nakloněné rovině pohybuje pouze nahoru nebo dolů (nemůže konat pohyb kolmý na nákresnu).

A) Napište Lagrangeovu funkci pohybu tohoto hmotného bodu

B) Sestavte a vyřešte Lagrangeovy rovnice II. druhu



- **<u>Nápověda 1</u>**

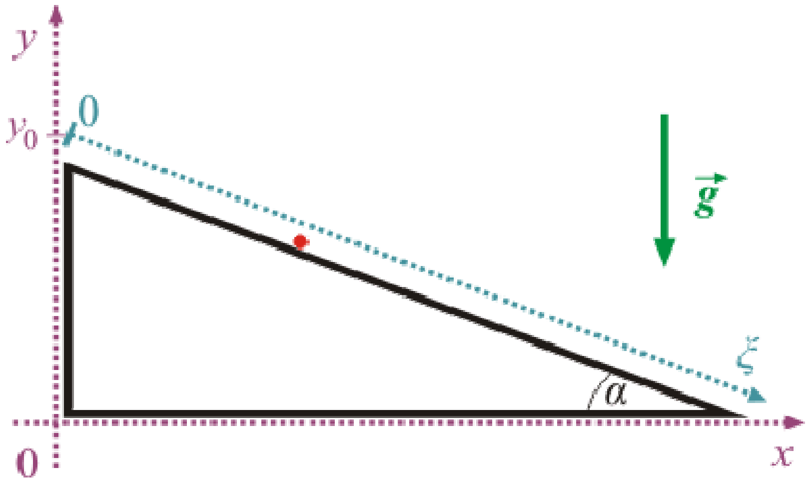
Rozmyslete, kolik budeme potřebovat souřadnic k popisu tohoto pohybu. Kolik má soustava stupňů volnosti?

- o ► **<u>Řešení nápovědy 1</u>**

Hmotný bod se může pohybovat pouze nahoru a dolů po nakloněné rovině, soustava má tedy jediný stupeň volnosti, a k jejímu popisu proto musí stačit jediná zobecněná souřadnice.

- **<u>Nápověda 2</u>**

Vyjádřete kinetickou a potenciální energii v kartézských souřadnicích (viz obrázek) a pak je přepište pomocí jediné souřadnice. Za tu zvolíme souřadnici ξ mířící dolů po povrchu nakloněné roviny.



o ► **Řešení nápovědy 2**

Kinetickou a potenciální energii můžeme psát v kartézských souřadnicích:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$V = mgy + V_0$$

V_0 je konstanta určující potenciální energii ve výšce $y = 0$.

Z geometrie soustavy je zřejmé:

$$x = \xi \cos\alpha$$

$$y = -\xi \sin\alpha + y_0\,,$$

kde y_0 je konstanta vyjadřující posunutí počátku kartézské soustavy souřadnic vzhledem k počátku ξ.

Pro kartézské složky rychlosti hmotného bodu platí:

$$\dot{x} = \dot{\xi}\cos\alpha$$

$$\dot{y} = -\dot{\xi}\sin\alpha,$$

tedy:

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=\dot{\xi}^2.$$

Odtud pro kinetickou energii:

$$T=\frac{1}{2}m\dot{\xi}^2$$

$$V=-mg\xi\sin\alpha+V_0+V'_0,$$

kde V'_0 je konstanta která musí být započtena vzhledem k posunutí počátků kartézské soustavy souřadnic a souřadnice ξ.

Konstanty V_0 a V'_0 můžeme bez újmy na obecnosti (viz níže) sloučit a dále psát:

$$V=-mg\xi\sin\alpha+\widetilde{V}_0$$

o ► **Komentář**

Všimněte si, že vztahy spojující x, y a ξ jsou jednoznačné. Za zobecněnou souřadnici by tedy bylo možno vzít kteroukoli z nich (pokud je splněna podmínka, že úhel α není nulový, resp. pravý – pak by ξ splynula s osou x, resp. y.

Pomocí výše uvedených vztahů bude taky možno vyjádřit výsledek vzhledem ke všem třem souřadnicícm.

Je zde vidět výhoda lagrangeovských postupů: počítáme jen s tolika souřadnicemi, kolik nezbytně potřebujeme.

- **Nápověda 3**

Lagrangeova funkce má tvar

$$L=T-V\ ,$$

kde T je kinetická a V potenciální energie. Napište, jak bude vypadat v našem případě.

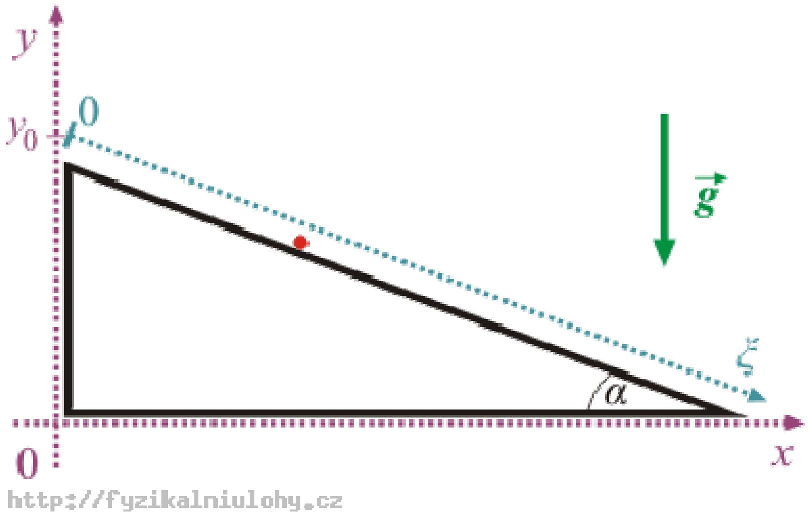
- **Řešení – Lagrangeova funkce**

Kinetickou a potenciální energii vyjádříme nejdříve v kartézských souřadnicích:

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$$

$$V=mgy+V_0$$

Vzhledem k tomu, že soustava má jen jeden stupeň volnosti, musí stačit k popisu pohybu hmotného bodu jen jedna souřadnice. Volíme souřadnici ξ mířící dolů po povrchu nakloněné roviny.



$$x=\xi\cos\alpha$$

$$y=-\xi\sin\alpha+y_0$$

(Podrobněji v nápovědách, viz výše.)

Obě energie vyjádříme vzhledem k ní:

$$T=\frac{1}{2}m\dot{\xi}^2$$

$$V=-mg\xi\sin\alpha+\widetilde{V}_0$$

a napíšeme Lagrangeovu funkci:

$$L = T - V$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + m g \xi \sin\alpha - \widetilde{V}_0$$

- **<u>Nápověda 4</u>**

Lagrangeovy rovnice II. druhu mají tvar:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$ pro j = 1, 2 ... n

kde q_j je j-tá zobecněná souřadnice hmotného bodu a L Lagrangeova funkce. Napište rovnice pro náš případ.

o ► **<u>Dosazení</u>**

Máme pouze jedinou souřadnici, takže neobdržíme soustavu rovnic, ale pouze jedinou rovnici:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \xi} = 0 \qquad (*)$$

Připravíme si derivace lagrangiánu:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + m g \xi \sin\alpha - \widetilde{V}_0$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\xi}}\left(\frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + m g \xi \sin\alpha - \widetilde{V}_0\right) = m \dot{\xi} \; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}\right) = \frac{d}{dt} m \dot{\xi} = m \ddot{\xi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}\right) = \frac{d}{dt} m \dot{\xi} = m \ddot{\xi}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + m g \xi \sin\alpha - \widetilde{V}_0\right) = m g \sin\alpha$$

Po dosazení do Lagrangeovy rovnice (*):

$$m \ddot{\xi} - m g \sin\alpha = 0$$

$$\ddot{\xi} = g \sin\alpha$$

Je vidět, že se do rovnic nedostala konstanta V_0. **To potvrzuje skutečnost známou už z newtonovské mechaniky, a sice, že nulovou hladinu potenciální energie můžeme volit libovolně. Podstatný je funkční průběh potenciálu, aditivní konstanty v lagrangiánu se do řešení nedostanou.**

- ► **Řešení rovnice**

Dospěli jsme ke vztahu:

$$\ddot{\xi} = g\sin\alpha$$

tj. druhá derivace ξ se rovná konstantě.

Po dvojím zintegrování dostaneme:

$$\xi(t) = \frac{1}{2}gt^2\sin\alpha + C_1t + C_2$$

Konstanty C_1, C_2 musíme určit z počátečních podmínek. Označme v čase $t = 0$ rychlost hmotného bodu v_0 a polohu ξ_0.

Odtud dostáváme rovnice:

$$\xi(0) = C_2 = \xi_0$$

$$v(0) = C_1 = v_0$$

a z nich výsledný vztah:

$$\xi(t) = \frac{1}{2}gt^2\sin\alpha + v_0t + \xi_0$$

- **Řešení – Lagrangeova rovnice**

Lagrangeovy rovnice II. druhu mají tvar:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$ pro $j = 1, 2 \ldots n$

kde q_j je j-tá zobecněná souřadnice hmotného bodu a L Lagrangeova funkce. Napište rovnice pro náš případ.

Máme pouze jedinou souřadnici, takže neobdržíme soustavu rovnic, ale pouze jedinou rovnici:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \xi}=0 \qquad (*)$$

$$m\ddot{\xi}-mg\sin\alpha=0$$

$$\ddot{\xi}=g\sin\alpha,$$

tj. druhá derivace ξ je rovna konstantě. Tento vztah stačí pouze dvakrát zintegrovat. Označme v čase t = 0 rychlost hmotného bodu v_0 a polohu ξ_0. Odtud:

$$\xi(t)=\frac{1}{2}gt^2\sin\alpha+v_0t+\xi_0$$

(Podrobnější komentáře viz nápovědy).

- **Odpověď**

Lagrangián pohybu hmotného bodu na nakloněné rovině je:

$$L=\frac{1}{2}m\dot{\xi}^2+mg\xi\sin\alpha-\widetilde{V}_0$$

Pohyb hmotného bodu na nakloněné rovině popisuje rovnice:

$$\xi(t)=\frac{1}{2}gt^2\sin\alpha+v_0t+\xi_0,$$

kde ξ je souřadnice mířící dolů po povrchu nakloněné roviny.

Vidíme, že se jedná o rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením rovným $g \sin \alpha$, tj. průmětu tíhového zrychlení do směru nakloněné roviny. Tento výsledek odpovídá výsledku, který bychom získali řešením pomocí „newtonovských“ postupů.

- ► **Komentář**

Je zřejmé, že stejné řešení bude platit vždy, když budeme moci považovat těleso na nakloněné rovině za hmotný bod klouzající bez tření (např. hranol, sáňky).

Pokud budeme uvažovat těleso valící se, nikoli jen klouzající, budeme muset upravit předpis pro kinetickou energii. Více o tom v úlohách Válec na nakloněné rovině a Vozík na nakloněné rovině.

6.3 Hmotný bod na rovnoměrně se otáčející nakloněné rovině

Hmotný bod o hmotnosti m se pohybuje bez tření po nakloněné rovině svírající s vodorovnou podložkou úhel $\alpha(t)$, gravitační zrychlení má směr kolmý na vodorovnou podložku a velikost g.

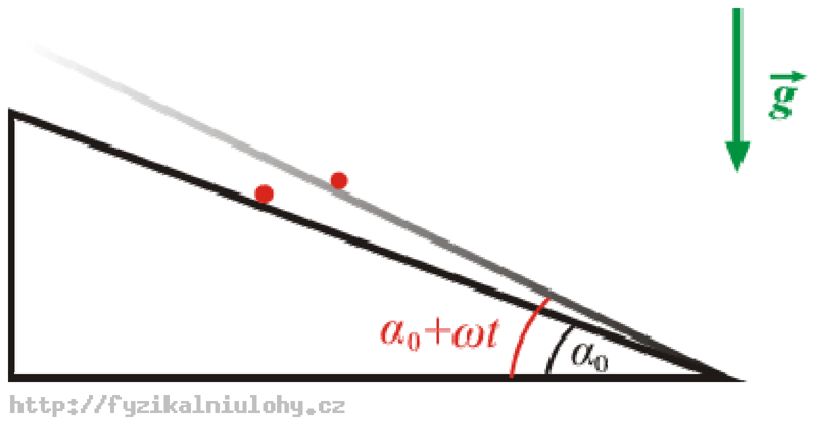
Hmotný bod se po nakloněné rovině pohybuje pouze nahoru nebo dolů (nemůže konat pohyb kolmý na nákresnu). Úlohu řešíme pouze pro velikosti úhlů od 0 do $\frac{\pi}{2}$, tj. od vodorovné roviny po kolmou stěnu – volný pád.

Úhel nakloněné roviny $\alpha(t)$ závisí na čase předpisem:

$$\alpha(t) = \omega t + \alpha_0 \ .$$

A) Určete Lagrangeovu funkci hmotného bodu a vyřešte pohybové rovnice.

B) Představte si, že by měly věžní hodiny 1 metr dlouhou vteřinovou ručičku. Vypočtěte, za jak dlouho by se hmotný bod umístěný na jejím konci dostal do středu ciferníku. Hmotný bod umístíme na konec vteřinové ručičky přesně v momentě, kdy je na devítce. Konečný číselný výpočet je potřeba provádět pomocí příslušného softwaru numericky. Konečná rovnice není analyticky řešitelná.



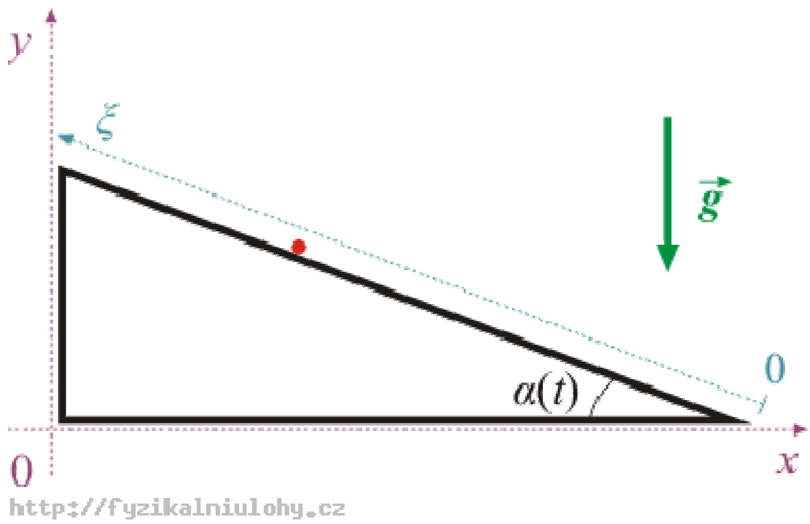
- **Nápověda 1**

Projděte si nejprve úlohu Hmotný bod na nakloněné rovině. Je zřejmé, že úloha, kterou právě řešíme, je jejím přímým zobecněním a často budeme používat stejné postupy.

- **Nápověda 2**

Souřadnice zvolíme stejně jako v úloze Hmotný bod na nakloněné rovině. Pouze ξ má opačnou orientaci. Vyjdou nám tak o něco jednodušší rovnice a snáze čitelné grafy. Úloha by ale samozřejmě byla řešitelná i s orientací ξ směrem po povrchu nakloněné roviny dolů.

Napište vztah mezi souřadnicemi x, y a ξ.



- ► **Řešení nápovědy 2**

Můžeme vyjít z úlohy L2 – Hmotný bod na nakloněné rovině, nesmíme však opomenout časovou závislost sklonu roviny a opačnou orientaci ξ. Pro souřadnice x a y platí:

$$x = x_0 - \xi \cos(\alpha(t)) \ ,$$

$$y = \xi \sin(\alpha(t)) \ ,$$

tj. po dosazení zadané časové závislosti sklonu nakloněné roviny:

$$x = x_0 - \xi \cos(\omega t + \alpha_0) \ ,$$

$$y = \xi \sin(\omega t + \alpha_0) \ .$$

- **Nápověda 3**

Vyjádřete složky rychlosti ve směru os *x* a *y* pomocí souřadnice ξ, spočtěte velikost rychlosti a napište vyjádření kinetické energie hmotného bodu vzhledem k souřadnici ξ.

o ► **Řešení nápovědy 3**

Poloha hmotného bodu v kartézských souřadnicích je popsána takto:

$$x = x_0 - \xi \cos(\alpha(t))$$

$$y = \xi \sin(\alpha(t)) \ .$$

Složky rychlosti dostáváme derivováním podle času:

$$\dot{x} = -\dot{\xi}\cos(\omega t + \alpha_0) + \xi\omega \sin(\omega t + \alpha_0)$$

$$\dot{y} = \dot{\xi}\sin(\omega t + \alpha_0) + \xi\omega \cos(\omega t + \alpha_0)$$

Pro velikosti rychlostí platí:

$$|v(\xi)|^2 = |\dot{x}|^2 + |\dot{y}|^2 \ .$$

Dosadíme a upravíme:

$$|v(\xi)|^2 = \dot{\xi}^2[\cos^2(\omega t + \alpha_0) + \sin^2(\omega t + \alpha_0)] +$$

$$+ \xi^2\omega^2[\sin^2(\omega t + \alpha_0) + \cos^2(\omega t + \alpha_0)] +$$

$$+ 2\dot{\xi}\xi\omega \sin(\omega t + \alpha_0)\cos(\omega t + \alpha_0) -$$

$$- 2\dot{\xi}\xi\omega \sin(\omega t + \alpha_0)\cos(\omega t + \alpha_0) =$$

$$= \dot{\xi}^2 + \xi^2\omega^2 \ .$$

Z řešení je vidět, že vlastně skládáme rychlost podél nakloněné roviny s rychlostí pohybu po kružnici o poloměru ξ.

Pro kinetickou energii tedy dostáváme:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}m\xi^2\omega^2 \; .$$

- **Nápověda 4**

Je zřejmé, že i potenciální energii můžeme vyjádřit obdobně jako v úloze L2 – Hmotný bod na nakloněné rovině, ale musíme mít na zřeteli i časový průběh děje.

- ► **Řešení nápovědy 4**

Pro potenciální energii dostáváme:

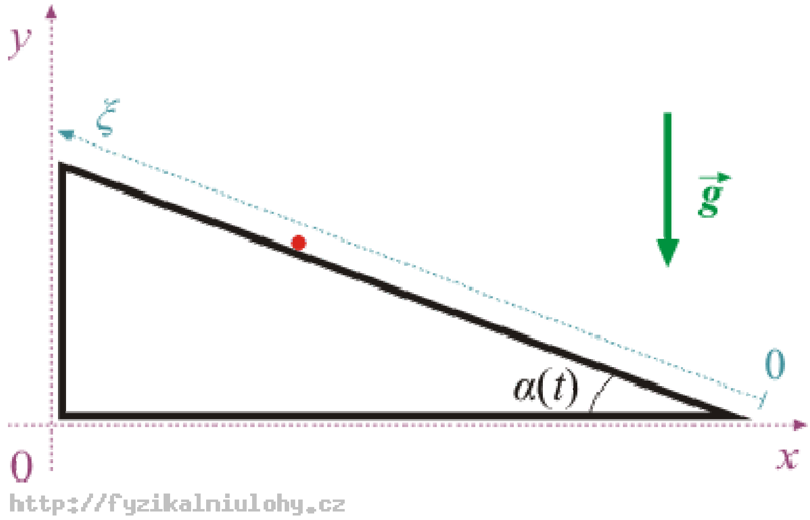
$$V = mg\xi \sin(\alpha(t)) \; ,$$

resp.

$$V(\xi, t) = mg\xi \sin(\omega t + \alpha_0) \; .$$

Potenciální energie je tedy závislá jak na zobecněné souřadnici, tak i na čase.

- **Řešení – lagrangián**



Při popisu polohy hmotného bodu na nakloněné rovině vyjdeme z úlohy L2 – Hmotný bod na nakloněné rovině, pouze souřadnice ξ bude oriantována opačně:

$$x = x_0 - \xi\cos(\alpha(t)) \ ,$$

$$y = \xi\sin(\alpha(t)) \ .$$

Složky rychlosti dostáváme derivováním podle času:

$$\dot{x} = -\dot{\xi}\cos(\omega t + \alpha_0) + \xi\omega\sin(\omega t + \alpha_0) \ ,$$

$$\dot{y} = \dot{\xi}\sin(\omega t + \alpha_0) + \xi\omega\cos(\omega t + \alpha_0) \ .$$

Odtud pro velikost rychlosti:

$$|\dot{\xi}|^2 = |\dot{x}|^2 + |\dot{y}|^2 = \dot{\xi}^2 + \xi^2\omega^2 \ .$$

Pro kinetickou energii tedy dostáváme:

$$T = \tfrac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \tfrac{1}{2}m\xi^2\omega^2 \ .$$

Pro potenciální energii zjevně platí:

$$V = mg\xi\sin(\alpha(t)) = mg\xi\sin(\omega t + \alpha_0) \ .$$

Lagrangeova funkce má tvar:

$$L = T - V \ .$$

Po dosazení energií:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}m\xi^2\omega^2 - mg\xi\sin(\omega t + \alpha_0) \ .$$

- **Nápověda 5**

Připomeneme si obecný vzorec pro určení Lagrangeových rovnic II. druhu pomocí Lagrangeovy funkce:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad \text{pro } j = 1, 2 \ldots n$$

V našem případě máme jen jednu zobecněnou souřadnici, a proto budeme mít jednu Lagrangeovu rovnici.

Připravte si derivace Lagrangeovy funkce potřebné k sestavení Lagrangeovy rovnice. Ta je v našem případě závislá nejen na zobecněné souřadnici a zobecněné rychlosti, ale i na čase. Dávejte proto pozor zejména na pořadí derivací!

- o ► **Řešení nápovědy 5**

Nejprve derivace lagrangiánu podle zobecněné rychlosti:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = m\dot{\xi} \ .$$

Ačkoli je lagrangián explicitně závislý na čase, po derivaci podle zobecněné rychlosti tato závislost mizí. Můžeme tedy pak psát již velmi jednoduše:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{\xi}) = m\ddot{\xi} \ .$$

Nicméně všimněte si, jak je v tomto případě pořadí derivací důležité!

A potom derivace lagrangiánu podle zobecněné souřadnice:

$$\frac{\partial L}{\partial \xi}=m\xi\omega^2-mg\sin(\omega t+\alpha_0)\ .$$

Dosazením do předpisu dostáváme Lagrangeovu rovnici:

$$m\ddot{\xi}-m\xi\omega^2+mg\sin(\omega t+\alpha_0)=0$$

a po úpravě:

$$\ddot{\xi}-\xi\omega^2=-g\sin(\omega t+\alpha_0)\ .$$

- **Nápověda 6**

Dospěli jsme k diferenciální rovnici:

$$\ddot{\xi}-\xi\omega^2=-g\sin(\omega t+\alpha_0)\ .$$

Jedná se o lineární diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty a pravou stranou. Tu lze řešit metodou variace konstanty nebo přímo metodou speciální pravé strany.

- ► **Řešení nápovědy 6**

V rychlosti projdeme kroky v řešení rovnice.

$$\ddot{\xi}-\xi\omega^2=-g\sin(\omega t+\alpha_0)$$

Nejprve je třeba vyřešit homogenní rovnici (indexem *H* budeme označovat její řešení):

$$\ddot{\xi}_H-\xi_H\omega^2=0$$

$$\xi_H=C_1e^{\omega t}+C_2e^{-\omega t}$$

a k němu přičíst partikulární řešení (pravá strana má speciální tvar, proto ho známe):

$$\xi=C_1e^{\omega t}+C_2e^{-\omega t}+K\sin(\omega t+\alpha_0)\ .$$

Dosazením do původní rovnice určíme konstantu *K* a tím získáme obecné řešení ve tvaru:

$$\xi = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2}\sin(\omega t + \alpha_0) \ ,$$

kde C_1 a C_2 jsou integrační konstanty, které je možné určit z počátečních podmínek.

- **<u>Řešení – Lagrangeovy rovnice II. druhu</u>**

Dospěli jsme k lagrangiánu:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + \frac{1}{2} m \xi^2 \omega^2 - m g \xi \sin(\omega t + \alpha_0) \ .$$

Příslušnými derivacemi a úpravou dostáváme Lagrangeovu rovnici:

$$\ddot{\xi} - \xi \omega^2 = -g \sin(\omega t + \alpha_0) \ .$$

Jedná se o lineární diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty a pravou stranou. Jejím řešením (podrobněji v nápovědě) je funkce:

$$\xi = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2}\sin(\omega t + \alpha_0) \ ,$$

kde C_1 a C_2 jsou integrační konstanty, které je možné určit z počátečních podmínek.

- **<u>Nápověda 7</u>**

Přeložte pokyny ze zadání do rovnice tak, abyste dopočítali konstanty v obecném řešení rovnice. Zejména se zaměřte na informace:

1. Hmotný bod se začíná pohybovat ve chvíli, kdy je ručička na devítce a nachází se v tu chvíli na jejím konci.
2. Hmotný bod je na začátku v klidu.
3. Ručička je vteřinová.

- ► **Interpretace**

1. $\alpha_0 = 0$, $\xi(0) = 1\ \mathrm{m}$
2. $\dot{\xi}(0) = 0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$
3. $\omega = \frac{\pi}{30} s^{-1} \approx 0{,}1\ \mathrm{s^{-1}}$

- ► **Výpočet integračních konstant**

Z uvedených podmínek:

$$\xi(0) = 1\ \dot{\xi}(0) = 0\ ,$$

vyplývá soustava rovnic pro konstanty C_1 a C_2:

$$C_1 + C_2 = 1$$

$$\omega(C_1 - C_2) + \frac{g}{2\omega} = 0\ .$$

Jejím řešením je dvojice:

$$C_1 = \frac{2\omega^2 - g}{4\omega^2}$$

$$C_2 = \frac{2\omega^2 + g}{4\omega^2}\ .$$

Dosazením za počáteční úhel a úhlovou rychlost dostáváme:

$$\xi(t) = -249{,}5e^{0{,}1t} + 250{,}5e^{-0{,}1t} + 500\sin(0{,}1t)\ .$$

Správně by v tomto vztahu měly být složené závorky naznačující, že jde o číselné hodnoty. Pro zpřehlednění vztahu je nebudeme psát s tím, že všechny veličiny jsou uvedeny v základních jednotkách SI.

Řešení – rovnice pohybu po vteřinové ručičce

V předchozí části úlohy jsme dospěli k obecnému řešení rovnice popisující pohyb bodu po nakloněné rovině s proměnlivým úhlem sklonu:

$$\xi = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2}\sin(\omega t + \alpha_0)\ .$$

Informace, které jsou uvedeny v zadání, můžeme interpretovat jako počáteční podmínky pohybu hmotného bodu po vteřinové ručičce takto:

$$\xi(0) = 1m\, \dot{\xi}(0) = 0m \cdot s^{-1}\, \alpha_0 = 0\, \omega \approx 0{,}1s^{-1}\ .$$

Z prvních dvou dopočítáme konstanty C_1 a C_2:

$$C_1 = \frac{2\omega^2 - g}{4\omega^2}\, C_2 = \frac{2\omega^2 + g}{4\omega^2}\ .$$

Dosazením do obecného řešení dostáváme rovnici:

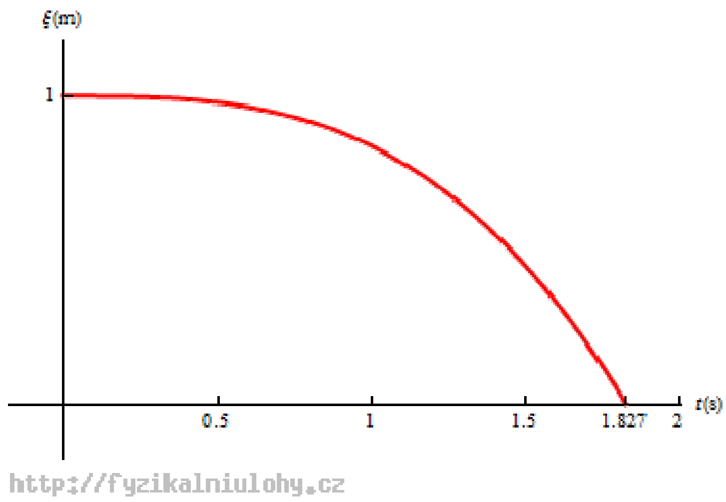
$$\xi(t) = -249{,}5e^{0{,}1t} + 250{,}5e^{-0{,}1t} + 500\sin(0{,}1t)\ .$$

Správně by v tomto vztahu měly být složené závorky naznačující, že jde o číselné hodnoty. Pro zpřehlednění vztahu je nebudeme psát s tím, že všechny veličiny jsou uvedeny v základních jednotkách SI.

Zbývá vyřešit, kdy hmotný bod dorazí do středu ciferníku, který je vzhledem k volbě zobecněné souřadnice v jejím počátku. Hledáme tedy, pro jaké t platí:

$$0 = -249{,}5e^{0{,}1t} + 250{,}5e^{-0{,}1t} + 500\sin(0{,}1t)\ .$$

Rovnice je dost komplikovaná a analyticky neřešitelná. Můžete se pokusit ji vyřešit pomocí vhodného softwaru, například si můžete nechat nakreslit graf souřadnice ξ jako funkce času a odečíst hodnotu na časové ose:



Z grafu je vidět, že hledané *t* se rovná přibližně 1,8 s.

o ► **Zdrojové kódy programu *Wolfram Mathematica***

Vykreslení grafu funkce *ξ*(*t*):

Plot[-249.5*E^(0.1 t) + 250.5*E^(-0.1 t) + 500*Sin[0.1 t], {t, 0, 1.827}, PlotStyle -> {{Red, Thick}}, Ticks -> {{0, 0.5, 1, 1.5, 1.827, 2}, {0, 1}}, AxesLabel -> {t[Style[s, Plain]], \[Xi] [Style[m, Plain]]}, AspectRatio -> Automatic, PlotRangePadding -> 0.18]

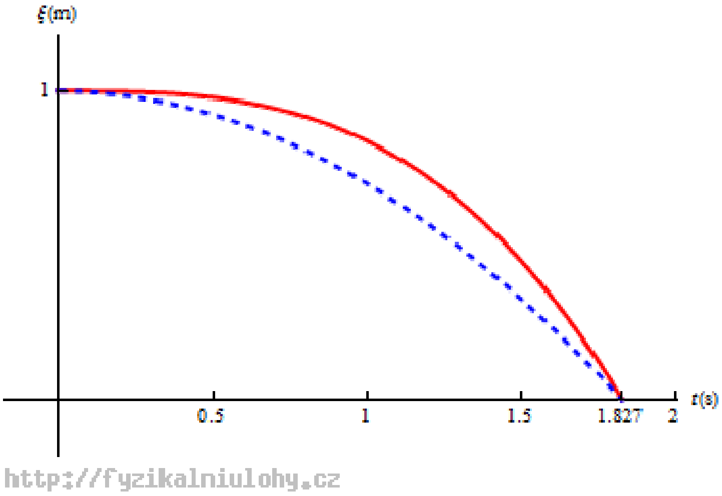
Výpočet rovnice:

FindRoot[-249.5*E^(0.1 t) + 250.5*E^(-0.1 t) + 500*Sin[0.1 t] == 0, {t, 1.8}]

o ► **Komentář**

Z grafu je velmi pěkně vidět, že jsme konstanty v rovnici určili správně. Bod je na začátku pohybu v klidu a nějakou dobu ještě téměř nemění svoji pozici, protože jeho počáteční rychlost je nulová a vteřinová ručička je na začátku vodorovně (tj. zrychlení na úplném začátku je také nulové).

Ještě více je rozdíl oproti pohybu po nakloněné rovině s neměnným úhlem sklonu vidět, pokud si do stejného grafu nakreslíme pohyb hmotného bodu na nakloněné rovině s takovým sklonem, aby hmotný bod na ni položený urazil 1 m také za čas 1,8 s (grafem je parabola, na obrázku modře čárkovaně). To bychom například mohli „realizovat“ stejně dlouhou minutovou ručičkou ukazující chvíli po tři čtvrtě – nakloněná rovina musí mít sklon asi 3,5 stupně).



Rozdíl je dán zejména tím, že ačkoli se hmotné body v obou případech pohybují ze stejné vzdálenosti a se stejnou počáteční rychlostí, ten na minutové ručičce se pohybuje už od začátku s nenulovým zrychlením.

Odpověď

Pohybová rovnice hmotného bodu na nakloněné rovině s proměnným úhlem sklonu je:

$$\xi = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2}\sin(\omega t + \alpha_0)\ ,$$

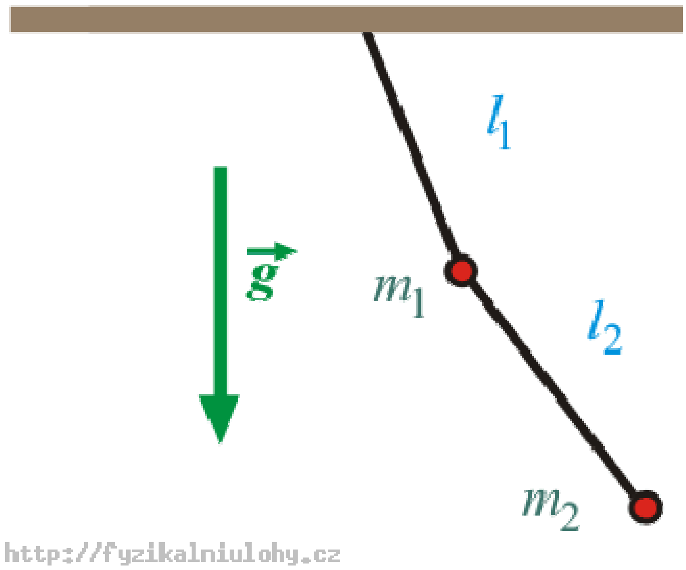
kde C_1 a C_2 jsou integrační konstanty, které je možné určit z počátečních podmínek.

Hmotný bod umístěný na vteřinové ručičce věžních hodin se dokutálí do středu ciferníku přibližně za 1,8 s. Širší komentář tohoto výpočtu viz sekce výše.

6.4 Dvojkyvadlo

A) Napište lagrangián rovinného matematického dvojkyvadla, tj. dvou hmotných bodů o hmotnostech m_1, m_2 na nehmotných vláknech délek l_1, l_2, přičemž druhé kyvadlo je uchyceno na prvním.

B) Sestavte a vyřešte Lagrangeovy rovnice II. druhu v přiblížení pro malé kmity v případě rovnosti délek obou závěsů a hmotností obou závaží.



- **Nápověda 1**

Projděte si úlohy Matematické kyvadlo a Dvě pružinky.

Postup řešení bude obdobný jako v úloze Dvě pružinky, ale popis a aproximace pro malé kmity bude probíhat podobně jako v úloze Matematické kyvadlo.

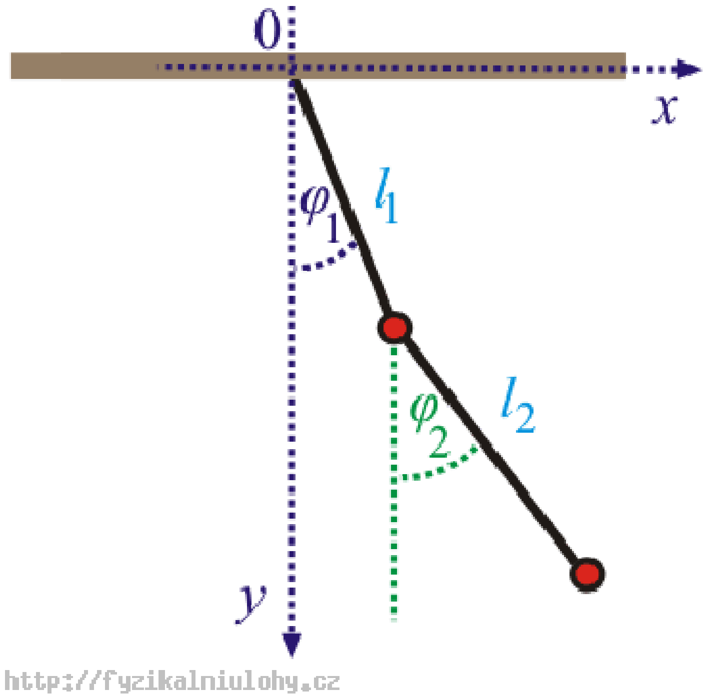
- **Nápověda 2**

Kolik má systém stupňů volnosti? Kolik budeme potřebovat zobecněných souřadnic?

- ► **Řešení nápovědy 2**

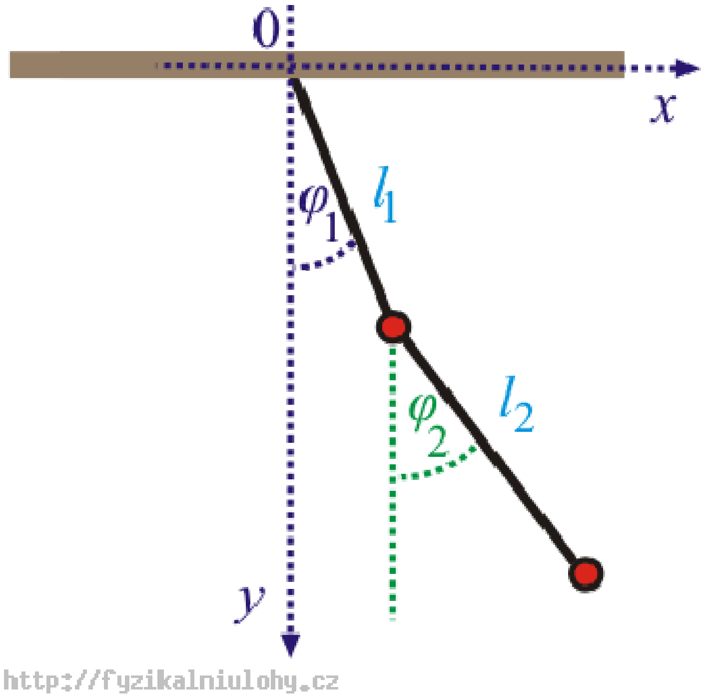
Dvojkyvadlo má dva stupně volnosti – každé kyvadlo má jeden.

Možností jak zavést zobecněné souřadnice je samozřejmě mnoho. Obvykle se používají výchylky φ_1, φ_2 obou kyvadel od svislé osy (viz obrázek).



- **<u>Nápověda 3</u>**

Určit kinetickou a potenciální energii umíme dobře v kartézských souřadnicích. Zapište v nich polohu závaží obou kyvadel s použitím výchylek φ_1, φ_2.



- ► **Řešení nápovědy 3**

Polohu prvního kyvadla vyjádříme snadno:

$$x_1 = l_1 \sin\varphi_1$$

$$y_1 = l_1 \cos\varphi_1 \ .$$

Polohu druhého kyvadla vyjádříme analogicky, pouze musíme přičíst posunutí způsobené polohou prvního kyvadla:

$$x_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2$$

$$y_2 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 \ .$$

- **Nápověda 4**

Kinetickou energii spočítáme podle vztahu:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \ .$$

Budeme tedy potřebovat určit kvadrát velikosti rychlostí obou kyvadel. Využijte časové derivace vztahů, které jsme odvodili v předešlé sekci.

o ► **Řešení nápovědy 4**

Pro velikost rychlosti v kartézských souřadnicích platí:

$$|\vec{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2 \ .$$

Složky vektoru rychlosti získáme derivováním výše odvozených vztahů (nezapomeňte, že výchylky φ_1, φ_2 jsou funkcemi času):

$$\dot{x}_1 = l_1 \dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1$$

$$\dot{y}_1 = -l_1 \dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1 \ .$$

Odtud:

$$|\vec{v}_1|^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 \ .$$

U druhého kyvadla budeme postupovat analogicky:

$$\dot{x}_2 = l_1 \dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1 + l_2 \dot{\varphi}_2 \cos\varphi_2$$

$$\dot{y}_2 = -l_1 \dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1 - l_2 \dot{\varphi}_2 \sin\varphi_2 \ .$$

Odtud pro velikost rychlosti dostáváme:

$$|\vec{v}_2|^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 =$$

$$= l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) \ .$$

K úpravě posledního členu použijeme vzorec:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \ .$$

Dostáváme:

$$|\overrightarrow{v_2}|^2 = l_1^2\dot{\varphi}_1{}^2 + l_2^2\dot{\varphi}_2{}^2 + 2l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ .$$

Pro kinetickou energii tedy platí:

$$T = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 =$$

$$= \tfrac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1{}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 [l_1^2\dot{\varphi}_1{}^2 + l_2^2\dot{\varphi}_2{}^2 + 2l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] \ .$$

Po úpravě:

$$T = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1{}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2{}^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

- **Nápověda 5**

Potenciální energii určíme snadno. Stačí si uvědomit, že pokud máme kartézskou osu *y* orientovanou dolů, ve směru tíhového zrychlení, pak pro hmotný bod o hmotnosti *m* platí:

$$V = -mgy \ .$$

Upravte tento vztah pro dvojkyvadlo s použitím zobecněných souřadnic φ_1, φ_1.

o ► **Řešení nápovědy 5**

Pro potenciální energii soustavy dvou hmotných bodů platí:

$$V(y_1, y_2) = -m_1 g y_1 - m_2 g y_2 \ .$$

Nyní použijeme vztahy vyjadřující kartézské souřadnice y_1, y_2 pomocí zobecněných souřadnic φ_1, φ_2:

$$y_1 = l_1 \cos\varphi_1$$

$$y_2 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 \ .$$

Odtud dostáváme:

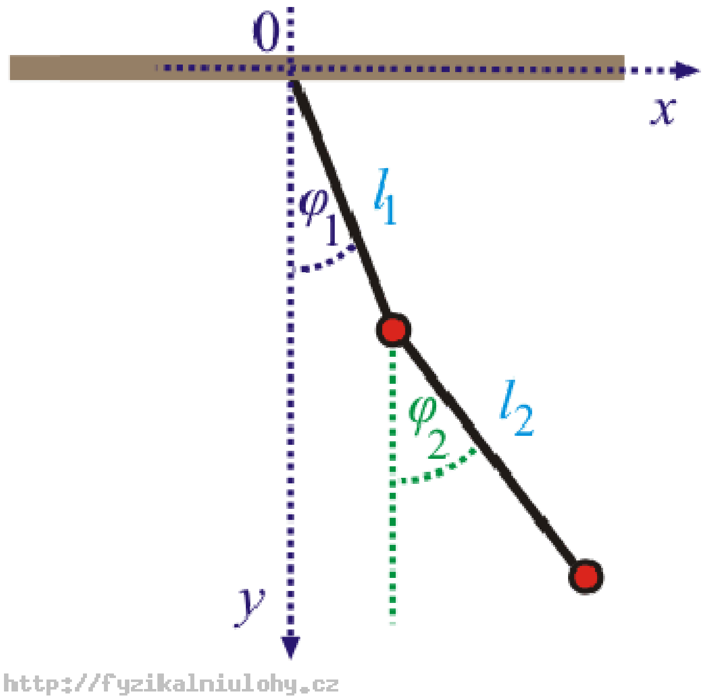
$$V(\varphi_1,\varphi_2) = -m_1 g l_1 \cos\varphi_1 - m_2 g (l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2) \ .$$

Po úpravě:

$$V(\varphi_1,\varphi_2) = -(m_1 + m_2) g l_1 \cos\varphi_1 - m_2 g l_2 \cos\varphi_2 \ .$$

- **Řešení A**

Dvojkyvadlo má dva stupně volnosti. Za zobecněné souřadnice vezmeme výchylky obou kyvadel od svislé osy φ_1, φ_2.



Zapíšeme vztahy mezi kartézskými a zobecněnými souřadnicemi:

$$x_1 = l_1 \sin\varphi_1$$

$$y_1 = l_1 \cos\varphi_1$$

$$x_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2$$

$$y_2 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 \ .$$

Pro složky rychlostí obou kyvadel odtud platí:

$$\dot{x}_1 = l_1 \dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1$$

$$\dot{y}_1 = -l_1 \dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1$$

$$\dot{x}_2 = l_1 \dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1 + l_2 \dot{\varphi}_2 \cos\varphi_2$$

$$\dot{y}_2 = -l_1 \dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1 - l_2 \dot{\varphi}_2 \sin\varphi_2 \ .$$

a pro velikosti rychlostí dostáváme:

$$\vec{v}_1|^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 \ ,$$

$$|\vec{v}_2|^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 =$$

$$= l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) \ .$$

Odtud kinetická energie:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2{}^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Pro potenciální energii vzhledem ke kartézským souřadnicím y_1, y_2 platí:

$$V(y_1, y_2) = -m_1 g y_1 - m_2 g y_2 \ .$$

S použitím transformačních vztahů dostáváme:

$$V(\varphi_1, \varphi_2) = -(m_1 + m_2) g l_1 \cos\varphi_1 - m_2 g l_2 \cos\varphi_2 \ .$$

Odtud lagrangián:

$$L = T - V =$$

$$= \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot{\varphi}_2{}^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) +$$

$$+(m_1+m_2)g l_1\cos\varphi_1 + m_2 g l_2\cos\varphi_2 \ .$$

- **Nápověda 6**

Upravte lagrangián podle zadání pro případ B (rovnost hmotností obou závaží, rovnost délek obou závěsů).

Prohlédněte si aproximaci pro malé kmity v úloze Vozík s kyvadlem. Budeme postupovat podobně. Zanedbáváme členy třetího a vyššího řádu malosti.

Budeme používat přibližný vzorec pro malá φ:

$$\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2} \ .$$

Nezapomínejte, že za malé považujeme i rychlosti $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$.

Násobením členů, které považujeme za malé, můžeme dostat zanedbatelný člen.

o ► **Řešení nápovědy 6**

Budeme vycházet z lagrangiánu upraveného pro rovnost hmotností obou závaží a délek obou závěsů:

$$L = ml^2\dot{\varphi}_1{}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}_2{}^2 + ml^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) +$$

$$+2mgl\cos\varphi_1 + mgl\cos\varphi_2$$

Projdeme si postupně jednotlivé členy, které se budou aproximovat.

Členy s jedinou zobecněnou souřadnicí v kosinu upravíme podle výše uvedeného vzorce:

$$2mgl\cos\varphi_1 \approx -mgl\varphi_1^2 + konst.$$

$$mgl\cos\varphi_2 \approx -\frac{1}{2}mgl\varphi_2^2 + konst.$$

U členu s oběma zobecněnými rychlostmi a rozdílem zobecněných souřadnic v kosinu musíme postupovat opatrně. Kdybychom kosinus rozvíjeli do druhého řádu malosti, dostali bychom při násobení malými rychlostmi člen čtvrtého řádu malosti, který je ovšem zanedbatelný (poslední ve výrazu):

$$ml^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \approx ml^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 - \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2(\varphi_1 - \varphi_2)^2$$

Budeme tedy pouze uvažovat, že kosinus malého rozdílu úhlů je roven 1:

$$ml^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \approx ml^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2$$

Konstanty v lagrangiánu můžeme bez újmy na obecnosti zanedbat. Pro případ malých kmitů dvojkyvadla tedy dostáváme Lagrangeovu funkci:

$$\tilde{L} = ml^2\dot{\varphi}_1{}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}_2{}^2 + ml^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 - mgl\varphi_1^2 - \frac{1}{2}mgl\varphi_2^2$$

- **<u>Nápověda 7</u>**

Obecný tvar Lagrangeových rovnic II. druhu zní:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad \text{pro } j = 1, 2 \ldots n$$

kde q_j je j-tá zobecněná souřadnice hmotného bodu a L Lagrangeova funkce.

Dosaďte do tohoto vzorce lagrangián $\tilde{L}$.

V této úloze máme dvě zobecněné souřadnice. Dostaneme tedy soustavu dvou rovnic.

o ► **Řešení nápovědy 7**

Nejdřív si připravíme potřebné derivace lagrangiánu $\tilde{L}$:

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\varphi}_1} = 2ml^2\dot{\varphi}_1 + ml^2\dot{\varphi}_2$$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \varphi_1} = -2mgl\varphi_1$$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\varphi}_2} = ml^2\dot{\varphi}_2 + ml^2\dot{\varphi}_1$$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \varphi_1} = -mgl\varphi_2$$

Odtud soustava dvou Lagrangeových rovnic:

$$2ml^2\ddot{\varphi}_1 + ml^2\ddot{\varphi}_2 + 2mgl\varphi_1 = 0$$

$$ml^2\ddot{\varphi}_1 + ml^2\ddot{\varphi}_2 + mgl\varphi_2 = 0 \ ,$$

po úpravě:

$$2\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 + 2\frac{g}{l}\varphi_1 = 0$$

$$\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 + \frac{g}{l}\varphi_2 = 0 \ .$$

Jedná se o homogenní soustavu dvou lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu s konstantními koeficienty.

- **Nápověda 8**

Projděte si způsob řešení rovnic v úloze Dvě pružinky. Budeme postupovat stejně.

Protože se jedná o homogenní soustavu dvou lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu s konstantními koeficienty, zkusme předpokládat řešení ve tvaru:

$$\varphi_1 = A_1 e^{i\omega t}$$

$$\varphi_2 = A_2 e^{i\omega t}\ .$$

kde A_1, A_2 jsou obecně komplexní konstanty.

Fyzikálně bráno, očekáváme, že kyvadla se budou kývat se stejnou frekvencí a hledáme úhlovou frekvenci jejich pohybu.

- **<u>Řešení B – mody kmitání</u>**

Do soustavy Lagrangeových rovnic dosadíme předpokládaná řešení:

$$\varphi_1 = A_1 e^{i\omega t}$$

$$\varphi_2 = A_2 e^{i\omega t}\ .$$

Po úpravě dostáváme soustavu rovnic:

$$-2\omega^2 A_1 - \omega^2 A_2 + 2\frac{g}{l}A_1 = 0$$

$$-\omega^2 A_1 - \omega^2 A_2 + \frac{g}{l}A_2 = 0\ .$$

V maticovém zápisu:

$$\begin{pmatrix} -2\omega^2 + 2\frac{g}{l} & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -\omega^2 + \frac{g}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0\ .$$

Na tuto soustavu rovnic se můžeme dívat jako na podmínky svazující navzájem velikost amplitud kmitů obou kyvadel v závislosti na parametru ω, který má fyzikální význam úhlové frekvence. Jedná se o homogenní soustavu lineárních rovnic, proto bude mít netriviální řešení pouze v případě, že determinant matice soustavy je roven nule:

$$\det\begin{pmatrix} -2\omega^2+2\frac{g}{l} & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -\omega^2+\frac{g}{l} \end{pmatrix}=0 \ .$$

Výpočet tohoto determinantu vede k rovnici:

$$\omega^4-4\frac{g}{l}\omega^2+2\left(\frac{g}{l}\right)^2=0 \ .$$

Jako rovnice čtvrtého řádu by byla poměrně obtížně řešitelná. Můžeme se na ni ovšem podívat jako na bikvadratickou rovnici (rovnici s neznámou ω^2). Navíc víme, že parametr ω má fyzikální význam úhlové frekvence. Musí být tedy reálný a kladný. Těmto podmínkám vyhovují pouze dvě řešení této rovnice – dva mody kmitání:

$$\omega_1=\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\omega_2=\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{\frac{g}{l}} \ .$$

- **► Komentář – triviální řešení**

Samozřejmě, fyzikální smysl by mělo i triviální řešení soustavy rovnic – obě kyvadla by byla v klidu. Nás ale více zajímá, jak se budou kyvadla pohybovat.

- **Řešení B – svazující podmínky**

V předchozí části řešení jsme určili úhlové frekvence dvou možných modů kmitání dvojkyvadla. Amplitudy kmitání v jednotlivých modech ovšem nejsou nezávislé. Je potřeba je dopočítat.

Máme soustavu rovnic:

$$-2\omega^2A_1-\omega^2A_2+2\frac{g}{l}A_1=0$$

$$-\omega^2A_1-\omega^2A_2+\frac{g}{l}A_2=0 \ .$$

Pro amplitudu kmitání *m*-tého kyvadla v *n*-tém modu zavedeme značení A_{mn}.

Nejprve dosadíme úhlovou frekvenci prvního modu

$$\omega_1 = \sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

do první rovnice a dostáváme:

$$-2(2+\sqrt{2})\frac{g}{l}A_{11} - (2+\sqrt{2})\frac{g}{l}A_{21} + 2\frac{g}{l}A_{11} = 0 \ .$$

Po úpravě a usměrnění zlomku:

$$A_{21} = -\sqrt{2}A_{11} \ .$$

Vztah můžeme pro kontrolu dosadit do druhé rovnice.

Analogicky pro druhý mod dostaneme svazující podmínku:

$$A_{22} = +\sqrt{2}A_{12} \ .$$

Soustava rovnic byla díky aproximaci pro malé kmity lineární. Obecné řešení je tedy dáno součtem řešení pro oba mody, tedy:

$$\varphi_1(t) = A_{11}e^{i\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{\frac{g}{l}}t} + A_{12}e^{i\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{\frac{g}{l}}t}$$

$$\varphi_2(t) = -\sqrt{2}A_{11}e^{i\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{\frac{g}{l}}t} + \sqrt{2}A_{12}e^{i\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{\frac{g}{l}}t}$$

a pokud přejdeme ke goniometrickému tvaru a analogicky označeným reálným konstantám B_{mn} dostaneme:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= B_{11}\sin\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{\frac{g}{l}}t + \Phi_1\right) + \\
&\quad + B_{12}\sin\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{\frac{g}{l}}t + \Phi_2\right) \\
\varphi_2(t) &= -\sqrt{2}B_{11}\sin\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{\frac{g}{l}}t + \Phi_1\right) + \\
&\quad + \sqrt{2}B_{12}\sin\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{\frac{g}{l}}t + \Phi_2\right) \ ,
\end{aligned}$$

kde Φ_n jsou počáteční fáze v n-tém modu.

- **Odpověď**

Lagrangián rovinného dvojkyvadla je:

$$L=\frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1{}^2+\frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\varphi}_2{}^2+m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)+$$

$$+(m_1+m_2)gl_1\cos\varphi_1+m_2gl_2\cos\varphi_2 \ ,$$

kde φ_1, φ_1 jsou okamžité výchylky jednotlivých kyvadel od svislé osy.

Pro případ rovnosti hmotností obou závaží a délky obou závěsů jsme pro malé kmity dostali řešení Lagrangeových rovnic II. druhu:

$$\begin{aligned}\varphi_1(t)&=B_{11}\sin(\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{\tfrac{g}{l}}t+\Phi_1)+\\&+B_{12}\sin(\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{\tfrac{g}{l}}t+\Phi_2)\\\varphi_2(t)&=-\sqrt{2}B_{11}\sin(\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{\tfrac{g}{l}}t+\Phi_1)+\\&+\sqrt{2}B_{12}\sin(\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{\tfrac{g}{l}}t+\Phi_2) \ ,\end{aligned}$$

kde B_{11}, B_{12} jsou konstanty o fyzikálním významu amplitud kmitání prvního závaží v jednotlivých modech a Φ_n jsou počáteční fáze v n-tém modu.