Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Simona Oberhauserová

Výpočty pravděpodobností v ruletě

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Doc.RNDr. Petr Lachout, CSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2011

Na tomto mieste by som sa rada poďakovala vedúcemu mojej bakalárskej práce Doc.RNDr. Petrovi Lachoutovi, CSc., za jeho čas strávený pri konzultáciách a hlavne za cenné pripomienky k bakalárskej práci.

Prehlasujem, že som svoju bakalársku prácu vypracovala samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov, literatúry a ďalších odborných zdrojov.

Beriem na vedomie, že sa na moju prácu vzťahujú práva a povinnosti vyplývajúce zo zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platnom znení, najmä skutočnosť, že Univerzita Karlova v Prahe má právo na uzavretie licenčnej zmluvy o použití tejto práce ako školského diela podľa § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Prahe, dňa 5.8.2011 Simona Oberhauserová

Názov práce: Výpočty pravděpodobností v ruletě

Autor: Simona Oberhauserová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci bakalárskej práce: Doc.RNDr. Petr Lachout, CSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Práca formuluje ruletu ako matematickú úlohu a skúma najlepšie ruletné stratégie z hľadiska pravdepodobnosti výhry, ruinovania hráča a pravdepodobnostného rozdelenia zisku. Táto hazardná hra sa riadi Kolmogorovým axiomatickým modelom pravdepodobnosti, preto boli výpočty prevádzané pomocou jeho základných vzorcov a axiómov. Vo výpočtoch ruinovania hráča boli navyše použité diferenčné rovnice zostavené pomocou náhodnej prechádzky. V strednej hodnote najdlhšieho sledu červenej (čiernej) farby v rulete boli využité stochastické procesy s teóriou extrémnych hodnôt. Záverom práce je okrem zaujímavých výpočtov aj zistenie, že v rulete neexistuje žiadna vyhrávajúca stratégia. Jednorázove pravdepodobnosti výhry sú síce vysoké, avšak zistenie indikuje záporná stredná hodnota zisku.

Kľúčové slová: Ruleta, Kolmogorov axiomatický pravdepodobnostný priestor

Title: Roulette and particular probabilities

Author: Simona Oberhauserová

Department: Department of probability and mathematical statistics

Supervisor: Doc.RNDr. Petr Lachout, CSc., Department of probability and mathematical statistics

Abstract: The thesis formulates roulette as a mathematical problem and examines the best roulette strategies in terms of probability of winning, gambler´s ruin and probability distribution of profit. This game follows Kolmogor axiomatic probability model, therefore the calculations were counted by the basic formulas and axioms. In the calculations of the gambler´s ruin differential equations were also used and built with random walk. In the longest expected run of red (black) were used stochastic processes and extreme value theory. In addition to interesting calculations, the conclusion also contains finding that there is no winning strategy in roulette. Even though one-time probabilities of winning are high, the finding indicates negative mean value of profit.

Keywords: Roulette, Kolmogorov axiomatic probability space

Obsah

Úvod

Ruleta je jednou z najznámejších hazardných hier, avšak aj najviac zradnou, pretože na ňu neexistuje žiadna vyhrávajúca stratégia. Úvodná prvá kapitola približuje čitateľovi vznik, históriu a popis tejto hazardnej hry.

Je to jedna z hier, ktorá sa riadi Kolmogorovým axiomatickým modelom pravdepodobnosti. Z pravdepodobnostného hľadiska má diskrétne rovnomerné rozdelenie a jednotlivé kolá (hody) rulety sú na sebe nezávislé. Preto sme na výpočty používali iba základné vzorce pravdepodobnosti a v druhej kapitole s názvom teoretická časť stačilo priblížiť len teóriu ruinovania hráča a teóriu potrebnú na výpočet strednej hodnoty najdlhšieho sledu farby. Zdrojmi tejto kapitoly sú publikácie [1] a [2].

Na kapitoly tri a štyri bolo skúmaných vyše tridsať ruletných stratégií získaných zo zdroja [3] a zdroja [1]. Z nich bolo vybraných šesť najlepších z hľadiska pravdepodobnosti výhry alebo strednej hodnoty zisku. Kapitola tri obsahuje päť takýchto systémov, ktoré sú vhodné pre jedno kolo rulety. V Amerike ich definujú ako stratégie, na ktorých si hráč zarobí na večeru. Vyznačujú sa vysokými pravdepodobnosťami výhry a relatívne nízkym kapitálom potrebným na vsadenie. V kapitole štyri sú dve stratégie určené na viac kôl rulety, v prípade neúspešného kola vsadí hráč niekoľkonásobok predošlého kola.

Posledná kapitola sa zaoberá praktickou aplikáciou rulety. V prvom príklade je pomocou generovania kôl rulety v programe Wolfram Mathematica 8 vylepšená aproximácia strednej hodnoty najdlhšieho sledu červenej, prípadne čiernej farby. Ako druhý praktický príklad sme zvolili zaujímavejší prípad, vyskúšali sme hrať ruletu v pražskom kasíne cez systém Martingale z podkapitoly 4.2.

1 Základné pojmy

1.1 Ruleta

Pojem rulety

Ruleta je hazardná hra, ktorej názov je odvodený z francúzskeho slova *roulette*, čo v preklade znamená malé kolo. Konštrukcia rulety je jednoduchá, pozostáva z dvoch sústredných kôl, väčšieho nepohyblivého a menšieho pohyblivého, ktoré sa uvedie do pohybu a vhodí sa guľka. Práve pre svoju jednoduchosť a veľké výplatné pomery patrí ruleta medzi najobľúbenejšiu a najviac rozšírenú hazardnú hru.

Z histórie

Kolo rulety a jeho mechanizmus vynašiel v roku 1657 francúzsky vedec Blaise Pascal, ktorý ho zostrojil pri experimentovaní s perpetum mobile. Prvýkrát sa hrala v Paríži v roku 1796, vtedy bola ruleta tvorená čiernymi a červenými číslami 1 až 36, zelenú nulu zaviedli do rulety až bratia Blancovci v roku 1842 s cieľom zvýšiť pravdepodobnosť výhry v prospech prevádzkovateľa rulety. Po rozšírení rulety do Ameriky neboli kasína spokojné s minimálnou výhodou rulety oproti hráčom a preto zaviedli zelenú dvojitú nulu navyše.

Rozdelenie hracieho kola

Rozlišujeme dva základné druhy rulety: *európsku* (francúzsku) a *americkú ruletu*.

- Európska (francúzska) ruleta
  (má podobu rulety bratov Blancovcov, zelenú nulu a čísla 1 až 36, ktoré však nie sú zafarbené čierno a červeno striedavo)

Čierne čísla: 2, 4, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 20, 22, 24, 26, 28, 29, 31, 33, 35
Červené čísla: 1, 3, 5, 7, 9, 12, 14, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 36

- Americká ruleta
  (má 38 dielikov, oproti európskej má navyše zelenú dvojitú nulu)

1.2 Základné stávky rulety a ich pravdepodobnosti

Červená vs. čierna

Vsadenie na červenú alebo čiernu farbu. Ak padne iná farba ako vsadená, 0, prípadne dvojitá nula, hráč prehral. Počet priaznivých možností je 18.

Párne vs. nepárne

Stávka na párne, resp. nepárne čísla. Je tu tiež 18 priaznivých možností.
(dvojitá nula a nula sa nepočítajú ani za párne, ani za nepárne číslo)

Malé vs. veľké

Vsadenie na malé znamená vsadiť na čísla 1 až 18, veľké 19 až 36.

Stĺpec

Vsadenie na prvý (čísla: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34), druhý (čísla: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35), respektíve tretí stĺpec (3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36). Každý stĺpec teda pokrýva 12 čísel.

Tucet

Vsadiť na čísla 1 až 12 alebo 13 až 24, prípadne 25 až 36.

Rada

Vsadenie na dve rady čísel (dokopy 6 čísel).

Roh

Vsadenie na štyri čísla tým, že žetón umiestnime na ich spoločný bod.

Ulica (street)

Stávka na radu čísel (dokopy tri čísla).

Trio – vsadenie na tri čísla

To je možné v prípade 0,1,2 alebo 0,2,3 u francúzskej rulety a 0,1,2 alebo 00,2,3 u americkej tak, že sa žetón priloží na ich hranicu.

Split – vsadenie na dve čísla

Vsadenie na susedné dve čísla tak, že sa priloží žetón na ich hranicu.

Single – vsadenie na jedno číslo

Stávka na akékoľvek jedno číslo, 0 respektíve 00.

Pravdepodobnosť výhry základných vsadení vypočítame zo základnej definície pravdepodobnosti ako počet priaznivých možností delených počtom všetkých možností, ktoré mohli nastať (37 u francúzskej, 38 u americkej).

V prípade výhry sa vypláca čiastka (žetóny) podľa *výplatného pomeru*. Stávky delíme podľa výplatného pomeru na:

- Rovné
  (červená vs. čierna, párne vs. nepárne, malé vs. veľké, výplatný pomer je 1:1)
- Kombinované

		Pravdepodobnosť výhry	
	Výplatný pomer	Európska ruleta	Americká ruleta
Červená vs. čierne	1:1	$18/37 = 0{,}4865$	$18/38 = 0{,}4737$
Párne vs. nepárne	1:1	$18/37 = 0{,}4865$	$18/38 = 0{,}4737$
Malé vs. veľké	1:1	$18/37 = 0{,}4865$	$18/38 = 0{,}4737$
Stĺpec	2:1	$12/37 = 0{,}3243$	$12/38 = 0{,}3158$
Tucet	2:1	$12/37 = 0{,}3243$	$12/38 = 0{,}3158$
Rada	5:1	$6/37 = 0{,}1622$	$6/38 = 0{,}1579$
Roh	8:1	$4/37 = 0{,}1081$	$4/38 = 0{,}1053$
Ulica	11:1	$3/37 = 0{,}0810$	$3/38 = 0{,}0789$
Trio	11:1	$3/37 = 0{,}0810$	$3/38 = 0{,}0789$
Split	17:1	$2/37 = 0{,}0540$	$2/38 = 0{,}0526$
Single	35:1	$1/37 = 0{,}0270$	$1/38 = 0{,}0263$

Tab.1.2.1: Prehľad výplatného pomeru a pravdepodobnosti výhry základných stávok

2 Teoretická časť

2.1 Ruinovanie hráča v rulete

Značenie:

$(\boldsymbol{i})$ Nech nám hráč A predstavuje hráča hrajúceho ruletu a hráč B kasíno, respektíve prevádzkovateľa rulety. Hráči A a B hrajú proti sebe ruletu. Ak vyhrá hráč A, dostane od hráča B jednu korunu. V opačnom prípade musí zaplatiť on jednu korunu hráčovi B. Hra končí, ak je jeden z hráčov zruinovaný a teda zaplatí svoju poslednú korunu.

$(\boldsymbol{ii})$ Označme:

- $p \in (0,1) \stackrel{\text{def}}{=}$ pravdepodobnosť, že partiu vyhrá hráč A
- $q = 1 - p \stackrel{\text{def}}{=}$ pravdepodobnosť, že hráč A partiu prehrá
- $z \stackrel{\text{def}}{=}$ suma, ktorou disponuje hráč A pred začiatkom hry
- $(a - z) \stackrel{\text{def}}{=}$ kapitál hráča B(aby sme sa vyhli triviálnym prípadom predpokladáme, že $0 < z < a$)
- $q_z \stackrel{\text{def}}{=}$ pravdepodobnosť, že hráč A vlastniaci z korún bude niekedy v priebehu hry zruinovaný)
- $p_z \stackrel{\text{def}}{=}$ pravdepodobnosť zruinovania hráča B za rovnakých podmienok (čiže hráč A vlastní z korún a hráč B $(a - z)$ korún)
- $D_z \stackrel{\text{def}}{=}$ stredná hodnota doby trvania hry
- $P(n) \stackrel{\text{def}}{=}$ pravdepodobnosť ukončenia hry v n-tom kole zruinovaním niektorého z hráčov

Zaujímajú nás otázky, aká je pravdepodobnosť, že hra skončí zruinovaním hráča A (prípadne hráča B), aká je stredná doba trvania hry (počet odohraných kôl) a aká je pravdepodobnosť, že hra skončí n-tou partiou.

Uvedenú úlohu interpretujeme spôsobom *náhodnej prechádzky*. V čase $t = 0$ je častica na priamke v celočíselnom bode $z \in (0, a)$ a v čase $t = 1, 2, \ldots$ sa posunie buď o jednu jednotku vľavo s pravdepodobnosťou q alebo o jednu jednotku vpravo s pravdepodobnosťou p. Koncové body 0 a a sú *absorpčnými bodmi*, časticu pohltia a neumožnia jej ďalší pohyb.

Po prvom kole má hráč A buď $z+1$ korún s pravdepodobnosťou p, alebo $z-1$ korún s pravdepodobnosťou q. V prípade $1 < z < a-1$ dostaneme podľa *vety o úplnej pravdepodobnosti* rovnicu:

$$q_z = p\, q_{z+1} + q\, q_{z-1}\,. \tag{2.1.1}$$

Ak položíme:

$$q_0 = 1\,, \qquad q_a = 0\,, \tag{2.1.2}$$

potom vzorec (2.1.1) platí aj pre $z = 1$ a $z = a-1$. Obecným riešením diferenčnej rovnice (2.1.1) je:

$$q_z = A_1 + A_2 \left(\frac{q}{p}\right)^z. \tag{2.1.3}$$

Konštanty A_1 a A_2 vypočítame tak, aby platil vzorec (2.1.3) aj pre $z = 0$ a pre $z = a$, čiže aby boli splnené podmienky (2.1.2). Odtiaľ dostaneme rovnice:

$$A_1 + A_2 = 1\,, \qquad A_1 + A_2 \left(\frac{q}{p}\right)^a = 0\,, \tag{2.1.4}$$

jediným riešením je preto:

$$q_z = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^z}{\left(\frac{q}{p}\right)^a - 1}\,. \tag{2.1.5}$$

Analogicky platí pre p_z platí:

$$p_z = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^a - \left(\frac{p}{q}\right)^{a-z}}{\left(\frac{p}{q}\right)^a - 1}\,. \tag{2.1.6}$$

Podľa *vety o úplnej strednej hodnote* dostaneme, že pre $0 < z < a$ platí:

$$D_z = (1 + D_{z+1})\, p + (1 + D_{z-1})\, q = p\, D_{z+1} + q\, D_{z-1} + 1, \tag{2.1.7}$$

zároveň má platiť:

$$D_0 = 0\,, \qquad D_a = 0\,. \tag{2.1.8}$$

Jedno z riešení (partikulárne) je $D_z = z/(q-p)$ a teda obecným riešením je:

$$D_z = A_1 + A_2 \left(\frac{q}{p}\right)^z + \frac{z}{q-p}\,. \tag{2.1.9}$$

Ak majú byť splnené podmienky (2.1.8), dostávame zo vzorca (2.1.9):

$$A_1 + A_2 = 0\,, \qquad A_1 + A_2\left(\frac{q}{p}\right)^a = -\frac{a}{q-p} \tag{2.1.10}$$

a odtiaľ dospejeme k výsledku:

$$D_z = \frac{z}{q-p} - \frac{a}{q-p}\,\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^z}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}\,. \tag{2.1.11}$$

Pre $P(n)$ a D_z platí vzorec:

$$D_z = \sum_{n=1}^{\infty} n\,P(n)\,. \tag{2.1.12}$$

Podľa vzorca (2.1.12) sa však výpočet $P(n)$ neprevádza. Jeho výpočet je zložitý, nachádza sa v knihe od Williama Fellera, ktorú vydal v roku 1968:

$$P(n) = \frac{1}{a}2^n\,p^{\frac{n-z}{2}}\,q^{\frac{n+z}{2}}\sum_{\vartheta=1}^{a-1}\left(\cos^{\mathrm{n}-1}\frac{\pi\vartheta}{a}\sin\frac{\pi\vartheta}{a}\sin\frac{\pi z\vartheta}{a}\right)\,. \tag{2.1.13}$$

Príklad 2.1.

Ak chceme vypočítať zruinovanie hráča A v rulete, uvažujeme za majetok hráča B hodnotu, ktorú chce hráč A na konci dosiahnuť mínus vstupný kapitál hráča A. Povedzme, že hráč A, ktorý vlastní 900 korún prišiel hrať európsku ruletu s cieľom zisku 100 korún (t.z. z rulety chce odísť s 1000 korunami) a vsádza vždy po jednej korune na červenú farbu. Podľa značenia z kapitoly 2.1. teda platí:

$$z = 900\,,\ \ a = 1000\,,\ \ a - z = 100\,,\ \ p = \frac{18}{37}\,,\ \ q = \frac{19}{37}. \tag{2.1.14}$$

Na výpočet pravdepodobnosti zruinovania hráča dosadíme podmienky (2.1.14) do vzorca (2.1.5) :

$$q_{900} = 0{,}9955\,. \tag{2.1.15}$$

Pravdepodobnosť, že hráč 1000 korún dosiahne, je teda:

$$1 - q_{900} = 0{,}0045\,. \tag{2.1.16}$$

Stredná hodnota trvania hry (stredná hodnota počtu kôl rulety) sa vypočíta dosadením (2.1.14) do vzorca (2.1.5):

$$D_{900} = 33\,134\,. \tag{2.1.17}$$

2.2 Najdlhší sled červenej (čiernej) farby v rulete

Značenie:

($\boldsymbol{i}$) Nech $X_1, X_2, \ldots$ je postupnosť Bernoulliho náhodných veličín, ktoré sú navzájom nezávislé a rovnako rozdelené ($\sim iid$), takých že platí: $P[X_1 = 1] = p, (0 < p < 1)$ a $P[X_1 = 0] = q = 1 - p$.

($\boldsymbol{ii}$) Nech $S_0 = 0, S_n = X_1 + \cdots + X_n$ a položme $I(N, K) = \max_{0 \leq n \leq N-K}\{S_{n+K} - -S_n\}$ pre $0 < K < N$.

($\boldsymbol{iii}$) Beh "1" je definovaný ako podpostupnosť $X_r, \ldots X_s, (1 \leq r \leq s \leq N)$, tak že pre $\forall r > 1, \forall s < N, \forall r \leq t \leq s$: $X_{r-1} = 0,\ X_{s+1} = 0,\ X_t = 1$.

($\boldsymbol{iv}$) Nech Z_N je najväčšie celé číslo také, že $I(N, Z_N) = Z_N$ (Z_N je najdlhší sled "1" v $X_1, \ldots, X_N$).

($\boldsymbol{v}$) Označenie $\log_r N$, kde $r \in 2,3, \ldots$ a N je prirodzené číslo definujeme ako r-tý prirodzený logaritmus N.

($\boldsymbol{vi}$) $\hat{\mathrm{o}}(n)$ označíme jako počiatočný index prvého sledu dĺžky n.

Veta 2.1

Nech $X_1, X_2, \ldots \sim iid$ postupnosť Bernoulliho náhodných veličín s $0 < p < 1$. Nech $k \geq 1$ je pevné a nech $Z_N^{(k)}$ je k-ty najdlhší reťazec "1" pozorovaný v $X_1, \ldots, X_N$.

Potom pre $\forall r \geq 3$:

$$P\left(Z_N^{(k)} \geq \frac{\log N + \frac{1}{k}\left(\log_2 N + \cdots + \log_{r-1} N + \left(1 + \acute{\mathrm{I}}\right)\log_r N\right)}{-\log p} i.o. \right) = \begin{cases} 0, \acute{\mathrm{I}} > 0 \\ 1, \acute{\mathrm{I}} \leq 0 \end{cases}. \tag{2.2.1}$$

A pre $\forall \acute{\mathrm{I}} > 0$:

$$P\left(Z_N^{(k)} \leq \left[\frac{\log N - \log_3 N + \log(1-p)}{-\log p} \right] - 1\ i.o. \right) = 0\,. \tag{2.2.2}$$

$$P\left(Z_N^{(k)} \leq \left[\frac{\log N - \log_3 N + \log(1-p)}{-\log p} \right]\ i.o. \right) = 1\,. \tag{2.2.3}$$

Kompaktnejšie zhrnutie vyššie uvedených vzorcov možno dosiahnuť pomocou tzv. *Lévyho tried*. Nech $\{Y(t)|t \geq 0\}$ je *stochastický proces* na pravdepodobnostnom priestore $\left(\text{Ů}, A, P\right)$.

Definícia 2.2

Funkcia $a_1(t)$ *patrí do hornej vyššej ("upper upper") triedy* $\{Y(t)\}$ $(a_1 \in UUC(Y))$, *ak pre takmer všetky* ů $\in$ Ů $\exists$ $t_0 = t_o(\text{ů}) > 0$, *také že* $Y(t, \text{ů}) < a_1(t)$ $ak\ t > t_0$.

Definícia 2.3

Funkcia $a_2(t)$ *patrí do hornej nižšej ("upper lowwer") triedy* $\{Y(t)\}$ $\left(a_2 \in ULC(Y)\right)$, *ak pre takmer všetky* ů $\in$ Ů $\exists$ *postupnosť kladných čísel* $0 < t_1 = t_1(\text{ů}) < t_2 =$ $= t_2(\text{ů}) < \cdots$ $s\ t_n \to \infty$, *tak že* $Y(t_i, \text{ů}) \leq a_2(t_i)$, $i = 1, 2, \dots$

Definícia 2.4

Funkcia $a_3(t)$ *patrí do dolnej vyššej ("lower upper") triedy* $\{Y(t)\}$ $(a_3 \in LUC(Y))$, *ak pre takmer všetky* ù $\in$ Ù $\exists$ *postupnosť kladných čísel* $0 < t_1 = t_1(\text{ù}) < t_2 =$ $= t_2(\text{ù}) < \cdots$ $s\ t_n \to \infty$, *tak že* $Y(t_i, \omega) \geq a_3(t_i)$, $i = 1, 2, \dots$

Definícia 2.5

Funkcia $a_4(t)$ *patrí do dolnej nižšej ("lower lower")triedy* $\{Y(t)\}$ $(a_4 \in LLC(Y))$, *ak pre takmer všetky* ù $\in$ Ù $\exists$ $t_0 = t_o(\text{ù}) > 0$, *také že* $Y(t, \text{ù}) > a_4(t)$ $ak\ t > t_0$.

Po týchto definíciách môžeme *vetu 2.1* preformulovať do kompaktnejšej podoby (å > 0) :

$$a_1(N, p, \text{å}) = \frac{\log N + \frac{1}{k}\left(\log_2 N + \cdots + \log_{r-1} N + (1 + \text{å}) \log_r N\right)}{-\log p} \in UUC\left(Z_N^{(k)}\right), \tag{2.2.4}$$

$$a_2(N, p) = \frac{\log N + \frac{1}{k}\left(\log_2 N + \cdots + \log_{r-1} N + \log_r N\right)}{-\log p} \in LUC\left(Z_N^{(k)}\right), \tag{2.2.5}$$

$$a_3(N, p) = \left[\frac{\log N - \log_3 N + \log(1 - p)}{-\log p}\right] \in ULC\left(Z_N^{(k)}\right), \tag{2.2.6}$$

$$a_4(N, p, \text{å}) = \left[\frac{\log N - \log_3 N + \log(1-p)}{-\log p} - 1 - \text{å}\right] \in LLC\left(Z_N^{(k)}\right). \qquad (2.2.7)$$

V roku 1986 našiel Gordon aproximáciu limitného rozdelenia Z_N pre $p \in (0,1)$ pomocou *teórie extrémnych hodnôt*. Hlavným zistením bolo, že dĺžka každého jednotlivého behu je rozdelená ako geometrická náhodná veličina.

Veta 2.6

Nech $\text{ì}(N) = -\log N \,/\, \log p,\ q = 1 - p$ *a* W *má dvojité exponenciálne rozdelenie* $(P(W \leq t) = \exp(-\exp(-t)))$, *potom platí pre jednotné t:*

$$P(Z_N - \text{ì}(q\,N) \leq t) - P\left(\left[\frac{W}{-\log p} + \{\text{ì}(q\,N)\} \leq t\right]\right) \xrightarrow{N\to\infty} 0\,, \qquad (2.2.8)$$

kde $[a]$ *je celá časť čísla* a *a* $\{a\} = a - [a]$.

Poznámka 2.7

Z vyššie uvedeného výsledku je dosiahnutá aproximácia:

$$P(Z_N \leq k) \approx \exp\left(-\exp\left(\log \mathrm{p}\,\left(\mathrm{k} + \frac{1}{2} - \mu(\mathrm{q\,N})\right)\right)\right). \qquad (2.2.9)$$

Veta 2.8

Nech $\text{è} = \frac{-\text{ð}^2}{\log p}$. *Potom:*

$$\left|E[Z_N] - \left(\frac{\log N}{-\log p} + \frac{\text{ã}}{-\log p} - \frac{1}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{2\text{ð}} \frac{\sqrt{\text{è}}\,\exp(-\text{è})}{\left(1 - \exp(-\text{è})\right)^2)} + o_N(1)\,, \qquad (2.2.10)$$

$$\left|\mathrm{var}\,(\mathrm{Z_N}) - \left(\frac{\pi^2}{6(\log \mathrm{p})^2} + \frac{1}{12}\right)\right| \leq \frac{(2{,}2 + 1{,}4\,\theta)\,\sqrt{\theta}\,\exp(-\theta)}{(1 - \exp(-\theta))^3} + \mathrm{o_N}(1)\,. \qquad (2.2.11)$$

Poznámka 2.9

$(\boldsymbol{i})$ Termín $-\frac{1}{2}$ vo vzorci (2.2.10) je Shepardova oprava kvôli spojitosti.

$(\boldsymbol{ii})$ $E[W] = \text{ã}, var\ W = \frac{\text{ð}^2}{6}$, kde ã je *Euler-Mascharoni konštanta*.

$\text{ã} = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n) = \int_1^\infty \left(\frac{1}{\lfloor x \rfloor} - \frac{1}{x}\right)\,dx = 0{,}57721\ 56649\ 01532$

$(\boldsymbol{iii})$ Rozptyl Z_N nezávisí na N.

$(\boldsymbol{iii})$ Aproximácia strednej hodnoty a rozptylu Z_N z *vety 2.6* podľa Binswangera a Embrechtsa:

$$E[Z_N] \approx \frac{-\log N}{\log p} - \frac{\text{ã}}{\log p} - \frac{1}{2}, \tag{2.2.12}$$

$$var\ Z_N \approx \frac{\text{ð}^2}{6\,(\log p)^2} + \frac{1}{12}. \tag{2.2.13}$$

Veta 2.10

$\lim_{n\to\infty} P(\text{ô}(n) > \frac{t}{p^n}) = \exp\left(-(1-p)t\right)$,

$$P\left(\text{ô}(n) < \text{ö}(n)\frac{p^{-n}}{1-p}\ pre\ \ n\to\infty\right) = \\ = \begin{cases} 1, ak \sum \text{ö}(n) = \infty\,, \\ 0, ak \sum \text{ö}(n) < \infty\,, \end{cases} \tag{2.2.14}$$

$$P\left(\text{ô}(n) > \text{ö}(n)\frac{p^{-n}}{1-p}\ pre\ \ n\to\infty\right) = \\ = \begin{cases} 1, ak \sum \exp\left(-\text{ö}(n)\right) = \infty\,, \\ 0, ak \sum \exp\left(-\text{ö}(n)\right) < \infty\,. \end{cases} \tag{2.2.15}$$

Ak položíme napríklad:

$$\text{ö}_1(n) = \frac{1}{n\ (\log n)^{1,1}}\ \ a\ \ \text{ö}_2(n) = \log n + 1{,}1\ \log_2 n\,, \tag{2.2.16}$$

tak získame:

$$\text{ö}_1(n)\frac{p^{-n}}{1-p}\ \ \le \text{ô}\ (n) \le \text{ö}_2(n)\frac{p^{-n}}{1-p}. \tag{2.2.17}$$

Príklad 2.11

Vyššie uvedené výsledky by sme chceli aplikovať na ruletu. Je známy počet kôl N rulety. Zaujíma nás:

$(\boldsymbol{i})$ Aký je najdlhší sled červenej farby (“1“) a nečervenej (čierna a zelená) v rulete, ak je známy počet kôl?

$(\boldsymbol{ii})$ Aká je stredná hodnota najdlhšieho sledu červenej (resp. čiernej)?

($\boldsymbol{iii}$) Ako dlho musíme čakať, kým sa objaví víťazný (prehrávajúci) sled dĺžky n? (Odpovede na tieto otázky umožňujú odhadnúť finančné rezervy potrebné napríklad v slávnej zdvojnásobovacej stratégii[1], aby sme sa tak vyhli zruinovaniu hráča.)

Predpokladajme, že $N = 200$ a označme Z_N^W ako najdlhší víťazný sled a Z_N^L najdlhší prehrávajúci sled.

Výpočet $(\boldsymbol{i})$

Podľa *vety 2.1* a aproximácii Z_N platí pre $r = 3$, $å = 1$:

Európska ruleta:

$$a_4\left(200, \frac{18}{37}, 1\right) = 4 \leq Z_N^W \leq 11 = a_1\left(200, \frac{18}{37}, 1\right), \qquad (2.2.18)$$

$$a_4\left(200, \frac{19}{37}, 1\right) = 5 \leq Z_N^L \leq 11 = a_1\left(200, \frac{19}{37}, 1\right). \qquad (2.2.19)$$

Americká ruleta:

$$a_4\left(200, \frac{18}{38}, 1\right) = 4 \leq Z_N^W \leq 10 = a_1\left(200, \frac{18}{38}, 1\right), \qquad (2.2.20)$$

$$a_4\left(200, \frac{20}{38}, 1\right) = 5 \leq Z_N^L \leq 12 = a_1\left(200, \frac{20}{38}, 1\right). \qquad (2.2.21)$$

Výpočet $(\boldsymbol{ii})$

Podľa *vety 2.10* a následnej aproximácie v *poznámke 2.11* ($\boldsymbol{ii}$) platí:

Európska ruleta:

$$E[Z_{200}^W] \approx 7{,}65\,, \qquad E[Z_{200}^L] \approx 8{,}32\,, \qquad (2.2.22)$$

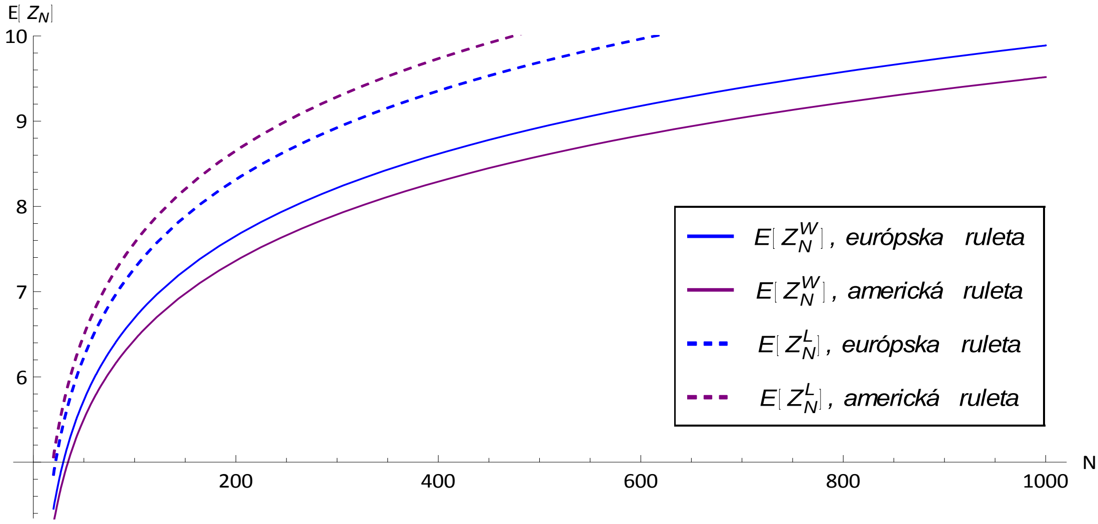
$$var\ Z_{200}^W \approx 3{,}25\,, \qquad var\ Z_{200}^L \approx 3{,}79\,. \qquad (2.2.23)$$

Americká ruleta:

$$E[Z_{200}^W] \approx 7{,}36\,, \qquad E[Z_{200}^L] \approx 8{,}65\,, \qquad (2.2.24)$$

[1] Ide o stratégiu Martingale predstavenú v kapitole 5. Vsádzame vždy len na farbu, pričom po neúspešnom kole zdvojnásobime vsadené žetóny/peniaze.

$$var\ Z_{200}^{W} \approx 3{,}02\,, \qquad var\ Z_{200}^{L} \approx 4{,}08\,. \tag{2.2.25}$$



Obr. 2.2.1: Graf $E[Z_N^W]$ a $E[Z_N^L]$ v európskej a americkej rulete

Výpočet (iii)

Na výpočet počtu kôl, ktoré musíme počkať na vyhrávajúci (prehrávajúci) sled dĺžky n využijeme *vetu 1.11.* Položme napríklad $n = 10$:

Európska ruleta:

$$\ddot{o}_1(10)\frac{\left(\frac{18}{37}\right)^{-10}}{1-\frac{18}{37}} = 104{,}79 \leq \hat{o}^W(10) \leq 8444{,}99 = \ddot{o}_2(10)\frac{\left(\frac{18}{37}\right)^{-10}}{1-\frac{18}{37}}\,, \tag{2.2.26}$$

$$\ddot{o}_1(10)\frac{\left(\frac{19}{37}\right)^{-10}}{1-\frac{19}{37}} = 64{,}41 \leq \hat{o}^L(10) \leq 5191{,}22 = \ddot{o}_2(10)\frac{\left(\frac{19}{37}\right)^{-10}}{1-\frac{19}{37}}\,. \tag{2.2.27}$$

Americká ruleta:

$$\ddot{o}_1(10)\frac{\left(\frac{18}{38}\right)^{-10}}{1-\frac{18}{38}} = 133{,}48 \leq \hat{o}^W(10) \leq 10757{,}8 = \ddot{o}_2(10)\frac{\left(\frac{18}{38}\right)^{-10}}{1-\frac{18}{38}}\,, \tag{2.2.28}$$

$$\ddot{o}_1(10)\frac{\left(\frac{20}{38}\right)^{-10}}{1-\frac{20}{38}} = 51{,}71 \leq \hat{o}^L(10) \leq 4167{,}79 = \ddot{o}_2(10)\frac{\left(\frac{20}{38}\right)^{-10}}{1-\frac{20}{38}}\,. \tag{2.2.29}$$

3 Systémy rulety pre jedno kolo

Značenie:

$p_E \stackrel{\text{def}}{=}$ pravdepodobnosť výhry v európskej rulete

$p_A \stackrel{\text{def}}{=}$ pravdepodobnosť výhry v americkej rulete

$X \stackrel{\text{def}}{=}$ náhodná veličina predstavujúca veľkosť zisku v európskej rulete

$Y \stackrel{\text{def}}{=}$ náhodná veličina predstavujúca veľkosť zisku v americkej rulete

3.1 Bondova stávka

Tento ruletný systém je pomenovaný podľa Jamesa Bonda. Potrebujeme ľubovoľný násobok dvadsiatich žetónov. Predpokladajme, že máme 20 n žetónov, kde $n \in N$. Stavíme:

- $14\,n$ na spodnú hranicu hracieho poľa (čísla 19 až 36)
- $5\,n$ žetónov na line (dva streety, šestica: čísla 13 až 18)
- n žetónov na nulu

Pravdepodobnosť výhry v Bondovej stávke:

Nepriaznivé možnosti, ktoré môžu nastať sú čísla 1 až 12 a prípadne dvojitá nula v americkej rulete.

$$p_E = \frac{25}{37} = 0{,}676\,, \qquad p_A = \frac{25}{38} = 0{,}658\,. \tag{3.1.1}$$

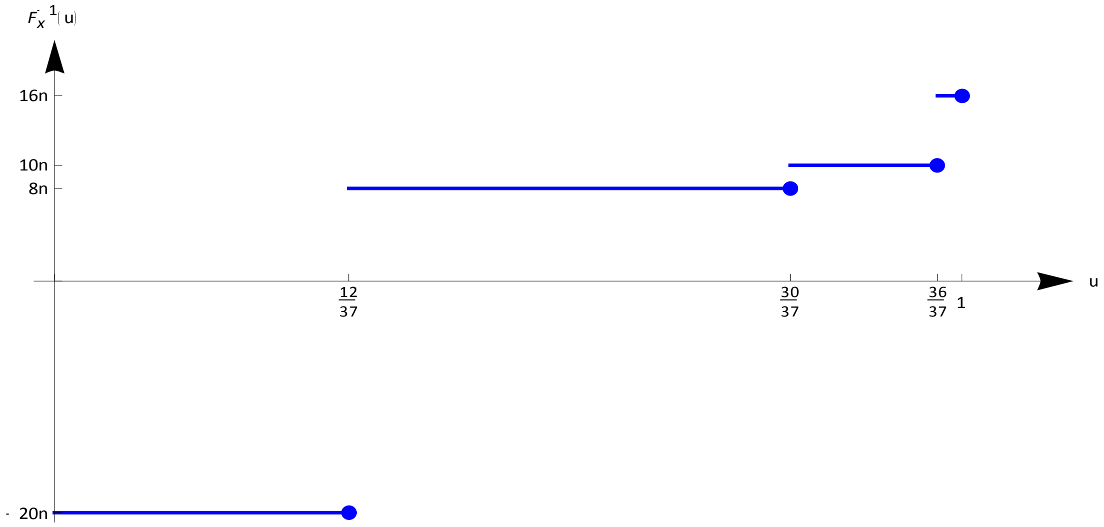
Pravdepodobnosť zruinovania hráča v Bondovej stávke:

$$1 - p_E = 1 - \frac{25}{37} = 0{,}324\,, \qquad 1 - p_A = 1 - \frac{25}{38} = 0{,}342\,. \tag{3.1.2}$$

Rozdelenie zisku v Bondovom systéme:

		Pravdepodobnosť výhry	
Padne číslo:	Zisk	Európska ruleta	Americká ruleta
1 až 12, 00	$-20\,n$	$P[X = -20\,n] = 12/37$	$P[Y = -20\,n] = 13/38$
19 až 36	$8\,n$	$P[X = 10\,n] = 18/37$	$P[Y = 10\,n] = 18/38$
13 až 18	$10\,n$	$P[X = 10\,n] = 6/37$	$P[Y = 10\,n] = 6/38$
0	$16\,n$	$P[X = 16\,n] = 1/37$	$P[Y = 16\,n] = 1/38$

Tab. 3.1.1: Rozdelenie zisku v systéme Bondova stávka



Obr. 3.1.1: Kvantilová funkcia náhodnej veličiny X

Stredná hodnota zisku hráča:

Európska ruleta:

$$EX = 8n\,\frac{18}{37} + 10n\,\frac{6}{37} + 16n\,\frac{1}{37} - 20n\,\frac{12}{37} = -5{,}4\,n\,. \tag{3.1.3}$$

Americká ruleta:

$$EY = 8n\,\frac{18}{38} + 10n\,\frac{6}{38} + 16n\,\frac{1}{38} - 20n\,\frac{13}{38} = -10{,}5\,n\,. \tag{3.1.4}$$

Rozptyl zisku hráča:

Európska ruleta:

$$var\ X = (8n)^2\,\frac{18}{37} + (10n)^2\,\frac{6}{37} + (16n)^2\,\frac{1}{37} + (-20n)^2\,\frac{12}{37} - \\ - (-5{,}4\,n)^2 = 154{,}84\,n^2. \tag{3.1.5}$$

Americká ruleta:

$$var\ Y = (8n)^2\,\frac{18}{38} + (10n)^2\,\frac{6}{38} + (16n)^2\,\frac{1}{38} + (-20n)^2\,\frac{13}{38} - \\ - (-10{,}5n)^2 = 84{,}56\,n^2. \tag{3.1.6}$$

Medián:

Výpočet mediánu určíme z obrázku 3.1.1 ako $Q_{0,5} = F_x^{-1}(0{,}5)$.

Európska ruleta:

$$\tilde{x} = F_x^{-1}(0,5) = 8\,n\,. \tag{3.1.7}$$

Americká ruleta:

$$\tilde{y} = F_y^{-1}(0,5) = 8\,n\,. \tag{3.1.8}$$

	$Q_{0,10}$	$Q_{0,25}$	$Q_{0,40}$	$Q_{0,50}$	$Q_{0,60}$	$Q_{0,75}$	$Q_{0,90}$
n.v. X	$-20\,n$	$-20\,n$	$8\,n$	$8\,n$	$8\,n$	$8\,n$	$10\,n$
n.v. Y	$-20\,n$	$-20\,n$	$8\,n$	$8\,n$	$8\,n$	$8\,n$	$10\,n$

Tab. 3.1.2: Hodnoty vybraných kvantilov náhodných veličín X a Y

3.2 Shaunov systém

Shaunov systém sa používa hlavne vo francúzskej rulete. Na tento systém je potrebné disponovať 33 n žetónmi, $n \in N$.

Stavíme:

- $18\,n$ žetónov na červenú
- po n žetónoch na tri čísla z výberu: 4, 6, 15, 22, 24, 33, 35
- po $2\,n$ žetónov na splity: 0 a 2, 8 a 11, 10 a 13, 17 a 20, 26 a 29, 28 a 31

V tomto systéme máme teda poistené všetky červené čísla, nulu, všetky čierne splity a z ostávajúcich siedmich čiernych čísel poistíme ešte tri. Nepriaznivé možnosti sú teda len štyri čísla z výberu: 4, 6, 15, 22, 24, 33, 35 a v americkej rulete navyše aj dvojitá nula. V prípade ktorejkoľvek priaznivej situácie činí výhra $36\,n$, a tým je čistý zisk $3\,n$.

Pravdepodobnosť výhry v Shaunovej stratégii:

$$p_E = 1 - \frac{4}{37} = 0{,}89\,, \qquad p_A = 1 - \frac{5}{38} = 0{,}87\,. \tag{3.2.1}$$

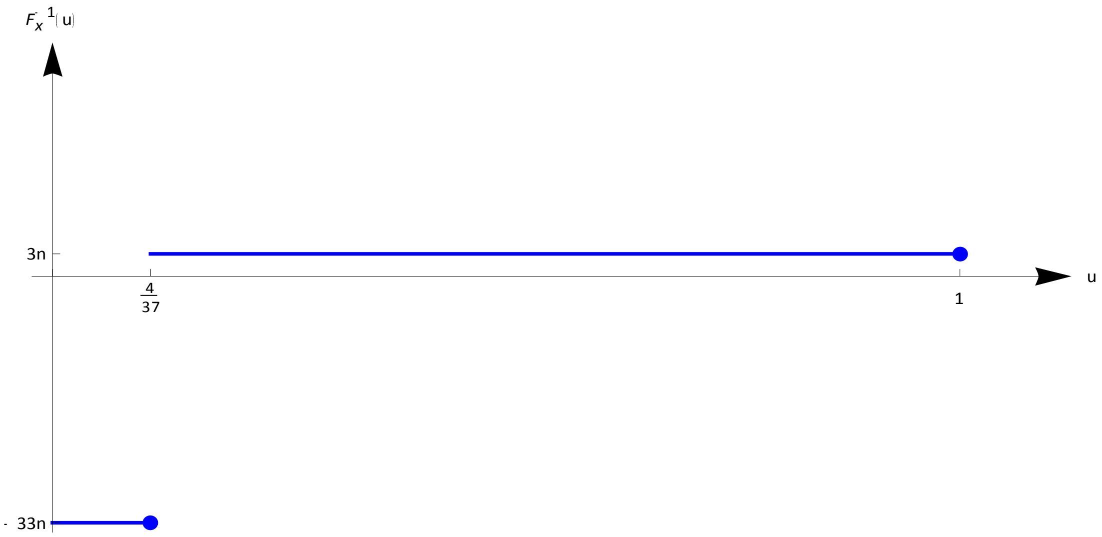
Pravdepodobnosť zruinovania hráča v Shaunovej stratégii:

$$1 - p_E = \frac{4}{37} = 0{,}11\,, \qquad 1 - p_A = \frac{5}{38} = 0{,}13\,. \tag{3.2.2}$$

Rozdelenie zisku:

	Pravdepodobnosť výhry	
Zisk	Európska ruleta	Americká ruleta
$-33\,n$	$P[X = -33\,n] = 4/37$	$P[Y = -33\,n] = 5/38$
$3\,n$	$P[X = 3\,n] = 33/37$	$P[Y = 3\,n] = 33/38$

Tab. 3.2.1: Rozdelenie zisku v Shaunovom systéme



Obr. 3.2.1: Kvantilová funkcia náhodnej veličiny X

Stredná hodnota zisku hráča:

Európska ruleta:

$$EX = 3n\,\frac{33}{37} - 33n\,\frac{4}{37} = -0{,}89\,n\,. \tag{3.2.3}$$

Americká ruleta:

$$EY = 3n\,\frac{33}{38} - 33n\,\frac{5}{38} = -1{,}74\,n\,. \tag{3.2.4}$$

Rozptyl zisku hráča:

Európska ruleta:

$$var\ X = (3n)^2\,\frac{33}{37} + (-33n\,)^2\,\frac{4}{37} - (-0{,}89\,n)^2 = 124{,}97\,n^2. \tag{3.2.5}$$

Americká ruleta:

$$var\ Y = (3n)^2\,\frac{33}{38} + (-33n\,)^2\,\frac{5}{38} - (-1{,}74\,n)^2 = 148{,}08\,n^2. \tag{3.2.6}$$

Medián:

Európska ruleta:

$$\tilde{x} = F_x^{-1}(0{,}5) = 3\,n\,. \tag{3.2.7}$$

Americká ruleta:

$$\tilde{y} = F_y^{-1}(0{,}5) = 3\,n\,. \tag{3.2.8}$$

	$Q_{0,10}$	$Q_{0,25}$	$Q_{0,40}$	$Q_{0,50}$	$Q_{0,60}$	$Q_{0,75}$	$Q_{0,90}$
n.v. X	$-33\,n$	$3\,n$	$3\,n$	$3\,n$	$3\,n$	$3\,n$	$3\,n$
n.v. Y	$-33\,n$	$3\,n$	$3\,n$	$3\,n$	$3\,n$	$3\,n$	$3\,n$

Tab. 3.2.2: Hodnoty vybraných kvantilov náhodných veličín X a Y

3.3 Systém siedmich rohov

Podľa systému siedmich rohov stavíme $7\,\mathrm{n}$ žetónov, kde $n \in N$. Rozmiestnime ich:

- n žetónov na roh, kde sa stretávajú čísla 0, 1, 2, 3
- n žetónov na roh čísel 4, 5, 7, 8
- n žetónov na roh čísel 11, 12, 14, 15
- n žetónov na roh čísel 16, 17, 19, 20
- n žetónov na roh čísel 23, 24, 26, 27
- n žetónov na roh čísel 28, 29, 31, 32
- n žetónov na roh čísel 32, 33, 35, 36

Tým máme poistených 27 čísel. Stavili sme síce sedem rohov, ale číslo 32 sa vyskytuje v dvoch rohoch a preto po jeho padnutí je výhra $18\,n$, a teda čistý zisk by bol $11\,n$ žetónov. V ostatných priaznivých možnostiach by čistý zisk činil $2\,n$.

Pravdepodobnosť výhry:

$$p_E = \frac{27}{37} = 0{,}73\,, \qquad p_A = \frac{27}{38} = 0{,}71\,. \tag{3.3.1}$$

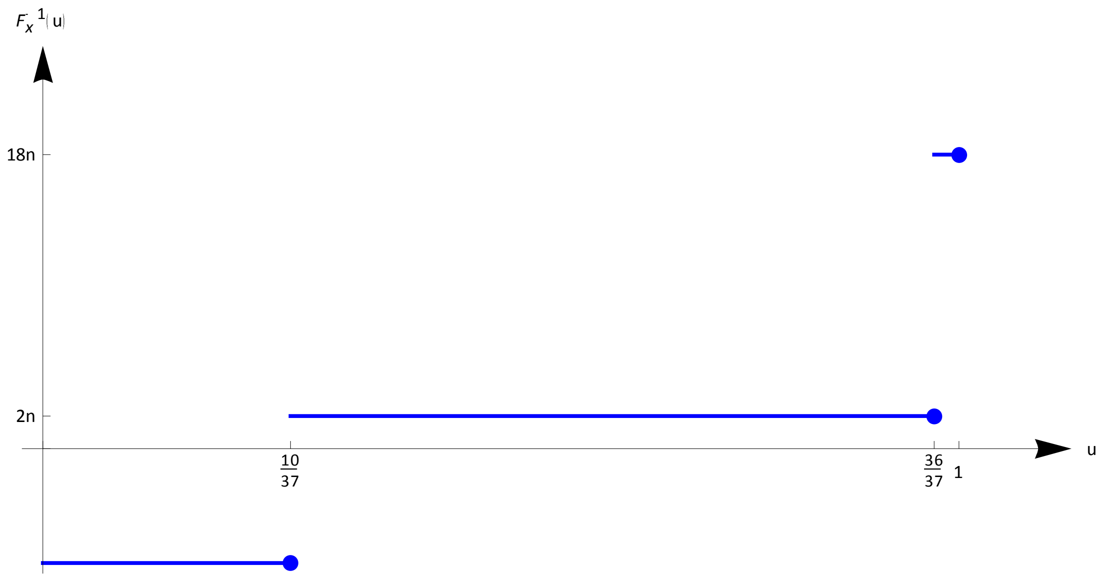
Pravdepodobnosť ruinovania hráča:

$$1 - p_E = 1 - \frac{27}{37} = 0{,}27, \qquad 1 - p_A = 1 - \frac{27}{38} = 0{,}29\,. \tag{3.3.2}$$

Rozdelenie zisku:

		Pravdepodobnosť výhry	
Padne číslo:	Zisk	Európska ruleta	Americká ruleta
00, 6, 9, 10, 13, 18, 21, 22, 25, 30, 34	$-7\,n$	$P[X = -7\,n] = 10/37$	$P[Y = -7\,n] = 11/38$
0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 31, 33, 35, 36	$2\,n$	$P[X = 2\,n] = 26/37$	$P[Y = 2n] = 26/38$
32	$18\,n$	$P[X = 18\,n] = 1/37$	$P[Y = 18\,n] = 1/38$

Tab. 3.3.1: Rozdelenie zisku v systéme siedmich rohov



Obr. 3.3.1: Kvantilová funkcia náhodnej veličiny X

Stredná hodnota zisku hráča:

Európska ruleta:

$$EX = 2n\,\frac{26}{37} + 11n\,\frac{1}{37} - 7n\,\frac{10}{37} = -0{,}19\,n\,. \tag{3.3.3}$$

Americká ruleta:

$$EY = 2n\,\frac{26}{38} + 11n\,\frac{1}{38} - 7n\,\frac{11}{38} = -0{,}37\,n\,. \tag{3.3.4}$$

Rozptyl zisku hráča:

Európska ruleta:

$$var\ X = (2n)^2\ \frac{26}{37} + (11n)^2\ \frac{1}{37} + (-7n)^2\ \frac{10}{37} - (-0{,}19\ n)^2 = \\ = 19{,}29\ n^2. \tag{3.3.5}$$

Americká ruleta:

$$varY = (2n)^2\ \frac{26}{38} + (11n)^2\ \frac{1}{38} + (-7n)^2\ \frac{11}{38} - (-0{,}37\ n)^2 = \\ = 19{,}97\ n^2. \tag{3.3.6}$$

Medián:

Európska ruleta:

$$\tilde{x} = F_x^{-1}(0{,}5) = 2\ n\ . \tag{3.3.7}$$

Americká ruleta:

$$\tilde{y} = F_y^{-1}(0{,}5) = 2\ n\ . \tag{3.3.8}$$

	$Q_{0,10}$	$Q_{0,25}$	$Q_{0,40}$	$Q_{0,50}$	$Q_{0,60}$	$Q_{0,75}$	$Q_{0,90}$
n.v. X	$-7\ n$	$-7\ n$	$2\ n$	$2\ n$	$2\ n$	$2\ n$	$2\ n$
n.v. Y	$-7\ n$	$-7\ n$	$2\ n$	$2\ n$	$2\ n$	$2\ n$	$2\ n$

Tab. 3.3.2: Hodnoty vybraných kvantilov náhodných veličín X a Y

3.4 Dámska ruleta

Na tento ruletný systém potrebujeme 4 n žetónov, $n \in N$, ktoré rozmiestnime spôsobom:

- n žetónov na čiernu farbu
- n žetónov na párne čísla
- n žetónov na prvý tucet (čísla 1 až 12)
- n žetónov na street 19 až 24

Pravdepodobnosť výhry v systéme Dámska ruleta:

$$p_E = 1 - \frac{3}{37} = 0{,}92\ , \qquad p_A = 1 - \frac{4}{38} = 0{,}90\ . \tag{3.4.1}$$

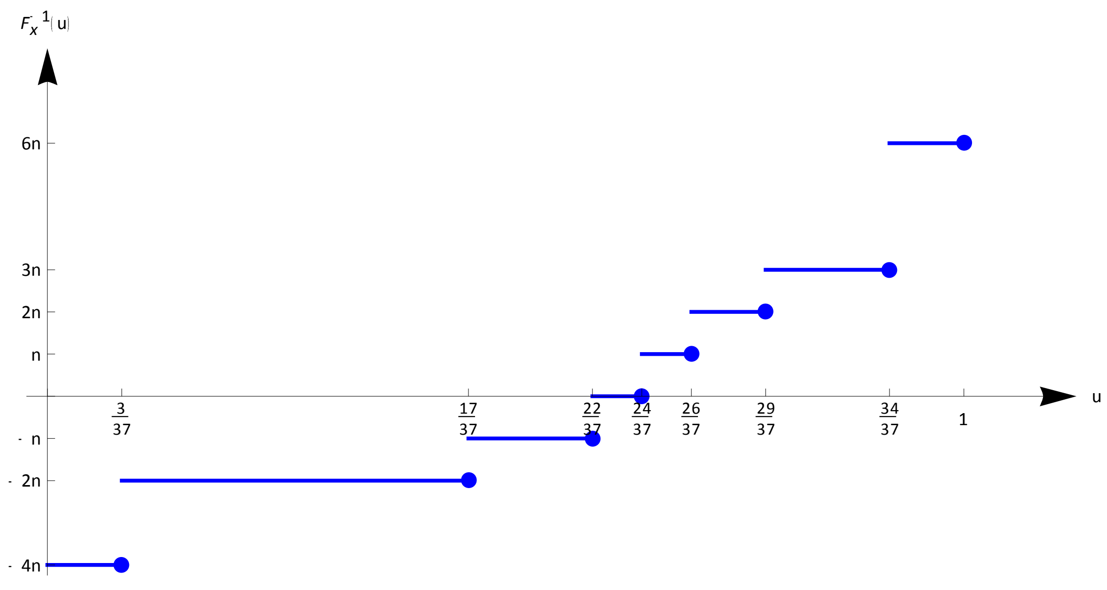
Ruinovanie hráča v systéme Dámska ruleta:

$$1 - p_E = \frac{3}{37} = 0{,}08\,, \qquad 1 - p_A = \frac{4}{38} = 0{,}10\,. \tag{3.4.2}$$

Rozdelenie zisku:

		Pravdepodobnosť výhry	
Padne číslo:	Zisk	Európska ruleta	Americká ruleta
0, 00, 25, 27	$-4\,n$	$P[X = -4\,n] = 3/37$	$P[Y = -4\,n] = 4/38$
13, 14, 15, 16, 17, 18, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36	$-2\,n$	$P[X = -2\,n] = 14/37$	$P[Y = -2\,n] = 14/38$
1, 3, 5, 7, 9	$-n$	$P[X = -n] = 5/37$	$P[Y = -n] = 5/38$
26, 28	0	$P[X = 0] = 2/37$	$P[Y = 0] = 2/38$
11, 12	n	$P[X = n] = 2/37$	$P[Y = n] = 2/38$
19, 21, 23	$2\,n$	$P[X = 2\,n] = 3/37$	$P[Y = 2\,n] = 3/38$
2, 4, 6, 8, 10	$3\,n$	$P[X = 3\,n] = 5/37$	$P[Y = 3\,n] = 5/38$
20, 22, 24	$6\,n$	$P[X = 6\,n] = 3/37$	$P[Y = 6\,n] = 3/38$

Tab. 3.4.1: Rozdelenie zisku v systéme Dámska ruleta



Obr. 3.4.1: Kvantilová funkcia náhodnej veličiny X

Stredná hodnota zisku hráča:

Európska ruleta:

$$EX = 6n\ \frac{3}{37} + 3n\ \frac{5}{37} + 2n\ \frac{3}{37} + n\ \frac{2}{37} + 0 - n\frac{5}{37} - 2n\frac{14}{37} - \\ - 4n\ \frac{3}{37} = \ -0{,}11\ n\,. \tag{3.4.3}$$

Americká ruleta:

$$EY = 6n\ \frac{3}{38} + 3n\ \frac{5}{38} + 2n\ \frac{3}{38} + n\ \frac{2}{38} + 0 - n\frac{5}{38} - 2n\frac{14}{38} - \\ - 4n\ \frac{4}{38} = \ -0{,}21\ n\,. \tag{3.4.4}$$

Rozptyl zisku hráča:

Európska ruleta:

$$var\ X = (6n)^2\ \frac{3}{37} + (3n)^2\ \frac{5}{37} + (2n)^2\ \frac{3}{37} + n^2\ \frac{2}{37} + 0 + \\ +(-n)^2\frac{5}{37} + (-2n)^2\frac{14}{37} + (-4n)^2\ \frac{3}{37} - (-0{,}11\ n)^2\ = 7{,}45\ n^2. \tag{3.4.5}$$

Americká ruleta:

$$var\ Y = (6n)^2\ \frac{3}{38} + (3n)^2\ \ \frac{5}{38} + (2n)^2\ \frac{3}{38} + n^2\frac{2}{38} + 0 + \\ +(-n)^2\frac{5}{38} + (-2n)^2\ \frac{14}{38} + (-4n)^2\frac{4}{38} - (-0{,}21\ n)^2\ = 7{,}64\ n^2. \tag{3.4.6}$$

Medián:

Európska ruleta:

$$\tilde{x} = F_x^{-1}(0{,}5) = -\,n\,. \tag{3.4.7}$$

Americká ruleta:

$$\tilde{y} = F_y^{-1}(0{,}5) = -\,n\,. \tag{3.4.8}$$

	$Q_{0,10}$	$Q_{0,25}$	$Q_{0,40}$	$Q_{0,50}$	$Q_{0,60}$	$Q_{0,75}$	$Q_{0,90}$
n.v. X	$-2\ n$	$-2\ n$	$-2\ n$	$-n$	0	$2\ n$	$3\ n$
n.v. Y	$-4\ n$	$-2\ n$	$-2\ n$	$-n$	$-n$	$2\ n$	$3\ n$

Tab. 3.4.2: Hodnoty vybraných kvantilov náhodných veličín X a Y

3.5 Systém John Wayne

Tento systém používal v kasínach herec John Wayne, ktorý ho neskôr opísal vo svojej biografii. Vsadíme 10 n žetónov, $n \in N$:

- po n žetónoch na ľubovoľné dve čísla v strednom rade, ktorých vzdialenosť od seba v strednom stĺpci je aspoň dve políčka
- po n žetónoch na rohy týchto čísel

Pravdepodobnosť výhry v systéme:

$$p_E = \frac{18}{37} = 0{,}49\,, \qquad p_A = \frac{18}{38} = 0{,}47\,. \tag{3.5.1}$$

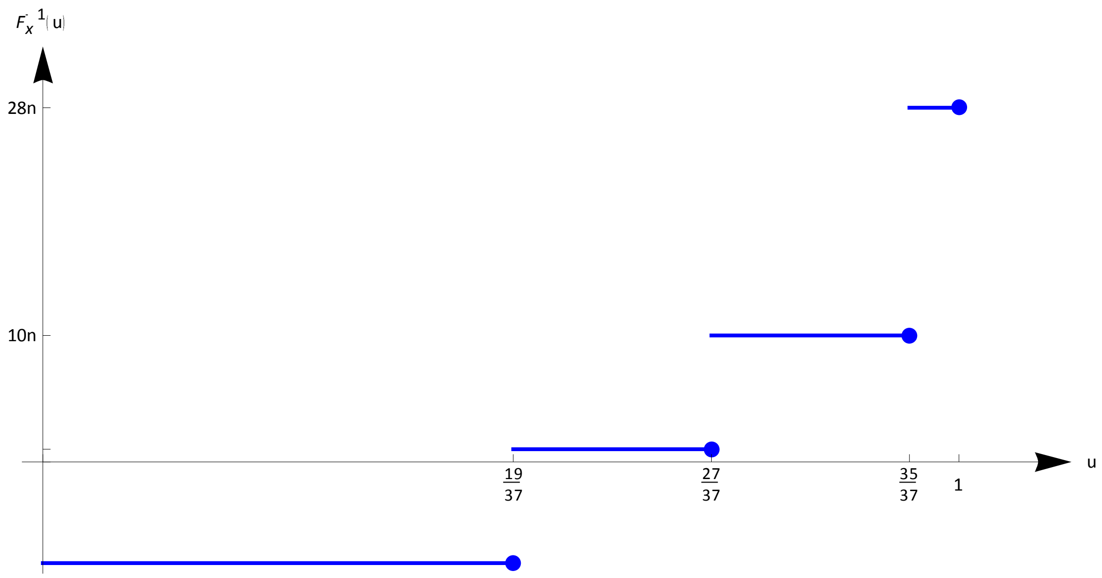
Pravdepodobnosť ruinovania hráča:

$$1 - p_E = 1 - \frac{18}{37} = 0{,}51\,, \qquad 1 - p_A = 1 - \frac{18}{38} = 0{,}53\,. \tag{3.5.2}$$

Rozdelenie zisku:

	Pravdepodobnosť výhry	
Zisk	Európska ruleta	Americká ruleta
$-8\,n$	$P[X = -8\,n] = 19/37$	$P[Y = -8\,n] = 20/38$
n	$P[X = n] = 8/37$	$P[Y = \ n] = 8/38$
$10\,n$	$P[X = 10\,n] = 8/37$	$P[Y = 10\,n] = 8/38$
$28\,n$	$P[X = 28\,n] = 2/37$	$P[Y = 28\,n] = 2/38$

Tab. 3.5.1: Rozdelenie zisku v systéme Johna Wayna



Obr. 3.5.1: Kvantilová funkcia náhodnej veličiny X

Stredná hodnota zisku hráča:

Európska ruleta:

$$EX = n\,\frac{8}{37} + 10n\,\frac{8}{37} + 28n\,\frac{2}{37} - 8n\,\frac{19}{37} = -0{,}22\,n\,. \tag{3.5.3}$$

Americká ruleta:

$$EY = n\,\frac{8}{38} + 10n\,\frac{8}{38} + 28n\,\frac{2}{38} - 8n\,\frac{20}{38} = -0{,}42\,n\,. \tag{3.5.4}$$

Rozptyl zisku hráča:

Európska ruleta:

$$var\,X = n^2\,\frac{8}{37} + (10n)^2\,\frac{8}{37} + (28n)^2\,\frac{2}{37} + (-8n)^2\,\frac{19}{37} - \\ -(-0{,}22\,n)^2 = 97{,}03\,n^2. \tag{3.5.5}$$

Americká ruleta:

$$var\,Y = n^2\,\frac{8}{38} + (10n)^2\,\frac{8}{38} + (28n)^2\,\frac{2}{38} + (-8n)^2\,\frac{20}{38} - \\ -(-0{,}42\,n)^2 = 96{,}03\,n^2. \tag{3.5.6}$$

Medián:

Európska ruleta:

$$\tilde{x} = F_x^{-1}(0{,}5) = -\,8\,n\,. \tag{3.5.7}$$

Americká ruleta:

$$\tilde{y} = F_y^{-1}(0{,}5) = -8\,n\,. \tag{3.5.8}$$

	$Q_{0,10}$	$Q_{0,25}$	$Q_{0,40}$	$Q_{0,50}$	$Q_{0,60}$	$Q_{0,75}$	$Q_{0,90}$
n.v. X	$-8\,n$	$-8\,n$	$-8\,n$	$-8\,n$	n	$10\,n$	$10\,n$
n.v. Y	$-8\,n$	$-8\,n$	$-8\,n$	$-8\,n$	n	$10\,n$	$10\,n$

Tab. 3.5.2: Hodnoty vybraných kvantilov náhodných veličín X a Y

3.6 Porovnanie systémov pre jedno kolo rulety

	Vstupný kapitál	p_E	EX	$\tilde{x}$
Bondova stávka	$20\ n$	$0{,}68$	$-5{,}4\ n$	$8\ n$
Shaunov systém	$33\ n$	$0{,}89$	$-\ 0{,}89\ n$	$3\ n$
Systém siedmich rohov	$7\ n$	$0{,}73$	$-0{,}19\ n$	$2\ n$
Dámska ruleta	$4\ n$	$0{,}92$	$-0{,}11\ n$	$-\ n$
Systém John Wayne	$10\ n$	$0{,}49$	$-0{,}22\ n$	$-\ 8\ n$

Tab. 3.6.1: Porovnanie systémov z kapitoly 3

Hráčom, ktorý by si chceli skúsiť zahrať ruletu bez veľkého risku by sme odporučili určite systém Dámska ruleta. Ide o najpriaznivejšiu stratégiu podľa pravdepodobnosti výhry a podľa strednej hodnoty zisku. Je to tiež systém, na ktorý je potrebný najmenší vstupný kapitál, takže by začínajúci hráči neprišli o veľa žetónov.

Hráčom, ktorý prišli na ruletu s cieľom čo najväčšieho zisku by sme zase odporučili systém Bondova stávka. Je to najlepšia stratégia z hľadiska mediánov a kvantilov. Záporný zisk $-20\ n$ je realizovateľný s pravdepodobnosťou $13/38$, ďalšie možné zisky sú už však kladné a vysoké ($8\ n$ atď., viď. Tab. 3.1.1).

Z ostatných systémov treba spomenúť Shaunov systém. Má veľmi vysokú pravdepodobnosť výhry, stredná hodnota zisku, medián a ostatné vybrané kvantily sú v porovnaní s ostatnými stratégiami tiež priaznivé. Jeho jedinou nevýhodou je len to, že k nemu potrebujeme najväčší vstupný kapitál spomedzi týchto systémov.

Všetky tieto stratégie sú však dlhodobo prehrávajúce. Dokazuje nám to záporná stredná hodnota zisku.

4 Systémy rulety na viac kôl

4.1 Dubins-Savage

Tento ruletný systém navrhli Dubins a Savage. Pripomína modifikáciu systému Martingale, ktorý je uvedený v kapitole 4.2. Hráč má 900 korún, jeho cieľom je získať 1000. Vsádza vždy na farbu. Počiatočný vklad je 100, v prípade prehry stávku zdvojnásobí. Ak už nemá dosť peňazí na zdvojnásobenie, vsádza všetko čo mu ostalo.

Značenie:

p $\overset{\text{def}}{=}$ pravdepodobnosť výhry v jednom kole rulety

q $\overset{\text{def}}{=}$ pravdepodobnosť prehry v jednom kole rulety

$h(9)$ $\overset{\text{def}}{=}$ pravdepodobnosť, že hráč dosiahol 1000 korún, ak má k dispozícii 900

$h(8)$ $\overset{\text{def}}{=}$ pravdepodobnosť, že hráč dosiahol 1000 korún, ak má k dispozícii 800

Analogicky definujeme $h(7)$ a tak ďalej.

$m(9)$ $\overset{\text{def}}{=}$ stredná hodnota počtu hier, ak má hráč 900 korún

$m(8)$ $\overset{\text{def}}{=}$ stredná hodnota počtu hier, ak má hráč 800 korún

Analogicky definujeme $m(7)$ a tak ďalej.

Počítame:

$$\begin{aligned} h(9) &= p + q\,h(8) \\ &= p + q\big(p + q\,h(6)\big) \\ &= p + pq + q^2\big(p + q\,h(2)\big) \\ &= p + pq + pq^2 + q^3(p * h(4) + q * 0) \\ &= p + pq + pq^2 + pq^3(p\,h(8) + q * 0)\,. \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Z rovnosti $p + q\,h(8) = p + pq + pq^2 + p^2q^3\,h(8)$, vieme vypočítať $h(8)$ a podľa $h(8)$) si vyjadríme $h(9)$:

$$h(8) = \frac{p(1+q)}{1-p^2q^2}, \tag{4.1.2}$$

$$h(9) = p + q\,\frac{p(1+q)}{1-p^2q^2}\,. \tag{4.1.3}$$

Pravdepodobnosti výhry v DS stratégii:

Európska ruleta:

$$h(9) = 0{,}89\,. \tag{4.1.4}$$

Americká ruleta:

$$h(9) = 0{,}88\,. \tag{4.1.5}$$

Pravdepodobnosti zruinovania hráča v DS stratégii:

Európska ruleta:

$$1 - h(9) = 0{,}11\,. \tag{4.1.6}$$

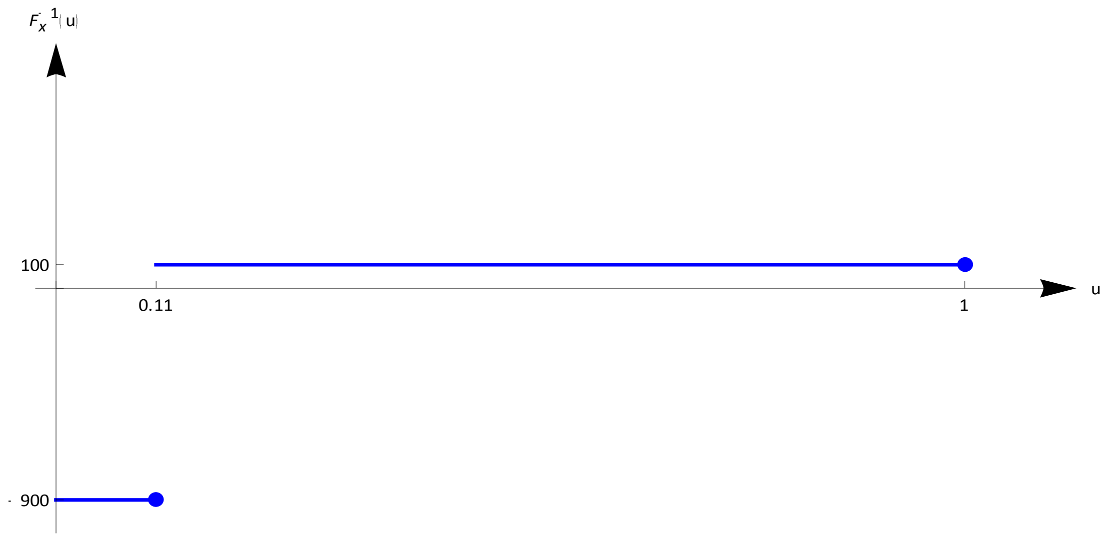
Americká ruleta:

$$1 - h(9) = 0{,}12\,. \tag{4.1.7}$$

Rozdelenie zisku:

	Pravdepodobnosť výhry	
Zisk	Európska ruleta	Americká ruleta
-900	$P[X = -900] = 0{,}11$	$P[Y = -900] = 0{,}12$
100	$P[X = 100] = 0{,}89$	$P[Y = 100] = 0{,}88$

Tab. 4.2.1: Rozdelenie zisku v DS stratégii



Obr. 4.1.1. Kvantilová funkcia náhodnej veličiny X

Stredná hodnota zisku hráča:

Hráč vyhrá 100 korún s pravdepodobnosťou p a prehrá všetko čo mal, čo je 900 korún s pravdepodobnosťou q. Stredná hodnota výhry sa teda vypočíta podľa vzorca $100\,p - 900\,q$.

Európska ruleta:

$$EX = 100 * 0{,}89 - 900 * 0{,}11 = -10\,. \tag{4.1.8}$$

Americká ruleta:

$$EY = 100 * 0{,}88 - 900 * 0{,}12 = -20\,. \tag{4.1.9}$$

Rozptyl zisku hráča:

Európska ruleta:

$$var\,X = 100^2 * 0{,}89 + (-900)^2 * 0{,}11 - (-10)^2 = 97900\,. \tag{4.1.10}$$

Americká ruleta:

$$var\,Y = 100^2 * 0{,}88 + (-900)^2 * 0{,}12 - (-20)^2 = 105600\,. \tag{4.1.11}$$

Medián:

Európska ruleta:

$$\tilde{x} = F_x^{-1}(0{,}5) = 100\,. \tag{4.1.12}$$

Americká ruleta:

$$\tilde{y} = F_y^{-1}(0{,}5) = 100\,. \tag{4.1.13}$$

	$Q_{0,10}$	$Q_{0,25}$	$Q_{0,40}$	$Q_{0,50}$	$Q_{0,60}$	$Q_{0,75}$	$Q_{0,90}$
n.v. X	-900	100	100	100	100	100	100
n.v. Y	-900	100	100	100	100	100	100

Tab. 4.1.2: Hodnoty vybraných kvantilov náhodných veličín X a Y

Stredná hodnota počtu hier:

Počítame:

$$
\begin{aligned}
m(9) &= 1 + q\, m(8) \\
&= 1 + q(1 + q\, m(6)) \\
&= 1 + q + q^2(1 + q\, m(2)) \\
&= 1 + q + q^2 + q^3(1 + p\, m(4)) \\
&= 1 + q + q^2 + q^3 + pq^3(1 + p\, m(8))
\end{aligned}
\tag{4.1.14}
$$

Z rovnosti $1 + q\, m(8) = 1 + q + q^2 + q^3 + pq^3 + p^2q^3\, m(8)$ vieme vyjadriť $m(8)$ a odtiaľ už aj $m(9)$:

$$m(8) = \frac{1 + q + q^2 + pq^2}{1 - p^2q^2}, \tag{4.1.15}$$

$$m(9) = 1 + q\, \frac{1 + q + q^2 + pq^2}{1 - p^2q^2}. \tag{4.1.16}$$

Európska ruleta:

$$m(9) = 2{,}04\,. \tag{4.1.17}$$

Americká ruleta:

$$m(9) = 2{,}09\,. \tag{4.1.18}$$

Záver:

Stratégia Dubins-Savage je stratégia s najpriaznivejšou pravdepodobnosťou výhry pre hráča, ktorý má 900 korún a chce odísť s 1000 korunami. Na porovnanie si môžeme zobrať príklad 2.1, kde mal hráč rovnaké vstupné podmienky ako v DS stratégii (prišiel s 900 korunami a s cieľom zisku 100 korún) a vsádzal vždy na farbu po jednej korune. Uvažujme európsku ruletu.

Pre porovnanie:

Pravdepodobnosť zisku 100 korún cez stratégiu DS: 0,89.

Pravdepodobnosť zisku 100 korún cez stratégiu z príkladu 2.1: 0,0045.

Stredná doba počtu kôl rulety sa tiež veľmi líši, v DS padne rozhodnutie priemerne v druhej hre, zatiaľ čo v stratégii z príkladu 2.1 na to potrebujeme priemerne až 33 134 kôl.

4.2 Systém Martingale

Táto najznámejšia ruletná stratégia je pomenovaná po majiteľovi kasína v Londýne, ktorý nabádal hráčov aby zdvojnásobovali vklady, až sa mu to jedného dňa nevyplatilo a jeho kasíno zbankrotovalo. Táto stratégia priniesla šťastie Charlesovi Wellsovi, ktorý vďaka nej rozbil bank v Monte Carle za tri dni.

Princíp stratégie

V tejto stratégii si hráč vyberie červenú, alebo čiernu farbu a stále vsádza na ňu (prípadne párne vs. nepárne čísla alebo malé vs. veľké čísla). Hráč si najprv určí, koľko chce, aby činil jeho zisk. Ak chce zisk n žetónov, musí staviť v prvom kole n žetónov. V prípade prehry stávku opakuje, ale s dvojnásobným vkladom ($2\,n$), v prípade prehry opäť zdvojnásobí. V prípade výhry končí. Predpokladajme, že má hráč počet žetónov potrebných na $(k_0 + 1)$ kôl rulety, kde $k_0 \in N$ a zároveň $k_0 > 1$.

Značenie:

Z $\stackrel{\text{def}}{=}$ počet žetónov, ktorými disponuje hráč

p $\stackrel{\text{def}}{=}$ pravdepodobnosť výhry v jednom kole rulety

q $\stackrel{\text{def}}{=}$ pravdepodobnosť prehry v jednom kole rulety

$h(Z)$ $\stackrel{\text{def}}{=}$ pravdepodobnosť, že hráč dosiahol $(Z + n)$ žetónov, ak mal Z žetónov

$h(Z - n)$ $\stackrel{\text{def}}{=}$ pravdepodobnosť, že hráč dosiahol $(Z + n)$ žetónov, ak mal $(Z - n)$ žetónov

Analogicky definujeme $h\left(Z - \sum_{k=0}^{l} 2^k\, n\right)$, pre $l = 1, \dots, k_0$ a tak ďalej.

$m(Z)$ $\stackrel{\text{def}}{=}$ stredná hodnota počtu hier, ak má hráč Z žetónov

$m(8)$ $\stackrel{\text{def}}{=}$ stredná hodnota počtu hier, ak má hráč $(Z - n)$ žetónov

Analogicky definujeme $m\left(Z - \sum_{k=0}^{l} 2^k\, n\right)$, pre $l = 1, \dots, k_o$ a tak ďalej.

Podľa predpokladu, že má hráč k dispozícii počet žetónov na $(k_0 + 1)$ kôl vypočítame Z:

$$Z = \sum_{k=0}^{k_0} 2^k\, n\,. \qquad (4.2.1)$$

Počítame:

$$
\begin{aligned}
h(Z) &= p + q\,h\left(Z - \sum_{k=0}^{0} 2^k\, n\right) \\
&= p + q\left(p + q\,h\left(Z - \sum_{k=0}^{1} 2^k\, n\right)\right) \\
&\;\vdots \\
&= p + \left(\sum_{k=1}^{k_0-1} pq^k\right) + q^{k_0}\big(p + q\,h(0)\big) \\
&= p + \sum_{k=1}^{k_0} pq^k\,.
\end{aligned}
\tag{4.2.2}
$$

Pravdepodobnosti výhry v systéme Martingale:

Európska ruleta:

$$
h(Z) = \frac{18}{37} + \sum_{k=1}^{k_0} \frac{18}{37}\left(\frac{19}{37}\right)^k . \tag{4.2.3}
$$

Americká ruleta:

$$
h(Z) = \frac{18}{38} + \sum_{k=1}^{k_0} \frac{18}{38}\left(\frac{20}{38}\right)^k . \tag{4.2.4}
$$

Pravdepodobnosti zruinovania hráča v systéme Martingale:

Európska ruleta:

$$
1 - h(Z) = 1 - \frac{18}{37} - \sum_{k=1}^{k_0} \frac{18}{37}\left(\frac{19}{37}\right)^k = \frac{19}{37} - \sum_{k=1}^{k_0} \frac{18}{37}\left(\frac{19}{37}\right)^k . \tag{4.2.5}
$$

Americká ruleta:

$$
1 - h(Z) = 1 - \frac{18}{38} - \sum_{k=1}^{k_0} \frac{18}{38}\left(\frac{20}{38}\right)^k = \frac{20}{38} - \sum_{k=1}^{k_0} \frac{18}{38}\left(\frac{20}{38}\right)^k . \tag{4.2.6}
$$

Rozdelenie zisku:

Hráč vyhrá n žetónov s pravdepodobnosťou $h(Z)$, vypočítanú zo vzorca (4.2.2) a prehrá všetko čo mal, teda $Z = \sum_{k=0}^{k_0} 2^k\ n$ s pravdepodobnosťou $1 - h(Z)$.

	Pravdepodobnosť výhry	
Zisk	Európska ruleta	Americká ruleta
$-\sum_{k=0}^{k_0} 2^k\ n$	$P[X = -\sum_{k=0}^{k_0} 2^k\ n] = \frac{19}{37} - \sum_{k=1}^{k_0} \frac{18}{37} \left(\frac{19}{37}\right)^k$	$P[Y = -\sum_{k=0}^{k_0} 2^k\ n] = \frac{20}{38} - \sum_{k=1}^{k_0} \frac{18}{38} \left(\frac{20}{38}\right)^k$
n	$P[X = n] = \frac{18}{37} + \sum_{k=1}^{k_0} \frac{18}{37} \left(\frac{19}{37}\right)^k$	$P[Y = n] = \frac{18}{38} + \sum_{k=1}^{k_0} \frac{18}{38} \left(\frac{20}{38}\right)^k$

Tab. 4.2.1: Rozdelenie zisku v systéme Martingale

Stredná hodnota zisku hráča:

Európska ruleta:

$$EX = \left(\sum_{k=1}^{k_0} \frac{18}{37} \left(\frac{19}{37}\right)^k\right)\left(n - \sum_{k=0}^{k_0} 2^k\, n\right) + \frac{18}{37} n + \frac{19}{37} \sum_{k=0}^{k_0} 2^k\, n\,. \qquad (4.2.7)$$

Americká ruleta:

$$EY = \left(\sum_{k=1}^{k_0} \frac{18}{38} \left(\frac{20}{38}\right)^k\right)\left(n - \sum_{k=0}^{k_0} 2^k\, n\right) + \frac{18}{38} n + \frac{20}{38} \sum_{k=0}^{k_0} 2^k\, n\,. \qquad (4.2.8)$$

Medián a tabuľku kvantilov by sme dopočítali pre už konkrétne k_0.

Stredná hodnota počtu hier:

Počítame:

$$\begin{aligned} m(Z) &= 1 + q\, h\left(Z - \sum_{k=0}^{0} 2^k\, n\right) \\ &= 1 + q\left(1 + q\, h\left(Z - \sum_{k=0}^{1} 2^k\, n\right)\right) \\ &\ \vdots \end{aligned} \qquad (4.2.9)$$

$$= 1 + \left(\sum_{k=1}^{k_0 - 1} q^k \right) + q^{k_0} \big(1 + q\, h(0)\big)$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{k_0} q^k\,.$$

Európska ruleta:

$$m(Z) = 1 + \sum_{k=1}^{k_0} \left(\frac{19}{37}\right)^k. \qquad (4.2.10)$$

Americká ruleta:

$$m(Z) = 1 + \sum_{k=1}^{k_0} \left(\frac{20}{38}\right)^k. \qquad (4.2.11)$$

Záver

Martingale sa síce javí ako priaznivá stratégia, avšak rýchly exponenciálny rast vsadení po sebe idúcich prehier vedie k bankrotu hráča vlastniaceho konečné finančné prostriedky, prípadne môže hráč naraziť na horný strop vsadenia kasína a nemôže vsadiť toľko, koľko by už potreboval.

5 Teoretický príklad

5.1 Príklad 1

Cieľom prvého príkladu je nájsť odhad strednej hodnoty najdlhšieho sledu červenej, príp. čiernej farby pre $100\ k$ hodov rulety, kde $k \in 1, 2, 3 \dots, 50$. Pomocou programu Wolfram Mathematica 8 budeme generovať 20 000 pokusov pre $100\ k$ hodov rulety. Najprv hádžeme ruletou 20 000 krát pre sto hodov. Hodíme ruletu sto krát a zapíšeme si dĺžku najdlhšieho sledu červenej (čiernej) farby, hodíme ruletu zase sto krát a zapíšeme si rovnaký údaj. Dokopy tak budeme mať 20 000 čísel a z nich vypočítame strednú hodnotu najdlhšieho sledu červenej (čiernej) farby pre 100 hodov rulety. Rovnako budeme postupovať v prípade 200, 300 a postupne až 5000 hodov.

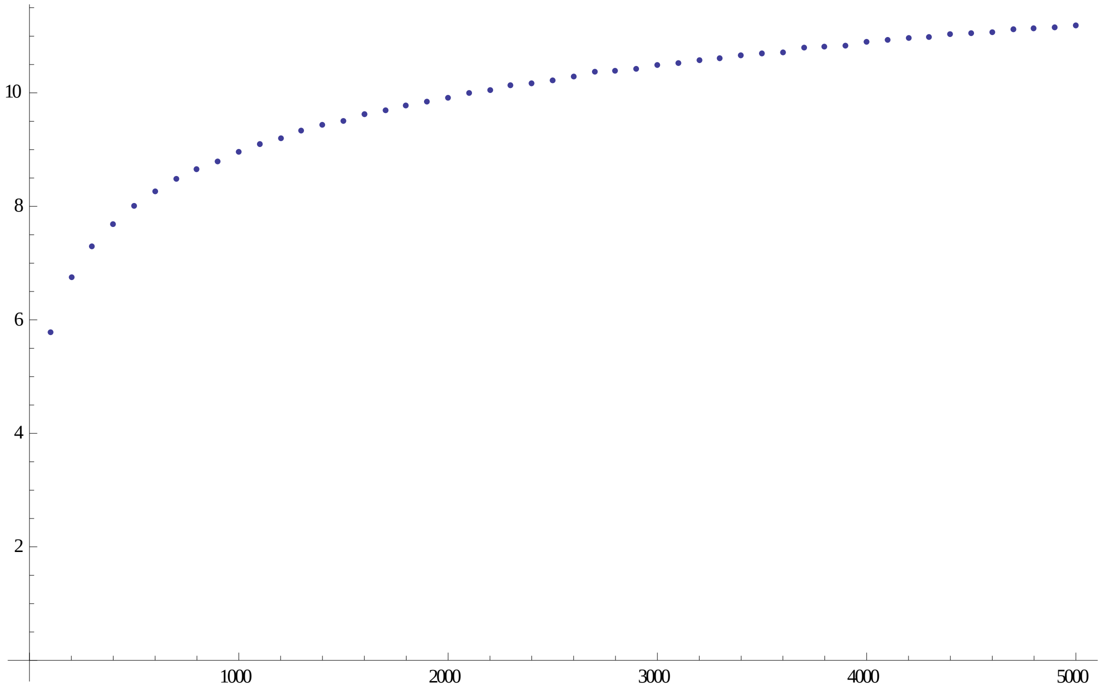
Uvažujme európsku ruletu. Vygenerované odhady strednej hodnoty najdlhšieho sledu červenej (čiernej) farby postupne pre 100, 200, ..., 5000 hodov rulety:

$$\begin{gathered} 5{,}78275\,,\ \ 6{,}7472\,,\ \ 7{,}29685\,,\ \ 7{,}6872\,,\ \ 8{,}00625\,, \\ 8{,}26895\,, 8{,}4913\,,\ \ 8{,}6542\,,\ \ 8{,}7964\,,\ \ 8{,}9617, \\ 9{,}0947,\ \ 9{,}2013\,,\ \ 9{,}34125\,, 9{,}43735\,,\ \ 9{,}49745\,, \\ 9{,}62335\,,\ \ 9{,}69455\,,\ \ 9{,}7712\,,\ \ 9{,}8461\,, 9{,}91155\,, \\ 10\,,\ \ 10{,}05675\,,\ \ 10{,}12905\,,\ \ 10{,}16845\,,\ \ 10{,}2279\,, \\ 10{,}28255\,,\ \ 10{,}366\,,\ \ 10{,}39225\,,\ \ 10{,}4249\,,\ \ 10{,}4864\,, \\ 10{,}52105\,,\ \ 10{,}5721\,,\ \ 10{,}61445\,,\ \ 10{,}65875\,,\ \ 10{,}69995, \\ 10{,}7208\,,\ \ 10{,}7974\,,\ \ 10{,}8069\,,\ \ 10{,}83285\,,\ \ 10{,}8969\,, \\ 10{,}9373\,,\ \ 10{,}96015\,,\ \ 10{,}98315\,,\ \ 11{,}0315\,,\ \ 11{,}05885\,, \\ 11{,}06695\,,\ \ 11{,}12185\,,\ \ 11{,}1459\,,\ \ 11{,}1527\,,\ \ 11.18825\,. \end{gathered} \tag{5.1.1}$$

Z podkapitoly 2.2 mala aproximovaná krivka strednej hodnoty najdlhšieho sledu farby logaritmický tvar a taktiež by sme o tom mohli diskutovať z tvaru odhadnutých dát v grafe 5.1.1. Budeme teda odhadovať krivku strednej hodnoty najdlhšieho sledu farby pomocou funkcie:

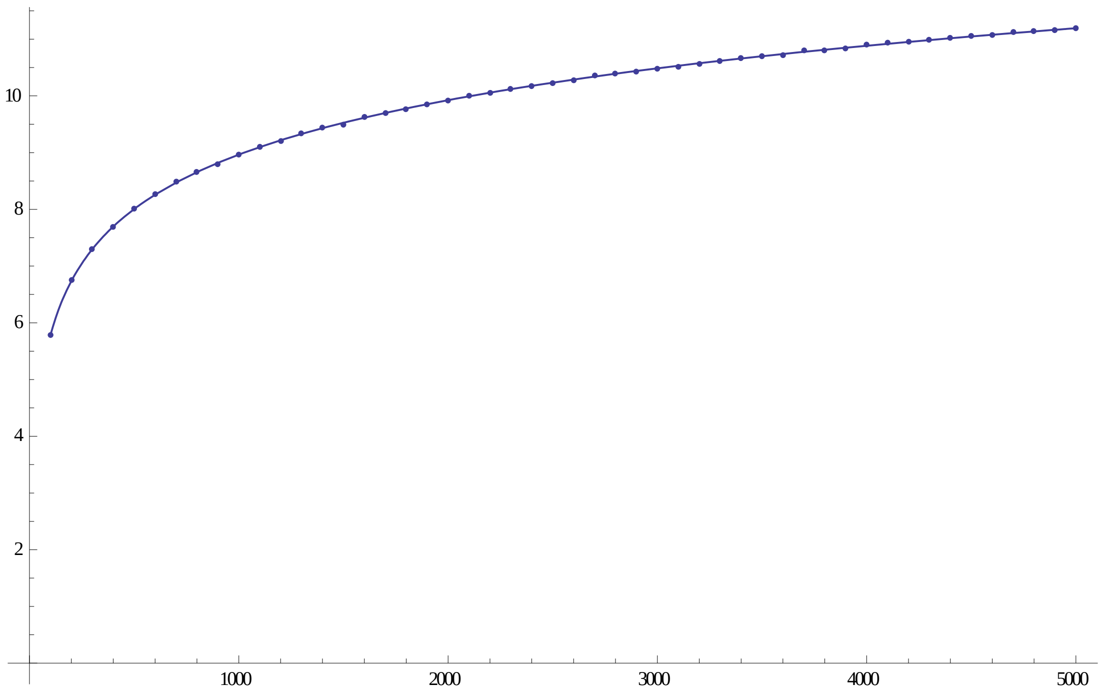
$$f_N = A \log N + B\,, \tag{5.1.2}$$

kde N je prirodzené číslo a $A, B \in R$ sú reálne konštanty.



Obr. 5.1.1: Odhadnuté stredné hodnoty najdlhšieho sledu farby pre 100, 200, ..., 5000 hodov rulety

Pomocou funkcie Fit v programe Wolfram Mathematica 8 preložíme funkciu zo vzorca (5.1.2) dátami (5.1.1). Funkcia Fit sa riadi metódou najmenších štvorcov a po jej použití sme získali nasledujúci graf a odhady.



Obr. 5.1.2: Odhadnuté dáta zo vzorca (5.1.1) preložené logaritmickou krivkou pomocou metódy najmenších štvorcov

Odhadnuté konštanty A, B:

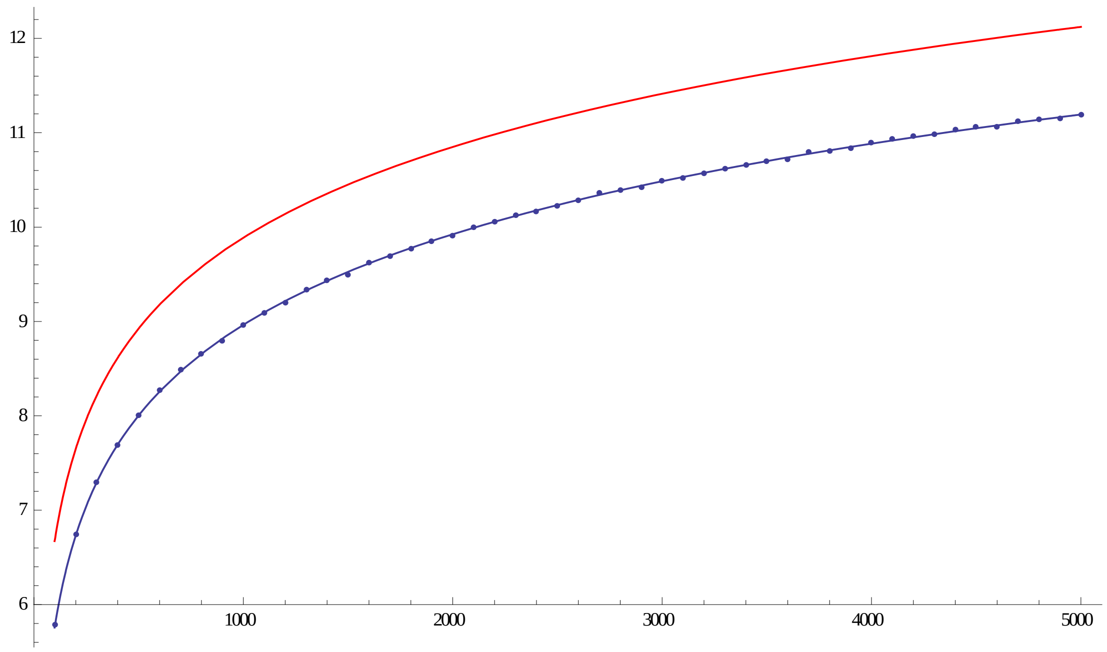
$$A = 1{,}38442, \qquad B = -0{,}598308 \tag{5.1.3}$$

a teda odhad funkcie zo vzorca (5.1.2) má tvar:

$$f_N = 1{,}38442\ \log N - 0{,}598308\,, \tag{5.1.4}$$

pre N prirodzené.

Porovnanie z funkciou z literatúry:

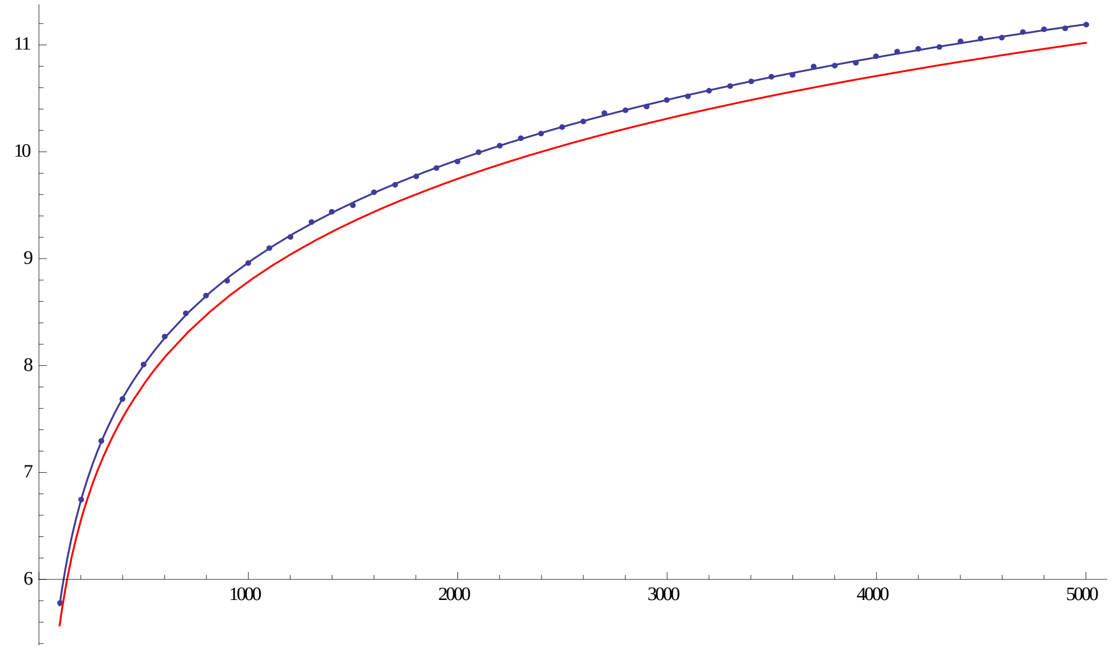


Obr. 5.1.3: Porovnanie aproximácie zo vzorca (2.2.12) (vyznačená červenou farbou) a našej odhadnutej funkcie zo vzorca (5.1.4) (vyznačená modrou)

Ak by sme vo funkcii z literatúry (vzorec (2.2.12)) odstránili Shepardovu opravu kvôli spojitosti (čiže zo vzorca (2.2.12) by sme odstránili -1/2), funkcia by vyzerala:

$$E[Z_N] \approx \frac{-\log N}{\log p} - \frac{\tilde{a}}{\log p}\ . \tag{5.1.5}$$

Po odstránení Shepardovej opravy sú rozdiely medzi funkciami (5.1.4) a (5.1.5) veľmi nízke, v skúmaných bodoch 100, 200, … 5000 sa líšia v priemere len o 0,176875.



Obr. 5.1.4: Porovnanie aproximácie zo vzorca (5.1.5) (červená farba)

a našej odhadnutej krivky zo vzorca (5.1.4) (modrá farba)

5.2 Príklad 2

Chceme ísť na ruletu skúsiť stratégiu Martingale s 31 žetónmi. V tomto príklade budeme používať značenie z podkapitoly 4.2. Keď má byť prvé vsadenie rovné jednému žetónu, vieme si zo vzorca (4.2.1) odvodiť, že nám to má vydržať na 5 kôl rulety, a teda:

$$k_0 = 4\,. \tag{5.2.1}$$

Keďže sme v Prahe nenašli nikde ruletu, ktorá by bola európska a zároveň nie elektronická, uvažujeme preto americkú ruletu. Pravdepodobnosti p, q sú teda rovné:

$$p = \frac{18}{38}\,, \qquad q = \frac{20}{38}\,. \tag{5.2.2}$$

Pravdepodobnosť našej výhry (zisku jedného žetónu) je podľa vzorca (4.2.4) rovná:

$$h(31) = \frac{18}{38} + \sum_{k=1}^{4} \frac{18}{38}\left(\frac{20}{38}\right)^k = 0{,}95\,. \tag{5.2.3}$$

Strednú hodnotu počtu hier vypočítame zo vzorca (4.2.11):

$$m(31) = 1 + \sum_{k=1}^{4} \left(\frac{20}{38}\right)^{k} = 2{,}03\,. \tag{5.2.4}$$

Budeme vsádzať na červenú farbu, preto si vypočítame strednú hodnotu najdlhšieho sledu "nečervenej" (čierna a zelená). Spočítame to podľa upravenej aproximácie zo vzorca (5.1.5):

$$E[Z_5] \approx \frac{-\log 5}{\log(\frac{20}{38})} - \frac{\tilde{a}}{\log(\frac{20}{38})} = 3{,}4\ , \tag{5.2.5}$$

čo znamená, že by sa nám s 31 žetónmi mohlo vydržať prečkať prípadný neúspešný sled nečervenej farby.

Výsledky:

Vysoká pravdepodobnosť výhry nesklamala. Červené číslo padlo v treťom kole, takže sme odišli po treťom kole rulety so ziskom jedného žetónu. Padli konkrétne čísla:

- 17 (čierne)
- 8 (čierne)
- 21 (červené)

Záver

V tejto práci bolo spracovaných sedem ruletných stratégií vyberaných podľa najvyššej pravdepodobnosti výhry, prípadne podľa relatívne nízkeho kapitálu na vsadenie a veľkého potencionálneho zisku. Stratégie sme navzájom aj porovnali a to ohľadne pravdepodobnosti výhry, ruinovania hráča, strednej hodnoty a rozptylu zisku a taktiež podľa vybraných kvantilov. Záverom sledovania týchto systémov je okrem výpočtov aj zistenie, že v rulete neexistuje žiadna vyhrávajúca stratégia. Jednorázové pravdepodobnosti výhry sú síce vysoké, ale záporná stredná hodnota zisku nám ukazuje že dlhodobo sú prehrávajúce. Spôsobuje to zavedená nula, v americkej rulete navyše dvojitá nula, ktoré vychyľujú pravdepodobnosť v prospech prevádzkovateľa rulety, kasína.

V prvom príklade bola overená stredná hodnota najdlhšieho sledu červenej (prípadne čiernej) farby, ktorú sme dostali z teórie podkapitoly 2.2. Našli sme presnejšiu aproximáciu, odhadnutú z generovania 20 000 kôl rulety v programe Wolfram Mathematica 8.

Druhý príklad je len pre zaujímavosť, záznam z kasína, kde sme boli vyskúšať stratégiu Martingale.

Predmetom ďalšieho štúdia rulety ako matematickej úlohy by mohlo byť využitie jej stratégií na burze. Súčasne zaužívaná stratégia hlavne medzi začínajúcimi brokermi je systém Martingale Money Management. Ide o ten istý systém Martingale z podkapitoly 4.2, len modifikovaný na burzu. Záujemci nájdu viac o tomto systéme v publikácii [5].

Zoznam použitej literatúry

[1] ANDĚL, Jiří. *Matematika náhody*. Praha: MATFYZPRESS, 2003. s. 43 – 48.

[2] BINSWANGER, Klemens; EMBRECHTS, Paul. *Longest runs in coin tossing*. Zürich: INSURANCE: MATHEMATICS AND ECONOMICS 5, 1994. s. 139 – 149.

[3] *A-ruleta.cz* [online]. [cit. 2011-07-11]. Systémy rulety. Dostupné z www: <http://a-ruleta.cz>.

[4] Ruleta. In *Wikipedia : the free encyclopedia* [online]. Wikipedia Foundation, [cit. 2011-07-11]. Dostupné z www: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Ruleta>.

[5] *Money Management profesionálů* [online]. [cit. 2011-07-22]. Money Management. Dostupné z www: < http://www.financnik.cz/komodity/zkusenosti/money-management2.html>.

[6] *Wolfram Mathematica 8:* Documentation Centre.

Prílohy

Na priloženom CD sa nachádzajú nasledujúce dokumenty:

- Bakalárka práca (v pdf)
- Zdrojové kódy grafov a príkladov v programe Wolfram Mathematica 8