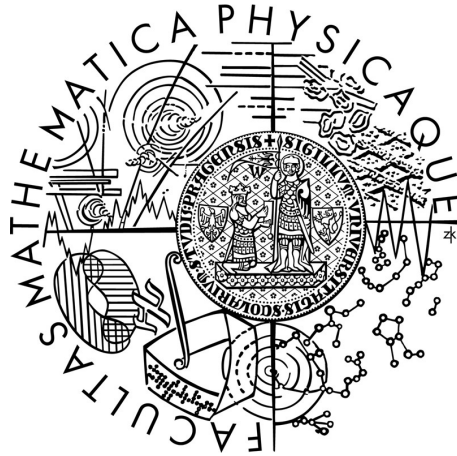


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Jakub Marčiny

Grangerova kauzalita ve finančních časových řadách

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Jan Voříšek

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2011

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucímu své bakalářské práce Mgr. Janu Voříškovi za jeho užitečné postřehy, čas strávený konzultacemi a celkovou vstřícnost během psaní bakalářské práce.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 5. 8. 2011

Jakub Marčiny

Název práce: Grangerova kauzalita ve finančních časových řadách

Autor: Jakub Marčiny

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Jan Voříšek, Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Bakalářská práce pojednává o příčinnosti ve vícerozměrných časových řadách. Ke studiu vzájemného vlivu složek vícerozměrných časových řad využívá Grangerovu kauzalitu a její obecnější varianty, kterými jsou okamžitá a více kroková kauzalita. Tyto pojmy jsou zkoumány v kontextu vektorových autoregresních modelů VAR. Po zavedení základní terminologie je popsána konstrukce takového modelu včetně identifikace řádu a diagnostických metod. Následně jsou zkoumány příslušné kauzální vazby v rámci vybudovaného modelu. Teoretická část práce je doplněna empirickou analýzou reálných tržních dat, provedenou pomocí vlastní implementace testovacích procedur v programu *Mathematica*.

Klíčová slova: Grangerova kauzalita, vektorové autoregresní procesy, vícerozměrné časové řady

Title: Granger's causality in financial time series

Author: Jakub Marčiny

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Jan Voříšek, Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: The bachelor thesis discusses causality in multiple time series. Granger causality, along with its more general counterparts instantaneous causality and multistep causality, are utilized to study the mutual influence of the individual components of a multiple time series. These concepts are investigated within the framework of vector autoregressive models VAR. After the introduction of basic definitions and facts, the construction of VAR model is described including methods for order selection and verification. Subsequently, causal relations within the model are examined. Finally, empirical analysis of real financial market data is performed using tests procedures programmed with computational software *Mathematica*.

Keywords: Granger causality, vector autoregressive processes, multiple time series

Obsah

Úvod	2
1 Základní pojmy	3
1.1 Vícerozměrné časové řady	3
1.2 Vektorové autoregresní procesy	3
2 Konstrukce modelu VAR(p)	6
2.1 Odhad parametrů modelu	6
2.1.1 Metoda nejmenších čtverců	6
2.1.2 Metoda maximální věrohodnosti	8
2.2 Identifikace řádu modelu	9
2.2.1 Test založený na věrohodnostním poměru	9
2.2.2 Informační kritéria	10
2.3 Diagnostika modelu	10
2.3.1 Bartlettova aproximace	11
2.3.2 Portmanteau test	11
2.3.3 Breusch-Godfreyův test	12
2.3.4 Jarque-Berův test	12
2.4 Předpovědi v modelu	13
2.4.1 Bodový odhad	13
2.4.2 Intervalový odhad	13
3 Kauzalita v časových řadách	15
3.1 Grangerova kauzalita	15
3.2 Okamžitá kauzalita	18
3.3 Vícekroková kauzalita	19
4 Empirická analýza tržních dat	22
4.1 Analýza vlivu indexu volatility VDAX na akciový index PX	22
4.2 Analýza vlivu ukazatele P/C CBOE na akciový index S&P 500 . .	25
Závěr	28
A Dodatek	29
A.1 Kroneckerův součin	29
A.2 Operátory vec a vech	29
Seznam použitého značení	31
Příloha	32

Úvod

Grangerova kauzalita je dnes již standardním nástrojem pro zkoumání příčinnosti v rámci vícerozměrných časových řad. Její koncept vytvořil sir Clive William John Granger a publikoval jej v článku [6]. Grangerův přístup spočívá v tom, že kauzalitu interpretuje jako schopnost vylepšit odhad budoucí hodnoty jedné složky vícerozměrné časové řady na základě minulých a současných hodnot jiné složky. Hovoříme-li tedy v této souvislosti o příčinnosti, míníme tím právě tolik, že se v budoucnosti první složky odráží minulost druhé. Nejedná se tedy nutně o přímé působení v klasickém slova smyslu. Granger se také zabýval situací, kdy se tyto složky ovlivňují navzájem a existuje tak mezi nimi tzv. zpětná vazba. Postupem času byla teorie rozšířena o vícekrokovou kauzalitu, která umožňuje působení v delším časovém horizontu, aniž by k němu nutně muselo docházet v bezprostřední budoucnosti.

Tato práce si klade za cíl nastínit teoretické pozadí pro vyšetřování Grangerovy kauzality ve vícerozměrných časových řadách a zároveň samostatně implementovat příslušné statistické testy prostřednictvím programu *Mathematica*. Výsledky práce jsou následně aplikovány na praktické příklady s využitím reálných tržních dat. Teoretická část práce má převážně kompilační charakter a vychází z knihy [7]. Zdrojem doplňujících informací je pak publikace [1]. Sekce pojednávající o vícekrokové kauzalitě se opírá zejména o článek [5].

Pro vyšetřování Grangerovy kauzality nám budou vhodným prostředím vektorové autoregresní modely VAR konečného řádu. Poté, co v první kapitole zavedeme základní pojmy a seznámíme se s nejdůležitějšími vlastnostmi vektorových autoregresních modelů, přistoupíme k jejich konstrukci, která je v mnoha aspektech analogická Box-Jenkinsově metodologii pro jednorozměrné časové řady.

V druhé kapitole provedeme odvození koeficientů modelu jak pomocí metody nejmenších čtverců, tak metodou maximální věrohodnosti, a poukážeme na to, že nás oba postupy dovedou ke stejnému odhadu. Dále budeme identifikovat vhodný řád modelu jak na základě testu založeného na věrohodnostním poměru, tak vyhodnocením informačních kritérií. Následovat bude diagnostika modelu spočívající v kontrole stacionarity procesu a ověření nekorelovanosti a normality reziduí. Kvalitu modelu posoudíme také na základě jeho předpovědácích schopností.

Po sestrojení vhodného modelu budeme moci ve třetí kapitole zavést definice Grangerovy kauzality, okamžité kauzality a vícekrokové kauzality pro vyšetřování různých typů kauzálních vazeb v rámci vícerozměrné časové řady. Pro testování Grangerovy a okamžité kauzality použijeme Waldův test. Naznačíme také postup pro vyšetřování vícekrokové kauzality.

Závěrečnou kapitolu tvoří empirická analýza tržních dat. Zde jsou prezentovány dva příklady působení ukazatelů trhu na akciové indexy. První z nich zkoumá vliv volatility německého trhu na vývoj hlavního akciového indexu pražské burzy. Druhý se zaměřuje na vztah mezi výsledky obchodování na chicagské burze s opcemi a tržní hodnotou předních amerických společností. Veškeré testovací procedury napsané v programu *Mathematica* jsou připojeny jako příloha.

1. Základní pojmy

1.1 Vícerozměrné časové řady

Definice 1.1. Nechtě $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ je pravděpodobnostní prostor, kde Ω je množina všech elementárních jevů, \mathcal{F} je σ -algebra jevů z množiny Ω a \mathcal{P} je pravděpodobnostní míra na \mathcal{F} . Definujeme *náhodnou veličinu* y jako reálnou funkci na Ω splňující podmínku měřitelnosti

$$\{\omega \in \Omega : y(\omega) \leq c\} \in \mathcal{F} \quad (1.1)$$

pro každé $c \in \mathbb{R}$. Dále definujeme *m-rozměrný náhodný vektor* jako *m-rozměrný vektor* náhodných veličin.

Definice 1.2. Definujeme *m-rozměrný diskrétní náhodný proces* jako funkci

$$y : \mathbb{Z} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad (1.2)$$

kde $y(t, \omega)$ pro pevně zvolené $t \in \mathbb{Z}$ nabývá podoby *m-rozměrného náhodného vektoru*, zatímco pro dané $\omega \in \Omega$ generuje náhodný proces posloupnost, kterou nazýváme *m-rozměrnou časovou řadou*.

Náhodný proces $y(t, \omega)$ i časovou řadu $y(t)$, kterou budeme někdy rozumět i realizaci náhodného procesu $y(t, \omega)$ omezenou na $t \in Z_0 \subset \mathbb{Z}$, budeme značit y_t .

Definice 1.3. Náhodný proces y_t se nazývá *stacionární*, jestliže platí $E(y_t) = \mu$ pro každé $t \in \mathbb{Z}$ a $E[(y_t - \mu)(y_{t+h} - \mu)'] = \Gamma_y(h)$ pro každé $t \in \mathbb{Z}$, $h \in \mathbb{N}_0$, tedy první dva momenty procesu jsou časově invariantní. Funkce $\Gamma_y(h)$ se nazývá *autokovarianční funkce procesu* y_t . Dále zavedeme *autokorelační funkci procesu* y_t ve tvaru $R_y(h) = D_y^{-1} \Gamma_y(h) D_y^{-1}$, kde D_y je diagonální matice, která má na diagonále odmocniny příslušných diagonálních prvků rozptylové matice $\Sigma_y = \Gamma_y(0)$ procesu y_t .

Definice 1.4. Diskrétní náhodný proces u_t se nazývá *m-rozměrný bílý šum*, jestliže platí $E(u_t) = 0$, $E(u_t u_t') = \Sigma_u$ a $E(u_s u_t') = 0$ pro $s \neq t$.

V dalším textu budeme vždy předpokládat, že Σ_u je regulární.

1.2 Vektorové autoregresní procesy

Definice 1.5. Definujeme *VAR(p) proces (vektorový autoregresní proces řádu p)* jako *m-rozměrný diskrétní náhodný proces* y_t řídicí se vztahem

$$y_t = \nu + A_1 y_{t-1} + \cdots + A_p y_{t-p} + u_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1.3)$$

kde matice A_i o rozměrech $m \times m$ a *m-rozměrný vektor* ν nazýváme *souhrnně koeficienty procesu* y_t . Dále u_t jsou tzv. *rezidua* ve tvaru *m-rozměrného bílého šumu*. V této souvislosti budeme hovořit o *reziduálním bílém šumu procesu* y_t .

Při práci s $\text{VAR}(p)$ procesy budeme předpokládat $p \in \mathbb{N}$. Pro účely některých testových procedur zahrneme mezi $\text{VAR}(p)$ procesy i případ $p = 0$. Naopak vektorovými autoregresními procesy nekonečného řádu se v této práci podrobněji zabývat nebudeme.

Definice 1.6. Bílý šum u_t se nazývá *gaussovský*, jestliže $u_t \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_u)$ a jeho složky jsou vzájemně nezávislé.

Je-li bílý šum u_t gaussovský, potom se i proces y_t nazývá *gaussovský*, neboť pro každé $t \in \mathbb{Z}$ a $h \in \mathbb{N}$ má vektor $(y'_t, \dots, y'_{t+h})'$ vícerozměrné normální rozdělení.

Definice 1.7. Bílý šum u_t se nazývá *standardní*, jestliže u_t jsou spojité náhodné vektory takové, že

$$\exists c \in \mathbb{R} \quad \forall i, j, k, l \in \{1, \dots, m\} \quad \forall t \in \mathbb{Z} : \quad \mathbb{E}|u_{it}u_{jt}u_{kt}u_{lt}| \leq c. \quad (1.4)$$

Standardní bílý šum má tedy omezené momenty do čtvrtého řádu. Každý gaussovský bílý šum je standardní.

Věta 1.1. Každý $\text{VAR}(p)$ proces je možné vyjádřit jako $\text{VAR}(1)$ proces.

Důkaz. Můžeme psát $Y_t = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{A}Y_{t-1} + U_t$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_{p-1} & A_p \\ I_m & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_m & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_m & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

$$Y_t = \begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ \vdots \\ y_{t-p+1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_t = \begin{pmatrix} u_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

□

Definice 1.8. Proces $\text{VAR}(p)$ se nazývá *stabilní*, jestliže všechny kořeny polynomu $I_m - A_1z - \cdots - A_pz^p$ leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině, neboli pro každé $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq 1$ platí

$$\det(I_m - A_1z - \cdots - A_pz^p) \neq 0, \quad (1.7)$$

což lze díky rovnosti

$$\det(I_m - A_1z - \cdots - A_pz^p) = \det(I_{mp} - \mathbf{A}z) \quad (1.8)$$

alternativně formulovat jako požadavek na nejvýše jednotkovou absolutní hodnotu vlastních čísel matice \mathbf{A} .

Každý stabilní $\text{VAR}(p)$ proces je stacionární. V dalších kapitolách budeme stabilitu vždy implicitně předpokládat.

Věta 1.2. Každý stabilní VAR(p) proces y_t má kanonickou MA (moving average) reprezentaci, tedy jej lze vyjádřit ve tvaru

$$y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i u_{t-i}, \quad \Phi_0 = I_m, \quad (1.9)$$

kde $\mu = J\boldsymbol{\mu}$, $\Phi_i = J\mathbf{A}^i J'$, $u_t = JU_t$ jsou rezidua procesu y_t a $J = (I_m, 0, \dots, 0)$ je matice o rozměrech $(m \times mp)$. Navíc lze matice Φ_i vypočítat pomocí vztahu

$$\Phi_h = \sum_{i=1}^h \Phi_{i-h} A_h, \quad (1.10)$$

kde klademe $A_j = 0$ pro $j > p$.

Věta 1.3 (Woldova věta). Každý stacionární proces w_t lze rozložit na součet dvou navzájem nekorelovaných procesů x_t a y_t , kde x_t je deterministický proces a y_t má MA reprezentaci.

Důsledek 1.1. Každý podproces čistě nedeterministického stacionárního procesu má MA reprezentaci.

2. Konstrukce modelu VAR(p)

2.1 Odhad parametrů modelu

Prvním úkolem, který před námi při sestřování modelu VAR(p) procesu vyvstává, je vhodným způsobem odhadnout parametry, které zkoumaný proces popisují. Budeme se věnovat zejména odhadu matice $B = (\nu, A_1, \dots, A_p)$ koeficientů procesu y_t . Nejprve provedeme odhad metodou nejmenších čtverců. Odhady touto metodou budeme obecně značit stříškou, například \hat{B} . Následně odhadneme parametr metodou maximální věrohodnosti. Maximálně věrohodné odhady budeme v dalším textu vyznačovat vlnovkou, například \tilde{B} . Uvedeme také odhad druhého důležitého parametru procesu, rozptylové matice reziduí Σ_u .

V krátkosti ještě upozorníme, že použité značení (podobně jako v knize [7]) pracuje pro větší přehlednost s transponovanými hodnotami základních proměnných oproti značení běžnému při používání regresních metod. Například normální rovnice zde tedy nabývají poněkud nezvyklého tvaru, což však nic nemění na jejich funkci.

2.1.1 Metoda nejmenších čtverců

Definiční tvar VAR(p) procesu

$$y_t = \nu + A_1 y_{t-1} + \dots + A_p y_{t-p} + u_t \quad (2.1)$$

je možné vyjádřit v maticové formě

$$Y = BZ + U, \quad (2.2)$$

kde

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ y_0 & y_1 & \dots & y_{T-1} \\ y_{-1} & y_0 & \dots & y_{T-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1-p} & y_{2-p} & \dots & y_{T-p} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

a dále

$$Y = (y_1, \dots, y_T), \quad B = (\nu, A_1, \dots, A_p), \quad U = (u_1, \dots, u_T). \quad (2.4)$$

Od maticové formy lze poté přejít k formě vektorové

$$\text{vec}(Y) = \text{vec}(BZ) + \text{vec}(U), \quad (2.5)$$

viz Dodatek A.2, kterou lze pomocí Kroneckerova součinu, viz Dodatek A.1, díky vztahu (A.5) přepsat do tvaru

$$\text{vec}(Y) = (Z' \otimes I_m) \text{vec}(B) + \text{vec}(U) \quad (2.6)$$

nebo lze stručněji psát

$$\mathbf{y} = (Z' \otimes I_m) \mathbf{b} + \mathbf{u}, \quad (2.7)$$

kde je operátor vec , tvořící vektor ze sloupců matice, nahrazen tučným fontem. Využijeme-li vzájemné nekorelovanosti prvků reziduálního bílého šumu u_t , můžeme psát rozptylovou matici \mathbf{u} ve tvaru $\Sigma_{\mathbf{u}} = I_T \otimes \Sigma_u$. Vícerozměrná metoda nejmenších čtverců potom minimalizuje funkci

$$S(\mathbf{b}, \Sigma_u) = \mathbf{u}'\Sigma_{\mathbf{u}}^{-1}\mathbf{u}. \quad (2.8)$$

Pro tuto funkci díky vlastnostem (A.3) a (A.4) platí

$$S(\mathbf{b}, \Sigma_u) = \mathbf{u}'\Sigma_{\mathbf{u}}^{-1}\mathbf{u} = \mathbf{u}'(I_T \otimes \Sigma_u)^{-1}\mathbf{u} = \mathbf{u}'(I_T \otimes \Sigma_u^{-1})\mathbf{u} \quad (2.9)$$

$$= [\mathbf{y} - (Z' \otimes I_m)\mathbf{b}]'(I_T \otimes \Sigma_u^{-1})[\mathbf{y} - (Z' \otimes I_m)\mathbf{b}] \quad (2.10)$$

$$= \mathbf{y}'(I_T \otimes \Sigma_u^{-1})\mathbf{y} - 2\mathbf{b}'(Z \otimes I_m)(I_T \otimes \Sigma_u^{-1})\mathbf{y} + [(Z' \otimes I_m)\mathbf{b}]'(I_T \otimes \Sigma_u^{-1})[(Z' \otimes I_m)\mathbf{b}]. \quad (2.11)$$

Derivováním podle \mathbf{b} dostaneme výraz

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{b}}(\mathbf{b}, \Sigma_u) = 2(ZZ' \otimes \Sigma_u^{-1})\mathbf{b} - 2(Z \otimes \Sigma_u^{-1})\mathbf{y}. \quad (2.12)$$

Položením derivace rovné nule získáme rovnost

$$(ZZ' \otimes \Sigma_u^{-1})\hat{\mathbf{b}} = (Z \otimes \Sigma_u^{-1})\mathbf{y}, \quad (2.13)$$

kterou lze dvojnásobným použitím (A.4) převést do přirozenějšího tvaru tzv. *normálních rovnic*

$$(ZZ' \otimes I_m)\hat{\mathbf{b}} = (Z \otimes I_m)\mathbf{y}, \quad (2.14)$$

neboli v maticové formě

$$\hat{B}ZZ' = YZ'. \quad (2.15)$$

Odhad metodou nejmenších čtverců tedy nabývá tvaru

$$\hat{\mathbf{b}} = (ZZ' \otimes I_m)^{-1}(Z \otimes I_m)\mathbf{y} \quad (2.16)$$

$$= ((ZZ')^{-1} \otimes I_m)(Z \otimes I_m)\mathbf{y} \quad (2.17)$$

$$= ((ZZ')^{-1}Z \otimes I_m)\mathbf{y}. \quad (2.18)$$

Pokud má matice Z plnou sloupcovou hodnotu, je matice ve tvaru ZZ' , stejně jako rozptylová matice Σ_u , pozitivně definitní. Kroneckerův součin i inverze tuto vlastnost zachovávají, a proto je pozitivně definitní i matice

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{b} \partial \mathbf{b}'}(\mathbf{b}, \Sigma_u) = 2(ZZ' \otimes \Sigma_u^{-1}), \quad (2.19)$$

z čehož plyne, že se skutečně jedná o minimum. Mohli bychom také argumentovat tím, že hledáme stacionární bod kvadratické funkce s kladným kvadratickým koeficientem, a proto musí být nalezená hodnota minimem vyšetřované funkce. Pro odhad rozptylové matice reziduí Σ_u platí

$$\hat{\Sigma}_u = \frac{1}{T - mp - 1}Y(I_T - Z'(ZZ')Z)Y'. \quad (2.20)$$

Lze ukázat, že odhady $\hat{\mathbf{b}}$ i $\hat{\Sigma}_u$ jsou konzistentní.

2.1.2 Metoda maximální věrohodnosti

Pro nalezení maximálně věrohodných odhadů parametrů VAR(p) procesu y_t budeme předpokládat, že platí

$$\mathbf{u} = \text{vec}(U) \sim \mathcal{N}(0, I_T \otimes \Sigma_u). \quad (2.21)$$

Můžeme tedy psát hustotu \mathbf{u} ve tvaru

$$f_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{mT} |I_T \otimes \Sigma_u|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{u}' (I_T \otimes \Sigma_u^{-1}) \mathbf{u} \right\}. \quad (2.22)$$

Odtud pomocí lineární substituce

$$\mathbf{y} = g(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + (Z' \otimes I_m) \mathbf{b} \quad (2.23)$$

dostáváme podle věty o monotónní transformaci

$$f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) = \left| \frac{dg^{-1}}{d\mathbf{y}'}(\mathbf{y}) \right| f_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}), \quad (2.24)$$

což lze s využitím

$$\left| \frac{dg^{-1}}{d\mathbf{y}'}(\mathbf{y}) \right| = |I_{mT}| = 1 \quad (2.25)$$

přepsat do tvaru

$$f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{mT} |I_T \otimes \Sigma_u|}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y} - (Z' \otimes I_m) \mathbf{b})' (I_T \otimes \Sigma_u^{-1}) (\mathbf{y} - (Z' \otimes I_m) \mathbf{b}) \right\}. \quad (2.26)$$

Odtud je možné logaritmováním získat tzv. *logaritmickou věrohodnostní funkci*

$$\begin{aligned} \log l(\mathbf{b}, \Sigma_u) &= -\frac{mT}{2} \log 2\pi - \frac{T}{2} \log |\Sigma_u| \\ &\quad - \frac{1}{2} (\mathbf{y} - (Z' \otimes I_m) \mathbf{b})' (I_T \otimes \Sigma_u^{-1}) (\mathbf{y} - (Z' \otimes I_m) \mathbf{b}). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Derivováním obdržíme

$$\frac{\partial \log l}{\partial \mathbf{b}}(\mathbf{b}, \Sigma_u) = (Z \otimes \Sigma_u^{-1}) \mathbf{y} - (ZZ' \otimes \Sigma_u^{-1}) \mathbf{b}, \quad (2.28)$$

odkud položením derivace rovné nule dostáváme maximálně věrohodný odhad

$$\tilde{\mathbf{b}} = ((ZZ')^{-1} Z \otimes I_m) \mathbf{y}. \quad (2.29)$$

Jedná se skutečně o maximum, neboť matice

$$\frac{\partial^2 \log l}{\partial \mathbf{b} \partial \mathbf{b}'}(\mathbf{b}, \Sigma_u) = -(ZZ' \otimes \Sigma_u^{-1}) \quad (2.30)$$

je negativně definitní se stejným zdůvodněním jako v případě matice (2.19). Odhady parametru \mathbf{b} metodou maximální věrohodnosti a metodou nejmenších čtverců jsou tedy shodné. Maximálně věrohodný odhad rozptylové matice Σ_u nabývá tvaru

$$\tilde{\Sigma}_u = \frac{T - mp - 1}{T} \hat{\Sigma}_u. \quad (2.31)$$

Jeho konzistence pak plyne z konzistence odhadu $\hat{\Sigma}_u$.

2.2 Identifikace řádu modelu

Na základě výše uvedených výsledků můžeme sestavit model procesu $\text{VAR}(p)$ pro libovolnou hodnotu $p \in \mathbb{N}$. Nyní ukážeme dva postupy, jak zvolit vhodnou hodnotu tohoto parametru. Prvním způsobem je provést statistický test, který postupně zkoumá nenulovost jednotlivých matic $\text{VAR}(p)$ procesu, a tedy i vhodnost jejich zařazení do modelu. Druhou metodou je použití informačních kritérií, která pro jednotlivé řády akumulují do jedné veličiny různé nežádoucí vlivy na kvalitu předpovědi, aby bylo následně možné zvolit takový řád, který souhrnnou velikost těchto vlivů minimalizuje.

2.2.1 Test založený na věrohodnostním poměru

Pro testování hypotézy

$$H_0 : A_j = 0 \quad \text{proti} \quad H_1 : A_j \neq 0, \quad (2.32)$$

používá test založený na věrohodnostním poměru testovou statistiku

$$\lambda_{LR} = 2[\log l(\tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\Sigma}_u) - \log l(\tilde{\mathbf{b}}_r, \tilde{\Sigma}_u^r)], \quad (2.33)$$

kde $\tilde{\mathbf{b}}_r$ a $\tilde{\Sigma}_u^r$ jsou maximálně věrohodné odhady parametrů \mathbf{b} a Σ_u v modelu omezeném platností nulové hypotézy, zatímco $\tilde{\mathbf{b}}$ a $\tilde{\Sigma}_u$ jsou maximálně věrohodné odhady parametrů \mathbf{b} a Σ_u v neomezeném modelu. Z tvaru logaritmické věrohodnostní funkce (2.27) je možné odvodit běžně používaný tvar testové statistiky

$$\lambda_{LR} = T(\log |\tilde{\Sigma}_u^r| - \log |\tilde{\Sigma}_u|), \quad (2.34)$$

pro který platí

$$\lambda_{LR} \xrightarrow{D} \chi^2(m^2). \quad (2.35)$$

Pro účely testovací procedury pro určení řádu modelu označíme p_m jako nejvyšší uvažovaný řád modelu a $\tilde{\Sigma}_u(p)$ rozptylovou matici odpovídající VAR procesu řádu p . Testujeme pak sadu hypotéz ve tvaru

$$H_0(i) : A_{p_m-i+1} = 0 \quad \text{proti} \quad (2.36)$$

$$H_1(i) : A_{p_m-i+1} \neq 0 \mid A_{p_m} = \cdots = A_{p_m-i+2} = 0 \quad (2.37)$$

s testovou statistikou

$$\lambda_{LR}(i) = T(\log |\tilde{\Sigma}_u(p_m - i)| - \log |\tilde{\Sigma}_u(p_m - i + 1)|), \quad (2.38)$$

která má za platnosti $H_0(1), \dots, H_0(i)$ chí-kvadrát rozdělení s m^2 stupni volnosti. Jako řád modelu volíme číslo $p_m - i + 1$, kde i je index první zamítnuté nulové hypotézy. Pracujeme-li se sérií testů s individuální hladinou významnosti α , bude mít celková procedura pravděpodobnost zamítnutí pravdivé nulové hypotézy po i krocích $1 - (1 - \alpha)^i$ díky vzájemné asymptotické nezávislosti jednotlivých testových statistik $\lambda_{LR}(j)$ pro $j \leq i$ (viz [7]).

2.2.2 Informační kritéria

Alternativní možností pro určení řádu modelu jsou tzv. *informační kritéria*. Tvar jednotlivých kritérií je navrhnout tak, aby jejich hodnota rostla spolu s rostoucím rozptylem reziduálního bílého šumu, a tedy i s rostoucí nepřesností v předpovědích. Zbylé členy vzorců penalizují příliš velké hodnoty řádu modelu, které také vnášejí do předpovědi nepřesnost. Vybíráme tedy takový řád, pro který je hodnota kritéria nejmenší. Zde uvádíme některá často používaná kritéria.

Akaikeovo informační kritérium AIC

$$\text{AIC}(p) = \log |\tilde{\Sigma}_u| + \frac{2}{T} pm^2$$

Bayesovo informační kritérium BIC

$$\text{BIC}(p) = \log |\tilde{\Sigma}_u| + \frac{\log T}{T} pm^2$$

Hannan-Quinnovo informační kritérium HQ

$$\text{HQ}(p) = \log |\tilde{\Sigma}_u| + \frac{2 \log \log T}{T} pm^2$$

Final predictor error FPE

$$\text{FPE}(p) = |\tilde{\Sigma}_u| \left(\frac{T + pm + 1}{T - pm - 1} \right)^m$$

2.3 Diagnostika modelu

Při diagnostice modelu ověřujeme, zda jsou obdržené výsledky v souladu s předpoklady modelu. V první řadě se jedná o kontrolu stacionarity procesu, která je zaručena podmínkou stability. Tuto podmínku ověříme výpočtem kořenů polynomu $I_m - \hat{A}_1 z - \dots - \hat{A}_p z^p$, jejichž převrácené hodnoty musí ležet uvnitř jednotkového kruhu v komplexní rovině. V dalších diagnostických procedurách hraje ústřední roli následující věta, na jejímž základě je možné provádět testy na autokorelovanost reziduí.

Věta 2.1. *Pro m -rozměrný VAR(p) proces y_t se stejně rozděleným standardním reziduálním bílým šumem u_t platí, že odhady*

$$\sqrt{T} \text{vec}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_h), \quad \text{kde} \quad \Gamma_i = \frac{1}{T} \sum_{t=i+1}^T u_t u'_{t-i}, \quad (2.39)$$

$$\sqrt{T} \text{vec}(R_1, \dots, R_h), \quad \text{kde} \quad R_i = D^{-1} \Gamma_i D^{-1}, \quad (2.40)$$

$$\sqrt{T} \text{vec}(\hat{\Gamma}_1, \dots, \hat{\Gamma}_h), \quad \text{kde} \quad \hat{\Gamma}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=i+1}^T \hat{u}_t \hat{u}'_{t-i}, \quad (2.41)$$

$$\sqrt{T} \text{vec}(\hat{R}_1, \dots, \hat{R}_h), \quad \text{kde} \quad \hat{R}_i = \hat{D}^{-1} \hat{\Gamma}_i \hat{D}^{-1}, \quad (2.42)$$

mají asymptotické vícerozměrné normální rozdělení s nulovou střední hodnotou. Zde jsou D a \hat{D} sestrojeny obdobně jako v Definicí 1.3 s použitím matic Γ_0 a $\hat{\Gamma}_0$.

2.3.1 Bartlettova aproximace

Základní metodou pro vyšetřování autokorelovanosti reziduí, sloužící spíše jako hrubý odhad, je Bartlettova aproximace, porovnávající hodnoty korelací $\hat{r}_{ij}(h)$ mezi složkami odhadnutých reziduí $\hat{u}_{i,t}$ a $\hat{u}_{j,t+h}$, kde $i, j \leq m$, s kritickými mezemi $\pm 2/\sqrt{T}$. Vycházíme z pozorování, že pro velká T přibližně platí

$$\forall h \in \mathbb{N} : \quad \sqrt{T}\hat{r}_{ij}(h) \approx \mathcal{N}(0, 1). \quad (2.43)$$

Proto můžeme zamítnout hypotézu

$$H_0 : r_{ij}(h) = 0 \quad \text{proti} \quad H_1 : r_{ij}(h) \neq 0 \quad (2.44)$$

na hladině významnosti 5 % pro

$$|\hat{r}_{ij}(h)| > z_{0,975}/\sqrt{T} \doteq 1,96/\sqrt{T} \doteq 2/\sqrt{T}, \quad (2.45)$$

kde $z_{1-\alpha}$ značí α -kvantil rozdělení $\mathcal{N}(0, 1)$. Důležitou roli hraje Bartlettova aproximace zejména v jednorozměrných časových řadách, kde je důležité správně rozpoznat počet nenulových hodnot autokovarianční funkce pro určení řádu modelu v rámci Box-Jenkinsovy metodologie (viz [1]).

2.3.2 Portmanteau test

Autokorelovanost reziduí do řádu h je možné vyšetřovat testováním hypotézy

$$H_0 : R_1 = \dots = R_h = 0 \quad \text{proti} \quad (2.46)$$

$$H_1 : \exists i \in \{1, \dots, h\} : R_i \neq 0. \quad (2.47)$$

Portmanteau test pracuje s testovou statistikou

$$\lambda_P = T \sum_{i=1}^h \text{tr}(\hat{R}_i' \hat{R}_0^{-1} \hat{R}_i \hat{R}_0^{-1}), \quad (2.48)$$

kterou lze za pomoci diagonální matice \hat{D} upravit do tvaru

$$T \sum_{i=1}^h \text{tr}(\hat{D} \hat{R}_i' \hat{R}_0^{-1} \hat{R}_i \hat{R}_0^{-1} \hat{D}^{-1}), \quad (2.49)$$

neboť taková úprava nezmění diagonální prvky vnitřní matice. Odtud přejdeme k výrazu

$$T \sum_{i=1}^h \text{tr}(\hat{D} \hat{R}_i' \hat{D} \hat{D}^{-1} \hat{R}_0^{-1} \hat{D}^{-1} \hat{D} \hat{R}_i \hat{D} \hat{D}^{-1} \hat{R}_0^{-1} \hat{D}^{-1}), \quad (2.50)$$

ze kterého odvodíme výpočetně vhodnější variantu testové statistiky, která má přibližné asymptotické chí-kvadrát rozdělení o $m^2(h-p)$ stupních volnosti

$$T \sum_{i=1}^h \text{tr}(\hat{\Gamma}_i' \hat{\Gamma}_0^{-1} \hat{\Gamma}_i \hat{\Gamma}_0^{-1}) \approx \chi^2(m^2(h-p)). \quad (2.51)$$

Portmanteau test je na rozdíl od následujícího testu vhodné používat spíše pro větší hodnoty zpoždění. V praxi se často se volí $h \doteq \sqrt{T}$.

2.3.3 Breusch-Godfreyův test

Dalším způsobem, jak vyšetřovat, zda jsou rezidua vzájemně korelovaná, je provést Breusch-Godfreyův test využívající pomocný regresní model

$$\hat{u}_t = \nu + A_1 y_{t-1} + \dots + A_p y_{t-p} + D_1 \hat{u}_{t-1} + \dots + D_h \hat{u}_{t-h} + \varepsilon_t, \quad (2.52)$$

kde ε_t je bílý šum, a testovat hypotézu

$$H_0 : D_1 = \dots = D_h = 0 \quad \text{proti} \quad (2.53)$$

$$H_1 : \exists j \in \{1, \dots, h\} : D_j \neq 0. \quad (2.54)$$

Za platnosti nulové hypotézy jsou rezidua nekorelovaná do řádu h . Pro testování je možné použít klasickou statistiku

$$\lambda_{BG} = T(m - \text{tr}(\tilde{\Sigma}_\varepsilon \tilde{\Sigma}_\varepsilon^{-1})) \xrightarrow{\mathcal{D}} \chi^2(m^2 h) \quad (2.55)$$

(viz [2]), kde $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$ značí maximálně věrohodný odhad rozptylové matice bílého šumu ε_t . V mnoha případech je však vhodnější použít testovou statistiku

$$\lambda_R = \left(\sqrt[s]{\frac{\det(\tilde{\Sigma}_u)}{\det(\tilde{\Sigma}_\varepsilon)} - 1} \right) \frac{ns - \frac{1}{2}m^2 h + 1}{m^2 h}, \quad (2.56)$$

kde

$$s = \sqrt{\frac{m^4 h^2 - 4}{m^2 + m^2 h^2 - 5}}, \quad n = T - mp - 1 - mh - \frac{1}{2}(m - mh + 1). \quad (2.57)$$

Uvedená testová statistika potom nabývá přibližného Fisherova F-rozdělení s $m^2 h$ a $ns - \frac{1}{2}m^2 h + 1$ stupni volnosti a zejména pro nízké hodnoty h dosahuje lepších výsledků. S Breusch-Godfreyovým testem se lze často setkat také pod názvem *LM (Lagrange multiplier) test autokorelovanosti reziduí*.

2.3.4 Jarque-Berův test

Jarque-Berův test využívá pro testování nulové hypotézy normality reziduí známé šikmosti a špičatosti normálního rozdělení. Označíme \hat{P} dolní trojúhelníkovou matici splňující $\hat{P}\hat{P}' = \hat{\Sigma}_u$ získanou Choleského rozkladem. Nechť $\hat{v}_t = \hat{P}^{-1}\hat{u}_t$,

$$\hat{b}_1 = (\hat{b}_{11}, \dots, \hat{b}_{m1})', \quad \text{kde} \quad \hat{b}_{k1} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{v}_{kt}^3, \quad k = 1, \dots, T, \quad (2.58)$$

$$\hat{b}_2 = (\hat{b}_{12}, \dots, \hat{b}_{m2})', \quad \text{kde} \quad \hat{b}_{k2} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{v}_{kt}^4, \quad k = 1, \dots, T. \quad (2.59)$$

Potom lze ukázat, že platí

$$\sqrt{T}\hat{b}_1 \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 6I_m), \quad \sqrt{T}(\hat{b}_2 - \mathbf{3}_m) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 24I_m), \quad (2.60)$$

kde $\mathbf{3}_m = (3, \dots, 3)'$ je m -rozměrný vektor. Odtud plyne

$$\lambda_1 = T \frac{\hat{b}'_1 \hat{b}_1}{6} \xrightarrow{\mathcal{D}} \chi^2(m), \quad \lambda_2 = T \frac{(\hat{b}_2 - \mathbf{3}_m)'(\hat{b}_2 - \mathbf{3}_m)}{24} \xrightarrow{\mathcal{D}} \chi^2(m). \quad (2.61)$$

Dostáváme tedy výslednou testovou statistiku

$$\lambda_{JB} = \lambda_1 + \lambda_2 \xrightarrow{\mathcal{D}} \chi^2(2m). \quad (2.62)$$

2.4 Předpovědi v modelu

2.4.1 Bodový odhad

Lineární h -krokovou předpověď $y_t(h)$ procesu y_t , která je optimální ve smyslu minimalizace střední kvadratické chyby, lze vypočítat podle rekurentního schématu

$$y_t(1) = \nu + A_1 y_t + \cdots + A_p y_{t-p+1} \quad (2.63)$$

$$y_t(2) = \nu + A_1 y_t(1) + A_2 y_t + \cdots + A_p y_{t-p+2} \quad (2.64)$$

\vdots

$$y_t(h) = \nu + A_1 y_t(h-1) + \cdots + A_p y_{t-p} \quad (2.65)$$

\vdots

Odtud pro VAR(1) proces dostáváme

$$y_t(h) = (I_m + A_1 + \cdots + A_1^{h-1})\nu + A_1^h y_t. \quad (2.66)$$

Tudíž pro VAR(p) proces platí

$$Y_t(h) = (I_{mp} + \mathbf{A} + \cdots + \mathbf{A}^{h-1})\boldsymbol{\nu} + \mathbf{A}^h Y_t. \quad (2.67)$$

Tento tvar později využijeme k popisu více krokové kauzality. Lze také dokázat (viz [7]), že je možné psát optimální lineární předpověď ve tvaru

$$y_t(h) = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_{h+i} u_{t-i}. \quad (2.68)$$

2.4.2 Intervalový odhad

Pro určení intervalového odhadu předpovědi budeme předpokládat, že reziduální bílý šum u_t je gaussovský. Využijeme-li vztahu (2.68) a kanonické MA reprezentace procesu y_t , obdržíme vyjádření chyby předpovědi ve tvaru

$$y_{t+h} - y_t(h) = \sum_{i=0}^{h-1} \Phi_i u_{t+h-i}. \quad (2.69)$$

Přitom pro normálně rozdělené hodnoty reziduí u_t platí

$$\Phi_i u_{t+h-i} \sim \mathcal{N}(0, \Phi_i \Sigma_u \Phi_i'). \quad (2.70)$$

Navíc díky nezávislosti složek u_t dostáváme

$$\sum_{i=0}^{h-1} \Phi_i u_{t+h-i} \sim \mathcal{N}(0, \sum_{i=0}^{h-1} \Phi_i \Sigma_u \Phi_i'). \quad (2.71)$$

Označíme rozptylovou matici předpovědi

$$\Sigma_y(h) = \sum_{i=0}^{h-1} \Phi_i \Sigma_u \Phi_i'. \quad (2.72)$$

Dále využijeme toho, že složky vícerozměrného normálního rozdělení mají normální rozdělení. Jejich normováním obdržíme vztah

$$\frac{y_{k,t+h} - y_{k,t}(h)}{\sigma_k(h)} \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad (2.73)$$

kde $y_{k,t}(h)$ je k -tý prvek $y_t(h)$ a $\sigma_k(h)$ je odmocnina k -tého diagonálního prvku matice $\Sigma_y(h)$. Platí tedy

$$\mathbb{P}(-z_{\alpha/2} \leq \frac{y_{k,t+h} - y_{k,t}(h)}{\sigma_k(h)} \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha, \quad (2.74)$$

kde $z_{\alpha/2}$ značí $(\alpha/2)$ -kvantil rozdělení $\mathcal{N}(0, 1)$. Odtud plyne, že interval spolehlivosti pro k -tou složku h -krokové předpovědi na hladině významnosti $1 - \alpha$ má meze

$$y_{k,t}(h) \pm z_{\alpha/2}\sigma_k(h). \quad (2.75)$$

3. Kauzalita v časových řadách

3.1 Grangerova kauzalita

Definice 3.1. Definujeme obecně *informační množinu* Ω_t jako množinu informací v rámci jistého systému dostupných do času $t \in \mathbb{Z}$. Konkrétně zavedeme informační množinu $\Omega_y = \Omega_y(t)$ procesu y_t jako množinu $\{y_s \mid s \leq t\}$. Stejným způsobem budeme značit $\Omega_{xy} = \{x_s, y_s \mid s \leq t\}$ apod.

Definice 3.2 (Grangerova kauzalita). Nechť $y_t(h \mid \Omega_t)$ značí optimální lineární h -krokovou předpověď procesu y_t v čase $t \in \mathbb{Z}$ na základě informací z množiny Ω_t a $\Sigma_y(h \mid \Omega_t)$ je matice rozptylu předpovědi $y_t(h \mid \Omega_t)$. Potom proces x_t působí podle Grangera na y_t (značíme $x \rightarrow y \mid \Omega_t$), jestliže

$$\Sigma_y(1 \mid \Omega_t) \neq \Sigma_y(1 \mid \Omega_t \setminus \Omega_x). \quad (3.1)$$

Dále definujeme *systém se zpětnou vazbou* jako proces složený ze dvou podprocesů x_t a y_t , ve kterém platí $x \rightarrow y \mid \Omega_{xy}$ a zároveň $y \rightarrow x \mid \Omega_{xy}$.

Věta 3.1 (Charakterizace Grangerovy kauzality). Nechť w_t je m -rozměrný VAR(p) proces s kanonickou MA reprezentací $\Phi(z)$ složený z m_1 -rozměrného procesu x_t a m_2 -rozměrného procesu y_t . Potom platí

$$x \nrightarrow y \mid \Omega_{xy} \iff \forall i \in \mathbb{N} : \Phi_{21,i} = 0, \quad (3.2)$$

$$y \nrightarrow x \mid \Omega_{xy} \iff \forall i \in \mathbb{N} : \Phi_{12,i} = 0. \quad (3.3)$$

Důkaz. Platnost $x \nrightarrow y \mid \Omega_{xy}$ je z definice možné vyjádřit podmínkou

$$\Sigma_y(1 \mid \Omega_y) = \Sigma_y(1 \mid \Omega_{xy}). \quad (3.4)$$

Tento vztah budeme dokazovat ve formě

$$y_t(1 \mid \Omega_y) = y_t(1 \mid \Omega_{xy}), \quad (3.5)$$

která je tvaru (3.4) ekvivalentní (viz [7], str. 42). Kanonická MA reprezentace m -rozměrného procesu w_t má tvar

$$w_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i u_{t-i}, \quad \Phi_0 = I_m. \quad (3.6)$$

Roznásobením dostaneme

$$x_t = \mu_1 + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_{11,i} u_{1,t-i} + \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_{12,i} u_{2,t-i}, \quad (3.7)$$

$$y_t = \mu_2 + \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_{21,i} u_{1,t-i} + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_{22,i} u_{2,t-i}. \quad (3.8)$$

Podobně díky (2.68) platí

$$y_t(1 \mid \Omega_{xy}) = \mu_2 + \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_{21,i} u_{1,t-i} + \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_{22,i} u_{2,t-i+1}, \quad (3.9)$$

odkud dostáváme chybu předpovědi

$$y_{t+1} - y_t(1 | \Omega_{xy}) = u_{2,t+1}. \quad (3.10)$$

Podle Důsledku 1.1 Woldovy věty má každý podproces stacionárního procesu svou MA reprezentaci. Můžeme tedy proces y_t psát ve tvaru

$$y_t = \mu_2 + \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i v_{t-i}, \quad \Psi_0 = I_{m_2} \quad (3.11)$$

s odpovídající chybou předpovědi

$$y_{t+1} - y_t(1 | \Omega_y) = v_{t+1}. \quad (3.12)$$

Rovnost předpovědí tak nastává právě tehdy, když $u_{2,t} = v_t$ pro každé $t \in \mathbb{Z}$. Musí tedy platit

$$y_t = \mu_2 + \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i u_{2,t-i} = \mu_2 + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_{21,i} u_{1,t-i} + \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_{22,i} u_{2,t-i}, \quad (3.13)$$

což je díky jednoznačnosti kanonické MA reprezentace ekvivalentní rovnostem $\Phi_{22,i} = \Psi_i$ a $\Phi_{21,i} = 0$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Tím je dokázán první vztah, druhý je možné dokázat zcela analogicky. \square

Důsledek 3.1. *Nechť je proces w_t definován jako v předchozí větě. Potom platí*

$$x \nleftrightarrow y | \Omega_{xy} \iff \forall i \leq p : A_{21,i} = 0, \quad (3.14)$$

$$y \nleftrightarrow x | \Omega_{xy} \iff \forall i \leq p : A_{12,i} = 0. \quad (3.15)$$

Důkaz. Dokážeme opět pouze první část. Druhá ekvivalence je i v tomto případě analogií první. Rozepíšeme rovnost (1.10) do rekurentního schématu

$$\Phi_0 = I_m \quad (3.16)$$

$$\Phi_1 = \Phi_0 A_1 \quad (3.17)$$

$$\Phi_2 = \Phi_1 A_1 + \Phi_0 A_2 \quad (3.18)$$

\vdots

$$\Phi_i = \Phi_{i-1} A_1 + \dots + \Phi_0 A_i \quad (3.19)$$

\vdots

kde $A_j = 0$ pro $j > p$. Využijeme toho, že $x \nleftrightarrow y | \Omega_{xy}$ je ekvivalentní platnosti $\Phi_{21,i} = 0$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Důsledek pak plyne z vlastností maticového násobení v jednotlivých rovnicích, které nabývají vždy tvaru

$$\begin{pmatrix} \xi_{11,i} & \xi_{12,i} \\ 0 & \xi_{22,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_{11,i} & \zeta_{12,i} \\ 0 & \zeta_{22,i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11,i} & A_{12,i} \\ A_{21,i} & A_{22,i} \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Pro každé $i \in \mathbb{N}$ a obecně nenulové hodnoty $\zeta_{22,i}$ tedy platí $\zeta_{22,i} A_{21,i} = 0$. \square

Věta 3.2 (Waldův test Grangerovy kauzality). *Nechť y_t je m -rozměrný VAR(p) proces se standardním reziduálním bílým šumem u_t . Dále mějme vhodně zvolenou $(n \times m(mp + 1))$ -rozměrnou matici restrikcí C s hodnotí n umožňující testovat nulovost koeficientů procesu y_t prostřednictvím hypotézy*

$$H_0 : C\mathbf{b} = 0 \quad \text{proti} \quad H_1 : C\mathbf{b} \neq 0. \quad (3.21)$$

Za platnosti nulové hypotézy potom platí

$$\lambda_W = \widehat{\mathbf{b}}'C'[C((ZZ')^{-1} \otimes \widehat{\Sigma}_u)C']^{-1}C\widehat{\mathbf{b}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \chi^2(n). \quad (3.22)$$

Důkaz. Metoda nejmenších čtverců dává odhad

$$\widehat{\mathbf{b}} = ((ZZ')^{-1}Z \otimes I_m)\mathbf{y}. \quad (3.23)$$

Odtud dosazením ze vztahu (2.7) dostáváme

$$\widehat{\mathbf{b}} = ((ZZ')^{-1}Z \otimes I_m)((Z' \otimes I_m)\mathbf{b} + \mathbf{u}) \quad (3.24)$$

$$= \mathbf{b} + ((ZZ')^{-1}Z \otimes I_m)\mathbf{u}. \quad (3.25)$$

Nyní můžeme přejít ke tvaru

$$\sqrt{T}(\widehat{\mathbf{b}} - \mathbf{b}) = \sqrt{T}((ZZ')^{-1}Z \otimes I_m)\mathbf{u} \quad (3.26)$$

$$= ((ZZ'/T)^{-1} \otimes I_m)\frac{1}{\sqrt{T}}(Z \otimes I_m)\mathbf{u}. \quad (3.27)$$

Standardní bílý šum zaručuje (viz [7], Lemma 3.1), že ZZ'/T konverguje v pravděpodobnosti k regulární matici X a platí

$$\frac{1}{\sqrt{T}}(Z \otimes I_m)\mathbf{u} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, X \otimes \Sigma_u). \quad (3.28)$$

Odtud plyne

$$(ZZ'/T)^{-1} \otimes I_m \xrightarrow{\mathcal{P}} X^{-1} \otimes I_m. \quad (3.29)$$

Podle maticové varianty Cramér-Sluckého věty má $\sqrt{T}(\widehat{\mathbf{b}} - \mathbf{b})$ asymptoticky stejné rozdělení jako výraz

$$(X^{-1} \otimes I_m)\frac{1}{\sqrt{T}}(Z \otimes I_m)\mathbf{u}, \quad (3.30)$$

který konverguje v distribuci k normálnímu rozdělení

$$\mathcal{N}(0, (X^{-1} \otimes I_m)(X \otimes \Sigma_u)(X^{-1} \otimes I_m)). \quad (3.31)$$

Můžeme tedy psát

$$\sqrt{T}(\widehat{\mathbf{b}} - \mathbf{b}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, X^{-1} \otimes \Sigma_u), \quad (3.32)$$

což lze upravit do tvaru

$$\sqrt{T}(C\widehat{\mathbf{b}} - C\mathbf{b}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, C(X^{-1} \otimes \Sigma_u)C'), \quad (3.33)$$

ze kterého s použitím nulové hypotézy obdržíme

$$T\widehat{\mathbf{b}}'C'[C(X^{-1} \otimes \Sigma_u)C']^{-1}C\widehat{\mathbf{b}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \chi^2(n). \quad (3.34)$$

Nahrazením X a Σ_u konzistentními odhady ZZ'/T a $\widehat{\Sigma}_u$ dostáváme požadovaný tvar testové statistiky. \square

Je také možné využít testovou statistiku $\lambda_F = \lambda_W/n$ společně s kritickými hodnotami Fisherova F-rozdělení o n a $T - mp - 1$ stupních volnosti.

3.2 Okamžitá kauzalita

Definice 3.3. Mezi procesy x_t a y_t existuje *okamžitá kauzalita*, jestliže platí

$$\Sigma_y(1 \mid \Omega_{xy} \cup \{x_{t+1}\}) \neq \Sigma_y(1 \mid \Omega_{xy}). \quad (3.35)$$

Následující věta kromě jiného zaručuje symetrii právě definovaného pojmu.

Věta 3.3 (Charakterizace okamžité kauzality). *Nechť w_t je VAR(p) proces definovaný ve Větě 3.1. Potom okamžitá kauzalita mezi x_t a y_t existuje právě tehdy, když $E(u_{1,t}u'_{2,t}) \neq 0$.*

Důkaz. Rozptylová matice reziduí Σ_u je symetrická a pozitivně definitní. Proto ji můžeme zapsat ve tvaru $\Sigma_u = PP'$, kde P je regulární dolní trojúhelníková matice s kladnými prvky na diagonále. Takovou matici můžeme získat Choleského rozkladem. Platí tedy

$$w_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i PP^{-1} u_{t-i} = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \Theta_i v_{t-i}, \quad (3.36)$$

kde jsme definovali $\Theta_i = \Phi_i P$ a $v_t = P^{-1} u_t$. Přitom zejména $\Theta_{12,0} = 0$ a v_t je tzv. *ortogonální bílý šum* s jednotkovou rozptylovou maticí

$$\Sigma_v = P^{-1} \Sigma_u (P^{-1})' = I_m. \quad (3.37)$$

Roznásobením získáme tvar jednotlivých složek procesu w_t

$$x_{t+1} = \mu_1 + \Theta_{11,0} v_{1,t+1} + \dots \quad (3.38)$$

$$y_{t+1} = \mu_2 + \Theta_{21,0} v_{1,t+1} + \Theta_{22,1} v_{2,t+1} + \dots \quad (3.39)$$

Optimální jednokrokovou předpověď procesu y_t

$$y_t(1 \mid \Omega_{xy} \cup \{x_{t+1}\}) \quad (3.40)$$

lze také zapsat pomocí bílého šumu v_t jako

$$y_t(1 \mid \Omega_v \cup \{v_{1,t+1}\}), \quad (3.41)$$

což se díky vztahu (3.39) rovná

$$\Theta_{21,0} v_{1,t+1} + y_t(1 \mid \Omega_{xy}). \quad (3.42)$$

Dohromady tedy dostáváme, že rovnost

$$y_t(1 \mid \Omega_{xy} \cup \{x_{t+1}\}) = y_t(1 \mid \Omega_{xy}) \quad (3.43)$$

nastává právě tehdy, když $\Theta_{21,0} = 0$. Platí tedy, že matice $\Theta_0 = P$ je blokově diagonální. Odtud plyne, že je blokově diagonální i matice $\Sigma_u = PP'$, což znamená, že prvky $u_{1,t}$ a $u_{2,t}$ jsou nekorelované a platí $E(u_{1,t}u'_{2,t}) = 0$. \square

Věta 3.4 (Waldův test okamžité kauzality). *Nechť y_t je m -rozměrný gaussovský VAR(p) proces. Zavedeme označení $\boldsymbol{\sigma} = \text{vech}(\Sigma_u)$ pro vektor prvků dolní trojúhelníkové matice rozptylové matice Σ_u , viz Dodatek A.2, a definujeme duplikační matici \mathbf{D}_m vztahem $\text{vec}(\Sigma_u) = \mathbf{D}_m \text{vech}(\Sigma_u)$. Dále označíme symbolem \mathbf{D}_m^+ Moore-Penrosovu pseudoinverzní matici duplikační matice \mathbf{D}_m . Nechť jsou dány $(n \times m(m+1)/2)$ -rozměrná matice restrikcí C s hodnotí n a hypotéza*

$$H_0 : C\boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \text{proti} \quad H_1 : C\boldsymbol{\sigma} \neq 0. \quad (3.44)$$

Potom za platnosti nulové hypotézy platí

$$\lambda_W = T\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'C'[2C\mathbf{D}_m^+(\tilde{\Sigma}_u \otimes \tilde{\Sigma}_u)\mathbf{D}_m^+C']^{-1}C\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \chi^2(n). \quad (3.45)$$

Důkaz. Dvojnásobným derivováním logaritmické věrohodnostní funkce lze dospět ke vztahu

$$\sqrt{T}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 2\mathbf{D}_m^+(\Sigma_u \otimes \Sigma_u)\mathbf{D}_m^+) \quad (3.46)$$

(viz [7], str. 93), odkud lze podobně jako v případě testu Grangerovy kauzality vynásobením maticí C dospět ke tvaru

$$\sqrt{T}(C\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - C\boldsymbol{\sigma}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 2C\mathbf{D}_m^+(\Sigma_u \otimes \Sigma_u)\mathbf{D}_m^+C'). \quad (3.47)$$

Za platnosti nulové hypotézy můžeme psát

$$T\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'C'[2C\mathbf{D}_m^+(\Sigma_u \otimes \Sigma_u)\mathbf{D}_m^+C']^{-1}C\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \chi^2(n). \quad (3.48)$$

Dosažením konzistentního odhadu $\tilde{\Sigma}_u$ obdržíme požadovaný výsledek. \square

3.3 Vícekroková kauzalita

Definice 3.4 (Víceková kauzalita). VAR(p) proces x_t působí na y_t v horizontu h na základě Ω_t (značíme $x \xrightarrow{h} y | \Omega_t$), jestliže

$$\Sigma_y(h | \Omega_t) \neq \Sigma_y(h | \Omega_t \setminus \Omega_x). \quad (3.49)$$

Další vztahy bude názornější definovat v negované formě. Říkáme, že VAR(p) proces x_t nepůsobí na y_t do horizontu h na základě Ω_t (značíme $x \xrightarrow{(h)} y | \Omega_t$), jestliže pro každé $j \leq h$ platí $x \xrightarrow{j} y | \Omega_t$. Situaci, kdy $x \xrightarrow{h} y | \Omega_t$ pro každé $h \in \mathbb{N}$ značíme $x \xrightarrow{(\infty)} y | \Omega_t$.

Pro procesy složené pouze ze dvou vektorových podprocesů nabývá podmínka (3.49) tvaru

$$\Sigma_y(h | \Omega_y) \neq \Sigma_y(h | \Omega_{xy}). \quad (3.50)$$

Díky vztahu (2.68) platí

$$y_t(h) = \mu_2 + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_{21, h+i} u_{1, t-i} + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_{22, h+i} u_{2, t-i}, \quad (3.51)$$

odkud s použitím Věty 3.1 plyne

$$x \xrightarrow{h} y | \Omega_{xy} \iff x \xrightarrow{(\infty)} y | \Omega_{xy}. \quad (3.52)$$

Ve dvourozměrném systému je tedy Grangerova kauzalita ekvivalentní kauzalitě v libovolném horizontu. Že tomu tak není obecně v systému s libovolným počtem proměnných, ukážeme pomocí výsledků publikovaných v článku [5].

Definice 3.5. Definujeme *projekční koeficienty* $\Pi_i^{(h)}$ procesu y_t vztahem

$$y_t(h) = \nu \sum_{j=0}^{h-1} \Pi_1^{(j)} + \sum_{i=1}^p \Pi_i^{(h)} y_{t-i+1}. \quad (3.53)$$

Pro ilustraci právě definovaného pojmu uvedme, že projekční koeficienty lze také vyjádřit pomocí prvních p řádků h -té mocniny matice \mathbf{A} , která podle (1.5) přísluší VAR(1) reprezentaci procesu y_t . Platí

$$J\mathbf{A}^h = (\Pi_1^{(h)}, \dots, \Pi_p^{(h)}), \quad (3.54)$$

kde $J = (I_m, 0, \dots, 0)$ je $(m \times mp)$ -rozměrná matice. Definiční rovnost potom odpovídá rovnosti (2.67) vynásobené zleva maticí J . Z této formy zápisu jsou navíc patrné speciální případy

$$\Pi_i^{(1)} = A_i, \quad \Pi_1^{(h)} = \Phi_h. \quad (3.55)$$

Projekční koeficienty lze vypočítat rekurentně prostřednictvím jednoho ze vzorců

$$\Pi_i^{(h+1)} = \Pi_{i+h} + \sum_{j=0}^h \Pi_{h-j+1} \Pi_i^{(j)}, \quad (3.56)$$

$$\Pi_i^{(h+1)} = \Pi_{i+1}^{(h)} + \Phi_h \Pi_i, \quad (3.57)$$

kde klademe $A_i = 0$ pro $i > p$.

Věta 3.5 (Charakterizace vícekové kauzality). *Nechť w_t je m -rozměrný VAR(p) proces složený z m_1 -rozměrného procesu x_t , m_2 -rozměrného procesu y_t a m_3 -rozměrného procesu z_t . Potom platí*

$$x \xrightarrow{h} y \mid \Omega_{xyz} \iff \forall i \leq p : \Pi_{21,i}^{(h)} = 0. \quad (3.58)$$

Věta ukazuje, že pokud jsme v dvourozměrném systému charakterizovali vícekovou kauzalitu pouze pomocí koeficientů procesu VAR(p), mohli jsme tak učinit jen díky vlastnosti (3.52), která je vlastní výhradně procesům o dvou složkách.

Věta 3.6. *Nechť w_t je VAR(p) proces definovaný ve Větě 3.5. Potom $x \xrightarrow{(h)} y \mid \Omega_{xyz}$ platí právě tehdy, když pro každé $i \leq p$ a každé $j \leq h-1$ platí*

$$A_{21,i} = 0 \quad \& \quad \Phi_{23,j} A_{31,i} = 0. \quad (3.59)$$

Právě vyslovené tvrzení říká, že v případě procesů o více než dvou rozměrech již nelze spoléhat pouze na nulovost příslušných koeficientů procesu w_t , ale je nutné brát v úvahu také tzv. *nepřímou kauzalitu*, umožněnou přítomností procesu z_t . Tento pojem ilustruje, proč obecně

$$x \xrightarrow{(h)} y \mid \Omega_{xyz} \not\Rightarrow x \xrightarrow{h+1} y \mid \Omega_{xyz}. \quad (3.60)$$

Podle Věty 3.5 totiž platí

$$x \xrightarrow{h+1} y \mid \Omega_{xyz} \iff \forall i \leq p : \Pi_{21,i}^{(h+1)} = 0, \quad (3.61)$$

$$x \xrightarrow{(h)} y \mid \Omega_{xyz} \iff \forall i \leq p \quad \forall j \leq h : \Pi_{21,i}^{(j)} = 0. \quad (3.62)$$

Pomocí vzorce (3.57) můžeme psát

$$\Pi_{21,i}^{(h+1)} = \Pi_{21,i+1}^{(h)} + \Pi_{21,1}^{(h)}\Pi_{11,i}^{(1)} + \Pi_{22,1}^{(h)}\Pi_{21,h}^{(1)} + \Pi_{23,1}^{(h)}\Pi_{31,i}^{(1)}. \quad (3.63)$$

Vztah (3.62) předchozí rovnost redukuje na tvar

$$\Pi_{21,i}^{(h+1)} = \Pi_{23,1}^{(h)}\Pi_{31,i}^{(1)}. \quad (3.64)$$

Podmínka nulovosti $\Pi_{21,i}^{(h+1)}$ je ekvivalentní nulovosti jednoho ze členů $\Pi_{23,1}^{(h)}$ a $\Pi_{31,i}^{(1)}$. Ze vztahů

$$\forall i \leq p : \Pi_{31,i}^{(1)} = A_{31,i} = 0 \iff x \not\rightarrow z \mid \Omega_{xyz}, \quad (3.65)$$

$$\forall i \leq p : \Pi_{23,1}^{(h)} = \Phi_{23,h} = 0 \iff z \xrightarrow{h} y \mid \Omega_{xyz} \quad (3.66)$$

je patrná existence nepřímé kauzality využívající proměnné z .

Věta 3.7. *Nechť w_t je VAR(p) proces definovaný ve Větě 3.5. Potom platí*

$$x \xrightarrow{(\infty)} y \mid \Omega_{xyz} \iff \forall i \leq p \forall h \leq m_3p + 1 : \Pi_{21,i}^{(h)} = 0. \quad (3.67)$$

Význam poslední věty spočívá v tom, že popisuje kauzalitu v nekonečném horizontu pomocí konečného počtu podmínek, což umožňuje provádění statistických testů. S testováním vícekové kauzality jsou však spojeny jisté nepříjemnosti, neboť podmínky na koeficienty VAR(p) procesu jsou již nelineární a Waldův test v určitých případech pozbývá svého asymptotického chí-kvadrát rozdělení. V knize [7] je uveden postup, ve kterém je tento nedostatek odstraněn tím, že se do testové statistiky přidává náhodná veličina s normálním rozdělením. Jiný postup je navržen v článku [3].

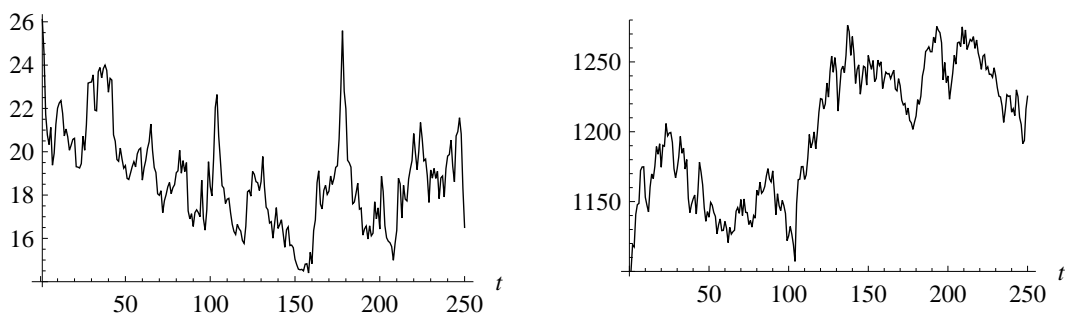
4. Empirická analýza tržních dat

V této kapitole budeme prezentovat výsledky testů Grangerovy kauzality na reálných tržních datech. Pro praktické testování Grangerovy kauzality je nutné nejdříve vybudovat vhodný model. Bude zde tedy ilustrována i jeho konstrukce a diagnostika. Veškeré výstupy jsou získány pomocí vlastní implementace příslušných testovacích procedur v programu *Mathematica*. Tyto materiály jsou k práci přiloženy jako příloha.

4.1 Analýza vlivu indexu volatility VDAX na akciový index PX

Jako první budeme testovat působení indexu volatility německé burzy VDAX na vývoj hodnot českého akciového indexu PX.¹ Index VDAX měří implikovanou volatilitu indexu DAX. Je vypočítáván pomocí Black-Scholesova vzorce na základě cen opcí, jejichž podkladovým aktivem je index DAX. Akciové indexy DAX resp. PX zachycují hospodářský vývoj mezi nejvýznamnějšími společnostmi, jejichž akcie jsou obchodovány na německém resp. českém akciovém trhu. Testy budeme provádět na denních hodnotách indexů za období 1. 7. 2010 – 30. 6. 2011, získaných z databáze programu *Mathematica* a webových stránek Burzy cenných papírů Praha.

Dvourozměrnou časovou řadu složenou z pozorovaných hodnot VDAX a PX (viz Obrázek 4.1) před samotnou konstrukcí modelu převedeme do stacionární podoby. Toho docílíme použitím diferencí logaritmů hodnot původní časové řady. Takto získanou řadu budeme značit y_t .



Obrázek 4.1: Původní data: vlevo VDAX, vpravo PX

Nejprve je nutné určit řád modelu. Provedeme test založený na věrohodnostním poměru. Jako maximální řád modelu zvolíme $p_m = 5$. První nulovou hypotézou, kterou je na základě obdržných výsledků (viz Tabulka 4.1) možné zamítnout na pětiprocentní hladině významnosti, je $H_0(5)$. Kritická hodnota je pro všechny případy rovna 9,488. Test tedy určuje jako optimální model VAR(1). Ke stejnému závěru dospějeme i na základě informačních kritérií AIC, HQ a FPE (viz Tabulka 4.1). Budeme proto pracovat s modelem VAR(1) a hodnotami y_0, \dots, y_T , kde $T = 248$ v souladu se značením (2.3). Délka časové řady odpovídá počtu všedních

¹základní informace a data viz <http://www.deutsche-boerse.com> a <http://www.bcpp.cz/>

dnů ve sledovaném období, kdy se obchoduje zároveň na pražské i frankfurtské burze.

Řád	λ_{LR}	AIC	BIC	HQ	FPE
0	–	-15,784	-15,784	-15,784	$1,419 \times 10^{-7}$
1	13,848	-15,808	-15,751	-15,785	$1,386 \times 10^{-7}$
2	5,913	-15,800	-15,685	-15,753	$1,398 \times 10^{-7}$
3	1,280	-15,772	-15,600	-15,703	$1,437 \times 10^{-7}$
4	1,026	-15,744	-15,514	-15,651	$1,478 \times 10^{-7}$
5	1,186	-15,716	-15,429	-15,600	$1,520 \times 10^{-7}$

Tabulka 4.1: Odhad řádu modelu

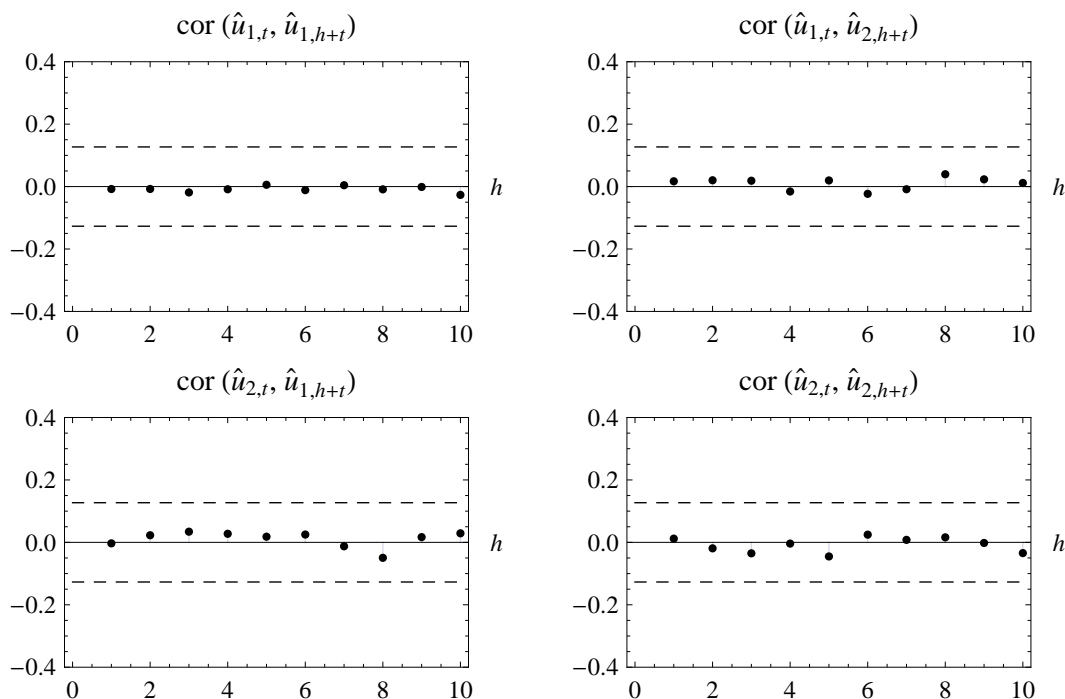
Parametry modelu VAR(1) odhadneme metodou nejmenších čtverců

$$\hat{\nu} = \begin{pmatrix} -0,002 \\ 0,000 \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_1 = \begin{pmatrix} 0,002 & -0,221 \\ -0,039 & -0,195 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Provedeme i odhad rozptylové matice reziduí

$$\hat{\Sigma}_u = \begin{pmatrix} 2,368 & -0,202 \\ -0,202 & 0,075 \end{pmatrix} \times 10^{-3}. \quad (4.2)$$

Odhadnutý proces y_t je stacionární, neboť jediné dva kořeny $-4,314$ a $25,841$ polynomu $I_2 - \hat{A}_1 z$ mají absolutní hodnotu větší než jedna. Bartlettova aproximace znázorňuje všechny kombinace korelací $\hat{u}_{i,t}$ a $\hat{u}_{j,t}$ pro $i, j \leq 2, h \leq 10$ (viz Obrázek 4.6). V tomto případě není patrná žádná statisticky významná korelace.



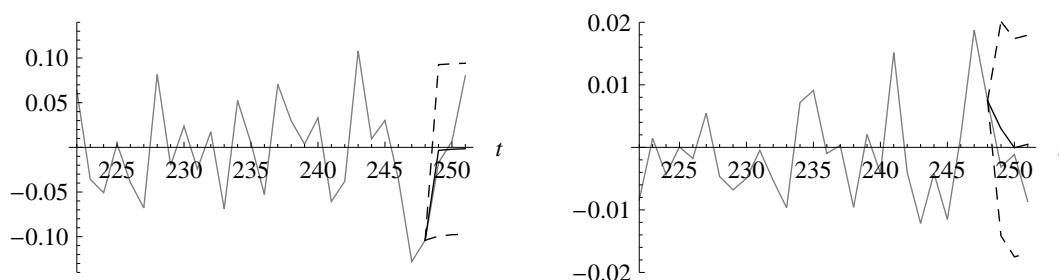
Obrázek 4.2: Bartlettova aproximace

Provedené pozorování ověříme nejprve pomocí portmanteau testu nulové autokorelovanosti reziduí do zpoždění $h = 16 \doteq \sqrt{T}$. Hodnota testové statistiky je v tomto případě 47,184 a nepřevyšuje tak kritickou hodnotu 79,082 odpovídající pětiprocentní hladině významnosti. Dále provedeme Breusch-Godfreyův test (viz Tabulka 4.2) pro prvních pět hodnot zpoždění h . Ani tento test na hladině významnosti 5 % nulovou hypotézu nekorelovanosti reziduí nezamítá. Budeme také testovat normalitu reziduí pomocí Jarque-Berova testu. Výsledná p-hodnota 0,649 ukazuje, že ani hypotézu nenormality reziduí nelze zamítnout.

h	λ_{BG}	$\chi_{0,95}^2$	λ_R	$F_{0,95}$
1	6,040	9,488	1,501	2,390
2	14,644	15,507	1,833	1,958
3	16,564	21,026	1,376	1,773
4	18,253	26,296	1,130	1,665
5	20,606	31,410	1,017	1,593

Tabulka 4.2: Breusch-Godfreyův test

Bodovou a intervalovou předpověď znázorníme v grafu spolu s posledními třiceti hodnotami upravené časové řady a třemi jejími následujícími hodnotami, které do původního modelu nebyly zahrnuty (viz Obrázek 4.3).



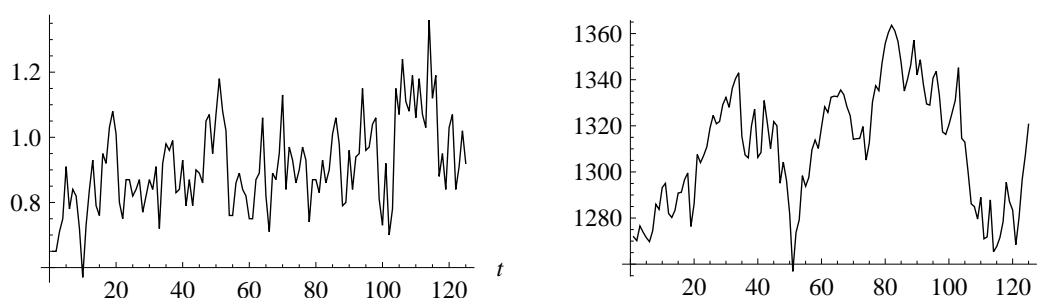
Obrázek 4.3: Predikce budoucích hodnot: vlevo VDAX, vpravo PX; světle reálná data, plně bodový odhad, čárkovaně intervalový odhad ($\alpha = 0,05$)

Waldovy testy ukazují, že VDAX působí podle Grangera na PX (p-hodnota 0,003). Dále bylo zjištěno, že existuje okamžitá kauzalita mezi VDAX a PX (p-hodnota $1,242 \times 10^{-11}$). Můžeme tedy učinit závěr, že současná hodnota indexu volatility VDAX obsahuje s vysokou pravděpodobností informaci, která může zlepšit odhad budoucích hodnot indexu PX. Na tomto místě je vhodné zmínit, že podobného výsledku lze dosáhnout při zkoumání závislosti PX přímo na DAX (p-hodnota 0,001) použitím modelu VAR(2).

4.2 Analýza vlivu ukazatele P/C CBOE na akciový index S&P 500

Druhým příkladem je test vlivu tržního ukazatele P/C CBOE (put/call ratio), udávajícího poměr počtu obchodovaných put a call opcí na americké burze CBOE (Chicago Board Options Exchange), na akciový index S&P 500 (Standard & Poor's 500).² Pokud je ukazatel P/C CBOE kladný, je větší zájem o opce put, zajišťující právo v budoucnu prodat podkladové aktivum za pevně stanovenou cenu. Odtud je možné usuzovat, že investoři předpokládají pokles cen na trhu. Akciový index S&P 500 odráží vývoj cen akcií vybraných pěti set předních korporací obchodovaných na hlavních amerických akciových burzách. Pro testování použijeme denní data za období 1. 1. 2011–30. 6. 2011, získaná z databáze programu *Mathematica* a webových stránek CBOE.

Pro splnění podmínky stationarity nejprve transformujeme dvourozměrnou časovou řadu složenou z hodnot P/C CBOE a S&P 500 (viz Obrázek 4.4) pomocí prvních diferencí logaritmu.



Obrázek 4.4: Původní data: vlevo P/C CBOE, vpravo S&P 500

Na základě výsledků testu založeného na věrohodnostním poměru (viz Tabulka 4.3) lze určit jako optimální model VAR(3). Kritická hodnota odpovídající pětiprocentní hladině významnosti je rovna 9,488. Stejný řád můžeme zvolit také na základě hodnot informačních kritérií AIC, HQ a FPE (viz Tabulka 4.3). Kritérium FPE vyhodnotilo jako optimální řád modelu $p = 1$. Dále tedy budeme uvažovat model VAR(3) spolu s příslušnými hodnotami y_{-2}, \dots, y_T , kde $T = 121$, viz značení (2.3). Hodnoty y_{-2}, y_{-1} a y_0 využijeme pouze pro výpočet prvních tří hodnot v modelu VAR(3).

Řád	λ_{LR}	AIC	BIC	HQ	FPE
0	–	-13,696	-13,696	-13,696	$11,659 \times 10^{-7}$
1	24,825	-13,837	-13,743	-13,799	$10,122 \times 10^{-7}$
2	8,733	-13,843	-13,655	-13,767	$10,061 \times 10^{-7}$
3	17,940	-13,927	-13,645	-13,812	$9,256 \times 10^{-7}$
4	4,910	-13,901	-13,526	-13,749	$9,502 \times 10^{-7}$
5	3,187	-13,860	-13,393	-13,671	$9,899 \times 10^{-7}$

Tabulka 4.3: Odhad řádu modelu

²základní informace a data viz <http://www.cboe.com> a <http://www.standardandpoors.com>

Koeficienty modelu VAR(3) odhadnuté metodou nejmenších čtverců nabývají hodnot

$$\hat{\nu} = \begin{pmatrix} 0,003 \\ 0,000 \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_1 = \begin{pmatrix} -0,384 & -0,070 \\ -0,014 & -0,076 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

$$\hat{A}_2 = \begin{pmatrix} -0,276 & 0,447 \\ -0,002 & -0,185 \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_3 = \begin{pmatrix} 0,010 & 4,568 \\ -0,014 & -0,076 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

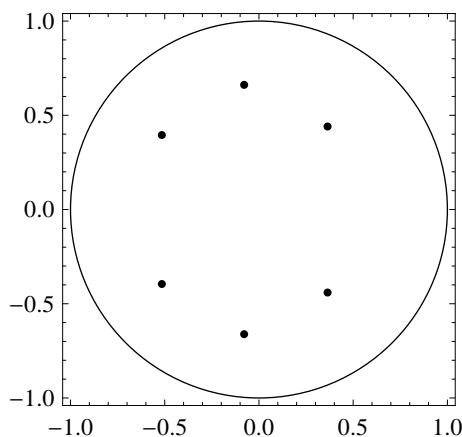
Odhad rozptylové matice reziduí nabývá tvaru

$$\hat{\Sigma}_u = \begin{pmatrix} 16,558 & -0,464 \\ -0,464 & 0,063 \end{pmatrix} \times 10^{-3}. \quad (4.5)$$

Odhadnutý proces y_t je stacionární, neboť polynom $I_2 - \hat{A}_1 z - \hat{A}_2 z^2 - \hat{A}_3 z^3$ má kořeny

$$-1,222 \pm 0,937i, \quad -0,177 \pm 1,491i, \quad 1,115 \pm 1,348i, \quad (4.6)$$

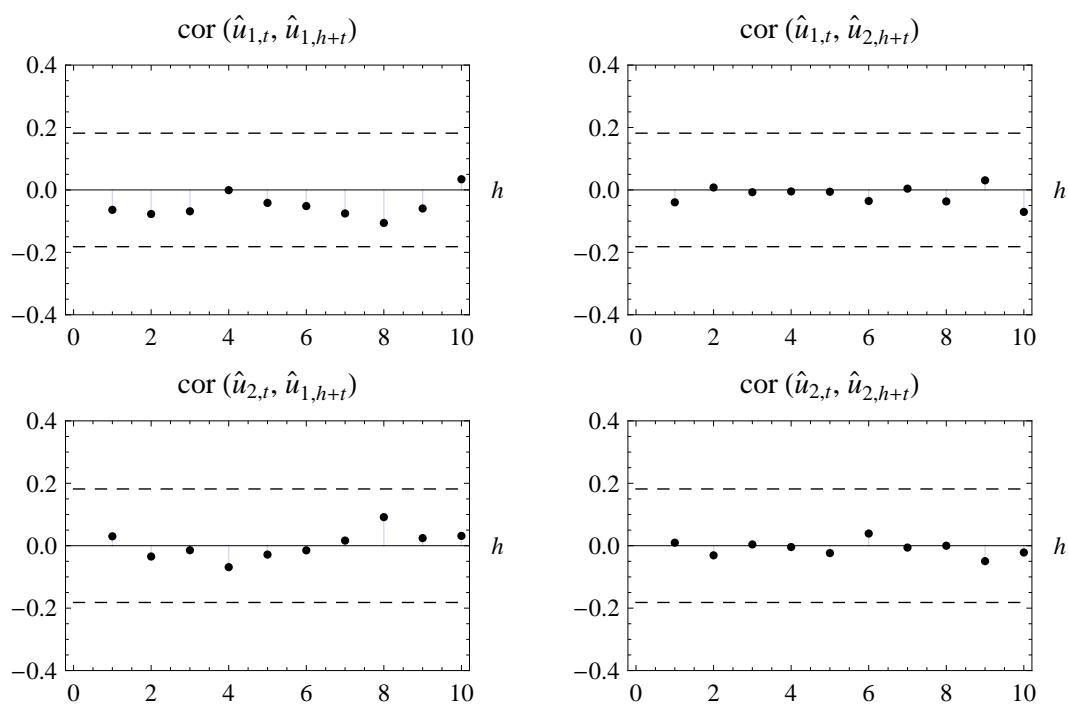
jejichž převrácené hodnoty leží uvnitř jednotkového kruhu v komplexní rovině (viz Obrázek 4.5).



Obrázek 4.5: Převrácené hodnoty kořenů polynomu $I_2 - \hat{A}_1 z - \hat{A}_2 z^2 - \hat{A}_3 z^3$

Bartlettova aproximace (viz Obrázek 4.2) naznačuje, že nedochází k statisticky významné autokorelaci reziduí. Pro testování autokorelovanosti reziduí pro vyšší počet zpoždění použijeme portmanteau test, kde volíme $h = 11 \doteq \sqrt{T}$. Výsledná p-hodnota testu je 0,730. Pro prvních pět hodnot zpoždění h pak použijeme Breusch-Godfreyův test (viz Tabulka 4.4). Ani jeden z testů tedy na pětiprocentní hladině významnosti nezamítá nulovou hypotézu nekorelovanosti reziduí. Stejně tak nelze na této hladině zamítnout nulovou hypotézu nenormality reziduí, neboť hodnota testové statistiky 6,013 nepřekračuje kritickou hodnotu 9,488. Předpovědácí schopnosti modelu posoudíme sestrojením bodového a intervalového odhadu a jejich porovnáním s třemi dodatečnými hodnotami upravené časové řady (viz Obrázek 4.7).

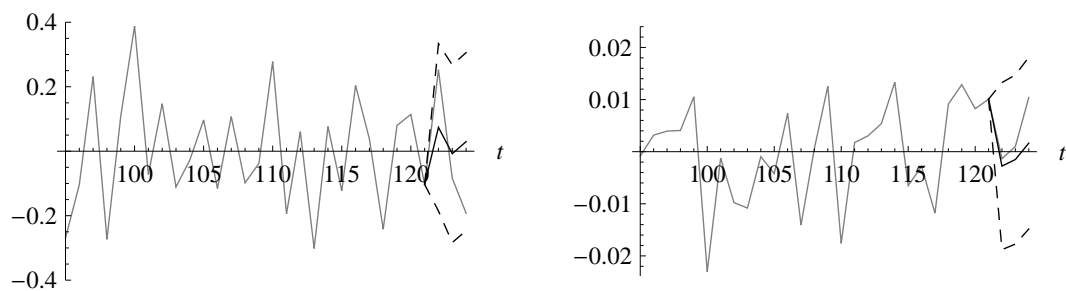
Waldův test ukázal, že P/C CBOE působí podle Grangera na S&P 500 (p-hodnota 0,027). Navíc bylo zjištěno, že i S&P 500 působí podle Grangera na P/C CBOE (p-hodnota 0,045). Dále byla zjištěna okamžitá kauzalita mezi P/C CBOE a S&P 500 (p-hodnota $5,495 \times 10^{-6}$).



Obrázek 4.6: Bartlettova aproximace

h	λ_{BG}	$\chi_{0,95}^2$	λ_R	$F_{0,95}$
1	5,487	9,488	1,290	2,412
2	9,860	15,507	1,166	1,981
3	11,633	21,026	0,908	1,798
4	16,210	26,296	0,946	1,692
5	21,999	31,410	1,036	1,622

Tabulka 4.4: Breusch-Godfreyův test



Obrázek 4.7: Predikce budoucích hodnot: vlevo P/C CBOE, vpravo S&P 500; světle reálná data, plně bodový odhad, čárkovaně intervalový odhad ($\alpha = 0,05$)

Závěr

Využití modelů VAR(p) poskytuje nejen prostředí pro současné zkoumání většího počtu autoregresních modelů, ale oproti jednorozměrným modelům AR(p) umožňuje navíc zachytit vzájemné působení mezi jednotlivými složkami vícerozměrné časové řady. V této práci jsme shrnuli základní poznatky týkající se tohoto působení.

Pro vyšetřování kauzality bylo nejprve nutné vybudovat vhodný model. Popisali jsme proto obecnou konstrukci vektorových autoregresních modelů. Uvedli jsme metody pro určení řádu modelu, odhad jeho koeficientů i ověření adekvátnosti jeho použití. Následně jsme samostatně naprogramovali popsané metody v programu *Mathematica*.

Praktická implementace testovacích procedur vedle detailnějšího popisu jednotlivých mechanismů umožňuje aplikovat prezentované výsledky na reálná data. V této práci jsme zkoumali vliv dvou ukazatelů trhu na vývoj hodnot akciových indexů. Testy jsme prováděli s využitím aktuálních denních tržních dat.

Výsledkem první aplikace testů Grangerovy kauzality je poměrně průkazný vliv očekávané volatility na německém trhu, vyjádřené indexem volatility VDAX, na hlavní akciový index pražské burzy PX. Pro modelování byl na základě identifikačních procedur zvolen model VAR(1) a žádný z diagnostických testů neprokázal, že by se jednalo o nevhodnou volbu.

Druhým výsledkem je zjištěný vliv poměru obchodovaných put a call opcí na chicagské burze na vývoj amerického akciového indexu S&P 500. V tomto případě bylo dokonce zjištěno, že se jedná o působení obousměrné. Také zde bylo použití modelu VAR(3) v souladu s identifikačními a diagnostickými metodami.

Problematika kauzality ve vícerozměrných časových řadách je stále živým tématem. V posledních letech se objevují nejen různé varianty testů více krokové kauzality (viz [3] a [7]), ale kupříkladu také tzv. *míry kauzality*, umožňující intenzitu kauzality vyčíslit (viz [4]).

A. Dodatek

A.1 Kroneckerův součin

Kroneckerův součin matic A a B je definován vztahem

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Pro matice A, B, C vhodných rozměrů platí

$$(A \otimes B)' = A' \otimes B' \quad (\text{A.2})$$

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1} \quad (\text{A.3})$$

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD \quad (\text{A.4})$$

$$\text{vec}(ABC) = (C' \otimes A) \text{vec}(B), \quad (\text{A.5})$$

pokud existují příslušné inverzní matice.

A.2 Operátory vec a vech

Operátor vec seskupuje po sloupcích prvky matice do jednoho vektoru.

$$\text{vec}(A) = \text{vec} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Operátor vech seskupuje po sloupcích pouze prvky matice na hlavní diagonále a pod ní. Používá se zejména pro symetrické matice.

$$\text{vech}(A) = \text{vech} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & a_{22} & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{mm} \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Literatura

- [1] Cipra, T.: *Finanční ekonometrie*. Ekopress, Praha (2008).
- [2] Doornik, J. A.: *Testing Vector Error Autocorrelation and Heteroscedasticity*. unpublished, Oxford (1996).
- [3] Dufour, J.-M., Pelletier, D., Renault, É.: *Short Run and Long Run Causality in Time Series: Inference*. Journal of Econometrics, Vol. 132, No. 2 (June, 2009).
- [4] Dufour, J.-M., Taamouti, A.: *Short and Long Run Causality Measures: Theory and Inference*. Journal of Econometrics, Vol. 154, No. 1 (Jan., 2010).
- [5] Dufour, J.-M., Renault, E.: *Short Run and Long Run Causality in Time Series: Theory*. Econometrica, Vol. 66, No. 5 (Sep., 1998).
- [6] Granger, C. W. J.: *Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-Spectral Methods*. Econometrica, Vol. 37, No. 3 (July, 1969).
- [7] Lütkepohl, H.: *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer-Verlag, Heidelberg (2005).

Seznam použitého značení

\rightarrow	Grangerova kauzalita
\xrightarrow{h}	kauzalita v horizontu h
$\xrightarrow{(h)}$	absence kauzality do horizontu h
'	transpozice matice
\otimes	Kroneckerův součin matic
vec	vektor sloupců matice
vech	vektor sloupců dolní trojúhelníkové matice
tr	stopa matice
det, $ \cdot $	determinant matice
log	přirozený logaritmus
y_t	vektorový autoregresní proces (s výjimkou první kapitoly)
u_t	reziduální bílý šum procesu y_t (s výjimkou první kapitoly)
A_i, ν	koefficienty procesu y_t
Φ_i, μ	koefficienty kanonické MA reprezentace procesu y_t
$\Pi_i^{(h)}$	projekční koefficienty procesu y_t
B	matice koefficientů (ν, A_1, \dots, A_p) procesu y_t
b	vektor koefficientů $\text{vec}(B)$ procesu y_t
A	matice koefficientů VAR(1) reprezentace procesu y_t
$y_t(h)$	optimální lineární h -kroková předpověď procesu y_t v čase t
$\Sigma_y(h)$	rozptylová matice h -krokové předpovědi procesu y_t
Σ_y	rozptylová matice procesu y_t
Σ_u	rozptylová matice reziduí u_t procesu y_t (s výjimkou první kapitoly)
$\widehat{\Sigma}_u$	odhad Σ_u metodou nejmenších čtverců (obecné značení)
$\widetilde{\Sigma}_u$	odhad Σ_u metodou maximální věrohodnosti (obecné značení)
Γ_y	autokovarianční funkce procesu y_t
R_y	autokorelační funkce procesu y_t
Ω_t	obecná informační množina
Ω_{xy}	informační množina procesu se složkami x_t a y_t (obecné značení)
$\xrightarrow{\mathcal{P}}$	konvergence v pravděpodobnosti
$\xrightarrow{\mathcal{D}}$	konvergence v distribuci
\sim	pravděpodobnostní rozdělení
\approx	přibližné pravděpodobnostní rozdělení
\doteq	přibližná rovnost
$\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$	vícerozměrné normální rozdělení s parametry μ a Σ
$\chi^2(n)$	chí-kvadrát rozdělení s n stupni volnosti
$F(n, m)$	Fisherovo F-rozdělení s n a m stupni volnosti
$z_{1-\alpha}$	α -kvantil normovaného normálního rozdělení
$\chi_{1-\alpha}^2$	α -kvantil chí-kvadrát rozdělení (počet stupňů volnosti dle kontextu)
$F_{1-\alpha}$	α -kvantil Fisherova F-rozdělení (počty stupňů volnosti dle kontextu)

Příloha

Analýza tržních dat v programu *Mathematica*.