Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jan Němec

Markowitzův model s omezeními

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Petr Lachout, CSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2011

Rád bych na tomto místě velice poděkoval vedoucímu práce doc. RNDr. Petru Lachoutovi, Csc. za vstřícnost a ochotu při vedení mé práce a dále zejména mé rodině za finanční podporu při studiích.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze, dne 28.7 2011 Jan Němec

Název práce: Markowitzův model s omezeními
Autor: Jan Němec
Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Petr Lachout, CSc.

Abstrakt: Sestavení optimálního portfolia z dostupných obchodovatelných komodit je velmi často diskutovanou otázkou. Jedním z modelů, který uvažuje nejenom výnos portfolia, ale také jeho rizikovost, je Markowitzův model. Bakalářská práce bude uvažovat tento přístup v případech, když je hledané portfolio svázáno dalšími omezeními. Přednostně se práce bude zabývat omezeními, která jsou dána legislativou pro chování různých bankovních subjektů investujících na burzovním trhu.

Klíčová slova: Markowitzův model, omezení na tvorbu portfolia, bankovní regulace

Title: Markowitz model with constrains
Author: Jan Němec
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: doc. RNDr. Petr Lachout, CSc.

Abstract: Composition of an optimal portfolio from available tradable comodities is very frequntly a discussed issue. One model, which considers not only the yield of the portfolio, but also its risk, is Markowitz model. Bachelor thesis will consider this approach in cases when the searched portfolio is bounded with additional restrictions. This thesis will primarily address the constraints that are determined by legislation to conduct various banking entities investing in the stock market.

Keywords: Markowitz model, portfolio constraints, banking regulation

Obsah

Úvod

Harry Markowitz bývá často označován za otce moderní teorie portfolia. Roku 1952 vydáním článku Portfolio Selection v The Journal of Finance zcela zrevolucionizoval moderní teorii portfolia. V tomto článku Markowitz přichází s myšlenkou, že každý investor se snaží maximalizovat výnos svého portfolia na hranici pro něj přijatelného rizika. K dosažení tohoto cíle je důležité určit, jak velké mají být části portfolia investované do jednotlivých aktiv. Dále ukázal potřebu zajímat se o korelace mezi výnosy jednotlivých aktiv s cílem zajistit dostatečnou diverzifikaci portfolia. Přidáváním aktiv do portfolia, která nejsou dokonale korelovaná se stávajícími aktivy, se snižuje riziko celého portfolia. Tento model se stal základem moderní teorie portfolia. Bývá však často v určitých ohledech kritizován. Existuje mnoho různých teorií, které na tento model navazují, a stále vznikají další.

Práce zohledňuje vliv různých omezení, která lze aplikovat jako nadstavbu pro Markowitzův model. Dodatečná omezení jsou ve většině případů tvorby portfolia nevyhnutelná. Tato skutečnost však ještě neznamená, že nejsou určitým způsobem zvládnutelná. Po vytvoření určité základny teorie portfolia se práce zaměřuje na konkrétní omezení aplikovatelné společně s teorií Markowitzova portfolia. Tato základní omezení jsou popsána v takovém tvaru, aby na ně bylo možné převést právě např. omezení daná legislativou pro bankovní subjekty a dále pak analyzovat jejich vliv na bankovní portfolia. Dále jsou popsány vlivy regulací kapitálové přiměřenosti ve zjednodušeném tvaru a limitů angažovaností na chování investičních bankéřů. Práce je zakončena příslušnou legislativou vztahující se k regulaci kapitálu, kapitálové přiměřenosti a limitům angažovanosti.

1 Základní teorie portfolia

Portfolio můžeme definovat jako soubor finančních aktiv, přesněji dle následující definice.

Definice 1. Portfolio je vektor $x = (x_1, ..., x_N)^\top$, kde x_n je část jednodkového bohatství investovaná do n-tého aktiva za předpokladu podmínky $\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$.

Poznámka 1. Výraz $\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$ lze také vyjádřit jako $1^\top x = 1$, kde 1 je vektor $\underbrace{(1, 1, \ldots, 1)^\top}_{N\times}$.

Pod pojmem portfolio si tedy lze představit určitou skupinu aktiv. Výnos portfolia se obvykle značí jako E, což ale koliduje s označením střední hodnoty. V celém textu tedy budeme označovat střední hodnotu jako E_{SH}. Dále definujme výnosy jednotlivých aktiv $r = (r_1, ..., r_N)^\top$ jako náhodné veličiny s očekávanými výnosy $\mu = E_{SH} r = (\mu_1, ..., \mu_N)^\top$. Náhodnost výnosů $r = (r_1, ..., r_N)^\top$ je odvozena od rizikovosti uvažovaných aktiv. Celkový očekávaný výnos portfolia je tedy roven

$$E = \sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i \tag{1}$$

Další důležitou charakteristikou portfolia je jeho kovarianční matice $V = (\sigma_{ij})$, kde

$$\sigma_{ij} = cov(r_i, r_j) = E_{SH}[(r_i - \mu_i)(r_j - \mu_j)] \tag{2}$$

$$\sigma_{ii} = E_{SH}(r_i - \mu_i)^2 \tag{3}$$

Speciálně platí $\sigma_i^2 := \sigma_{ii}$ a $\sigma_{ij}{=}\sigma_{ji}$, $i, j = 1, ..., N$, neboť matice V je zřejmě symetrická. Předpokládejme, že matice V je pozitivně definitní. Poslední stěžejní vlastnost portfolia je jeho tzv. variance

$$\sigma^2 = x^T V x = \sum_{i=1}^{N} \sigma_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} x_i x_j \sigma_{ij} \tag{4}$$

Definice 2. Portfolio x^*nazýváme eficientní vůči střední hodnotě a rozptylu, jestliže neexistuje jiné portfolio x splňující $\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$, pro které je $\mu^T x \geq \mu^T x^*$a zároveň $x^\top V x \leq x^{*\top} V x^*$. Současně musí být alespoň jedna z těchto nerovností ostrá.

Poznámka 2. Definice 2 nám vpodstatě říká, že pro eficientní portfolio neexistuje žádné jiné, které by mělo stejný nebo vyšší očekávaný zisk a zároveň by bylo méně rizikové.

Definice 3. Portfolio $(x_1, ..., x_N)^\top$nazveme přípustným, jestliže splňuje všechny na něj kladené podmínky.

Definice 4. Přípustná $E\sigma$ kombinace je taková kombinace E a σ, která je daná konkrétním přípustným portfoliem.

Těchto prvních pět definic, které jsou jako úvod do dané problematiky zcela nezbytné, byly vypracovány za pomoci zdrojů [1, 3, 6].

2 Markowitzův model

2.1 Předpoklady pro správné fungování Markowitzova modelu

Markowitzův model je založen na několika základních předpokladech týkajících se finančních trhů a jednání investorů. Obecně řečeno tyto předpoklady zjednodušují reálnou situaci.

- Na trhu v jednom časovém úseku investují malí investoři bez schopnosti výrazně jakkoli ovlivnit jednotlivá aktiva.
- Všichni investoři se rozhodují na základě očekávaných výnosů a kovariancí těchto výnosů.
- Investoři se chovají racionálně ve smyslu výběru portfolia. Preferují vyšší výnosy a menší riziko. Z portfolií se stejným rizikem vybírají to nejvýnosnější, resp. z portfolií se stejným výnosem vybírají to nejméně rizikové.
- Obchoduje se na trhu nezatíženém daněmi, popřipadě transakčními náklady s libovolně dělitelnými a obchodovatelnými aktivy.
- Na trhu existuje neomezená možnost investice či půjčky za bezrizikovou úrokovou míru.

2.2 Základní formy modelu

V následujících třech definicích jsou obsaženy formulace základních forem modelu dle [1]. Pro určité výpočty je často výhodné používat jednu formu modelu zejména z hlediska složitosti odvozování. Výsledky lze poté snadno převést do jakéhokoli jiné formy modelu.

Definice 5. První forma základního modelu se skládá z n proměnných za platnosti žádné, jedné nebo několika podmínek následujících tvarů,

- $x_i \geq L_i$ pro nějaká $i = 1, \ldots, N$

- $x_i \leq U_i$ pro nějaká $i = 1, \ldots, N$
- $\alpha^T x \geq c$
- $\alpha^T x \leq c$
- $\alpha^T x = c$

kde $n \geq 1$, α je vektor konstant a L_i, U_i, c jsou konstanty. Model se nazývá přípustný, existuje-li alespoň jedno x splňující všechny podmínky.

Definice 6. Druhá forma základního modelu je definována následovně. Nechť $m, N \in \mathbb{N}$, $m \geq 0$, $n \geq 1$. Portfolio x se nazývá přípustné, platí-li

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

,tj. $Ax \geq b$. Je-li $m = 0$, pak je každé portfolio x přípustné.

Definice 7. Třetí, poslední, forma základního modelu je definována následovně. Nechť $m, N \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, $n \geq 1$. Portfolio x se nazývá přápustné, platí-li

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$x \geq 0$$

Věta 8. *Všechny tři výše uvedené modely mají stejnou množinu přípustných $E\sigma$ kombinací.*

2.3 Základní formulace úlohy pro řešení Markowitzova modelu

Úlohu základního Markowitzova modelu můžeme definovat jako

$$min\ x^\top V x = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij} \tag{5}$$

za podmínek,

$$\mu^\top x = \sum_{i=1}^{N} \mu_i x_i = E \tag{6}$$

$$1^{\top}x = \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \tag{7}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, ..., N \tag{8}$$

kde E je předem zadaný a požadovaný výnos portfolia. Konstantu E je možné měnit a získat tak výsledky pro všechny požadované výnosy portfolia. Alternativně lze tuto úlohu definovat pomocí Sharpeho poměru, tj.

$$max \ \frac{\mu^{\top}x}{\sqrt{x^{\top}Vx}}$$

za podmínek

$$1^{\top}x = \sum_{i=1}^{N} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, ..., N$$

2.4 Všeobecné řešení při povolení prodejů nakrátko

V tomto případě tedy budeme řešit úlohu základního Markowitzova modelu s vynecháním podmínky (8), tj. se zakázáním prodejů nakrátko. Následný postup poskytuje explicitní výsledek, není tedy třeba se uchylovat k různým aproximacím. Z hlediska složitosti výpočtu je výhodnější minimalizovat $\frac{1}{2}x^{\top}Vx$ při zachování stejných dodatečných podmínek. Je zřejmé, že přenásobení konstantou $\frac{1}{2}$ žádným způsobem neovlivní výsledek. Případ, kdy $\mu = konstanta \cdot 1$, poskytuje triviální řešení. Stačí vzít aktivum n_0, pro které platí $n_0 = argmin_{1 \leqq n \leqq N} \sigma_n^2$. K řešení problému nyní použijeme metodu Lagrangerových multiplikátorů. Lagrangerova funkce pro tento problém je

$$L(x, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2}x^{T}Vx + \lambda_1(E - \sum_{i=1}^{N} \mu_i x_i) + \lambda_2(1 - \sum_{i=1}^{N} x_i) \tag{9}$$

Dále dostáváme tři následující podmínky pro optimální rešení

$$\frac{\partial}{\partial x_i} L(x, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{j=1}^{N} x_j \sigma_{ij} - \lambda_1 \mu_i - \lambda_2 = 0, \ \ i = 1, \ldots, N \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1} L(x, \lambda_1, \lambda_2) = E - \sum_{i=1}^{N} \mu_i x_i = 0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_2} L(x, \lambda_1, \lambda_2) = 1 - \sum_{i=1}^{N} x_i = 0 \tag{12}$$

Vzhledem k faktu, že výrazy (10),(11) a (12) jsou lineární vzhledem k x_i, pak z rovnice (27) dostaneme optimální řešení

$$x_i = \lambda_1 \sum_{j=1}^{N} v_{ij}\mu_j + \lambda_2 \sum_{j=1}^{N} \nu_{ij}, \;\; i = 1, \ldots, N \tag{13}$$

Dle předpokladu je matice V pozitivně definitní, a tudíž matice V^{-1} existuje. ν_{ij} jsou pak členy této inverzní matice V^{-1}. Položme $A := \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \nu_{ij}\mu_j$, $B := \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \nu_{ij}\mu_i\mu_j$, $C := \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \nu_{ij}$ a $D := BC - A^2$. Zřejmě platí $B > 0$, $C > 0$. Nerovnost $D > 0$ plyne následujícím způsobem. Matice V^{-1} je positivně definitní, a tedy $0 < \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \nu_{ij}(A\mu_i - B)(A\mu_j - B) = B^2C - 2A^2B + A^2B = BD$. Jak již bylo zmíněno, platí $B > 0$, a tedy musí dle předchozí nerovnosti platit $D > 0$. Při použití počátečních podmínek můžeme odvodit následující vztahy pro λ_1 a λ_2.

$$E = \lambda_1 B + \lambda_2 A \tag{14}$$

$$1 = \lambda_1 A + \lambda_2 C \tag{15}$$

Pro odvození vztahu (14) použijeme (11). Dále však potřebujeme nějakým způsobem stanovit $\sum_{i=1}^{N} \mu_i x_i$ obsažený ve vztahu (11). Tento výraz získáme ze (13), který nejdříve přenásobíme μ_i a poté sečteme přes $i = 1, \ldots, N$. Analogicky lze odvodit platnost (15) ze vztahu (11). Pro dodatečné dosazení tentokrát za výraz $\sum_{i=1}^{N} x_i$, opět použijeme (13), který nyní stačí pouze sečíst přes $i = 1, \ldots, N$. Po vyřešení předchozí soustavy dostáváme

$$\lambda_1 = \frac{CE - A}{D} \quad \lambda_2 = \frac{B - AE}{D} \tag{16}$$

Řešení musíme rozdělit mezi dva případy

- $1^T V^{-1}\mu = 0$

Tento případ v praxi prakticky nenastává, přesto pro něj platí

$$\lambda_1 = \frac{1}{1^\top V^{-1} 1} \quad \lambda_2 = \frac{E}{\mu^\top V^{-1}\mu}$$

a tedy hledané řešení pro tento případ je

$$x^* = \frac{V^{-1}1}{1^\top V^{-1}1} + \frac{EV^{-1}\mu}{\mu^\top V^{-1}\mu}$$

- $1^T V^{-1}\mu \neq 0$

Položme

$$x^1 = \frac{V^{-1}1}{1^\top V^{-1}1} \quad x^2 = \frac{V^{-1}\mu}{1^\top V^{-1}\mu}$$

a tedy hledané řešení pro tento případ můžeme vyjádřit ve formě

$$x^* = \delta(E)x^1 + (1-\delta(E))x^2$$

kde $\delta(E) = \frac{C(B-EA)}{D}$. V neposlední řadě je důležité zdůraznit, že portfolia x^1 a x^2 jsou nezávislá na předem zvolené konstantě E, ale váha $\delta(E)$ na konstantě E závisí.

Poznámka 3. Zakážeme-li prodeje nakrátko, musíme řešený problém doplnit o dodatečné podmínky $x_i \geq 0,\ i = 1, ..., N$. Obecný problém je poté většinou nutno řešit pomocí kvadratického programování.

Poznámka 4. Obdobný postup lze do našich úvah aplikovat i při zahrnutí bezrizikového aktiva.

Předvedený postup vychází z [3, 14].

2.5 Převedení základního Markowitzova modelu na úlohu kvadratického programování

Markowitzův model je úloha kvadratického programování, kterou lze řešit pomocí moderního softwaru. A to například pomocí programu Gams [1], který je k řešení podobných problémů přímo uzpůsoben. Hlavním výsledkem úlohy je zobrazení její eficientní hranice.

Definice 9. Závislost očekávaného výnosu na riziku portfolia se obyčejně zakresluje do kartézské soustavy souřadnic s osami E a σ. Odpovídající křivky se nazývají eficientní hranice.

Eficientní hranice je tedy jakási množina portfolií s minimálním možným rizikem při zachování určeného očekávaného výnosu. Geometricky ji můžeme určit jako průsečík množiny portfolií s minimálním rizikem a množiny portfolií s maximálním výnosem. Výběr portfolia z eficientní hranice není zcela jednoznačný, neboť závisí na investorově postoji k riziku. K vykreslení eficientní hranice je třeba určit E_{min} a E_{max}, tj. konstanty ohraničující křivku eficientní hranice. Konstantu E_{min} lze určit pomocí řešení následujícího problému

$$min\ x^\top V x = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij} \tag{17}$$

za podmínek

$$1^\top x = \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \tag{18}$$

[1]General Algebraic Modeling System, software vysoké úrovně pro matematickou optimalizaci

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, ..., N \tag{19}$$

Podmínku (18) lze interpretovat tak, že záměrem investora je proinvestovat celé své bohatství. Jedná se o řešení základní Markowitzovy úlohy s vynecháním podmínky (6). Konstantu E_{min} lze poté určit jako hodnotu $\mu^\top x$ při optimálním řešení výše uvedené úlohy. Obdobně konstantu E_{max} lze vypočítat za pomoci úlohy

$$max\, \mu^\top x$$

za podmínek

$$\sum_{i=1}^{N} x_i{=}1$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, ..., N$$

Nyní již tedy známe interval $[E_{min}, E_{max}]$, který je potřebný pro zobrazení eficietní hranice daného problému. Pro vykreslení kompletní eficientní hranice je třeba řešit základní úlohu opakovaně pro různé hodnoty E v dostatečně malých intervalech. Standardní úloha Markowitzova modelu může být snadno převedena na následující úlohu kvadratického programování

$$min \; \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}$$

za podmínek

$$x \in \left\{ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{N} x_i{=}1, \; \sum_{i=1}^{N} \mu_i x_i = E, \; x_i \geq 0 \quad i = 1, ..., N \right\} \tag{20}$$

Dokonce se jedná o úlohu konvexního kvadratického programování, neboť množina (20) je průsečíkem dvou nadrovin, a tudíž je konvexní.

Definice 10. $P \subset \mathbb{R}^N$ nazýváme množinou přípustných investic, jestliže všechny vektory v ní obsažené splňují následující podmínku,

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \Delta \right\}$$

kde Δ je soubor podmínek daný zákony, investorským záměrem atd.

Poznámka 5. Předpokládejme doplnění základního modelu o nějaké další omezení. Konstantu E_{min} lze poté určit pomocí úlohy $min\; x^\top V x$ za podmínek $\sum_{i=1}^{N} x_i{=}1$, $x_i \geq 0 \quad i = 1, ..., N$ a $x \in P$. Obdobně konstantu E_{max} lze vypočítat za pomoci úlohy $max\, \mu^\top x$ za podmínek $\sum_{i=1}^{N} x_i{=}1$, $x_i \geq 0 \quad i = 1, ..., N$ a $x \in P$.

2.6 Alternativní formulace úlohy kvadratického programování pro řešení základního Markowitzova modelu

Existuje mnoho různých formulací úlohy kvadratického programování pro řešení základního Markowitzova modelu. Při vhodné volbě konstant α, λ, k, η poskytují následující čtyři úlohy stejná optimální řešení. Pro první formulaci daného problému využijeme konceptu tzv. penalizací, úlohu lze tedy formulovat v následujících tvarech

1.
$$min\ f_\alpha(x) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij} + \alpha(\sum_{i=1}^{N} \mu_i x_i - E)^2$$

za podmínek

$$x \in P,\ \alpha > 0$$

2.
$$max\ f_\lambda(x) = \sum_{i=1}^{N} \mu_i x_i - \lambda \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}$$

za podmínek

$$x \in P,\ \lambda > 0$$

3.
$$min\ \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}$$

za podmínek

$$x \in \left\{ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{N} \mu_i x_i \geq k,\ x \in P \quad i = 1, ..., N \right\},\ k \in \mathbb{R}$$

4.
$$max\ \sum_{i=1}^{N} \mu_i x_i$$

za podmínek

$$x \in \left\{ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij} \leq \eta,\ x \in P \quad i = 1, ..., N \right\},\ \eta > 0$$

Jako základ pro výše uvedené rozdělení byl použit zejména [5].

3 Minimalizace s omezeními

Jako hlavní zdroj této kapitoly byl použit [1] včetně uvedených vět a důkazů.

Uvažujme jakoukoliv množinu S, pro kterou platí $S \in \mathbb{R}^N$, dále nechť $g_0(x)$, $g_1(x)$,..., $g_m(x)$ jsou funkce vektoru $x^\top = (x_1, ..., x_N)$. Uvažujme nyní následující dva problémy. Je velice důležité poukázat na rozdílnost těchto problémů.

1. Pro m předem zadaných konstant $b_1, ..., b_m$ nalezni $x \in S$, které minimalizuje $g_0(x)$ za následujících podmínek

$$g_i(x) = b_i, \quad i = 1, ..., m \tag{21}$$

2. Pro m předem zadaných konstant $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ nalezni $x \in S$ které minimalizuje následující výraz

$$L = g_0(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) \tag{22}$$

Věta 11. *Jestliže pro dané vektory $(b_1, ..., b_m)$ a $(\lambda_1, ..., \lambda_m)$ optimální řešení x_{opt} prvního z výše uvedených problémů splňuje podmínku (21), pak x_{opt} je optimální řešení i prvního z výše uvedených problémů.*

Důkaz. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme tedy existenci $x_{opt_2} \in S$ splňující podmínky $g_i(x) = b_i, \quad i = 1, ..., m$ a nechť zároveň platí $g_0(x_{opt_2}) < g_0(x_{opt})$. Poté platí následující

$$L(x_{opt_2}) = g_0(x_{opt_2}) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_{opt_2}) = g_0(x_{opt_2}) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i <$$

$$< g_0(x_{opt}) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i = g_0(x_{opt}) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_{opt}) = L(x_{opt})$$

Dostáváme se tedy do sporu s předpokladem, že x_{opt} je řešení druhého problému zmíněného výše. $\square$

Definice 12. Výše zmiňované $\lambda_1, ..., \lambda_n$ se nazývají Lagrangerovy multiplikátory.

3.1 Výběr portfolia s lineárními omezeními

V této části se budeme zabývat Markowitzovým modelem doplněným o lineární omezení ve tvaru $Ax = b$. Částečně tak navážeme na sekci (2.4). Položme $g_0(x) = x^\top Vx$ a nechť $g_i(x)$, $i = 0, ..., m$ jsou lineární. Nyní se budeme zabývat následující úlohou

$$min\ g_0(x) = x^\top Vx$$

za podmínek

$$Ax = b$$

$$\mu^\top x = E$$

Uvažujme nyní Lagrangerovu funkci ve tvaru,

$$L(x) = \frac{1}{2}x^\top Vx + \lambda^\top Ax - \lambda_E \mu^\top x$$

kde $\lambda^\top = (\lambda_1, \ , \lambda_m)$ je vektor konstant λ_E konstanta. Z důvodu popsaného v sekci (2.4) přenásobíme výraz $\frac{1}{2}x^\top Vx$ konstantou $\frac{1}{2}$. Z obdobného důvodu přenásobíme konstanty $\lambda_1, \ , \lambda_m$ konstantou -1. V tomto okamžiku využijeme větu (11). Tato věta nám říká, že při minimalizaci funkce L dostaneme řešení, které minimalizuje $\frac{g_0(x)}{2}$ pro předem dané konstanty $\lambda_1, ..., \lambda_n$ a λ_E a pro neznámé hodnoty Ax a E. Nasnadě je tedy otázka, zda-li existuje $\lambda_1, \ , \lambda_m$ tak, aby pro řešení druhého výše zmíněného problému bylo splněno $Ax = b$ a $\mu^\top x = E$ pro námi požadovanou hodnotu E.

Příklad 13. Například podmínka $\sum_{i=1}^{N} x_i{=}1$ lze snadno zapsat ve tvaru $Ax = b$. Stačí položit $A = \underbrace{(1, 1, \ldots, 1)}_{N\times}$ a $b = (1)$. Nyní nechť $N{=}3$, pak do omezení ve tvaru $Ax = b$ lze snadno doplnit i podmínky jako např.: $3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4$. Spojíme-li toto omezení s $\sum_{i=1}^{3} x_i{=}1$, dostáváme $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ a $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Věta 14. $\frac{\partial L}{\partial x} = Vx{+}A^T\lambda{-}\lambda_E\mu = 0$ *je nutná a postačijící podmínka pro minimalizaci* $L(x) = \frac{1}{2}x^T Vx + \lambda^T Ax - \lambda_E \mu^T x$ *pro předem dané pevné hodnoty* $\lambda, \ , \lambda_m$ *a* λ_E *mezi všemi možnými* $x \in \mathbb{R}^N$.

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Nechť x^* splňuje $Vx + A^T\lambda - \lambda_E\mu = 0$. Pro spor předpokládejme existenci y^* splňujícího $L(y^*) < L(x^*)$. Nechť $x = x^* + t(y^* - x^*)$, $t \in \mathbb{R}$. Podél přímky proložené x^* a y^*můžeme vyjádřit L jako funkci proměnné t. Dostáváme tedy,

$$L = \frac{1}{2}x^\top Vx + \lambda^\top Ax - \lambda_E\mu^\top x =$$

$$= \frac{1}{2}(x^*{+}t(y^*{-}x^*)V(x^*{+}t(y^*{-}x^*)){+}\lambda^\top A(x^*{+}t(y^*{-}x^*)){-}\lambda_E\mu^\top(x^*{+}t(y^*{-}x^*)) =$$

$$= \frac{1}{2}(x^*)^\top Vx^*{+}\lambda^\top Ax^* - \lambda_E\mu^T x^*{+}((y^* - x^*)^\top Vx^* + \lambda^\top A(y^* - x^*) -$$

$$\text{-}\lambda_E\mu^\top(y^* - x^*))t + (\frac{1}{2}(y^* - x^*)^\top Vb)t^2{=}L(x^*) + bt + at^2$$

kde díky pozitivně definitní matici V obdržíme $a_2 = \frac{1}{2}(y^* - x^*)^T V(y^* - x^*) \geq 0$. K dokončení důkazu nám stačí ukázat, že pro L jakožto funkci proměnné t platí $\frac{dL}{dt}(0) = 0$. Využijeme následujícího vztahu

$$\frac{dL}{dt}(0) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial x_i}(0)\frac{dx_i}{dt}(0) = 0$$

Podmínku $\frac{\partial L}{\partial x} = Vx + A^\top \lambda - \lambda_E \mu = 0$ lze po složkách rozepsat jako

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij} x_j + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_{ki} - \lambda_E \mu_i = 0, \quad i = 1, ..., N$$

Dostáváme se tedy do sporu s předpokladem $L(y^*) < L(x^*)$. □

Věta 15. *Jestliže* $Vx + A^\top \lambda - \lambda_E \mu = 0$*,* $Ax = b$ *a* $\mu^\top x = E$ pro x, λ, λ_E, pak x minimalizuje $x^\top Vx$ právě za podmínek $Ax = b$ a $\mu^\top x = E$ pro námi předem zvolenou hodnotu E.

Důkaz. K důkazu této věty použijeme větu (11). Celkem tedy dostáváme $N + m + 1$ podmínek. Nejprve musí platit

$$\sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij} x_j + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_{ki} - \lambda_E \mu_i = 0, \quad i = 1, ..., N$$

Těchto N podmínek zajišťuje, že pro dané λ a λ_E bude x minimalizovat funci L. Dalších $m + 1$ podmínek ve tvaru

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, ..., m$$

$$u^\top x = E$$

zajišťuje, že x bude splňovat konkrétní lineární omezení. □

Věta 16. *Podmínky*

$$\eta_i^* = \frac{\partial L}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij} x_j + \sum_{k=1}^{m} a_{ki} \lambda_k - \lambda_E \mu_i \geq 0, \quad i = 1, ..., N \tag{23}$$

$$\eta_i^* = 0, \quad \forall x_i^* > 0 \tag{24}$$

jsou pro dané λ^T*,*λ_E *jsou nutné a postačující podmínky, aby* x^* *minimalizovalo* $L(x) = \frac{1}{2}x^\top Vx + \lambda^\top Ax - \lambda_E \mu^\top x$ *mezi všemi* $x \in \{x : x \geq 0\}$.

Důkaz. Nejdříve ukážeme nutnost výše zmíněných podmínek. Předpokládejme, že x^* minimalizuje L mezi všemi avšak nespňuje dané podmínky (23) a (24). Pro spor s podmínkou (23) předpokládejme, že pro nějaké i platí $\eta_i^* < 0$. Ze vztahu

$$\lim_{h_i \to 0} \frac{L(x_1, \dots, x_i + h_i, \dots, x_N) - L(x_1, \dots, x_i, \dots, x_N)}{h_i}$$

plyne, že pro nějaký vektor $h = (0, \dots, 0, h_i, 0, \dots, 0)$, jehož i-tá složka splňuje $h_i > 0$, platí $L(x^* + h) < L(x^*)$. Dále však platí $x^* + h \in \{x : x \geq 0\}$ a $x^* + h \geq x^* \geq 0$, což je ve sporu s původním předpokladem, že x^* minimalizuje L mezi všemi $x \in \{x : x \geq 0\}$. Pro spor s podmínkou (24) předpokládejme, že $\eta_i^* > 0$ pro nějaké $X_i > 0$. Podobně jako v předchozím případě existuje nějaký vektor $\hat{h} = (0, \dots, 0, \hat{h}_i, 0, \dots, 0)$, jehož i-tá složka splňuje $\hat{h}_i > 0$, a platí $L(x^* + h) < L(x^*)$ pro všechny $h = (0, \dots, 0, -h_i, 0, \dots, 0)$, kde $\hat{h}_i > h_i > 0$. Označme $\tilde{h}_i = \min(x_i^*, \hat{h}_i)$ a $\tilde{h} = (0, \dots, 0, -\tilde{h}_i, 0, \dots, 0)$. Dále dostáváme $x^* + \tilde{h} \in \{x : x \geq 0\}$ a $L(x^* + \tilde{h}) < L(x^*)$, což je opět ve sporu s původním předpokladem, že x^* minimalizuje L mezi všemi $x \in \{x : x \geq 0\}$ .Tím jsme dokázali nustnost výše zmíněných podmínek.

Nyní ukážeme postačitelnost těchto podmínek. Předpokládejme, že $x^* \in \{x : x \geq 0\}$ a splňuje podmínky (23) a (24), avšak neminimalizuje L mezi všemi $x \in \{x : x \geq 0\}$. Pro spor předpokládejme existenci y^*splňujícího $L(y^*) < L(x^*)$. Nechť $x = x^* + t(y^* - x^*)$. Z důvodu konvexity množiny $\{x : x \geq 0\}$, pro $0 \leq t \leq 1$ leží každý bod této přímky v této množině. Pro $-\infty < t < \infty$ platí,

$$L = \frac{1}{2} x^\top V x + \lambda^\top A x - \lambda_E \mu^\top x =$$

$$= \frac{1}{2}(x^* + t(y^* - x^*))^\top V (x^* + t(y^* - x^*)) + \lambda^\top A (x^* + t(y^* - x^*)) - \lambda_E \mu^\top (x^* + t(y^* - x^*)) =$$

$$= c + bt + at^2 \tag{25}$$

kde díky pozitivně definitní matici dostáváme $a = \frac{1}{2}(y^* - x^*)^\top V (y^* - x^*) \geq 0$. Je-li $a = 0$, potom je funkce (25) lineární a má všude stejnou derivaci. Je-li $a > 0$, potom funkce L nabývá konkrétní hodnotu minima v bodě t_{min} a platí $\frac{dL}{dt} > 0$ pro $t > t_{min}$ a $\frac{dL}{dt} < 0$ pro $t < t_{min}$. Jestliže $\frac{dL}{dt}(0) \geq 0$, pak $\frac{dL}{dt} \geq 0$ pro $t > 0$ a platí $L(y^*) \geq L(x^*)$. V bodě $t = 0^-$platí $\frac{dx_i}{dt}(0^-) = (y^* - x^*)_i$, což je přípustné pouze pro $x_i > 0$, tedy $\eta_i^* = 0^-$. Dále dostáváme

$$\frac{dL}{dt}(0^-) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial x_i}(0^-) \frac{dx_i}{dt}(0^-) = \sum_{i=1}^{N} \eta_i^* (y^* - x^*)_i \geq 0$$

□

Definice 17. $x \geq 0$, $\eta \geq 0$ a $\eta^\top x = 0$ nazýváme Kuhn-Tockerovými podmínkami pro minimalizaci $x^\top V x$ za podmínek $Ax = b$, $\mu^\top x = E$ a $x \in \{x : x \geq 0\}$ nebo pro minimalizaci $\frac{1}{2} V - \lambda_E E$ za podmínek $Ax = b$ a $x \in \{x : x \geq 0\}$, kde λ_E je předem zvolená konstanta.

Věta 18. Jestliže x minimalizuje $L = \frac{1}{2}x^\top Vx + \lambda^\top Ax - \lambda_E\mu^\top x$ pro danéλ, λ_E za podmínky $x \in \{x : x \geq 0\}$ a dále nechť x splňuje $Ax = b$ a $\mu^\top x = E$, pak x minimalizuje $x^\top Vx$ právě za podmínek $x \in \{x : x \geq 0\}$, $Ax = b$ a $\mu^\top x = E$ pro námi předem zvolenou hodnotu E.

Důkaz. Plyne přímo z věty 14. □

4 Obecná formulace konkrétních omezení v praxi vycházejících z legislativy, investiční strategie atd.

Základní model Markowitzova portfolia neuvažuje omezení daná legislativou, investiční strategií, makléřskými poplatky, velikostí lotů nebo například náklady spojenými s likviditou jednotlivých aktiv v portfoliu. Celkově lze jednotlivá omezení rozdělit do následujících skupin

- Investiční strategie
- Omezení dané regulacemi
- Daně, transakční náklady, účetnictví

Pravdou ovšem zůstává, že přílišná omezení vedou často k velice výrazným až omezujícím podmínkám na hledané portfolio. Pomocí moderních programů, využívající teorii kvadratického programování, lze Markowitzův model uvažovat i včetně všech těchto omezení.

4.1 Omezení investic do jednotlivých aktiv

Již na první pohled se zdá být rozumné omezit velikosti investic do jednotlivých aktiv. Nejjednodušší je shora omezit maximální možnou investici do každého aktiva předem zvolenou konstantou U_i. Takováto omezení lze snadno zapsat ve tvaru $x_i \leq U_i,\ i = 1, ..., N$. Analogicky lze zdola omezit minimální investici do každého aktiva předem zvolenou konstantou L_i. Konstanta L_i většinou slouží k omezení příliš malých nákupů. Po konstantách L_i a U_i požadujeme $L_i \leq U_i$. Výrazy $L_i = -\infty$ a $U_i = +\infty$ znamenají, že na x_i nejsou v tomto smyslu kladeny zádné podmínky. Dopředu zvolené konstanty mohou výrazně ovlivnit množinu dosažitelných $E\sigma$ kombinací. Takováto omezení vedou v extrémních případech až k situaci, kdy není možné sestavit žádné portfolio. Na druhou stranu dostatečně velké konstanty U_i nijak množinu dosažitelných EV kombinací nezmenší. Pro $U_i \geq 1,\ i = 1, ..., N$ zřejmě k žádným omezením nedojde. Omezení investic do jednotlivých aktiv lze zapsat v uceleném tvaru jako

$$L \leq x \leq U,\ L, U, x \in \mathbb{R}^N$$

Doplňující podmínka $\sum_{i=1}^{N} L_i \leq 1$ musí být spněna, aby byla zajištěna řešitelnost problému. A další doplňující podmínka $\sum_{i=1}^{N} U_i \geq 1$ zajišťuje, že celé jednotkové bohatství bude investováno. Takováto omezení mají většinou velice razantní dopad na konečné složení portfolia, a tak je nutno s nimi pracovat velice obezřetně zvláště ze strany regulátorů. Předpokládejme nyní úlohu základního Markowitzova modelu s povolenými prodejemi nakrátko a včetně výše uvedených omezení investic do jednotlivých aktiv, tj. úlohu

$$min \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}$$

za podmínek

$$x \in \left\{ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{N} x_i{=}1,\ \sum_{i=1}^{N} \mu_i x_i = E,\ L_i \leq x_i \leq U_i \quad i = 1, ..., N \right\} \tag{26}$$

Kuhn-Tuckerovy podmínky pro tento problém jsou

$$Vx\text{-}\lambda_1 1 - \lambda_2 \mu - \sum_{i=3}^{N+2} \lambda_i L_i + \sum_{i=N+3}^{2N+2} \lambda_i U_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i{=}1$$

$$\sum_{i=1}^{N} \mu_i x_i = E$$

$$\lambda_i \geq 0,\ i = 3, ..., N+2$$

Je-li však $x_i > L_i$, pak $\lambda_i = 0,\ i = 3, ..., N{+}2$.

$$\lambda_i \geq 0,\ i = N{+}3, ..., 2N+2$$

Opět je-li $x_i < U_i$, pak $\lambda_i = 0,\ i = 3, ..., N{+}2$.

Věta 19. *Množina S přípustných $E\sigma$ kombinací portfolia základního Markowitzova modelu s dodatečnými podmínkami na zastoupení jednotlivých aktiv je podmnožinou množiny S_{nic} přípustných $E\sigma$ kombinací bez těchto omezení. Zároveň platí $S_U \subseteq S_{nic}$ a $S_D \subseteq S_{nic}$, kde S_U je množina přípustných $E\sigma$ kombinací se zahrnutím pouze horních omezení a S_D je množina přípustných $E\sigma$ kombinací se zahrnutím pouze dolních omezení.*

Důkaz. Jinými slovy, část množiny dosažitelných $E\sigma$ kombinací bez omezeními investic do jednotlivých aktiv již nebude dosažitelná. Daný problém také můžeme formulovat jako

$$min\ x^{\top} V x$$

za podmínek

$$x \in \left\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (1^\top x, \mu^\top x, x, -x)^\top \geq (1, E, L, -U)^\top\right\}$$

Definujme následující funkci,

$$\rho(y) = min\left\{x^\top V x \mid \varphi(x) \geq y\right\}$$

kde $\varphi(x) = (1^\top x, \mu^\top x, x, -x)^\top$ a $y = (1, E, L, -U)^\top$. Pro nějaké E_{min} platí, že pro $E \geq E_{min}$ je funkce ρ konvexní a rostoucí. Pro námi konkrétní zvolené E dostáváme $y_{nic} \leq y_L \leq y$ a $y_{nic} \leq y_U \leq y$, kde $y_{nic} = (1, E, 0, -1)^\top$, $y_L = (1, E, L, -1)^\top$ a $y_U = (1, E, 0, -b)^\top$. Z těchto nerovností dále plyne $\rho(y_{nic}) \leq \rho(y_L) \leq \rho(y)$ a $\rho(y_{nic}) \leq \rho(y_U) \leq \rho(y)$. V případě omezení tohoto druhu tedy není možné v porovnání s případem bez těchto omezení dosáhnout stejné požadované hodnoty E s nižší rizikovostí. Dostáváme tedy požadovaný výsledek $S \subseteq S_D \subseteq S_{nic}$ a $S \subseteq S_U \subseteq S_{nic}$. □

Předchozí věta byla převzata z [22].

Úlohu lze opět řešit pomocí konvexního kvadratického programování, neboť množina (26) je průsečíkem poloprostorů a nadrovin. Jak již bylo v sekci (2.6) zmíněno, danou úlohu lze uvažovat i v jiné formulaci, např. ve druhé formulaci ze sekce (2.6). Kvadratická funkce $f_\lambda(x)$, kterou v tomto případě chceme minimalizovat, má N proměnných. Problém dále doplníme o dodatečné podmínky. Abychom toho docílili, tak je třeba správně definovat množinu přípustných investic P. V tomto případě dostáváme

$$P = \left\{x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^{N} x_i = 1,\ L_i \leq x_i \leq U_i \quad i = 1, ..., N\right\}$$

4.1.1 Prodeje nakrátko

Není třeba předpokládat $x_i \geq 0$ $i = 1, \ldots, N$, neboť investoři často uplatňují techniku tzv. krátkých prodejů. Zakázání prodejů nakrátko je speciální případ omezení investic do jednotlivých aktiv. Povolíme-li prodeje nakrátko, tj. x_i může nabývat i záporných hodnot, umožňujeme investorovi prodat aktiva, která nevlastní, tj. která mu byla propůjčena třetí stranou. Investorovi je tak umožněno výrazně lépe rozmístit svá aktiva. Z matematického hlediska se jedná o nákup záporného množství aktiv a investor spekuluje na pokles ceny aktiv. Prodeje nakrátko bývají velice často omezovány ze strany regulátorů trhu, či například invetiční strategií konkrétní společnosti. Jsou-li prodeje nakrátko povoleny, bývá většinou požadována nějaká forma záruky, například v peněžní formě nebo ve formě jiných aktiv. Při povolení prodejů nakrátko je tedy možné model doplnit o následující omezení,

$$\sum_{i=1}^{N} x_{i^d} \leq H \tag{27}$$

$$\alpha \sum_{i=1}^{N} x_{i^k} \leq H - \sum_{i=1}^{D} x_{i^d} \tag{28}$$

$$x_{i^k}, x_{i^d} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, N \tag{29}$$

kde H je celková hodnota majetku. x_{i^k}, x_{i^d} představuje postupně krátké a dlouhé pozice v i-tém aktivu. Konstanta α představuje výše zmíněnou záruku pro prodeje nakrátko. Omezení (28) nám říká, že všechny krátké pozice přenásobené konstantou α nesmí přesáhnout celkovou hodnotu majetku po odečtení hodnot D aktiv, které nejsou určeny k záruce.

4.2 Omezení celkového počtu aktiv

Nasnadě je také omezení počtu aktiv, do kterých lze investovat, což vede především k omezení příliš malých transakcí a následné snadnější správě vzniklého portfolia. Takovéto omezení lze snadno zapsat ve tvaru $|\{i : x_i > 0\}| \leq M$, kde M je maximální možný počet aktiv, do kterých lze investovat. Pro M musí být splněna podmínka $1 \leq M \leq N$. Většinou platí $M \ll N$, aby měla takováto dodatečná podmínka vůbec smysl. Omezení celkového počtu aktiv se často používá spolu s omezeními investic do jednotlivých aktiv a zapisuje se ve tvaru,

$$L_i \beta_i \leq x_i \leq U_i \beta_i$$

kde $\beta_i \in \{0, 1\}$ pro $i = 1, \ , N$. Celkový počet aktiv, do kterých lze investovat, je potom omezen výzazem

$$\sum_{i=1}^{N} \beta_i \leq M$$

4.3 Obchodování v lotech

V tomto případě se jedná o omezení, kdy je investorovi umožněno obchodovat pouze v násobcích lotů[2], což se výrazně liší od standardního problému, kdy je investorovi umožněno obchodovat s libovolně velkými částmi jednotlivých aktiv. Je to právě nemožnost obchodování s libovolně velkými částmi aktiv, která vede v tomto případě ke zvýšení rizikovosti celého portfolia. Nadále musí být splněna následující podmínka $x_i = p_i b_i$, kde p_i je počet lotů aktiva i zastoupeného v portfoliu a b_i je podíl daného lotu na celkovém jednotkovém bohatství portfolia. Přidáním celočíselných proměnných se řešení celého problému velice zkomplikuje. To však není jediný zádrhel. Obchodováním pouze v násobcích lotů můžeme snadno ohrozit přesné splnění podmínky $\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$. Problém je tedy vhodno doplnit o podmínku $\sum_{i=1}^{N} p_i b_i + \epsilon^{\uparrow} + \epsilon^{\downarrow} = 1$, kde $\epsilon^{\uparrow}, \epsilon^{\downarrow} \geq 0$ jsou fiktivní skluzové proměnné. Skluzové

[2]Standardní jednotka při obchodování daného aktiva

proměnné doplňujeme tak, aby výraz $\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$ byl splněn s největší možnou přesností a zároveň vyrovnávací $\epsilon^{\uparrow}$a $\epsilon^{\downarrow}$ proměnné musí být co nejmenší. Uvažujeme-li tedy model včetně obchodování v lotech, je vhodné řešit problém pomocí rozšíření druhé formulace úlohy uvedené v sekci (2.6). Dostáváme tedy úlohu

$$max\ f_{\lambda}(x) = \sum_{i=1}^{N} \mu_i x_i - \lambda \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij} - \nu(\epsilon^{\uparrow}+\epsilon^{\downarrow}) \tag{30}$$

za podmínek

$$\sum_{i=1}^{N} p_i b_i + \epsilon^{\uparrow} + \epsilon^{\downarrow} = 1,\ \lambda, \nu > 0,\ \epsilon^{\uparrow}, \epsilon^{\downarrow} \geq 0$$

Vpodstatě se jedná o rozšířené použití druhé formulace úlohy uvedené v sekci (2.6), kde λ a ν jsou předem zvolené konstatnty.

4.4 Omezení investic do jednotlivých odvětví

Další možnost omezení se nabízí v podobě maximálních, popřípadě minimálních investic do jednotlivých průmyslových odvětví. Takováto omezení mohou mít následující formu,

$$l_k \leq \sum_{i=1}^{N} a_{ki} x_i \leq u_k \quad k = 1, ..., K$$

kde a_{ki} je předem zvolená konstanta, která zastupuje podíl i-tého aktiva v k-tém průmyslovém odvětví z celkového počtu K. V tomto případě se však nutně nemusí jednat o průmyslová odvětví, která je často výhodnější zvolit bez použití modelu, ale například o jednotlivé státy či světadíly a mnoho dalších. Za předpokladu, že každé aktivum je zastoupeno jen v jednom odvětví, můžeme tato omezení zapsat ve tvaru,

$$l_k \leq \sum_{i \in S_k} x_i \leq u_k, \quad k = 1, ..., K$$

kde $S_1, ...S_K$ jsou množiny obsahující aktiva k-tého odvětví.

4.5 Omezení změny portfolia

Často bývá řešena otázka tvorby nového optimálního portfolia. Tento problém většinou investor neřeší, protože má obvykle již v držení velké množství aktiv a potřebuje pouze upravit své podíly v jednotlivých aktivech. Výrazné změny v portfoliu bývají často bržděny transakčními náklady. Také opatrnost investorů hraje svou roli. Markowitzův model analyzuje portfolio během jednoho celého časového období, ve kterém investujeme. Nasnadě je tedy otázka, jak se zachovat v situaci po skončení tohoto období. Nechť x_i^M je momentální vlastnictví aktiva i, $x_i^{\uparrow}$ je množtví, o které se zvýšilo vlastnictví aktiva i, a $x_i^{\downarrow}$ je množství, o které se snížilo množství aktiva i. Pro rozhodnutí, zda-li máme změnit portfolio, potřebujeme najít $(x, x^{\uparrow}, x^{\downarrow})$ za následujících podmínek

$$x - x^{\uparrow} + x^{\downarrow} = x^M$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i^{\uparrow} \leq U$$

$$x \geq 0 \quad x^{\uparrow} \geq 0 \quad x^{\downarrow} \geq 0$$

Konstanta U je předem dané horní omezení. Alternativně lze tyto podmínky doplnit i o dolní omezení. $(x, x^{\uparrow}, x^{\downarrow})$ hledáme tak, abychom obdrželi eficientní hodnoty

$$\sigma^2 = (x, x^{\uparrow}, x^{\downarrow}) \begin{pmatrix} V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x^{\uparrow} \\ x^{\downarrow} \end{pmatrix}$$

$$E = (\mu, 0, 0) \begin{pmatrix} x \\ x^{\uparrow} \\ x^{\downarrow} \end{pmatrix}.$$

4.6 Faktorové modely

Výhoda tohoto přístupu spočívá především ve výrazně menším počtu kalkulovaných proměnných potřebných pro model a možnost chránit investice před různými rizikovými faktory. Předpokládejme, že výnosy jednotlivých aktiv budou definovány jako,

$$r_i = \alpha_i + \beta_i F + e_i, \; i = 1, \ldots, N$$

kde $E_{SH} e_i = 0$, $i = 1, ..., N$, $cov(e_i, e_j) = 0$, $i \neq j$, $cov(F, e_i) = 0$, $i = 1, ..., N$ a dále α_i, β_i, $i = 1, \ldots, N$ jsou konstanty. Členy β_i, $i = 1, \ldots, N$ jsou citlivosti na daný faktor, F je náhodná veličina nazývaná faktor ovlivňující hodnoty r_i, $i = 1, \ldots, N$ a α_i, $i = 1, \ldots, N$ si je možné představit jako předpokládanou výnosnost cenného papíru. Pro výnos celého portfolia R poté platí vztahy

$$R = \sum_{i=1}^{N} x_i r_i = \sum_{i=1}^{N} x_i \alpha_i + (\sum_{i=1}^{N} x_i \beta_i) F + \sum_{i=1}^{N} x_i \varepsilon_i$$

$$Var(R) = (\sum_{i=1}^{N} x_i \beta_i)^2 Var(F) + \sum_{i=1}^{N} x_i^2 Var(u_i)$$

za předpokladu, že $\sum_{i=1}^{N} x_i \alpha_i$ považujeme za konstantu. Tento přístup lze dále rozšířit na K-faktorový model. V tomto případě výnosy jednotlivých aktiv budou definovány jako

$$r_i = \alpha_i + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik} F_k + e_i$$

kde F_k, $k = 1, ..., K$ jsou náhodné veličiny opět nazývané faktory. Parametr β_{ik} značí závislost i-tého aktiva na k-tém faktoru. Jednotlivé faktory jsou vybrány investorem. Tento přístup nám umožňuje doplnit do sady podmínek například následující omezení

$$\sum_{k=1}^{K} \beta_{ik} x_i \leq U_k$$

Tato omezení nám umožňují zamezit přílišný vliv k-tého faktoru na portfolio. Faktorové modely na rozdíl od Markowitzova modelu umožňují uvažovat některá další rizika, např. tržní riziko, která mohou negativně ovlivňovat portfolio. U Markowitzova modelu můžeme tuto neschopnost uvažovat více rizik považovat za slabinu celého modelu.

4.7 Sledování indexu

Toto omezení se využívá indexů jako například pražský PX 50. Jde vlastně o situaci, kdy se investor snaží do svého portfolia odrazit situaci na celém trhu, resp. vývoj vývoj aktiv v daném indexu. Investor většinou nemá možnost vlastnit všechny aktiva daného indexu a přesně tak kopírovat daný index, ale snaží se tento stav alespoň napodobit. V této konkrétní situaci se budeme snažit hledat portfolia zamezující nižších výnosů než zvolený index. Z takto vyseparovaných portfolií se dále budeme snažit vybrat taková, která mají takovéto výnosy s co možná největší jistotou. Nechť $w = (w_1, ..., w_N)^T$ jsou váhy $r = (r_1, ..., r_N)^T$zastoupené v daném indexu. Při hledání optimálního portfolia můžeme za jednu z doplňujících podmínek uvažovat

$$Var(x^T r - w^T r) = (x - w)^T V (x - w) \leq \sigma_U^2.$$

4.8 Transakční náklady

Základní Markowitzův model neuvažuje jakékoliv jiné transakční náklady, ty však mohou být v Markowitzově modelu zahrnuty, pokud jsou lineárně zavislé na objemu obchodovaných aktiv. Není-li tato podmínka splněna, lze postupovat následujícím způsobem. Přidáním transakčních nákladů do uvažovaného modelu se výrazně mění situace, často vede až k velice výrazným změnám v portfoliu. Přidání transakčních nákladů do daného modelu obecně vede ke sníženému počtu transakcí. Uvažujeme-li tedy model včetně daní popřípadě včetně transakčních nákladů, je vhodné řešit problém pomocí rozšíření druhé formulace úlohy uvedené v sekci (2.6). Dostáváme tedy úlohu

$$max \ f_\lambda(x) = \sum_{i=1}^{N} \mu_i x_i - \lambda \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij} - \nu T \qquad (31)$$

za podmínek

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1, \ \lambda, \nu > 0$$

kde λ, ν jsou předem zvolené konstatnty a T jsou transakční náklady. Konstanta ν naznačuje investorův postoj k transakčním nákladům. Transakční náklady zdražují jakoukoliv přeměnu portfolia, a tudíž konstrukce portfolia se započítáním jakýchkoliv transakčních nákladů vede k jinému výsledku, než kdyby se o těchto nákladech vůbec neuvažovalo. Křivka odpovídající transakčním nákladům samozřejmě může mít jakýkoliv tvar. Jestliže však uvažujeme křivku transakčních nákladů v obecném tvaru, celý postup výpočtu se velice zkomplikuje. Z tohoto důvodu je vhodné transakční náklady aproximovat kvadratickou nebo ještě lépe po částech lineární funkcí. Transakční náklady závisí na zobchodovaných množstvích daných aktiv. Celkové transakční náklady jsou potom součtem transakčních nákladů odvislých při obchodování jednotlivých aktiv.

4.8.1 Aproximace transakčních nákladů po částech lineárními funkcemi

Jak bude patrné z následujícího postupu, je aproximace transakčních nákladů po částech lineární funkcí z hlediska výpočtu, výhodná i navzdory faktu, že je nutno přidat další proměnné i omezení. Předpokládejme následující aroximaci transakčních nákladů pomocí po částech lineární funkce pro aktivum i pomocí m lineárních segmentů.

$$T_i(t) = \begin{cases} a_{1,i}t & 0 \leq t \leq b_{1,i} \\ a_{1,i}b_{1,i} + a_{2,i}(t - b_{1,i}) & b_{1,i} \leq t \leq b_{2,i} \\ \vdots & \\ \sum_{j=1}^{m-1} a_{j,i}b_{j,i} + a_{m,i}(t - b_{m-1,i}) & b_{m-1,i} \leq t \leq b_{m,i} \end{cases}$$

Konstanty 0, b_{1i}, b_{2i}, ..., b_{mi} ohraničují jednotlivé lineární segmety pro aktivum i a jsou většinou určeny částí obchodovaného objemu. Naproti tomu konstanty $a_{1,i}$, $a_{2,i}$, ..., $a_{m,i}$ určují strmost jednotlivých lineárních segmentů. Penalizovaný výraz ve vzorci (31) bude mít pro našich N uvažovaných aktiv tvar

$$\nu \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{m} a_{j,i} y_{j,i}$$

kde y jsou nově zavedené pomocné proměné. Pro jednotlivá aktiva je nutno doplnit podmínky ve tvaru

$$0 \leq y_{1,i} \leq b_{1,i} - 0,\ 0 \leq y_{2,i} \leq b_{2,i} - b_{1,i}, ..., 0 \leq y_{m,i} \leq b_{m,i} - b_{m-1,i}$$

Vztah $y_{1,i} + y_{2,i} + \ldots + y_{m,i}$ určuje zobchodované množství aktiva i. Nevíme však, zdali toto množství aktiva i bylo prodáno nebo koupeno. Ve většině případů z praxe pro aktivum i platí, že $a_{1,i} \leq a_{2,i} \leq \ldots \leq a_{m,i}$, tudíž $y_{k,i} = 0$, k=2,..., m neplatí-li, že všechny y s nižším indexem jsou na své horní hranici.

4.8.2 Aproximace transakčních nákladů kvadratickou funkcí

Dle předchozého platí vztah,

$$T(x^{\Delta}) = \sum_{i=1}^{N} T_i(x_i^{\Delta})$$

kde x^{Δ} je zobchodovaná část celého portfolia a x_i^{Δ} jsou zobchodované části jednotlivých aktiv. Transakční náklady pro aktivum i lze výjádřit pomocí následující kvadratické funkce

$$T_i(x_i^{\Delta}) = a_i \mid x_i^{\Delta} \mid^2 + b_i \mid x_i^{\Delta} \mid + c_i 1_{\{x_i^{\Delta} \neq 0\}}$$

Platí-li $a_i = 0$, $i = 1, ..., N$, pak lze snadno problém převést na úlohu kvadratického programování.

4.9 Možná formulace celkového řešení

Spojíme-li např. omezení celkového počtu aktiv s omezeními investic do jednotlivých aktiv a s omezeními investic do jednotlivých odvětví, potom je možné tuto úlohu formulovat následujícím způsobem

$$min\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij} - \lambda \sum_{i=1}^{N} \mu_i x_i, \quad \lambda > 0$$

za podmínek,

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$$

$$L_i \beta_i \le x_i \le U_i \beta_i, \quad i = 1, \ldots, N$$

$$\beta_i \in \{0,\, 1\}, \quad i = 1, ..., N$$

$$\sum_{i=1}^{N} \beta_i \le M$$

$$l_k \le \sum_{i \in S_k} x_i \le u_k, \quad k = 1, ..., K$$

kde $S_1, ...S_K$ jsou množiny obsahující aktiva $k-tého$ odvětví. Jako základ této kapitoly byly použity zejména [1, 11, 16, 17, 20, 21, 24, 25, 30].

5 Analýza regulací daných legislativou na bankovní portfolio

Stabilita finančního sektoru je velice křehká. Tento fakt může být lehce podložen různými finančními krizemi, které jsou ostrou zkouškou pro finanční sektor. Právě finanční krize často bývají silnou motivací různých nových regulací, popřípadě úprav regulací již stávajících. Různé typy těchto regulací slouží zejména k zajištění solventnosti nejrůznějších bankovních subjektů.

5.1 Regulace bankovního kapitálu

Různorodé požadavky na bankovní kapitál patří mezi zcela stěžejní možnosti pro regulaci bankovních subjektů. Po bankovních subjektech je neustále požadováno, aby dodržovaly různé kapitálové požadavky. Zabývejme se tedy nyní vlivem regulace kapitálu na tvorbu portfolia banky. Předpokládejme tedy, že ze strany regulátorů je vyžadován minimální poměr celkového kapitálu na celková aktiva. Označme tento požadovaný poměr konstantou c; $0 < c \leq 1$. Pod konstantou c si můžeme představit jakousi zjednodušenou verzi kapitálové přiměřenosti. V tomto případě tedy banka musí řešit následující úlohu,

$$min\ \frac{1}{2}\tilde{x}^\top \tilde{V}\tilde{x} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{c},\, x^\top\right)\begin{pmatrix} \sigma_0^2 & V_{0i}^\top \\ V_{0i} & V \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{c} \\ x \end{pmatrix}$$

za podmínek,

$$E = x_0\mu_0 + \sum_{i=1}^{N} x_i\mu_i$$

$$\sum_{i=0}^{N} x_i = 1$$

$$x_0 \geq 1 - \frac{1}{c} \tag{32}$$

kde x_0 je část kapitálu, který představují bankovní vklady, tj. x_0 si můžeme představit jako jakési záporné aktivum, za které je banka nucena platit bezrizikový výnos μ_0. Dále jsou tyto vklady charakterizovány variancí σ_0^2. Opět předpokládejme pozitivně definitní matici $\tilde{V} = \begin{pmatrix} \sigma_0^2 & V_{0i}^\top \\ V_{0i} & V \end{pmatrix}$, kde V_{0i} je vektor kovariancí mezi výnosem bezrizikového aktiva x_0 a výnosem ostatních rizikových aktiv. Pro celkové portfolio platí vztah $\tilde{x} = (x_0, x^\top)^\top$. Jelikož x_0 můžeme snadno dopočítat pomocí vztahu $x_0 = 1 - \sum_{i=1}^{N} x_i$, převedeme výše zmíněnu úlohu na úlohu následující,

$$min\ \frac{1}{2}x^\top Vx - \lambda_1(x_0\mu_0 + \sum_{i=1}^{N} x_i\mu_i),\ \ \lambda_1 > 0$$

za podmínek

$$\sum_{i=0}^{N} x_i = 1$$

$$x_0 \geq 1 - \frac{1}{c}$$

Pro zjednodušení úlohy předpokládejme, že podmínka (32) je splněna s rovností. Ze standardního chování bank při tvorbě portfolia je zřejmé, že takovýto předpoklad nemůže nějakým způsobem ovlivnit celkové řešení. Nehceme-li použít toto zjednodušení, je potřeba použít skluzové proměnné. Pro řešení tohoto problému dostáváme Lagrangerovu funkci ve tvaru

$$L(x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{1}{2} x^\top V x - \lambda_1 (x_0 \mu_0 + \sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i) + \lambda_2 (1 - \sum_{i=0}^{N} x_i) + \lambda_3 (1 - \frac{1}{c} - x_0)$$

Pro optimální řešení této úlohy musí být splněny následující podmínky

$$\frac{\partial L(x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial x_0} = -(\lambda_1 \mu_0 + \lambda_2 + \lambda_3) = 0 \tag{33}$$

$$\frac{\partial L(x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial x} = \sum_{j=1}^{N} x_i \sigma_{ij} - \lambda_1 \mu_i - \lambda_2 = 0, \quad i = 1, \ldots, N \tag{34}$$

$$\frac{\partial L(x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial \lambda_2} = 1 - \sum_{i=0}^{N} x_i = 0 \tag{35}$$

$$\frac{\partial L(x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial \lambda_3} = 1 - \frac{1}{c} - x_0 = 0 \tag{36}$$

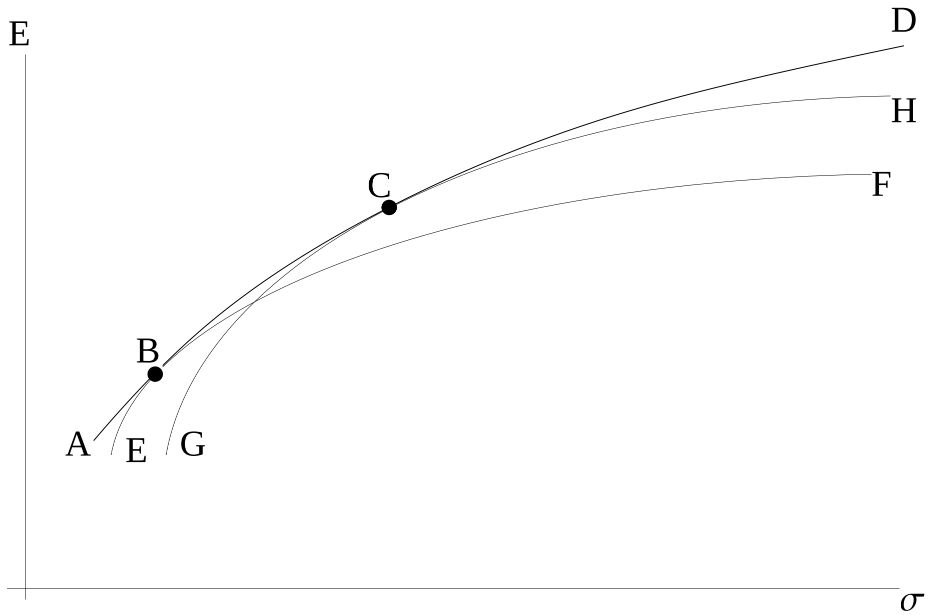
Je třeba zdůraznit, že právě koeficient λ_1 vyjadřuje investorův postoj k riziku, resp. nižší hodnoty tohoto koeficientu značí investorův vyšší odpor k riziku. Koeficient λ_1 lze určit pomocí účelové funkce investora. Úpravou těchto podmínek dostáváme výraz (37), vyjádříme-li λ_2 z výrazu (33) a dosadíme do (34). Výraz (38) dostaneme, vyjádříme-li x_0 z výrazu (36) a dosadíme do (35). Dostáváme tedy

$$\sum_{j=1}^{N} x_i \sigma_{ij} - \lambda_1 (\mu_i - \mu_0) + \lambda_3 = 0, \quad i = 1, \ldots, N \tag{37}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{1}{c} \tag{38}$$

Výrazy (37) a (38) jsou lineární vzhledem k x_i, můžeme z výrazu (37) výjádřit x_i, $i = 1, \ldots, N$, tj dostaneme

$$x_i = \lambda_1 \sum_{j=1}^{N} \nu_{ij} (\mu_j - \mu_0) - \lambda_3 \sum_{j=1}^{N} \nu_{ij}, \;\; i = 1, \ldots, \; N \tag{39}$$



Obrázek 1: Vliv konstaty c na eficientní hranici

kde ν_{ij} jsou prvky matice V^{-1}. Pro potřeby zápisu celkového řešení ozmačme $A := \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\nu_{ij}(\mu_j-\mu_0)$, $B := \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\nu_{ij}(\mu_i-\mu_0)(\mu_j-\mu_0)$, $C := \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\nu_{ij}$ a $D := BC - A^2$, kde platí B, C, $D > 0$. Obdobným postupem jako v sekci (2.4) získáme vztah $\frac{1}{c} = \lambda_1 A - \lambda_3 C$. Pak lze celkové řešení zapsat ve tvaru

$$x_i^* = \lambda_0 \sum_{j=1}^{N} \nu_{ij}(\mu_j-\mu_0) - \frac{\lambda_0 A - \frac{1}{c}}{C}\sum_{j=1}^{N}\nu_{ij}, \;\; i = 1, \ldots, N$$

Požadujeme-li zápis celkového řešení bez koeficientů λ, v tomto případě konkrétně bez λ_1, Pak lze postupovat například dle [6, 1]. Koeficient λ_1 zde představuje určitý kompromis mezi rizikovostí a výnosem portfolií na eficientní hranici a stanovuje se jako druhá derivace rizikovosti portfolia dle výnosu. Platí tedy $\lambda_1 = \frac{1}{b} - 2(\mu_0 + \sum_{i=1}^{N}(\mu_j-\mu_0)x_i$, kde b je koeficient relativní averze k riziku. Nyní aplikováním podobného postupu jako v sekci (2.4) dostáváme celkové řešení ve tvaru

$$x_i^* = \frac{AC(\frac{1}{b}-2\mu_0) - \frac{C}{c}(1+B)}{C+D}\left[\frac{\sum_{j=1}^{N}\nu_{ij}(\mu_j-\mu_0)}{A} - \frac{\sum_{j=1}^{N}\nu_{ij}}{C}\right] + \frac{\sum_{j=1}^{N}\frac{v_{ij}}{c}(\mu_j-\mu_0)}{A}$$

platné pro $i = 1, \ldots, N$.

Předešlá situace je pro lepší znázornění vyobrazena na obrázku 1, kde křivka $ABCD$ představuje eficientní hranici portfolia bez jakýchkoli kapitálových požadavků. Zatímco křivky EBF a GCH představují eficientní hranice, kdy regulátoři vyžadují poměr c_1, resp. c_2, pro které platí $c_1 < c_2$. Vliv konstanty c na tvorbu portfolia lze podrobněji analyzovat pomocí standardních metod matematické analýzy. Uvedený postup byl vypracován na základě [12, 13].

5.2 Vliv regulace bankovního kapitálu

Primárním cílem regulace kapitálu je snížit rizikovost celého bankovního portfolia. Vyšší kapitál má zcela jasné přednosti, jako např.:

- lépe chrání banku před finanční krizí
- zabraňuje rychlému šíření finanční krize
- představuje lepší nárazník či ochranu proti přílišnému riziku

Problém však spočívá v situaci, kdy přílišná regulace kapitálu může působit zcela opačným směrem, tj. zvyšovat rizikovost bankovního portfolia. Požadují-li regulátoři trhu vyšší poměr celkového kapitálu k celkovým aktivům, banka často zvýší rizikovost svého portfolia tak, aby mohla dosáhnout požadovaných výnosů určených před tímto zvýšením. Pravdou však zůstává, že se tento problém týká především bank s velmi kladným postojem k riziku. Tato možná nevýhoda je zcela stěžejní, a to i navzdory ostatním výhodám, které může vyšší kapitál mít. Často bývá výhodné doplnit regulaci kapitálu regulací jednotlivých aktiv, což většinou vede k vyšší efektivnosti. Problematiku vlivu kapitálu na rizikovost celkového portfolia vhodně ilustruje následující příklad. Příklad názorně ukazuje, jak zvyšující se kapitálové požadavky mohou negativně ovlivnit rizikovost celého portfolia.

Příklad 20. Předpokládejme existenci dvou rizikových aktiv s následujícími nezásvislými, stejně rozdělenými výnosy

$$r_i = \begin{cases} r & s\, pravděpodobností\, p \\ 0 & s\, pravděpodobností\, 1-p \end{cases} \qquad i = 1, 2$$

Absolutní velikost jednotlivých proměnných nás příliš nezajímá, jde nás spíše o jejich vzájemný poměr. Banka investuje do těchto dvou aktiv, a tedy celkové výnosy banky jsou

$$(\alpha r_1 + (1-\alpha) r_2)(1+K) = \begin{cases} r(1+K) & s\, pravděpodobností\, p^2 \\ \alpha r(1+K) & s\, pravděpodobností\, p(1-p) \\ (1-\alpha) r(1+K) & s\, pravděpodobností\, p(1-p) \\ 0 & s\, pravděpodobností\, (1-p)^2 \end{cases}$$

kde α, $1-\alpha$ jsou konstanty zastupující investici do prvního, resp. do druhého aktiva. Předpokládejme, že banka disponuje jednou jednotkou vkladů a K jednotkami kapitálu. Platí-li $\alpha = \frac{1}{2}$, je dosažena minimální možná pravdepodobnost krachu. Dále předpokládejme, že $\frac{1}{2}r > 1$. Neexistují-li žádné kapitálové požadavky, je nejvýhodnější položit $K = 0$. V tomto případě pravděpodobnost krachu bude $(1-p)^2$. Označme $\tilde{K}$ nejměnší hodnotu kapitálu požadovaného regulátory. Banka zřejmě položí $K = \tilde{K}$. Pravděpodobnost krachu $(1-p)^2$ přibližně platí i v případě, uvažujeme-li $\tilde{K}$ dostatečně malé. Přesáhne-li však $\tilde{K}$ určitou hranici, není již možno takto pravděpodobnost krachu aproximovat. Dostaneme $\alpha r(1+K) < 1$a pravděpodobnost krachu bude rovna $p(1-p) + (1-p)^2 = 1-p$. Předchozí příklad byl převzat z [32].

5.2.1 Pravděpodobnost bankovní insolvence

Definice 21. Bankovní insolvence je definována jako událost, kdy je kapitál banky zcela eliminován, tj. platí $E \leq -1$.

Definice 22. Za předpokladu normality výnosů můžeme definovat pravděpodobnost insovence p následujícím způsobem. Pro každou uspořádanou dvojici (E, σ) platí

$$p = P(E \leq -1) = P(\frac{E-E}{\sigma} \leq \frac{-1-E}{\sigma}) \tag{40}$$

Označíme-li kvantilovou funkci normálního rozdělení jako ϕ, pak z tohoto vztahu přímo plyne

$$E = -(1 + \phi(p)\sigma)$$

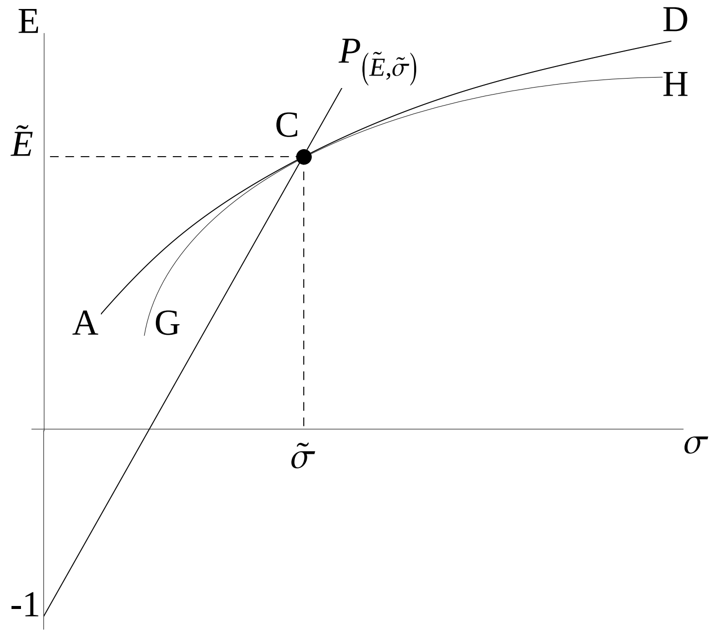
a

$$\phi\,(p) = -\frac{E+1}{\sigma} \tag{41}$$

Uvažujme konkrétní portfolio, reprezentované uspořádanu dvojicí $\left(\hat{E},\, \hat{\sigma}\right)$, pak pravděpodobnost insolvence pro toto portfolio je rovna $\phi^{-1}\left(-\frac{\hat{E}+1}{\hat{\sigma}}\right)$. Vztah (41) umožňuje graficky porovnat rizikovost insolvence daných portfolií, která je zastoupená přímkou spojující bod $(-1,\, 0)$ a bod $(E,\, \sigma)$portfolia, u kterého chceme porovnat riziko insolvence. Označme takovéto přímky jako $P_{(E,\sigma)}$. Přímky $P_{(E,\sigma)}$jsou dány směrnicemi $\frac{E+1}{\sigma}$. Z předchozího výkladu vyplývá, že portfolia, kterými procházejí tyto přímky s nižšími hodnotami směrnic, mají větší riziko insolvence. Tento přístup umožňuje regulátorům závést omezení β takové, že bankovní instituce musí splňovat podmínku $P\,(E \leq -1) \leq \beta$. S předpokladem normality platí

$$E \geq -\left(1 + \phi\,(\beta)\,\sigma\right) \tag{42}$$

Opět lze graficky porovnat rizikovosti insolvence jednotlivých portfilií. Dle vztahu (42) je vytvořena hraniční přímka, která odděluje portfolia, která toto omezení splňují, od těch, která toto omezení nesplňují. Je třeba, aby všemi portfolii, která mají

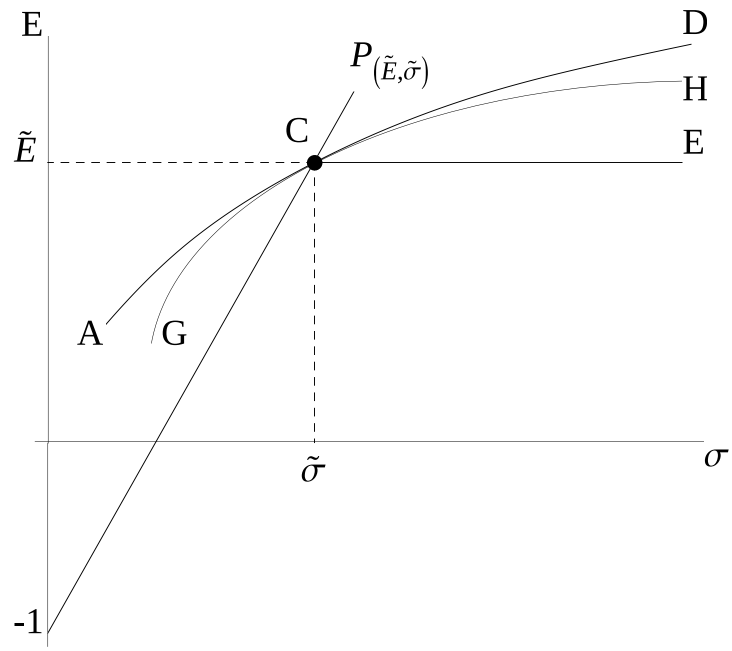


Obrázek 2: Hraniční přímka $P_{\left(\tilde{E},\tilde{\sigma}\right)}$ portfolia daného bodem C odděluje portfolia, která splňují podmínku insolvence, od těch, která tuto podmínku nesplňují.

splňovat výše zmíněnou regulací, procházela přímka $P_{(E,\sigma)}$ s větší směrnicí než regulátorem určená hraniční přímka. Samozřejmě vyvstává otázka vhodné volby konstanty β. Jak již bylo zmíňěno v sekci (5.2), je nyní třeba rozlišit banky s negativním a pozitivním postojem k riziku. U bank s pozitivním postojem k riziku většinou takováto regulace vede k vyšší rizikovosti portfolia s větší pravděpodobností, než-li u bank s negativním postojem k riziku.

5.2.2 Odvození možných optimálních vah

Cílem regulací je nalézt vhodný vektor vah w, kde w_i představují množsví vyžadovaného kapitálu při investici do i-tého aktiva. Otázkou zůstává, jak vhodně tyto váhy stanovit, aby banka splňovala stanovené podmínky bankovní insolvence. Tato otázka je zcela na místě, neboť, jak uvidíme dále, regulace pomocí požadavků na konstantu c plně nezabraňuje bance k tvorbě velice rizikového portfolia. Předpokládejme nyní, že regulátor vyžaduje poměr c^*. Cílem regulátorů je především, aby měla banka možnost vybírat jen z portfolií, která splňují stanovené podmínky bankovní insolvence, tzn. z portfolií, která leží vlevo od hraniční přímky solventnosti dané vztahem $P_{\left(\tilde{E},\tilde{\sigma}\right)}$: $\tilde{E} = -\left(1 + \phi\left(\beta\right)\tilde{\sigma}\right)$. V obrázku 2 je znázorněna eficientní hranice ACD bez jakýchkoli kapitálových omezení, zatímco eficientní hranice GCH již zahrnuje regulátory vyžadovaný poměr c^*. Z obrázku je dále zřejmé, že samotná regulace pomocí kapitálových požadavků není schopná zastavit banky proti vytvoření portfolia



Obrázek 3: Oblast DCE, kterou je třeba eliminovat ke správnému odvození vah

na hranici CH. Vyžadovaný poměr c^*pouze znemožní bance se pohybovat kdekoli v oblasti DCH. Poměr c^* tedy nelze použít jako zábranu proti vytvoření portfolia, které nesplňuje vyžadovanou pravděpodobnost bankovní insolvence danou konstantou β.

Je tedy třeba odvodit vektor vah w tak, aby banka s libovolným postojem k riziku nebyla schopna vytvořit portfolio, které by nespňovalo předepsanou pravděpodobnost insolvence. Pro banku s kladným postojem k riziku by tedy bylo možné maximálně sestavit portfolio dané bodem C. Byl-li by stanoven maximální možný výnos všech aktiv, do kterých banka může investovat, pak je zřejmé, že by nebyla porušena podmínka insolvence, neboť jakákoli lineární kombinace těchto aktiv by nemohla dosáhnout vyššího výnosu.

K eliminaci oblasti ECD znázorněné na obrázku 3 je třeba, aby byl splněn následující vztah,

$$\tilde{E} \geq x_0\mu_0 + \sum_{i=1}^{N} x_i\mu_i$$

kde $\tilde{E}$ je maximální možný výnos při eliminaci oblasti ECD; tento výnos je možné dosáhnout pouze pro portfolio dané bodem C. Přístup je založen na vyžadování většího množství kapitálu, rozhodne-li se banka investovat do rizikovějších aktiv. Stanovení vah $w_i, i = 1, \ldots, N$ lze provést následujícím způsobem. Vektor vah w stanovíme tak, aby bylo splněno

$$\mu_i \leq (1-w_i)\mu_i + w_i\tilde{E}, \quad i = 1,\ldots,N \tag{43}$$

Vztah (43) nám ve své podstatě říká, že chce-li banka investovat do i-tého aktiva, pak musí držet w_i jednotek kapitálu a zbývá pouze $1 - w_i$ jednotek k provedení investice. Maximální výnosy pro jednotlivá aktiva jsou omezena hodnotou $\tilde{E}$. Ze vztahu (43) nadále plyne

$$w_i \geq \frac{\mu_i - \mu_0}{\tilde{E} - \mu_0}, \quad \mu_i - \mu_0 > 0 \tag{44}$$

$$w_i = 0, \quad \mu_i - \mu_0 \leq 0 \tag{45}$$

Většina aktiv, do kterých banka investuje, spadá do skupiny popsané vztahem (44), tj. aktiva pro které platí $\mu_i - \mu_0 > 0$. Aktiva spadající do skupiny popsané vztahem (45), tedy aktiva, pro která platí $\mu_i - \mu_0 \leq 0$, banka drží ve valné většině případů jen z důvodu diverzifikace portfolia. Ze vztahů (44) a (45) již plynou námi hledané váhy

$$\tilde{w}_i = \frac{\mu_i - \mu_0}{\tilde{E} - \mu_0}, \quad \mu_i - \mu_0 > 0 \tag{46}$$

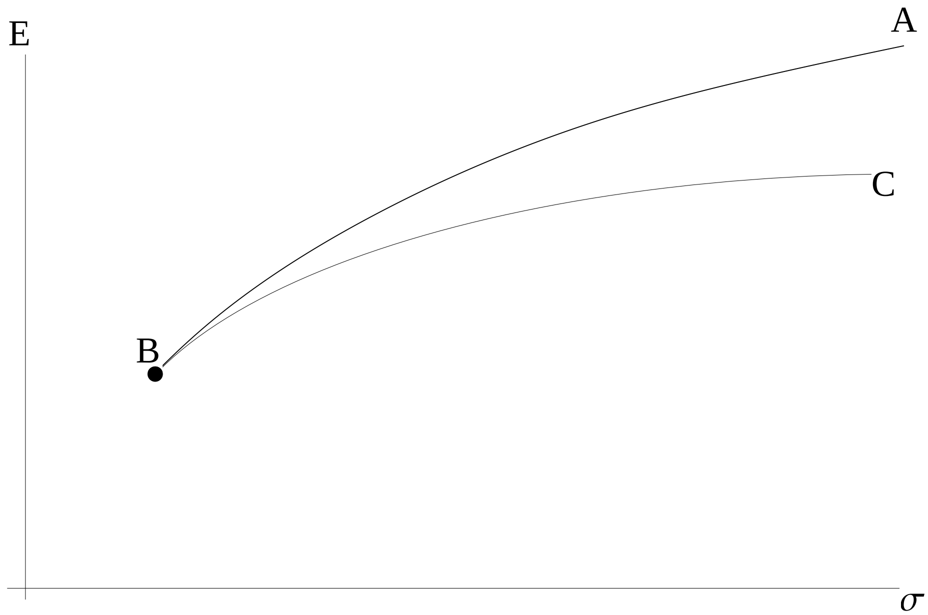
$$\tilde{w}_i = 0, \quad \mu_i - \mu_0 \leq 0 \tag{47}$$

Stanovili jsme tedy váhy přesně dle výše zmíněných požadavků. Ze vztahů (46) a (47) vyplývá, že k jejich výpočtu je zapotřebí znát hodnoty μ_i, $i = 0,\ldots,N$, matici $\tilde{V}$ a hodnotu konstanty β. Sekce 5.2.1 a 5.2.2 byly zpracovány zejména na základě [12].

5.3 Velké bankovní expozice

Další typ bankovních regulací je omezení příliš velkých bankovních expozic. Převážně se jedná o omezování investičních akcií a rizikových obligací. Princip této metody regulace přímo vyplývá z postupu uvedeného v sekci (4.1). Tato regulace spočívá v limitování jakýchkoli aktiv, které může mít banka v portfoliu. Samozřejmě, při těchto omezeních se změní podoba eficientní hranice. Situace je znázorněna na obrázku 4. Nová eficientní hranice BC bude ležet pod stávající hranicí BA. Očekávané výnosy nové eficientní hranice budou pro jakékoli riziko portfolia nižší. Pro lepší pochopení daného problému nyní předpokládejme, že bankovní regulátoři nebudou jakýmkoliv způsobem regulovat maximální expozici do nejméně rizikového aktiva banky. V tomto případě se stávající i nová eficientní hranice střetnou v bodě B, kde obě eficientní hranice dosahují nejmenšího možného rizika. Podobně jako v případě regulace kapitálu, může tato regulace vést ke zvýšení rizikovosti portfolia. Analogicky s předchozím případem je potřeba zhodnotit, jaký má banka postoj k riziku.

Pro zpracování této sekce byla použita [31].



Obrázek 4: Situace velkých expozic

6 Legislativa týkající se bankovních subjektů

Regulace bankovního sektoru České republiky vznikla v roce 1992, od té doby je neustále aktualizována a doplňována, aby lépe vystihla aktuální situaci na trhu. Tato regulace je vytvořena v souladu s Basilejskými dohodami a direktivami Evropské unie. Cílem regulací je především stabilita finančního sektoru a ochrana jejích uživatelů. Na druhou stranu je vždy nutné zvažovat administrativní dopady jednotlivých regulací; náklady na jednotlivé regulace by neměly přespříliš zatěžovat bankovní subjekty. Dále rozebereme především regulace týkající se kapitálové přiměřenosti a limitů anažovanosti, tj. regulace které nejvíce přímo ovlivňují tvorbu portfolií bankovních subjektů. Celá tato kapitola byla zpracována na základě [34, 35, 7, 10, 8].

6.1 Dělení kapitálu

Jedním z důvodů dělení kapitálu je nutnost výpočtu kapitálové přiměřenosti. Dle regulátorů se tímto způsobem kapitál dělí na Tier I, Tier II, Tier III. Je třeba zdůraznit, že kvalita kapitálu směrem od Tier I k Tier III výrazně klesá. Pro celkový bankovní kapitál pak platí následující vztah

$$celkov\acute{y}\,kapit\acute{a}l = Tier\ I + Tier\ II + Tier\ III_{vyu\check{z}it\acute{y}} - ode\check{c}itateln\acute{e}\,polo\check{z}ky \qquad (48)$$

1. $TierI$ (původní, jádrový kapitál)

   Kapitál $TierI$ převážně tvoří vklady akcionářů a jejich zhodnocení. Konkrétně se se jedná především o následující položky

   - splacený základní kapitál zapsaný v obchodním rejstříku
   - splacené emisní ažio
   - zákonem povinné rezervní fondy
   - ostatní neúčelové rezervní fondy vytvořené ze zisku po zdanění
   - nerozdělený bankovní zisk z předchozích období po zdanění, pokud zisk byl schválen vnějším auditorem v auditu účetní závěrky, valná hromada, popř. společníci účetní uzávěrku schválili a rozhodli o výši nerozděleného zisku
   - mezitimní zisk běžného období zjištěný v rámci mezitimní účetní uzávěrky, do kterého byly promítnuty předpokládané dividendy, pokud byl odsouhlasen vnějším auditorem a bankovním dohledem

   Výše uvedené položky je třeba snížit o odečitatelné položky, mezi něž patří

   - neuhrazená ztráta z předchozích období
   - ztráta běžného období banky
   - goodwill
   - další nehmotný majetek
   - nabyté vlastní akcie a podíly

2. $TierII$ (doplňkový, dodatkový kapitál)

   Kapitál Tier II je tvořen následujícími položkami

   - rezervy až do výše 1.25 % rizikově vážených aktiv bankovního portfolia
   - podřízený dluh A s minimální dobou splatnosti 5 let započítaný maximálně do výše 50 % $TierI$, který se během posledních pěti let před uplynutím doby splatnosti každý rok postupně snižuje o 20 %

   V případě podřízeného dluhu A se jedná o podřízený dluhopis emitovaný bankou, úvěr, půčku nebo vklad poskytnutý bance věřitelem. Aby bylo vůbec možné započítat podřízený dluh do $TierII$, je třeba uzavřít smlouvu o podřízeném dluhu. Dle této smlouvy bude v případě likvidace banky nebo jejího konkurzu dluh splacen až po uspokojení všech ostatních závazků.

3. $TierIII$ (doplňkový, dodatkový kapitá)

   Kapitál $TierIII$ je tvořen výhradně podřízeným dluhem B, tj. může sloužit výhradně k tvorbě kapitálového požadavku k tržnímu riziku. Na rozdíl od podřízeného dluhu A je po podřízeném dluhu B požadována předem daná doba splatnosti nejméně dva roky. Jistina ani jakékoli další instrumenty spojené s podřízeným dluhem B nelze splatit, pokud by tímto krokem byl porušen limit kapitálové přiměřenosti. Ve vztahu (48) se objevuje doposud nejasný výraz $Tier\,III_{využitý}$, kvůli jehož přesné definici je navíc potřeba definovat $Tier\,III_{využitelný}$. $Tier\,III_{využitelný}$ je kapitál $Tier\,III$, který navíc splňuje následující podmínky

- $Tier\,I \geq Tier\,II + Tier\,III_{využitelný}$
- $Tier\,III_{využitelný} \leq 2.5 * (Tier\,I + Tier\,II - kapitálový\,požadavek\,A)$

Pro $Tier\,III_{využitý}$ platí vztah $Tier\,III_{využitý} \leq 0.714{*}kapitálový\,požadavek\,B$. Je možné rozkládat $Tier\,III_{využitelný}$ na $Tier\,III_{využitý}$ a $Tier\,III_{nevyužitý}$, nechce-li banka využívat celý $Tier\,III_{využitelný}$ pro výpočet kapitálové přiměřenosti. Nebrání-li tomu žádná jiná regulace, pak se to nestává právě kvůli snahám bank maximalizovat kapitálovou přiměřenost.

Pro výpočet celkového kapitálu dle vztahu (48) je třeba ještě definovat následující odečitatelné položky

- kapitálové investice bankovního portfolia do jiné banky nebo finanční instituce vyjma konsolidovaných investic, které přesahují 10 % základního kapitálu jednotlivých bank nebo finančních institucí, do nichž banka investovala
- součet kapitálových nekonsolidovaných investic bankovního portfolia do jiných bank nebo finančních institucí přesahující 10 % kapitálu banky a představující podíl do 10 % včetně základního kapitálu jednotlivých bank nebo finančních institucí, do nichž banka investovala

6.2 Rizikově upravená aktiva pro výpočet kapitálového požadavku A

Pro výpočet celkové kapitálové přiměřenosti je třeba vypočítat celkovou hodnotu rizivě upravených rozvahových aktiv RVA, platí pro ni vztah,

$$RVA = \sum_i w_i A_i$$

kde w_i jsou postupně i-té rizikové váhy a RA_i značí účetní hodnotu i-tého rozvahového aktiva po odečtení opravných položek, popř. oprávek k nim vytvořených. Každá bankovní expozice musí být zařazena do příslušné kategorie. Váhy w_i vyjadřují rizikovost dané operace.

Tabulka 1 představuje dva příklady rizikové váhy pro příslušný stupeň úvěrové kvality dle přílohy č.4 vyhlášky č. 123/2007 Sb. V prvním případě se jedná o expozice vůči centrálním vládám a centrálním bankám a v případě druhém se jedná o expozice podnikové. Obě sady rizikových vah jsou rozděleny jsou dle standardního přístupu do šesti stupňů úvěrové kvality. Je třeba zdůraznit, že je možné využít příslušné

Stupeň úvěrové kvality	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Rizikové váhy 1.	0%	20%	50%	100%	100%	150%
Rizikové váhy 2.	20%	50%	100%	100%	150%	150%

Tabulka 1: Příklady rizikových vah

zajištění a namísto rizikové váhy dlužníka brát v úvahu rizikovou váhu poskytovatele záruky. Analogicky je třeba vypočítat celkovou hodnotu rizikově upravených mimorozvahových aktiv $MRVA$, pro pro ni vztah,

$$MRVA = \sum_i w_i \acute{U}E_i$$

kde w_i jsou opět postupně i-té rizikové váhy a $\acute{U}E_i$ značí i-tý úvěrový ekvivalent. Příslušný úvěrový ekvivalent se získá součinem účetní hodnoty daného mimorozvahového aktiva MA_i a konverzního faktoru kf_i, tj. celkově platí $\acute{U}E_i = MA_i * kf_i$. V případě derivátů je třeba ještě zohlednit aktuální tržní cenu derivátu TC_i, tj. pro uvěrový ekvivalent v případě derivátů platí $\acute{U}E_i = TC_i + MA_i * kf_i$. Pro celkové rizikově upravené aktiva $CRVA$ platí vztah

$$CRVA = RVA + MRVA$$

Banka může v tomto případě použit metodu tzv. IRB[3] přístupů, umožňující bance vlastní stanovování úvěrového rizika jejích dlužníků.

6.3 Základní druhy portfolií

Portfolia členíme proto, abychom získali jednotlivé části potřebné k výpočtu kapitálové přiměřenosti.

1. **Obchodní portfolio**

   Obchodní portfolio je složeno zejména z finančních a komoditních nástrojů, držených za účelem obchodování nebo zajištění jiných nástrojů obchodního portfolia. Jedná se o nástroje krátkodobé povahy držených za účelem zisku z krátkodobých rozdílů mezi kupní a prodejní cenou nebo změn v úrokových mírách spojených s tímto produktem. Jednotlivé instrumenty jsou obchodovány v množstvích, které ve větším množství nijak neovlivňují jejich cenu.

2. **Malé obchodní portfolio**

   Jedná se o druh obchodního portfolia, který navíc splňuje

   - podíl transakcí zařazených do malého obchodního portfolia zpravidla nepřesahuje 5 % všech transakcí

[3]Internal ratings based spproach

- celková částka pozic zařazených do malého obchodního portfolia zpravidla nepřesahuje částku odpovídající 15 000 000 eur
- podíl transakcí zařazených do malého obchodního portfolia nikdy nepřesahuje 6 % všech transakcí a celková částka pozic, zařazených do malého obchodního portfolia, nikdy nepřesahuje částku odpovídající 20 000 000 eur

3. **Investiční (bankovní) portfolio**

   Investiční portfolio je složeno z finančních a komoditních nástrojů nezařazených do obchodního portfolia. Již z vlastností obchodního portfolia vyplývá, že investiční portfolio se povětšinou skládá z nástrojů s úmyslem je držet do jejich splatnosti. U většiny bankovních subjektů velikost investičního portfilia výrazně převyšuje velikost obchodního portfolia.

6.4 Kapitálové požadavky A a B

Celkový kapitálový požadavek vyjadřuje množství kapitálu, které banka potřebuje ke krytí všech podstupovaných rizik. Dělí se na kapitálový požadavek A a kapitálový požadavek B, popř. ještě kapitálový požadavek k operačnímu riziku.

Kapitálový požadavek A představuje kapitálový požadavek k úvěrovému riziku investičního portfolia, který lze vypočítat jako součin rizikově vážených aktiv bank a koeficientu 0.08.

Kapitálový požadavek B představuje kapitálový požadavek k úvěrovému riziku obchodního portfolia a k měnovým a komoditním nástrojům bankovního portfolia a skládá se z následujících položek.

- kapitálový požadavek k úvěrovému riziku obchodního portfolia, jenž je roven součtu následujících položek
  - kapitálový požadavek ke specifickému úrokovému riziku
  - kapitálový požadavek ke specifickému akciovému riziku
  - kapitálový požadavek k vypořádacímu riziku
  - kapitálový požadavek k reverzním repo operacím a repo operacím, výpůjčkám a půjčkám cenných papírů a komodit
  - kapitálový požadavek k pevným termínovým kontraktům a opcím
  - kapitálový pořadavek ke zbývajícím nástrojům obchodního portfolia
- kapitálový požadavek k riziku angažovanosti obchodního portfolia
- kapitálový požadavek k obecnému úrokovému riziku
- kapitálový požadavek k obecnému akciovému riziku
- kapitálový požadavek k měnovému riziku

- kapitálový požadavek ke komoditnímu riziku

Pro úplnost nyní podrobněji rozebereme některé základní kapitálové požadavky

6.4.1 Kapitálový požadavek ke specifickému úrokovému riziku

Kapitálový požadavek ke specifickému úrokovému riziku $KP_{súr}$ lze určit pomocí následujícího vztahu,

$$KP_{súr} = \sum_i ksúr_i * \mid ÚP_i \mid$$

kde $ksúr_i$ značí koeficient specifického úvěrového rizika a $ÚP_i$ je současná hodnota finančního toku spojená s příslušnou úrokovou pozicí v čase výpočtu kapitálové přiměřenosti. Koeficient $ksúr_i$ závisí na rizikovosti emitenta i zbytkové splatnosti.

6.4.2 Kapitálový požadavek k obecnému úrokovému riziku

Ke stanovení kapitálového požadavku k obecnému úrokovému riziku lze použít metodu splatností nebo alternativně metodu durací. Zabývejme se nyní metodou splatností. K použití této metody je nejdříve třeba seřadit jednotlivé úrokové pozice podle zbytkových splatností. Schéma vzniklé pomocí tohoto seřazení obsahuje 13 časových pásem, v případě nástrojů s kuponovou sazbou menší než 3 % nebo nástrojů bez kuponu obsahuje 15 časových pásem. Časová pásma jsou dále řazena do tří zón. První zóna je tvořena prvními čtyřmi časovými pásmy, druhá zóna je tvořena dalšími čtyřmi časovými pásmy a nakonec poslední třetí zóna je tvořena posledními šesti, resp. osmi časovými pásmy. Nejprve se vypočítá vážená úroková pozice ve všech časových pásmech jako součet úrokových pozic přenásobených příslušnými koeficienty. Tyto vážené úrokové pozice se následně v každém časovém pásmu kompenzují, a tak se v každém časovém pásmu získá jedna kompenzovaná úroková pozice a jedna zbytková úroková pozice. Následně dochází ke kompenzaci zbytkových úrokových pozic v každé ze tří časových zón. Analogicky jako v případě kompenzace v časových pásmech vznikne v každé zóně jedna kompenzovaná a jedna zbytková úroková pozice.

Celkový algoritmus dále pokračuje kompenzací zbytkových úrokových pozic mezi zónami 1 a 2 a zónami 2 a 3, a tak se v každém časovém pásmu získá jedna kompenzovaná úroková pozice mezi zónami 1 a 2 a jedna úroková pozice mezi zónami 2 a 3 a jedna zbytková úroková pozice v každé časové zóně. Tyto zbytkové úrokové pozice se dále kompenzují, a tak se získá jedna kompenzovaná úroková pozice mezi časovými zónami 1 a 3 a jedna zbytková úroková pozice v každé časové zóně. Celkový kapitálový požadavek k obecnému úrokovému riziku se vypočítá jako součet jednotlivých kompenzovaných úrokových pozic přenásobených procenty dle aplikované regulace a součtem zbytkových úrokových pozic. Pro úrokové futures použijeme metodu marží.

6.4.3 Kapitálový požadavek ke specifickému akciovému riziku

Kapitálový požadavek ke specifickému akciovému riziku se rovná součinu koeficientu, momentálně 4 %, a hrubé akciové pozice snížené o hrubou akciovou pozici tzv. vybraného portfolia. Při stanovení kapitálového požadavku k tomuto vybranému portfoliu se pak jeho hrubá akciová pozice násobí sníženým koeficientem, momentálně 2 %. Vybrané portfolio musí dle regulací splňovat zejména podmínky klasifikace jednotlivých pozic a jejich procentuálních zastoupení ve vybraném portfoliu.

6.4.4 Kapitálový požadavek k obecnému akciovému riziku

Kapitálový požadavek k obecnému akciovému riziku se rovná součinů koeficientu daného regulací, momentálně je roven 8 %, a hrubé akciové pozice a absolutních hodnot čistých akciových pozic národních trhů. Celkový kapitálový požadavek lze tedy zapsat ve tvaru,

$$KP = \sum_i KP_i = \sum_i k_i \check{C}AP_i$$

tj. jako součet kapitálových požadavků vúči jednotlivým národním trhům. Kapitálové požadavky na jednotlivých národních trzích lze pak vyjádřit jako součin koeficientu národního trhu k_i a absolutních hodnot čistých akciových pozic národních trhů $\check{C}AP_i$. V případě potřeby stanovení kapitálového požadavku k akciových futures obchodovaných na uznaných burzách postačí sečíst marže odpovídajících akciových futures.

6.4.5 Kapitálový požadavek ke komoditnímu riziku

Obecně se používají dvě metody stanovení kapitálového požadavku ke komoditnímu riziku, a to tzv. zjednodušená metoda a metoda splatností. Dle zjednodušené metody se kapitálový požadavek ke komoditnímu riziku dané komodity rovná součtu 15 % absolutní hodnoty součtu dlouhých a krátkých komoditních pozic dané komodity a 3 % součtu absolutních hodnot krátkých a dlouhých komoditních pozic dané komodity. U metody splatnotí se každá komoditní pozice zařadí do schématu splatností s časovými pásmy 0 až 1 měsíc včetně, 1 až 3 měsíce včetně, 3 až 6 měsíců včetně, 6 až 12 měsíců včetně, 1 až 2 roky včetně, 2 až 3 roky včetně a nad 3 roky, ve kterém existuje alespoň jedna komoditní pozice. Následně dochází ke kompenzaci dlouhých a krátkých komoditních pozic směrem od nejnižšího časového pásma. Zbytková pozice se přesune do nejbližšího časového pásma a opakuje se proces kompenzace stejným způsobem. Výsledkem těchto postupných kompenzací je výsledná dlouhá nebo krátká komoditní pozice. Celkový kapitálový požadavek se poté stanoví jako součet kompenzovaných pozic, zbytkových pozic a výsledné komoditní pozice přenásobených procenty dle aplikované regulace. Podobně jako u stanovení kapitálového požadavku k akciovým a úrokovým futures lze i v případě komoditních futures použít metodu marží.

Počet překročení během posledních 250 pracovních dní	Multiplikativní faktor k
méně než 5	0.00
5	0.40
6	0.50
7	0.65
8	0.75
9	0.85
10 a více	1.00

Tabulka 2: Hodnoty multiplikativního faktoru

6.5 Stanovení kapitálových pažadavků dle vlastních modelů

Nejdříve je třeba zdůraznit, že používání vlastních modelů ke stanovení kapitálových požadavků podléhá souhlasu regulátora. Jedná se o stanovování kapitálových požadavků k tržním rizikům a specifickému úrokovému a akciovému riziku obchodního portfolia. K hlavní výhodě používání vlastních VaR[4] modelů patří zejména lepší adaptabilita na onu konkrétní bankovní instituci. Mezi nejdůležitější požadavky na vlastní modely patří zejména správná koncepce a přesnost modelu, jeho dostatečné testování a v neposlední řadě splnění kvalitativních a kvantitativních požadavků. Mezi kvalitativní požadavky patří zejména zařazení modelu jako denní součást procesu měření rizik banky a nezávislost útvaru rizik na útvaru obchodování, zatímco v případě kvantitativních požadavků je to zejména požadavek počítat rizikovou hodnotu denně a použití jednostranného intervalu spolehlivosti na hladině spolehlivosti 99 %. Dále platí, že nejkratší období pro výpočet rizikové hodnoty je deset pracovních dní. Historické období je pak jeden rok (250 pracovích dní) s požadovanou aktualizací jednou za $\frac{1}{4}$ roku. Hodnota kapitálového požadavku dle vlastního modelu KP_{VM} pro následný výpočet kapitálové přiměřenosti se pak dle Tabulky 2 stanoví jako

$$KP_{VM} = max\left(\frac{k}{60}\sum_{i=1}^{60} Var_{t-i}; Var_{t-1}\right)$$

6.6 Kapitálový požadavek k operačnímu riziku a základní metody jeho stanovení

Operační riziko je definováno jako riziko ztráty banky vlivem nedostatků či selhání vnitřních procesů, lidského faktoru nebo systémů či riziko ztráty banky vlivem vnějších událostí, včetně rizika ztráty banky v důsledku porušení či nenaplnění právní normy. Stanovení kapitálového požadavku k operačnímu riziku se provádí dle tří následujících přístupů

1. **Přístup základního ukazatele (BIA)**

[4]Value at Risk

Kapitálový požadavek k operačnímu riziku dle přístupu základního ukazatele je roven předem stanovenému procentu z hodnoty relevantního ukazatele. Toto procento se obvykle značí jako α a dle vyhlášky č. 123/2007 Sb. $\alpha = 15\%$. Relevantní ukazatel v tomto případě je pak stanoven jako tříletý průměr součtu čistého úrokového a čistého neúrokového výnosu. Kapitálový požadavek k operačnímu riziku je tedy dán následujícím vztahem,

$$\frac{\alpha \sum_{t=1}^{n} (kladné\, hodnoty\, čistého\, úrokový\, a\, neúrokového\, výnosu)_t}{n}$$

kde n je počet let z posledních tří let, kdy čistý úrokový a neúrokový výnos dosahoval kladných hodnot.

2. **Standardizovaný přístup**

   Standardizovaný přístup navazuje na přístup základního ukazatele. Dle standardizovaného přístupu se aktivity banky rozdělí do tzv. linií podnikání. Po rozdělení aktivit banky do těchto linií se aplikuje přístup základního ukazatele v každé z těchto linií, neboť dle tohoto přístupu jsou regulátorem stanoveny tzv. beta faktory pro jednotlivé linie, které nabývají hodnot $12\% - 18\%$. Kapitálový požadavek je pak stanoven jako součet kapitálových požadavků k jednotlivým odvětvím podnikání banky.

3. **Pokročilý přístup (AMA)**

   V případě pokročilého přístupu se jedná o stanovení kapitálového požadavku k operačnímu riziku dle interních metod dané banky. V tomto případě jsou po bance vyžadovány tzv. kvalitativní a kvantitativní požadavky. Model totiž podléhá schválením ze strany regulátora. Mezi hlavní kvalitativní požadavky patří např. každodenní měření operačního rizika, náležitá dokumentace a nezávislost povinné osoby odpovědné za řízení operačních rizik. Zatímco mezi kvantitativní požadavky patří zejména schopnost podchytit málo četné události s velkým dopadem s hladinou spolehlivosti 99,9 % během jednoho roku. Jedná se o výjimečné, težko podchytitelné události na chvostech. Kapitálový požadavek k operačnímu riziku při použití pokročilého přístupu bez zohlednění pojištění, které je jinak dovoleno použít ke snížení kapitálového požadavku, nesmí být snížen o více než 20 %.

6.7 Kapitálová přiměřenost (Cookův poměr)

Kapitálová přiměřenost je finanční nástroj, pomocí kterého lze po bance požadovat držení určitého množství kapitálu. Tento kapitál má poté sloužit především jako určitý nárazník proti neočekávaným ztrátám, bereme-li v úvahu, že k pokrytí očekávaných ztrát slouží bankou vytvořené opravné položky. Po zavedení pojištění vkladů má výhradní zájem na vyžadování kapitálové přiměřenosti má především stát jakožto největší věřitel. Kapitálová přoměřenost je definována následujícím poměrem

$$\frac{Tier\,I + Tier\,II + Tier\,III_{využitý} - odečitalelné\,položky}{kap.\,požadavek\,A + kap.\,požadavek\,B} \cdot 0.08 \geq 0.08 \qquad (49)$$

Dosadíme-li nyní vztah pro výpočet kapitálového požadavku A, tj.

$$kapitálový\,požadavek\,A = 0.08 \cdot CRVA$$

do vztahu (49), pak lze kapitálovou přiměřenost alternativně zapsat jako

$$\frac{Tier\,I + Tier\,II + Tier\,III_{využitý} - odečitalelné\,položky}{CRVA + 12.5 \cdot kap.\,požadavek\,B} \geq 0.08$$

Z obou předchozích vztahů je již patrné, že dle regulátorů by kapitálová přiměřenost bank měla dosahovat nejméně 8 %. Požadujeme-li zohlednění kapitálových požadavků k operačnímu riziku, dostáváme kapitálovou přiměřenost ve tvaru

$$\frac{Tier\,I + Tier\,II + Tier\,III_{využitý} - odečitalelné\,položky}{CRVA + 12.5 \cdot (kap.\,požadavek\,B + kap.\,požadavek\,k\,operačnímu\,riziku)} \geq 0.08$$

Vyžadování kapitálového požadavku k operačnímu riziku je prvně vyžadováno dle Basel II.

6.8 Limity anagažovanosti

Hlavním cílem této regulace je potřeba pečlivě evidovat veškerá aktiva vůči jedné osobě či skupině ekonomicky spjatých osob a zajistit jejich omezení v závislosti na velikosti kapitálu banky s cílem zmenšit koncentraci veškerých aktiv na tuto osobu či skupinu. Banka musí neustále vyhodnocovat propojení jednotlivých firem. Při vyšším stupni propojení několika firem je banka nucena považovat je za skupinu ekonomicky spjatých osob a podle toho také aplikovat limity angažovanosti. Celkovým cílem je pak především omezení expozice portfolia vůči jen velmi malému počtu subjektů. Důvodem je zejména případná platební neschopnost dlužníka nebo neochota plnění svých závazků. Celkovou angažovaností vůči osobě nebo ekonomicky spjaté skupině osob se rozumí součet angažovanosti investičního portfolia a angažovanosti obchodního portfolia vůči osobě nebo ekonomicky spjaté skupině osob.

6.8.1 Angažovanost investičního portfolia

S limity angažovanosti investičního portfolia jsou úzce spjaty pojmy hrubá angažovanost a čistá angažovanost investičního portfolia. Hrubá angažovanost představuje součet veškerých nástrojů, tj. rozvahových i mimorozvahových aktiv včetně pohledávek z poskytnutých příslibů úvěrů a půjček, záruk atd. vůči dané konkrétní osobě. Čistou angažovaností investičního portfolia vůči osobě se rozumí hrubá angažovanost investičního portfolia po odečtení zajištěných položek definovanými regulacemi. Takto zajištěné položky lze pak převést pod angažovanost jiných osob, např.

poskytovateli záruky. Zmíněné zajištění může mít formu např. zástavního práva k pohledávkám na vyplacení vkladu potvrzeného vkladním listem, ručením, zárukou vydanou centrálními vládami států zóny A atd. Od hrubé angažovanosti investičního portfolia lze odečíst také nepoužité části úvěrových příslibů za předpokladu, že právo kdykoliv zrušit úvěrový příslib je bezpodmínečné, neměnitelné a neodvolatelné. Čistou angažovaností investičního portfolia vůči úvěrové instituci se sídlem ve státě zóny A se rozumí hrubá angažovanost investičního portfolia vůči úvěrové instituci po odečtení zajištění násobená koeficientem $0,2$.

Limity čisté angažovanosti investičního portfolia jsou dle regulátorů stanoveny následujícím způsobem. Tato čistá angažovanost je limitována 25 % součtu původního a dodatkového kapitálu sníženého o $Tier\,III_{využitý}$ po zohlednění zajištění. V případě institucí, uznaných burzou anebo uznaných clearingových centrer, je potom limit stanoven jako vyšší z hodnot 25 % součtu původního a dodatkového kapitálu sníženého o $Tier\,III_{využitý}$ a částky 150 000 000 eur. Jedná-li se však o osobu se zvláštním vztahem k bance nebo osoby, z nichž alespoň jedna má zvláštní vztah k bance, pak je limit snížen na 20 %. Stejné snížení platí i v případě právnických osob s kapitálovým podílem nebo hlasovacími právy většími než 10 %. Přesahuje-li úhrn čistých angažovaností vůči jedné osobě nebo ekonomicky spjaté skupině osob10 %, pak je banka limitována přesažením 800 % součtu původního a dodatkového kapitálu sníženého o $Tier\,III_{využitý}$.

6.8.2 Angažovanost obchodního portfolia

Angažovanost obchodního portfolia vůči osobě nebo ekonomicky spjaté skupině osob je představována kladným rozdílem mezi součtem dlouhých pozic a součtem absolutních hodnot krátkých pozic především následujících položek

- úrokové pozice
- akciové pozice
- expozice vůči fondům kolektivního investování
- rozdíly mezi sjednanou vypořádací cenou a aktuálním tržním oceněním cenných papírů, cizích měn a komodit u obchodů nevypořádaných do stanoveného dne vypořádání, pokud tyto rozdíly představují ztrátu
- expozice z repo obchodů, půjček či výpůjček cenných papírů nebo komodit
- expozice derivátů, maržových obchodů a transakcí s delší dobou vypořádání

Závěr

Na tomto místě zrekapitulujeme nejdůležitejší body této práce. Úvod práce poskytuje nastínění základní problematiky Markowitzova portfolia a regulací bankovních subjektů. Práce dále poskytuje základní úvod do teorie portfolia a její návaznost na Markowitzovo portfolio. Úloha celkového řešení základního Markowitzova modelu je uvedena zejména z důvodu jejího dalšího rozpracování v dalších částech této práce. S tímto úzce souvisí následná kapitola 3, která poskytuje úvod k problematice Kuhn-Tuckerových podmínek umožňující hlubší zkoumání opltimality portfolií zatížených lineárními omezeními. Takováto lineární omezení v obecném tvaru poskytují velkou variabilitu při zkoumání konkrétních případů s konkrétními omezeními. Práce navazuje obecnými formulacemi konkrétních omezení daných legislativou, investičním záměrem nebo např. transakčními náklady. Tato omezení lze následné využít spolu s teoriíí Markowitzova portfolia a aplikovat např. na tvorbu optimálního bankovního portfolia, případně jeho změn.

Na tato omezení plynule navazuje část zabývající se vlivem regulací na bankovní portfolio. Tato kapitola za určitých zjednodušených předpokladů přínáší některé zcela paradoxní výsledky. Mezi nejdůležitější z nich určitě patří vliv kapitálové přiměřenosti na rizikovost bankovního portfolia. Zejména onen výsledek, že vyžadování přiliš vysoké kapitálové přiměřenosti může paradoxně vést k vytváření velice rizikových bankovních portfolií za účelem zachování původního výnosu. Závěr práce je věnován legislativě, a to zejména kapitálové přiměřenostia a limitům angažovanosti portfolia. Dle daných legislativních omezení je pak možné se podrobněji věnovat vlivu na bankvní portfolio dle předchozích kapitol. Práce poskytuje ucelené zpracování celého tématu. Dle mého názoru práce přímo vybízí o dodatečné rozšíření o tzv. dynamické modely, tj . modely založené na teorii pravděpodobnosti a náhodných procesech.

Seznam použité literatury

[1] H. M. Markowitz, G. P. Todd, W. F. Sharpe: Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets. Wiley, 2006

[2] M. S. Bazaraa; H. D. Sherali; C. M. Shetty: Nonlinear Programming - Theory and Algorithms. Wiley, 2006

[3] J. Dupačová; J. Hurt; J. Štěpán: Stochastic Modeling in Economics and Finance. Kluwer, Dordrecht, 2002

[4] H. M. Markowitz: Portfolio Selection - Efficient Diversification of Investments. Wiley, 1959

[5] P. Lachout: *Matematické programování* - pracovní text k přednášce Optimalizace I

[6] J. Dupačová: Markowitzův Model Optimální Volby Portfolia - předpoklady, data, alternativy

[7] I. Babouček a kolektiv: Regulace Činnosti Bank. Bankovní Institut, 2005

[8] T. Cipra: Kapitálová Přiměřenost ve Financích a Solventnost v Pojišťovnictví. Ekopress, 2002

[9] M. Dewatripont, J. Tirole: The Prudential Regulation of Banks, MIT Press. 1994

[10] M. Mejstřík; M. Pečená; P. Teplý: Základní Principy Bankovnictví. Karolinum 2009

[11] G. A. Pogue: An Extension of the Markowitz Portfolio Selection Model to Include Variable Transactions' Costs, Short Sales, Leverage Policies and Taxes. 1969

[12] D. Kim; A. M. Santomero: Risk in Banking and Capital Regulation. 1988

[13] M. Koehn; A. M. Santomero: Regulation of Bank Capital and Portfolio Risk. 1980

[14] R. C. Merton: An Analytic derivation of the Efficient Portfolio Frontier. 1972

[15] E. J. Elton; M. Gruber; S. J. Brown; W. N. Goetzmann: Modern Portfolio Theory and Investment Analysis, Wiley, 2007

[16] F. Cesarone; A. Scozzari; F. Tardella: Efficient Algorithms for Mean-Variance Portfolio Optimization with Hard Real-World Constraints

[17] S. M. Focardi; Frank J. Fabozzi: The Mathematics Financial Modeling and Investment Management. Wiley, 2004

[18] H. M. Markowitz: The Optimization of Quadratic Functions Subject to Linear Constraints. 1955

[19] J. W. Pratt: Risk Aversion in The Small and in The Large. 1964

[20] N. J. Jobst, M. D. Horniman, C. A. Lucas and G. Mitra: Computational Aspects of Alternative Portfolio Selection Models in the Presence of Discrete Asset Choice Constraints. 2001

[21] C. Tadonki, J.Ph.Vial: Portfolio Selection with Cardinality and Bound Constraints

[22] P. Vanini and L. Vignola: Markowitz Model

[23] R. Jagannathan, T. Ma: Risk Reduction in Large Portfolios: A Role for Portfolio Weight Constraints. 2001

[24] T. Roncalli: Understanding the Impact of Weights Constraints in Portfolio Theory. 2010

[25] R. Jagannathan, Tongshu Ma: Risk Reduction in Large Portfolios: Why Imposing the Wrong Constraints Helps

[26] G. d. Tollo: Portfolio Selection by Metaheuristics. 2005-2008

[27] D. VanHoose: Theories of Bank Behavior under Capital Regulation. 2007

[28] S. Peltzman: Capital Investment in Commercial Banking and Its Relationship to Portfolio Regulation. 1970

[29] J. Musilová, Ivan Babouček: Banky v ČR z Pohledu Regulátora. 1999

[30] M. S. Lobo, M. Fazel, S. Boyd: Portfolio Optimization with Linear and Fixed Transaction Costs. 2006

[31] R. D. Blair, A. A. Heggestad: Bank Portfolio Regulation and the Probability of Bank Failure. 1978

[32] D. Gale: Capital Regulation and Risk Sharing. 2010

[33] J. Blum: Do Capital Adequacy Requirements Reduce Risks in Banking? 1998

[34] Vyhláška č. 123/2007 Sb., o Pravidlech Obezřetného Podnikání Bank, Spořitelních a Úvěrních Družstev a Obchodníků s Cennými Papíry

[35] Zákon č. 21/1992 Sb., o Bankách