Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jiří Kučera

Středoškolská matematika vysokoškolsky

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Fyzika zaměřená na vzdělávání (FMUZV)

Praha 2012

Poděkování

Tímto bych rád poděkoval svému vedoucímu práce panu docentovi Bečvářovi za ochotu vypsat na mé přání tuto práci. Za velice ochotnou, laskavou a pohotovou pomoc, kterou mi poskytnul vždy, když jsem potřeboval a za zodpovědné vedení, věcné připomínky, inspiraci, opravu pravopisných a slohových chyb (kterých bylo značně mnoho) a obstarání literatury [9].

Dále tímto děkuji své rodině a přátelům za podporu a pomoc při jazykové a slohové formě práce.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 3. 8. 2012

Název práce: Středoškolská matematiky vysokoškolsky

Autor: Jiří Kučera

Katedra / Ústav: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc., Katedra didaktiky matematiky, Matematický ústav UK

Abstrakt: Práce je určena k samostudiu absolventů středních škol. Připravuje studenta, který se chystá na matematicky zaměřenou vysokou školu. Seznamuje jej s teoretickým přístupem k matematice. K tomuto účelu byla vybrána témata mocniny, odmocniny, logaritmy a rovnice, které tyto objekty obsahují. Student tak má příležitost osvojit si vysokoškolský přístup k matematice na tématech, která by měl ze střední školy dokonale ovládat. Vedle toho mu práce umožňuje prohloubit si znalosti oněch témat a setkat se s těžšími a neobvyklými příklady.

Klíčová slova: mocnina, odmocnina, logaritmus, rovnice, důkaz

Title: Elementary mathematics from an advanced standpoint

Author: Jiří Kučera

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc., Department of Mathematics Education, Mathematical Institute of Charles University.

Abstract: Mine thesis is written for self-study of secondary school graduates students which prepare for the mathematically oriented high schools. It clarifies theoretical approach to mathematics. It was chosen topics exponents, square roots, logarithms and equations that contain these objects for this purpose. For this reason students are given the opportunity to gain stance to university mathematics knowledge that should be known from high school. In addition, his work allows him to enlarge knowledge of those topics and learn heavier and unusual examples.

Keywords: power, root, logarithm, equation, proof.

Obsah

Úvod

Matematiku jsem měl vždy velice rád s jednou výjimkou, kterou je první rok mého studia na vysoké škole. Čekal jsem, že se naučím něco nového počítat, nové vzorce a nové postupy. Místo toho se začaly ty „staré“ vzorce dokazovat. Najednou se začalo odůvodňovat, proč platí ty nejjednodušší vzorce a vztahy, které jsem znal už od základní školy. Připadalo mi to tehdy jako zbytečné šťourání v detailech. Co jsem si to vybral za studium? Důkazem vzorečku, že $a.0 = 0$, popsali celou tabuli! To snad nemyslí vážně! Vždyť to je samozřejmé a jasné! To už opravdu vím od základní školy! To nebyl důvod, proč jsem šel na MatFyz.

Nerozuměl jsem tehdy ani tomu, jak se něco dokazuje, a už vůbec jsem nevěděl, proč by se něco dokazovat mělo. Na střední škole nás přece naučili nějaký vzoreček a pak jsme počítali příklady. Jestli ten vzoreček platí? No jistě, že ano! Jinak by jej přece nepsali do učebnic, a navíc jsme se nesetkali s případem, kdy by neplatil. Žádný důkaz, žádné odvození, žádné odůvodnění.

Když jsem nevěděl, proč přistupovat k matematice vysokoškolským způsobem, tedy teoreticky, těžko jsem mohl chápat význam dokazování „zřejmých“ tvrzení (jako $a.0 = 0$).

Pravděpodobně nejsem jediný, kdo měl s přestupem na vysokou školu podobný problém. Málem jsem tehdy studium matematiky navždy zavrhl a jsem nerad za každého, kdo tak učinil a učiní.

Proto vzniklo téma mojí bakalářské práce, jejímž úkolem je naznačit studentům, kteří se chystají na vysokoškolské studium zaměřené na matematiku, nebo se jen chtějí zahloubat do látky ze základní a střední školy, proč je v matematice vhodné, ba dokonce důležité ve větách, vzorci a tvrzeních hloubat, odvozovat je a dokazovat. Proč je nerozumné nad matematikou nepřemýšlet a jen tupě dosazovat do vzorců, které nechápeme. Budeme se snažit ukázat si, proč nepřijímat lehkovážně kdejakou pochybnou „fintu“ či početní „kuchařku“, a proč má dobrý smysl uvažovat nad věcmi, které se nám zdají samozřejmé, přestože vlastně vůbec nejsou.

Práce samotná by měla sloužit jako podkladový materiál pro seminář maturitních ročníků, ale i jako text k samostudiu, nebo dokonce čtení na dobrou matematickou noc.

Předpokládám, že jednou bude tato práce začleněna jako kapitola do většího celku, který bude vysvětlovat a odvozovat celou středoškolskou matematiku. Proto se nyní omezím pouze na část věnovanou algebraickým výrazům, konkrétně vzorcům a vztahům o mocninách, odmocninách a logaritmech. Dále se budu věnovat ekvivalentním úpravám rovnice, které s tímto tématem souvisí.

Vzpomínáme

Samozřejmě na základní a střední školu! Předpokládáme, že čtenář do velké míry ovládá středoškolskou látku týkající se mocnin, odmocnin a logaritmů, že umí upravovat výrazy, řešit rovnice a načrtnout jednoduché grafy funkcí, které tyto objekty obsahují.

Přesto bude první kapitola věnována připomenutí některých těchto poznatků, zejména proto, že je využijeme později, a možná se při opakování i něčemu novému přiučíme.

Jak jsme přišli k mocninám

Nejdříve jsme se naučili sčítat, odčítat, násobit a dělit, počítat se zlomky a převádět je na společného jmenovatele. Zjistili jsme, že každé přirozené číslo (N) lze rozložit na součin prvočísel (který je až na pořadí jednoznačný).

Možná právě tehdy nám začalo připadat pracné psát například $2.2.2.2.2$. Zavedli jsme si zjednodušený zápis tohoto součinu následovně: $2.2.2.2.2 = 2^5$. Pojmenovali jsme si tento výraz „pátá mocnina dvou“, nebo chceme-li „dvě na pátou“. Číslo 2 se začalo nazývat „základ“ a číslo 5 „mocnitel“ (neboli exponent) a celou tuto operaci, kterou s číslem 2 provádíme, známe jako „mocnění“. Zobecněně napsáno $a^n = \underbrace{a.a.a.\dots.a}_{n\ krát}$, kde a uvažujme prozatím reálné kladné (R^+) a n přirozené (N).

Na základní a střední škole víme, že platí následující vzorce:

$$a^n = \underbrace{a.a.a.\dots.a}_{n-krát} \qquad a^0 = 1 \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$(a.b)^n = a^n.b^n \qquad a^m.a^n = a^{m+n} \qquad (a^m)^n = a^{m.n}$$

Tyto bychom si vypsali na tabuli a řekli, že prostě platí, protože je to napsáno v učebnici, a vrhli bychom se na počítání příkladů.

Na vysoké škole se zabýváme především teorií a zajímá nás, proč jsou ony vzorce takové, jaké jsou. Zkrátka, proč platí? Když už si tyto vzorce zcela formálně nedokážeme, provedeme si alespoň pro začátek odvození a vysvětlení některých z nich. Budeme tak vždy ukazovat na příkladech s čísly a naše pozorování zobecníme vzorcem.

Ve všech následujících vzorcích budeme písmeny *a, b* myslet libovolná reálná kladná čísla (tedy $a, b \in R^+$) a písmeny *m, n* čísla přirozená (N).

$(a.b)^n = a^n.b^n$:

Ukážeme si platnost opět na příkladu $(2.3)^4 = (2.3).(2.3).(2.3).(2.3)$ pokud však odstraníme závorky (což můžeme, protože $(a.b).c = a.b.c$) a zaměníme pořadí (což opět můžeme, protože $a.b = b.a$), dostaneme:
$(2.3)^4 = (2.3).(2.3).(2.3).(2.3) = 2.2.2.2.3.3.3.3 = 2^4.3^4$. Tedy $(2.3)^4 = 2^4.3^4$.

$a^n.a^m = a^{n+m}$:

Snadno upravíme výraz $2^3.2^2 = (2.2.2).(2.2) = 2.2.2.2.2 = 2^5 = 2^{3+2}$. Po krátkém rozmyšlení je platnost vzorce zřejmá.

$(a^m)^n = a^{m.n}$:

Opět na příkladu $(5^2)^3 = (5^2).(5^2).(5^2) = (5.5).(5.5).(5.5) = 5^{2.3}$.

Teď možná poněkud z jiného soudku; 16. srpna 2009 vytvořil Usain Bolt rekord v běhu na 100 m, které uběhl za 9,58 s. Když bychom v hodinách fyziky chtěli napsat jeho průměrnou rychlost, počítali bychom $\frac{100\,m}{9{,}58\,s} \cong 10{,}44\,\frac{m}{s}$. Abyste nemuseli používat tento nepraktický zápis fyzikální jednotky zlomkem, nejspíš jste si zavedli, že $\frac{1}{s} = s^{-1}$, a dál pracovali s tvarem $10{,}44\,.\,m.s^{-1}$. Obdobné označení se nám hodí i v matematice. Když si zavedeme, že $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, zjistíme, že toto zavedení „ladí“ s výše uvedenými vzorci. Tak například $(3^{-1})^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{1}{3^4} = 3^{-4}$, nebo $2^5.2^{-3} = 2^5.\frac{1}{2^3} = \frac{2.2.2.2.2}{2.2.2} = 2^2 = 2^{5-3}$. Pokud se zamyslíme nad druhým příkladem, napadne nás, kolik by mělo být a^0. Myslíte, že by $a^0 = 1$ pro libovolné a kladné a reálné? Pak myslíte správně. Pro úplnost provedeme odvození: $2^0 = 2^{3-3} = 2^3.2^{-3} = 2^3.\frac{1}{2^3} = \frac{2.2.2}{2.2.2} = 1$. Je zjevné, že jsme jako základ mocniny (v našem případě „2“) mohli volit libovolné kladné reálné číslo. Ba dokonce i libovolné záporné reálné číslo. Jediný případ, který není definován, je, kdyby byl základ 0, protože nemůžeme dělit 0.

Nyní bychom snadno odvodili i vztahy $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ nebo $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. Toto odvození však přenecháváme čtenáři jako cvičení.

Zatím ovšem stále uvažujeme $a, b \in R^+$ (*a* a *b* jsou prvky množiny reálných a kladných čísel) a $m, n \in N$. Zamysleme se nyní, zda bychom mohli dosud získané poznatky zobecnit pro $a, b \in R - \{0\}$ a $m, n \in Z$ (celá čísla). V obou případech rozšiřujeme naše tvrzení i na záporná čísla (daného typu) a v případě *m,n* ještě na 0.

Začněme ověřením výše uvedených tvrzení pro $m = 0$ nebo $n = 0$. Jelikož víme, že $a^0 = 1$, a jelikož celé ověření spočívá v dosazení si 0 do výše uvedených vztahů za *m* nebo *n*, ponecháme toto rozmyšlení z velké míry opět na čtenáři (např. vztah $(a.b)^n = a^n.b^n$, ověříme takto: $(a.b)^0 = 1 = 1.1 = a^0.b^0$).

Ověření výše uvedených tvrzení pro *m* nebo *n* celé, ale záporné už jsme vlastně provedli, když jsme zaváděli $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Zjistili jsme, že toto zavedení „ladí“, tedy jinak řečeno, že vyhovuje i pro záporná *m* a *n*. Nyní však musíme ověřit, že ohledně záporných čísel „ladí“ toto zavedení samo se sebou. My nyní odvodíme platnost vztahu $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, i kdyby bylo *n* záporné (zatím jsme je uvažovali pouze kladné!). Uvažujme nyní *k* kladné, potom výraz „$-k$“ bude záporný. Dosadíme tedy za *n* výraz $-k$:

$a^{-(-k)} = \frac{1}{a^{-k}}$. Levá strana rovnosti se zjevně rovná a^k. Chceme platnost této rovnosti ověřit na základě úprav, které známe. Upravíme tedy pravou stranu $\frac{1}{a^{-k}} = \frac{1}{\frac{1}{a^k}}$.

Jelikož víme, jak upravit složený zlomek na zlomek jednoduchý (např. že $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} . \frac{7}{5} = \frac{2.7}{3.5}$), dostaneme $\frac{1}{a^{-k}} = \frac{1}{\frac{1}{a^k}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{a^k}} = \frac{a^k}{1} = a^k$. Tím jsme ověřili zkoumanou rovnost, a tedy že $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ platí i pro *n* záporné.

Ověření, že *m* a *n* můžeme uvažovat i záporná nebo 0 a všechny dosud odhalené vzorce budou platit, máme za sebou. Zajímavější bude uvažování, zda platí ony vzorce i pro *a* nebo *b* reálné a záporné.

Uvažujme *a* kladné, potom výraz „$-a$“ bude označovat číslo záporné. Víme ale, že $-a = (-1).a$, a po krátkém rozmyšlení odvodíme i platnost tohoto vztahu: $(-a)^n = (-1)^n.a^n$. Opět tak učiníme na příkladě s čísly:

$$(-2)^3 = (-2).(-2).(-2) = (-1).2.(-1).2.(-1).2 = (-1)^3.2^3$$

Na základě právě ověřeného vztahu nám bude stačit ověřit výše uvedená tvrzení pro $a = -1$ nebo $b = -1$. Takováto ověření jsou však velmi snadná a na první pohled zřejmá. Např.:

$$(-1)^3.(-1)^2 = [(-1).(-1).(-1)].[(-1).(-1)] = (-1).(-1).(-1).(-1).(-1) = (-1)^5 .$$

K čemu nám slouží odmocniny a logaritmy

Úvodem do této kapitoly se čtenáři omlouvám za počáteční nepřehlednost. Pro zopakování totiž suše shrnu získané poznatky ze střední školy.

Opět budeme pro začátek uvažovat $a, b, c \in R^+$ (reálné, kladné) a $m, n \in N$ (přirozené).

Když jsme zkoumali mocniny, znali jsme základ, znali jsme exponent a ptali jsme se: „Kolik dostaneme, když základ umocníme exponentem?“ ($2^3 = ?$). U odmocnin je otázka podobná, avšak známe **exponent** a výsledek, ale zajímá nás základ ($?^3 = 8$). Ptáme se tedy „Které číslo musíme mocnit na třetí, abychom dostali 8?“. Odpovědí bude „Třetí odmocninu z 8.“ ($\sqrt[3]{8}$). K definování odmocniny tedy můžeme použít následující vztah: $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$.

Mohli bychom použít i vztah zcela ekvivalentní $\underbrace{\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{a}.\dots.\sqrt[n]{a}}_{n-krát} = a$. Že se jedná o stejné vztahy je zřejmé. Dosadíme-li levou stranu ekvivalence ($\sqrt[n]{a} = b$) do druhého vzorce, dostaneme $\underbrace{b.b.b.\dots.b}_{n-krát} = b^n = a$, což je pravá strana ekvivalence.

Druhá odmocnina z a ($\sqrt[2]{a}$) se zpravidla značí jenom $\sqrt{a}$.

Ze základní a střední školy věříme, že platí:

$$\underbrace{\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{a}.\dots.\sqrt[n]{a}}_{n-krát} = a \qquad \sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$$

$$\sqrt[m.n]{a^m} = \sqrt[n]{a}$$

Když jsme zkoumali mocniny, znali jsme základ, znali jsme exponent a ptali jsme se: „Kolik dostaneme, když základ umocníme exponentem?“ ($2^3 = ?$). Přestože se nám to možná snažili zatajit, i u logaritmů je otázka podobná, avšak známe pro tentokrát **základ** a výsledek, ale zajímá nás exponent ($2^? = 8$). Ptáme se tedy „Na kolikátou musíme mocnit dvojku, abychom dostali 8?“. Odpovědí bude „Logaritmus o základu 2 z 8.“ ($\log_2 8$).

K definování logaritmu tedy můžeme použít následující vztah: $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$. Přičemž zavádí se ještě podmínka $b \neq 1$ (jinak by totiž *a* mohlo nabývat pouze hodnoty 1 pro libovolné *c*, což pro nás není nijak přínosné).

Mohli jsme však mít logaritmus nadefinovaný i poněkud jinak – pomocí následujících vztahů: $\log_b b^a = a$, $b^{\log_b a} = a$, které jsou podstatou skutečnosti, že exponenciální funkce je inverzní k funkci logaritmické, a logaritmus jako takový pak byl definován právě těmito vztahy. My se budeme držet té první definice, ale ukážeme si, že obě zavedení jsou stejná.

P1: Určete na základě definičního vztahu $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$, kolik je $\log_b b$ pro každé $b \in R^+ - \{1\}$.

Podle definice $\log_b b = x \Leftrightarrow b^x = b = b^1$. Z toho plyne, že $\log_b b = 1$.

P2: Určete na základě definice, kolik je $\log_b 1$ pro každé $b \in R^+ - \{1\}$.

Podle definice $\log_b 1 = x \Leftrightarrow b^x = 1 = b^0$. Z toho plyne, že $\log_b 1 = 0$.

Podobně jako u odmocnin, i u výrazů s logaritmy, ze střední školy spíš věříme, než víme, že platí následující vzorce:

$$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a \qquad \log_b b^a = a \qquad b^{\log_b a} = a$$

$$\log_b a^c = c.\log_b a$$

$$\log_b a.c = \log_b a + \log_b c$$

$$\log_b \frac{a}{c} = \log_b a - \log_b c$$

Zatímco s odmocninou se kamarádíme už od základní školy, logaritmus vypadá jako strašák z jiného světa, se kterým se navíc často středoškoláci setkají až v druhém ročníku. Tváří se jako něco hrozně složitého, a možná jenom proto, že místo nějakého jednoduchého znaku se najednou píše záhadné *log*. Ve skutečnosti je stejně složitý jako odmocnina, a dokonce jsou si tyto operace i velice podobné.

Skutečně, u hledání *c*-té odmocniny jsme se ptali „co“ musíme c-krát mocnit, tedy:

$$\sqrt[b]{a} = c \Leftrightarrow c^b = a\,.$$

U hledání logaritmu se naopak ptáme „čím“ musíme umocnit základ (*b*), tedy:

$$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a\,.$$

Při pozorování rozdílnosti těchto dvou operací si všimněme, že jediným rozdílem mezi nimi je záměna na pravé straně ekvivalence *b* za *c*, tedy „co“ za „čím“.

Pro snadnější představu uvedu ještě triviální příklad s čísly:

$$\sqrt[3]{8} = 2 \Leftrightarrow 2^3 = 8$$

$$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$$

Obě tyto operace a vzorce z nich odvozené se přímo váží na poznatky, které známe o mocninách. Jako v předchozí kapitole, i zde si všechny ověříme na příkladech s čísly:

$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$:

Podle alternativní definice má platit, že $\sqrt[5]{2.3} = c \Leftrightarrow c^5 = 2.3$. Podle stejného vztahu má také platit, že $\sqrt[5]{2} = a \Leftrightarrow a^5 = 2$ a $\sqrt[5]{3} = b \Leftrightarrow b^5 = 3$. Dáme-li tyto tři ekvivalence dohromady a dosadíme-li z druhé a třetí do první, dostaneme $\sqrt[5]{2.3} = c \Leftrightarrow c^5 = a^5 b^5$. Což ale podle vztahu, který známe o mocninách ($(a.b)^n = a^n.b^n$) znamená, že $c = a.b$. Když místo *a, b* a *c* dosadíme z levých stran ekvivalencí, dostaneme náš zkoumaný vztah: $\sqrt[5]{2.3} = \sqrt[5]{2}.\sqrt[5]{3}$.

$\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$:

Tento vztah není ničím jiným, než vícekrát použitím vztahu $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$. $\sqrt[5]{2^4} = \sqrt[5]{2^3.2}$ (tuto úpravu nám umožňuje vzorec $a^m.a^n = a^{m+n}$). Nyní použijeme předchozí vztah: $\sqrt[5]{2^3.2} = \sqrt[5]{2^3}.\sqrt[5]{2}$. Obdobnou úpravu s výrazem $\sqrt[5]{2^3}$ provedeme ještě dvakrát. Získáme takto rovnost $\sqrt[5]{2^4}=\sqrt[5]{2}.\sqrt[5]{2}.\sqrt[5]{2}.\sqrt[5]{2}$, což ovšem není nic jiného, než jinak zapsaný námi odvozovaný vzorec $\sqrt[5]{2^4}=\left(\sqrt[5]{2}\right)^4$.

Odpočiňme si na chvilku od odmocnin a podívejme se na vztahy, $\log_b b^a = a$, $b^{\log_b a}=a$, kterými bychom případně mohli logaritmus také definovat. Budeme chtít ukázat, že tyto vztahy odpovídají definici logaritmu a naopak.

$\log_b b^a = a$:

Nejprve si ukážeme, že na základě definice tento vztah platí. Podle definice logaritmu: $\log_2 c = 3 \Leftrightarrow 2^3 = c$. Potom ihned vidíme, že dosadíme-li za *c* do levé strany ekvivalence z pravé strany, dostáváme náš vztah.
Pokud má být tento vztah ekvivalentní vztahu definičnímu, je třeba ověřit i obráceně, že na základě tohoto vztahu platí vztah definiční. Dokazovali bychom postupně, že $\log_2 c = 3 \Rightarrow 2^3 = c$, a obráceně, že $2^3 = c \Rightarrow \log_2 c = 3$.

Dovolím si malou vsuvku z výrokové logiky pro zopakování. Pokud jsou výroky *A* a *B* ekvivalentní ($A \Leftrightarrow B$), potom musí platit: $(A \Rightarrow B)\wedge(B \Rightarrow A)$.
Chceme tyto dvě implikace na našem příkladě dokázat s použitím vztahu $\log_b b^a = a$.

$\log_2 c = 3 \Rightarrow 2^3 = c$: pokud platí náš zkoumaný vztah, potom musí $c = 2^3$.
$2^3 = c \Rightarrow \log_2 c = 3$: víme, že $c = 2^3$ a víme, že musí platit z platnosti našeho zkoumaného vztahu, že $\log_2 2^3 = 3$. Musí tedy platit $\log_2 c = 3$ (místo 2^3 dosadíme *c*).

$b^{\log_b a}=a$:
opět nejprve ukážeme, že tento vztah plyne z definice logaritmu.

Pokud z definice (zaměněné strany) $b^c = a \Leftrightarrow \log_b a = c$ dosadíme do levé strany za *c* z pravé strany, dostáváme ihned náš vztah.
Obráceným myšlenkovým postupem (předpokládáme platnost našeho vztahu a chceme z něj odvodit vztah definiční, začínáme tedy označením $c = \log_b a$) odvodíme druhou implikaci.

Výše uvedenými odvozeními jsme si ukázali, že vztahy:

$$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a \qquad \log_b b^a = a \qquad b^{\log_b a} = a$$

jsou navzájem ekvivalentní, a mohli bychom tedy k definování logaritmu použít kterýkoliv z nich.

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$:

K odvození tohoto vztahu využijeme vztahů již odvozených. Nejprve použijeme vztah $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$: $\sqrt[5]{\frac{2}{3}} = \sqrt[5]{2.\frac{1}{3}} = \sqrt[5]{2}.\sqrt[5]{\frac{1}{3}}$. Upravíme $\sqrt[5]{\frac{1}{3}}$ do tvaru $\sqrt[5]{3^{-1}}$.

Využijeme vztahu $\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$: $\sqrt[5]{\frac{1}{3}} = \sqrt[5]{3^{-1}} = \left(\sqrt[5]{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt[5]{3}}$ a dosadíme do první úpravy. Všimněme si, že abychom mohli zkoumaný vztah odvodit, museli jsme již znát hned tři vztahy: $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

$\log_b a^c = c.\log_b a$:

Pro přehlednost budeme odvozovat vztah na příkladu s čísly: $\log_2 3^5 = 5.\log_2 3$
Označíme si celou pravou stranu rovnosti $P = 5.\log_2 3$. Využijeme definiční vztah logaritmu $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$: $\log_2 3^5 = P \Leftrightarrow 2^P = 3^5$. Budeme se snažit odvodit pravou stranu ekvivalence, tedy, že $2^P = 3^5$. Dosadíme za *P* a využijeme vztah $\left(a^m\right)^n = a^{m.n}$ (obráceně): $2^{5.\log_2 3} = \left(2^{\log_2 3}\right)^5$. My ale víme, že na základě $b^{\log_b a} = a$ se $2^{\log_2 3} = 3$. Dosadíme tedy $2^{5.\log_2 3} = \left(2^{\log_2 3}\right)^5 = 3^5$, což je rovnost, kterou jsme chtěli odvodit.
Tento vztah zřejmě platí i pro $c < 0$. Odvození pak bude obdobné.

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$:

Odvodíme pouze $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$. Druhá rovnost pak bude přímo plynout z komutativnosti násobení. Podle definice odmocniny $\sqrt[b]{a} = c \Leftrightarrow c^b = a$: $\sqrt[3.5]{2} = c \Leftrightarrow c^{3.5} = 2$. Využijeme vztah $\left(a^m\right)^n = a^{m.n}$: $c^{3.5} = \left(c^3\right)^5$ a opět užijeme definici (obráceně): $\left(c^3\right)^5 = 2 \Leftrightarrow c^3 = \sqrt[5]{2}$.

Pro přehlednost si výraz $\sqrt[5]{2}$ označíme $k = \sqrt[5]{2}$. Na rovnost $c^3 = k$ ještě jednou použijeme definiční vztah (opět obráceně): $c^3 = k \Leftrightarrow \sqrt[3]{k} = c$. Nyní pokud dosadíme za *k*, dostaneme $\sqrt[3]{\sqrt[5]{2}} = c = \sqrt[3.5]{2}$ (druhá rovnost plyne z hned první ekvivalence).

$\sqrt[m.n]{a^m} = \sqrt[n]{a}$:

Tento vztah je přímým důsledkem vztahu předcházejícího. Stačí použít jednoduchou úpravu $\sqrt[m.n]{a^m} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^m}}$. Alternativní definiční vztah pro odmocninu nám říká, že $\sqrt[m]{a^m} = a$. Tedy $\sqrt[m.n]{a^m} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^m}} = \sqrt[n]{a}$.

$\log_b a.c = \log_b a + \log_b c$:

Označíme si celou pravou stranu $P = \log_2 3 + \log_2 5$. Využijeme definiční vztah logaritmu: $\log_2 3.5 = P \Leftrightarrow 2^P = 3.5$. Budeme pracovat s pravou stranou ekvivalence.

Využijeme vztah $a^m.a^n = a^{m+n}$: $2^P = 2^{\log_2 3+\log_2 5} = 2^{\log_2 3}.2^{\log_2 5}$. Nyní nám stačí dvakrát použít vztah $b^{\log_b a} = a$ a získáme $2^{\log_2 3}.2^{\log_2 5} = 3.5$.

$\log_b \frac{a}{c} = \log_b a - \log_b c$:

Opět jde o přímý důsledek vztahu předcházejícího. Jelikož už víme, že $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, zapíšeme $\log_b \frac{a}{c} = \log_b a.c^{-1}$. Užitím vztahu předcházejícího a vztahu $\log_b a^c = c.\log_b a$, dostaneme $\log_b a.c^{-1} = \log_b a + \log_b c^{-1} = \log_b a - \log_b c$.

Pokud se omezíme na $a \in R_0^+$ (reálné nezáporné), $n \in N$, $k \in Z$, potom můžeme počítání s mocninami a odmocninami sjednotit a zavést si výraz $a^{\frac{k}{n}}$ takto: $a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$.

Každé racionální číslo $q \in Q$ můžeme napsat ve tvaru $q = \frac{k}{n}$, kde $n \in N$ a $k \in Z$ (např. $-\frac{3}{2}$ zapíšu jako $k = -3 \in Z$ a $n = 2 \in N$). Celé počítání s mocninami a odmocninami se nám tím zjednoduší na počítání se zlomky a následující vztahy:

$$a^{-q} = \frac{1}{a^q} \qquad (a.b)^q = a^q.b^q$$

$$\left(a^p\right)^q = a^{p\cdot q} \qquad a^p.a^q = a^{p+q}$$

kde $a, b \in R^+$; $p, q \in Q$. Pravdivost tohoto je zřejmá z toho, co jsme si již o mocninách a odmocninách odvodili.

Musíme však neustále pamatovat, že $a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$ můžeme využívat pouze pro $a \in R_0^+$. Na opomenutí této podmínky je založena následující matematická hříčka:

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{\frac{2}{2}} = \sqrt[2]{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

Problémy

Při používání mocnin, odmocnin a logaritmů potřebujeme, aby jejich definiční vztahy zcela určily každý bod grafu každé mocninné a exponenciální funkce, a všech funkcí k nim inverzních (byť někdy na omezeném definičním oboru).

V tom je ovšem ukryt záludný problém, protože na základě našeho pojetí mocnin nejsme schopni například určit, kolik je $2^{\sqrt{2}}$, protože mocnit iracionálním číslem zatím neumíme. Připomeňme si na tomto místě důkaz, že $\sqrt{2}$ není racionální číslo:

Chceme dokázat, že $\sqrt{2} \notin Q$, tedy že $\forall a,b \in Z : \frac{a}{b} \neq \sqrt{2}$ (na základě definice racionálních čísel, coby čísel vyjádřitelných jako zlomek dvou čísel celých).
Než začneme samotný důkaz, zamyslíme se nad následujícím tvrzením: „Součin dvou lichých čísel je číslo liché, součin dvou sudých čísel je číslo sudé“. Toto je zřejmě pravdivé, kvůli rozkladu na součin prvočísel (který je jednoznačný). Uvedené tvrzení použijeme později.

Nyní se podívejme na náš důkaz, který budeme provádět **sporem**. Co to znamená? Místo abychom dokazovali, že výrok V je pravdivý, dokážeme, že negace výroku *V*, tedy výrok $\neg(V)$, je nepravdivý, což je ekvivalentní tvrzení.

V našem případě je výrok *V*: $\forall a,b \in Z : \frac{a}{b} \neq \sqrt{2}$.

Potom $\neg(V)$ zní $\exists a,b \in Z : \frac{a}{b} = \sqrt{2}$. O tomto výroku chceme dokázat, že je nepravdivý, tedy „dojít ke sporu“. Můžeme navíc požadovat, aby *a* a *b* byla čísla přirozená (víme, že $\sqrt{2}$ není záporné číslo) a také, aby *a* a *b* byla čísla nesoudělná (určitě by vyhovovaly i jiné dvojice čísel, ale mohli bychom krátit tak dlouho, až bychom dostali dvojici nesoudělnou – dvojici, která nemá žádného společného přirozeného dělitele, krom 1). Nyní už máme důkaz připraven.

$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ (umocníme obě strany na druhou, což můžeme, protože jsou nezáporné; touto problematikou se budeme zabývat v poslední kapitole).

$\frac{a^2}{b^2} = 2$, upravíme na $a^2 = 2b^2$. To však znamená, že a^2 je číslo sudé, ale aby mohlo a^2 být sudé, musí být sudé samotné *a* (jak jsme si ukázali o nemnoho řádků výše). Víme tedy, že *a* je sudé. Potom je ale možné jej napsat ve tvaru $a = 2d$, kde *d* je libovolné, v našem případě přirozené, číslo. Dosadíme-li 2*d* do upravené rovnosti, získáme $4d^2 = 2b^2$, tedy $2d^2 = b^2$. To však znamená, že i b^2 musí být sudé číslo a tedy i *b* musí být sudé.

To je však spor s předpokladem, že *a* a *b* jsou nesoudělná, protože jsou obě sudá a tedy soudělná. Tím jsme dokázali, že výrok $\neg(V)$ není pravdivý, a tedy, že výrok *V* pravdivý je.

Zjistili jsme, že $\sqrt{2}$ není racionální číslo. Jelikož umíme mocnit pouze číslem racionálním, nevíme kolik je $2^{\sqrt{2}}$. Ze stejného důvodu ovšem nemůžeme rozumět ani výrazu $\log_2 3$, protože z definičního vztahu vyplývá: $\log_2 3 = c \Leftrightarrow 2^c = 3$, ale *c* není racionální číslo.

Tento problém lze sice snadno vyřešit dodefinováním a^r, kde *r* bude reálné číslo následovně:
[10] Mějme $a \in R^+$, $r \in R$, $n \in N$, $k \in Z$, potom výraz a^r definujeme takto:
$a^r = \lim_{\frac{k}{n} \to r} \sqrt[n]{a^k}$.

P3: Zkusíme alespoň přibližně určit např. hodnotu $2^{\sqrt{2}}$. Víme, že $\sqrt{2} = 1{,}4142...$, potom $2^{\sqrt{2}} \cong 2^{1,41} = 2^{\frac{141}{100}} = \sqrt[100]{2^{141}} \cong 2{,}66$.

Museli bychom ovšem znovu odvodit všechny vztahy o mocninách pro mocnění reálným číslem. K tomu je však potřeba nemalá znalost počítání s limitami, kterou získáme až na vysoké škole. V této práci nám nezbude než věřit, že vztahy odvozené pro mocnění číslem racionálním platí i pro mocnění číslem reálným.

Dalším problémem je otázka, zda definovat (povolit) na reálných číslech lichou odmocninu ze záporného čísla. Smysl by to mělo. Například $\sqrt[3]{-8} = -2$. Platnost téměř všech vztahů o mocninách a odmocninách by byla zachována. Neplatil by nám ovšem vztah $\sqrt[m.n]{a^m} = \sqrt[n]{a}$ a přišli bychom o možnost počítat s odmocninami jako s mocněním zlomkem. Na druhou stranu liché mocninné funkce (např. $f(x) = x^3$), které jsou definované a prosté pro všechna $x \in R$, pak mají jasně nadefinovaný každý bod grafu funkce inverzní. Dalo by se tedy říci, že byť nám na střední škole nejspíš liché odmocniny ze záporných přímo nezavedli, přesto je používáme.

Snažme se o upřesnění

V této kapitole si dovolíme již trochu více abstrakce. Opustíme odvození na příkladech s čísly a budeme odvozovat vždy zcela obecně. Náš postup ale bude velice neobvyklý. Začneme vyslovením zajímavého tvrzení o logaritmech a toto tvrzení budeme chtít dokázat. Přestože z předcházejících odvození intuitivně víme, co dané tvrzení vlastně říká, nadefinujeme nebo dokážeme znovu a přesně vše, co bude k jeho pochopení a dokázání potřeba. Přestože nebudeme přesně definovat reálná, racionální, celá a přirozená čísla a operace s nimi. Odhalíme tak potřebu dokazovat i ta nejzákladnější matematická tvrzení (jako že $a \,.\, 0 = 0$).

Ale nebojte se, začneme poněkud zajímavějšími tvrzeními; tvrdíme, že:

T1 O základu logaritmu

Mějme $a, b \in R^+ - \{1\}$ (reálné kladné, kromě 1), $c \in R^+$, potom platí: $\log_a b . \log_b c = \log_a c$.

Možná jsme se s tímto vztahem setkali ve známějším tvaru: $\log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_a b}$.

Obě strany vztahu původního vydělíme $\log_a b$. Umožňuje nám převést logaritmus o libovolném základu na logaritmy, které potřebujeme, což se může hodit například při počítání s kalkulačkou, nebo pokud chceme určit libovolný logaritmus pomocí tabulek.

Abychom naše tvrzení T1 mohli vůbec dokazovat, musíme si přesně ujasnit, co pro nás logaritmus znamená. Pro zopakování a přesnost uvedeme definici logaritmu:

D1 Definice logaritmu

Mějme $a \in R^+$, $b \in R^+ - \{1\}$, $c \in R$, potom logaritmus z *a* o základu *b* (tedy $\log_b a$) je reálné číslo takové, že platí $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$.

K samotnému definování logaritmu nutně musíme mít zavedenou definici mocnění reálným číslem, touto problematikou jsme se ale zabývali v předcházejících kapitolách. V našem dokazování se budeme tedy muset omezit na čísla racionální a na definici mocnění číslem racionálním:

D2 Mocnění racionálním číslem (zlomkem)

Mějme $a \in R^+$, $n \in N$, $k \in Z$, potom výraz $a^{\frac{k}{n}}$ definujeme takto: $a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$.

Poznámka: Jakékoliv racionální číslo $q \in Q$ je možné napsat ve tvaru $q = \dfrac{k}{n}$, kde $n \in N$ a $k \in Z$ (např. $-\dfrac{3}{2}$ zapíšu jako $k = -3 \in Z$ a $n = 2 \in N$).

Tato definice však používá mocnění číslem celým a odmocninu. Tyto operace je tudíž opět třeba definovat:

D3 Celočíselná mocnina

Mějme $a \in R - \{0\}, k \in Z$. Výraz mocnění a^k (čteme a na *k*-tou) je zkráceným zápisem:

Pro $k > 0$: $a^k = a^n = \underbrace{a.a.a.\dots.a}_{n-krát}$ kde $n \in N$ (přirozené číslo)

Pro $k = 0$: $a^0 = 1$

Pro $k < 0$: $a^k = a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a.a.a.\dots.a}_{n-krát}}$.

Dodefinujeme ještě pro $n \in N$: $0^n = 0$.

D4 Definice odmocniny

Mějme $a \in R_0^+, n \in N$, pak $\sqrt[n]{a}$ je takové reálné nezáporné číslo ($\sqrt[n]{a} \in R_0^+$), pro které platí $\sqrt[n]{a} = c \Leftrightarrow c^n = a$.

Konečně máme nadefinováno vše, co se v T1 objevilo, a my tomuto tvrzení můžeme rozumět. Zamyslíme se nyní, zda mu můžeme věřit…

…Nyní k důkazu T1:

Chceme dokázat, že $\log_a b.\log_b c = \log_a c$. Označme si $L = \log_a b.\log_b c$ Podle definice logaritmu (rozepsané pro pravou stranu) musí platit: $\log_a c = L \Leftrightarrow a^L = c$.
Dokážeme-li pravou stranu ekvivalence, dokážeme i stranu levou (což je náš vzorec)
Upravíme výraz na levé straně: $a^L = a^{\log_a b.\log_b c} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b c}$ pomocí vztahu $\left(a^r\right)^s = a^{r.s}$ (obráceně). $\left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b c} = b^{\log_b c}$ přičemž použijeme vztah $a^{\log_a b} = b$.
Opětovným použitím tohoto vztahu získáme $b^{\log_b c} = c$, čímž je pravá strana ekvivalence dokázána.

Zatím jsme ale T1 pořádně nedokázali. Používali jsme k tomu totiž vzorce $\left(a^r\right)^s = a^{r.s}$ a $b^{\log_b c} = c$. Dokázali jsme pouze to, že pokud ony vzorce (tvrzení T2 a T3) platí, platí i T1. Čeká nás tudíž dokazování další:

T2 Alternativní definice logaritmu

Mějme $b \in R^+ - \{1\},\ c \in R$ potom platí: $\log_b b^c = c$

Důkaz: Toto tvrzení je zřejmé přímo z definice logaritmu. Označíme $a = b^c$: $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$.

T3 O součinu mocnitelů

Mějme $a \in R^+$; $r, s \in R$; pak $\left(a^r\right)^s = a^{r.s}$.

Toto tvrzení nám ukáže, jak je matematika i na středoškolské úrovni provázaná. O jeho dokazování by totiž téměř mohla být vytvořena celá kapitola, ale nezapomínejme, že pokud je nedokážeme, nemůžeme s jistotou tvrdit, že platí T1, a proto s chutí do toho.
Důkaz: K dokázání se budeme potřebovat seznámit se čtyřmi tvrzeními, která v důkazu použijeme. Jde o tvrzení T4, T5, T6 a T7:

T4: Mějme $a \in R - \{0\}$; $j, k \in Z$; potom $\left(a^j\right)^k = a^{j.k}$ (tvrzení je obdobné, jako T3, ale podmínky jsou jiné).
T5: Mějme $a \in R_0^+$; $m, n \in N$; potom: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$.
T6: Mějme $a \in R^+$; $m, n \in N$; $k \in Z$; potom $\sqrt[m.n]{a^{m.k}} = \sqrt[n]{a^k}$.
T7: Mějme $a \in R^+$; $n \in N$; $k \in Z$; potom $\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$.

Až tato čtyři tvrzení prozkoumáme, bude další postup snadný.
Chceme dokázat, že $\left(a^r\right)^s = a^{r.s}$. Budeme tedy vycházet z definice mocniny racionálním číslem, která nám říká, že $a^{\frac{q}{p}} = \sqrt[p]{a^q}$, kde $p \in N$ a $q \in Z$. Víme, že čísla *r* a *s* jsou racionální. Označíme si tedy $r = \frac{j}{m}$ a $s = \frac{k}{n}$, potom $m, n \in N$ a $j, k \in Z$.

$$\left(a^r\right)^s = \left(a^{\frac{j}{m}}\right)^{\frac{k}{n}} \overset{D2}{=} \sqrt[n]{\left(\sqrt[m]{a^j}\right)^k} \overset{T7}{=} \sqrt[n]{\sqrt[m]{\left(a^j\right)^k}} \overset{T4}{=} \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^{j.k}}} \overset{T5}{=} \sqrt[n.m]{a^{j.k}} = a^{\frac{j.k}{m.n}} = a^{r.s}.$$

T6 jsme sice přímo nepoužili, ale říká nám, že kdyby *j.k* a *m.n* byla čísla soudělná, mohli bychom tento zlomek krátit, a tedy že výsledek pravé strany je určen jednoznačně.

T4 O součinu celých mocnitelů

Znění bude obdobné jako T3, ale podmínky jeho platnosti budou jiné.
Mějme $a \in R - \{0\}$; $j, k \in Z$; pak $\left(a^j\right)^k = a^{j.k}$.

Důkaz: Nezbude nám, než prozkoumat všechny možnosti, které mohou pro *j* a *k* nastat.
Pro $j = 0 \vee k = 0$:
$\left(a^0\right)^k = 1^k = 1$, $\left(a^j\right)^0 = 1$, $a^{0.k} = a^0 = 1$, $a^{j.0} = a^0 = 1$. Vše se rovná 1.
Pro $j > 0 \wedge k > 0$:

$$\left(a^j\right)^k = \left(\underbrace{a.a.a.\ldots.a}_{j-krát}\right)^k = \underbrace{\underbrace{(a.a.a.\ldots.a)}_{j-krát}.\underbrace{(a.a.a.\ldots.a)}_{j-krát}.\underbrace{(a.a.a.\ldots.a)}_{j-krát}.\ldots.\underbrace{(a.a.a.\ldots.a)}_{j-krát}}_{k-krát} = \underbrace{a.a.a.\ldots a}_{j.k-krát} = a^{j.k}$$

Na tuto část důkazu bude odkazovat následující text znakem $\uparrow$.

Pro další dokazování si nejprve ověříme platnost jednoho pomocného tvrzení. Takovýmto se v matematice mnohdy říká „lemma“.

L1: Mějme $a \in R - \{0\}; k \in Z$; pak $\frac{1}{a^k} = \left(\frac{1}{a}\right)^k$.

Důkaz L1: pro $k = 0$ toto tvrzení zřejmě platí. Pro $k > 0$ snadno ověříme z definice mocniny: $\frac{1}{a^k} = \frac{1}{\underbrace{a.a.a.\ldots.a}_{k-krát}} = \underbrace{\frac{1}{a}.\frac{1}{a}.\frac{1}{a}.\ldots.\frac{1}{a}}_{k-krát} = \left(\frac{1}{a}\right)^k$ a pro $k < 0$ si pomůžeme přeznačením $k = -n$, potom $n \in N$ a důkaz provedeme opět z definice mocniny: $\frac{1}{a^k} = \frac{1}{a^{-n}} \overset{D3}{=} \frac{1}{\frac{1}{a^n}}$ my ale už víme, že $\frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$, tedy dosadíme: $\frac{1}{\frac{1}{a^n}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^n}$. Přímo definiční vztah pro mocnění záporným číslem nám říká, že $\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^n} \overset{D3}{=} \left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^k$.

Vraťme se nyní k dokazování T4:

Pro $j < 0 \wedge k > 0$: Přeznačíme $j = -m$, potom $m \in N$.

$$\left(a^j\right)^k = \left(a^{-m}\right)^k \overset{D3}{=} \left(\left(\frac{1}{a}\right)^m\right)^k \overset{\uparrow}{=} \left(\frac{1}{a}\right)^{m.k} \overset{L1}{=} \frac{1}{a^{m.k}} \overset{D3}{=} a^{-(m.k)} = a^{(-m).k} = a^{j.k}.$$

Pro $j > 0 \wedge k < 0$: Přeznačíme $k = -n$, potom $n \in N$.

$$\left(a^j\right)^k = \left(a^j\right)^{-n} \overset{D3}{=} \frac{1}{\left(a^j\right)^n} \overset{\uparrow}{=} \frac{1}{a^{j.n}} \overset{D3}{=} a^{-j.n} = a^{j.(-n)} = a^{j.k}.$$

Pro $j < 0 \wedge k < 0$: Přeznačíme $j = -m, k = -n$, potom $m, n \in N$.

$$\left(a^j\right)^k = \left(a^{-m}\right)^{-n} \overset{D3}{=} \left(\frac{1}{a^m}\right)^{-n} \overset{D3}{=} \frac{1}{\left(\frac{1}{a^m}\right)^n} \overset{L1}{=} \frac{1}{\frac{1}{\left(a^m\right)^n}} \overset{\uparrow}{=} \frac{1}{\frac{1}{a^{m.n}}} = a^{m.n}.$$

Tím bychom měli dokázané tvrzení T4, ale musíme si uvědomit, že při dokazování tohoto vztahu využíváme komutativnosti násobení a úpravy složených zlomků, tedy toho, že pro každé $a, b, c, d \in R$ platí: $a.b = b.a$ a $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a.d}{b.c}$. Mějme to na paměti, vrátíme se k této poznámce později.

Nyní přejděme k důkazu dalšího pomocného tvrzení:

T5 O skládání odmocnin

Mějme $a \in R_0^+; m, n \in N$, potom: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$.

Důkaz: Uvažujme $b \in R_0^+$. Použijeme definici odmocniny: $\sqrt[m]{b} = c \Leftrightarrow c^m = b$ tak, že dosadíme $b = \sqrt[n]{a}$ (můžeme, protože $\sqrt[n]{a} \in R_0^+$). Potom dostaneme vztah:
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = c \Leftrightarrow c^m = \sqrt[n]{a}$. Ale opět z definice odmocniny víme, že $\sqrt[n]{a} = d \Leftrightarrow d^n = a$.
Dosazením do této ekvivalence z pravé strany ekvivalence předcházející:
$c^m = d \Leftrightarrow d^n = a$, a tedy (dosazením z levé strany do pravé) $\left(c^m\right)^n = a$ a podle T4 platí $a = c^{m.n}$. Na závěr znovu použijeme definiční vztah pro odmocninu, podle kterého musí platit (obráceně napsaná ekvivalence): $a = c^{m.n} \Leftrightarrow c = \sqrt[m.n]{a}$, a tedy $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = c = \sqrt[m.n]{a}$ (pravá strana poslední ekvivalence s levou stranou ekvivalence první).

T6 O krácení mocnin a odmocnin

Mějme $a \in R^+; m,n \in N; k \in Z$; potom $\sqrt[m.n]{a^{m.k}} = \sqrt[n]{a^k}$.

Důkaz: Použijeme naposledy dokázané tvrzení T5: $\sqrt[m.n]{a^{m.k}} \overset{T5}{=} \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^{m.k}}}$. Dále využijeme vztahu T4 a zapíšeme $a^{m.k} = \left(a^k\right)^m$. Po dosazení dostáváme $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^{m.p}}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{\left(a^p\right)^m}}$.

Využijeme, že platí níže uvedené lemma 3: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{\left(a^k\right)^m}} = \sqrt[n]{a^k}$.

L3: Mějme $a \in R_0^+; n \in N$, potom $\sqrt[n]{a^n} = a = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n$.
Důkaz L3: Toto lemma snadno dokážeme přímo z definice odmocniny:
$\sqrt[n]{b} = a \Leftrightarrow a^n = b$.

První rovnost získáme dosazením z pravé strany ekvivalence za *b* do strany levé.

Druhou rovnost získáme obráceně dosazením z levé strany ekvivalence za *a* do strany pravé.

Zdálo by se, že už jsme téměř u cíle, že stačí dokázat už jenom zdánlivě triviální tvrzení T7. K jeho dokázání však budeme nuceni odvodit mnoho dalšího a vynaložit nemalé úsilí.

T7 O krácení mocnin a odmocnin

Mějme $a \in R^+; n \in N; k \in Z$; potom $\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$.

Důkaz: Pro $k = 0$: $\sqrt[n]{a^0} = 1 = \left(\sqrt[n]{a}\right)^0$.

Pro $k > 0$: $\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{\underbrace{a.a.a.\ldots.a}_{k-krát}} \overset{T8}{=} \underbrace{\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{a}.\ldots.\sqrt[n]{a}}_{k-krát} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$.

V dalším kroku důkazu použijeme následující lemma 4 a tvrzení T8:

L4: Mějme $a \in R^+; n \in N$; potom $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$ (dokážeme později).

T8: Mějme $a, b \in R_0^+; n \in N$; potom $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$ (dokážeme později).

Pro $k < 0$: Přeznačíme $k = -m$, potom $m \in N$. Dále uvažujeme:

$$\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a^{-m}} \overset{D3}{=} \sqrt[n]{\frac{1}{\underbrace{a.a.a.\ldots.a}_{m-krát}}} \overset{T8}{=} \underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}.\sqrt[n]{\frac{1}{a}}.\sqrt[n]{\frac{1}{a}}.\ldots.\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}_{m-krát} \overset{L4}{=} \underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{a}}.\frac{1}{\sqrt[n]{a}}.\frac{1}{\sqrt[n]{a}}.\ldots.\frac{1}{\sqrt[n]{a}}}_{m-krát} \overset{D3}{=} \frac{1}{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m} =$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt[n]{a}\right)^{-k}} \overset{D3}{=} \frac{1}{\frac{1}{\left(\sqrt[n]{a}\right)^k}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k .$$

Jak se ukazuje, tvrzení 7, i když se tak na první pohled netváří, není vůbec triviální. K jeho dokázání potřebujeme dokázat lemma 4 a tvrzení 8, k čemuž budeme potřebovat další poznatky.

L4: Mějme $a \in R^+; n \in N$; potom $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$.

Důkaz L4: užijeme definiční vztah odmocniny, který nám říká, že $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = c \Leftrightarrow c^n = \frac{1}{a}$. Definiční vztah odmocniny nám též říká, že $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$.

Spojením pravých stran ekvivalencí získáme vztah $c^n = \frac{1}{b^n}$.

K dalšímu dokazování budeme potřebovat zatím nedokázané tvrzení T10 o ekvivalentních úpravách:

T10(1) Mějme $a, b, c \in R; c \neq 0$; potom: $c.a = c.b \Leftrightarrow a = b$

T10(4) Mějme $a, b \in R_0^+; n \in N$; potom: $a^n = b^n \Leftrightarrow a = b$; $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a = b$

Použijeme ekvivalentní úpravu rovnice T10(1) a obě strany vynásobíme reálným kladným číslem b^n . Dostaneme tak rovnici $c^n.b^n = 1$, která je ekvivalentní s rovnicí původní. Dále užijeme T9 na levou stranu a vlastnosti čísla 1, coby neutrálního prvku k operaci násobení (tedy to, že víme, že $a.1 = a$, a tedy, že $1.1 = 1$ a nebo že $1^n = 1$) na straně pravé: $(c.b)^n = 1^n$. Nyní provedeme další ekvivalentní úpravu podle T10(4): $(c.b)^n = 1^n \Leftrightarrow c.b = 1$. Poslední ekvivalentní úpravou – vynásobením obou stran číslem $\frac{1}{b}$ – získám rovnost $c = \frac{1}{b}$. Nyní si stačí uvědomit, co jsme si vlastně označili písmeny *c* a *b*; z levých stran definičních vztahů (začátek důkazu) dostáváme:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = c = \frac{1}{b} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} .$$

T8 Odmocnění součinu

Mějme $a,b \in R_0^+; n \in N$; potom $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$.

Důkaz: Podle L3: $\left(\sqrt[n]{a.b}\right)^n \overset{L3}{=} a.b \overset{L3}{=} \left(\sqrt[n]{a}\right)^n.\left(\sqrt[n]{b}\right)^n$. Využijeme vztahu ($a^k.b^k = (a.b)^k$ – T9): $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n.\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}\right)^n$. Dostáváme rovnost $\left(\sqrt[n]{a.b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}\right)^n$, která je ekvivalentní podle vztahu $a^n = b^n \Leftrightarrow a = b$ s rovností $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$. Vztah $a^n = b^n \Leftrightarrow a = b$ bude označen jako T10 a dokázán.

T9 mocnině součinu

Mějme $a,b \in R, k \in Z$, pak $a^k.b^k = (a.b)^k$.

Důkaz: Pro $k = 0$: zřejmě 1.1 = 1

Pro $k > 0$: $a^k.b^k = \underbrace{a.a.a.\dots.a}_{k-krát}.\underbrace{b.b.b.\dots.b}_{k-krát} = \underbrace{(a.b).(a.b).(a.b).\dots.(a.b)}_{k-krát} = (a.b)^k$

Tento dokázaný vztah budeme potřebovat k následujícímu důkazu v kroku označeném $\uparrow$.

Pro $k < 0$; $k = -n$: $a^k.b^k = a^{-n}.b^{-n} \overset{D3}{=} \dfrac{1}{a^n.b^n} \overset{\uparrow}{=} \dfrac{1}{(a.b)^n} \overset{D3}{=} (a.b)^{-n} = (a.b)^k$.

T10 Některé ekvivalentní úpravy rovnice

Ekvivalentními úpravami rovnic se budeme podrobněji zabývat v dalších kapitolách. Jak ale vidíme, k dokazování našeho vztahu T1 (přesněji T8) je potřebujeme už nyní. Dokážeme si tedy některé z nich:

(1) Mějme $a,b,c \in R; c \neq 0$; potom: $c.a = c.b \Leftrightarrow a = b$

(2) Mějme $a,b \in R^+; c \in R^+ - \{1\}$; potom: $\log_c a = \log_c b \Leftrightarrow a = b$.

(3) Mějme $a,b \in R_0^+; c \in R_0^+ - \{1\}$; potom: $c^a = c^b \Leftrightarrow a = b$

(4) Mějme $a,b \in R_0^+; n \in N$; potom: $a^n = b^n \Leftrightarrow a = b$; $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a = b$

(1)(2)(3)(4) ekvivalenci dvou výroků dokážeme tak, že postupně dokážeme oba směry implikace. Pravdivost implikace $\Leftarrow$ je zřejmá (stačí *b* dosadit za *a* a potom *a* za *b*). Budeme tedy dokazovat pouze $\Rightarrow$.

K dokazování budeme užívat tvrzení, že jestliže $a,b,c \in R$; potom: $a + c = b + c \Leftrightarrow a = b$. Toto tvrzení v této práci považujeme za základní, jeho platnost předpokládáme, ale nedokazujeme (jelikož předpokládáme $c \in R$, můžeme toto tvrzení použít i pro znaménko „–“). V závěru této kapitoly se však k němu vrátíme.

(1) Chceme dokázat, že $c.a = c.b \Rightarrow a = b$. Podle našeho předpokládaného tvrzení platí $c.a = c.b \Leftrightarrow c.a - c.b = c.b - c.b \Leftrightarrow c.a - c.b = 0 \Leftrightarrow c(a - b) = 0$

$c(a-b)=0 \Rightarrow c=0 \vee (a-b)=0$. My však předpokládáme, že $c \neq 0$. Dostáváme tak ekvivalentní vztah $c.a=c.b \Rightarrow (a-b)=0 \Leftrightarrow a-b+b=b \Leftrightarrow a=b$.

(2) Chceme dokázat, že $\log_c a=\log_c b \Rightarrow a=b$. Využijeme předpokládaného tvrzení: $\log_c a=\log_c b \Leftrightarrow \log_c a-\log_c b=0$. Nyní využijeme vztah

$\log_c \frac{a}{b}=\log_c a-\log_c b$ (který si dokážeme později – viz T11):

$$\log_c a-\log_c b=0 \overset{T11}{\Leftrightarrow} \log_c \frac{a}{b}=0 \overset{D1}{\Leftrightarrow} c^0=\frac{a}{b}=1 \Leftrightarrow a=b.$$

(3) Chceme dokázat, že $c^a=c^b \Rightarrow a=b$. Užijeme právě dokázaný vztah (2): $c^a=c^b \Leftrightarrow \log_c c^a=\log_c c^b$. Dále použijeme dosud nedokázané tvrzení 12

($\log_b a^c=c.\log_b a$): $\log_c c^a=\log_c c^b \overset{T12}{\Leftrightarrow} a.\log_c c=b.\log_c c$. My ale víme z definice logaritmu (D1), že platí: $\log_c c=1$, a tedy $a.\log_c c=b.\log_c c \Leftrightarrow a=b$.

(4) Chceme dokázat, že $a^n=b^n \Rightarrow a=b$. Užijeme právě dokázané vztahy (1) a (2), tvrzení 12:

$$a^n=b^n \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \log_c a^n=\log_c b^n \overset{T12}{\Leftrightarrow} n.\log_c a=n.\log_c b \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \log_c a=\log_c b \Leftrightarrow a=b$$

Při použití (1) násobíme obě strany $\frac{1}{n}$. Tím jsme tvrzení dokázali pro $a,b \neq 0$, ale pro $a,b=0$ platí zřejmě též ($0^n=0^n \Leftrightarrow 0=0$ přímo z definice 3).

Vztah $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a=b$ zřejmě platí z právě dokázaného vztahu, protože víme, že $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n \overset{L3}{=} a$.

T11 O součtu logaritmů

Mějme $a,b \in R^+$, $c \in R^+-\{1\}$, potom platí: $\log_c a.b=\log_c a+\log_c b$.

Důkaz: Označme si $p=\log_c a+\log_c b$. Podle definice logaritmu: $\log_c a.b=p \Leftrightarrow c^p=a.b$. Dokážeme-li pravou rovnost, dokážeme naše tvrzení. $c^p=c^{\log_c a+\log_c b}=a.c$. Budeme upravovat levou stranu rovnosti a chceme získat stranu pravou: $c^{\log_c a+\log_c b} \overset{T11}{=} c^{\log_c a}.c^{\log_c b} \overset{T2}{=} a.b$.

T12 O logaritmu mocniny

Mějme $a \in R^+$, $b \in R$, $c \in R^+-\{1\}$; potom platí: $\log_c a^b=b.\log_c a$.

Důkaz: Označme si $p=b.\log_c a$. Chceme tedy dokázat vztah $\log_c a^b=p$. Podle definice logaritmu $\log_c a^b=p \Leftrightarrow c^p=a^b$. Dokážeme-li pravou stranu ekvivalence, dokážeme i stranu levou. Budeme dokazovat rovnost $c^p = a^b$, a tedy $c^{b.\log_c a} = a^b$

Chceme úpravami levé strany získat stranu pravou: $c^{b.\log_c a} \overset{T4}{=} \left(c^{\log_c a}\right)^b \overset{T2}{=} a^b$.

Sláva! Tímto jsme skutečně uzavřeli naše dokazování tvrzení 1 a všeho, co bylo k jeho důkazu potřeba. Nebo snad ne? Co přesně jsme dokázali? Odpovědi nám prozradí další odstavec.

Závěr důkazu T1

Pojďme se nyní zamyslet, co jsme to vlastně dokázali. Dokázali jsme, že platí tvrzení 1, že $\log_a b.\log_b c = \log_a c$, kde $a,b \in R^+ - \{1\}$ a $c \in R^+$, avšak za předpokladu, že platí vše, co jsme k jeho důkazu potřebovali (a samozřejmě vše co jsme potřebovali k dokázání všech pomocných tvrzení). Pojďme se nyní zamyslet, co všechno jsme vlastně nedokazovali, ale předpokládali.

Tak předně jsme vůbec neřešili, co to vlastně přesně jsou přirozená, celá, racionální a reálná čísla. Používali jsme množiny a intervaly bez jakéhokoliv zavedení. Krom toho jsme používali operace sčítání a násobení a základní vztahy, které pro tyto operace platí (komutativnost – mohu zaměnit pořadí sčítanců (činitelů); asociativita – mohu mezi sčítance (činitele) libovolně přidávat nebo odbírat závorky; existence neutrálních prvků, tedy že $a + 0 = a$ a $1.a = a$; existence prvků opačných $a + (-a) = 0$, $a.\frac{1}{a} = 1$ a distributivní zákon – možnost roznásobení závorky), a vztahy, které z nich plynou (například, že $a.b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$, jak upravit složený zlomek $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b}.\frac{d}{c} = \frac{a.d}{b.c}$, tvrzení, že $a.0 = 0$, anebo tvrzení, že $a + c = b + c \Leftrightarrow a = b$).

Kdybychom pracovali velice pečlivě a odvodili i výše uvažované poznatky, pak bychom naše tvrzení T1 skutečně dokázali (tedy alespoň pro racionální čísla). Z tohoto důvodu často začíná studium matematiky na vysoké škole právě zaváděním a dokazováním takovýchto základních operací a pojmů. Mohlo nám to připadat nezáživné a zbytečné, ale jak sami vidíme, bez toho nedokážeme ani látku středoškolskou.

Opusťme ale už ono tvrzení 1. V následujících příkladech si můžete procvičit svou dovednost dokazování sami. Úkolem bude dokázat určité matematické tvrzení, přičemž předpokládáme, že umíme (můžeme k dokazování použít) pracovat s reálnými čísly a všemi základními operacemi na nich definovanými (jako jsou sčítání, odčítání, násobení a dělení, úpravy zlomků…). Dále, že máme definované mocnění reálným číslem a logaritmus, a známe následující vztahy o mocnění reálným číslem a o logaritmech:

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r} \quad (1) \qquad (a.b)^r = a^r.b^r \quad (2)$$

$$\left(a^r\right)^s = a^{r.s} \quad (3) \qquad a^r.a^s = a^{r+s} \quad (4)$$

$$\log_c c^r = r \quad (5) \qquad c^{\log_c a} = a \quad (6)$$

$$\log_c a^b = b.\log_c a \quad (7)$$

$$\log_d c.\log_c a = \log_d a \quad (8)$$

$$\log_c a.b = \log_c a + \log_c b \quad (9)$$

Přičemž uvažujeme: $r, s \in R$; $a, b \in R^+$; $c, d \in R^+ - \{1\}$.

Příklady s logaritmy

P4: Dokažte, že pro každé $a, b, c \in R^+ - \{1\}$ platí: $a^{\log_c b} = a^{\log_c b}$.
P5: Dokažte, že pro každé $a, b \in R^+$, $c, d \in R^+ - \{1\}$ platí:

$$\log_c a.\log_d b = \log_c b.\log_d a.$$

P6: Dokažte, že pro každé $a \in R^+$, $b \in R - \{0\}$, $c \in R^+ - \{1\}$ platí: $\log_{c^b} a^b = \log_c a$.
P7 [9]: Zjednodušte výraz $a^{\frac{\log \log a}{\log a}}$, $a \in R^+ - \{1\}$.
P8: Vyřešte rovnici: $\log_3 x = \log_{81} 4$ pro $x \in R^+$.
P9: Vyřešte rovnici: $\log_2 5.\log_3 2 = \log_x 7$, $x \in R^+ - \{1\}$.

P4 Mocnění logaritmem: Máme dokázat, že pro každé $a, b, c \in R^+ - \{1\}$ platí: $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$.
Podle (6) víme, že platí $b = a^{\log_a b}$. Dosadíme za b do levé strany dokazovaného vztahu: $a^{\log_c b} \overset{(6)}{=} a^{\log_c \left(a^{\log_a b}\right)}$. Odstraníme zbytečnou závorku a užijeme vztah (7): $a^{\log_c \left(a^{\log_a b}\right)} \overset{(7)}{=} a^{\log_c a.\log_a b}$. Exponent výsledného výrazu je součin dvou reálných čísel. K další úpravě použijeme vztah (3): $a^{\log_c a.\log_a b} \overset{(3)}{=} \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_c a} \overset{(6)}{=} b^{\log_c a}$.

Mohli jsme postupovat například i takto:
Vyjádřili bychom si a pomocí vztahu 6: $a = b^{\log_b a}$ a dosadili bychom: $a^{\log_c b} \overset{(6)}{=} \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_c b} \overset{(3)}{=} b^{\log_c b.\log_b a}$, načež bychom použili vztah (8), podle kterého $\log_c b.\log_b a = \log_c a$, a tedy $b^{\log_c b.\log_b a} \overset{(8)}{=} b^{\log_c a}$.

P5 Záměna základů ze součinu: Chceme dokázat, že pro $a, b \in R^+$, $c, d \in R^+ - \{1\}$ platí: $\log_c a.\log_d b = \log_c b.\log_d a$.

Podle tvrzení 6 si můžeme vyjádřit: $a \overset{(6)}{=} d^{\log_d a}$ a dosadíme do levé strany rovnosti (přidané závorky nejsou nutné a byly přidány pouze pro přehlednost):
$\log_c a.\log_d b \overset{(6)}{=} \log_c\left(d^{\log_d a}\right).\log_d b$. Dále využijeme vztahu (7) a (8):

$$\log_c\left(d^{\log_d a}\right).\log_d b \overset{(7)}{=} \left(\log_d a.\log_c d\right).\log_d b = \log_d a.\left(\log_c d.\log_d b\right) \overset{(8)}{=} \log_d a.\log_c b\,.$$

P6 Krácení ze základu logaritmu: Dokazujeme, že pro $a \in R^+$, $b \in R - \{0\}$, $c \in R^+ - \{1\}$ platí: $\log_{c^b} a^b = \log_c a$.

Označíme-li si pravou stranu: $P = \log_c a$, pak podle definice logaritmu musí platit: $\log_{c^b} a^b = P \Leftrightarrow \left(c^b\right)^P = a^b$. Dokážeme, že platí rovnost z pravé strany ekvivalence:

$$\left(c^b\right)^P = \left(c^b\right)^{\log_c a} \overset{(3)}{=} c^{b.\log_c a} \overset{(7)}{=} c^{\log_c a^b} \overset{(6)}{=} a^b\,.$$

P7 [9]: Zjednodušte výraz $a^{\frac{\log\log a}{\log a}}$.

Označíme $V = a^{\frac{\log\log a}{\log a}}$. Když obě strany rovnosti zlogaritmujeme při základu 10, dostaneme $\log V = \log a^{\frac{\log\log a}{\log a}}$. Upravíme pravou stranu podle vztahu (7): $\log a^{\frac{\log\log a}{\log a}} = \dfrac{\log\log a}{\log a}\log a$ a zkrátíme $\dfrac{\log\log a}{\log a}\log a = \log\log a$. Dostáváme tak rovnost $\log V = \log\log a$, ze které je zřejmé, že $V = \log a$ (odlogaritmování).

Jiný způsob řešení: ze vztahu (8) $\log_d c.\log_c a = \log_d a$ plyne i rovnost $\log_c a = \dfrac{\log_d a}{\log_d c}$, kde speciálně pokud zvolíme $a = d$, dostaneme vztah $\log_c a = \dfrac{1}{\log_a c}$. Použijeme tento vztah v našem příkladě: $a^{\frac{\log\log a}{\log a}} = a^{\log_a 10.\log_{10}\log_{10} a}$.

K další úpravě použijeme (8): $a^{\log_a 10.\log_{10}\log_{10} a} = a^{\log_a \log_{10} a}$, což je podle alternativní definice logaritmu (6): $a^{\log_a \log_{10} a} = \log_{10} a = \log a$.

P8: Vyřešte rovnici: $\log_3 x = \log_{81} 4$ pro $x \in R^+$.

Využijeme vztahu, který jsme si dokázali v příkladě 6, pomocí kterého upravíme pravou stranu rovnice: $\log_{81} 4 = \log_{3^4}\left(\sqrt{2}\right)^4 = \log_3\sqrt{2}$. Dostáváme tedy $\log_3 x = \log_3\sqrt{2}$, z čehož po odlogaritmování máme $x = \sqrt{2}$.

P9: Vyřešte rovnici: $\log_2 5.\log_3 2 = \log_x 7$, $x \in R^+ - \{1\}$.

Začneme úpravou levé strany podle vztahu odvozeného v příkladě 5: $\log_2 5.\log_3 2 = \log_2 2.\log_3 5 = 1.\log_3 5$. Dostáváme tak $\log_3 5 = \log_x 7$. Ať už si pravou stranu upravíme $\log_x 7 = \dfrac{1}{\log_7 x}$, nebo ne, dalším krokem bude vynásobení obou stran rovnice výrazem $\log_7 x$: $\log_3 5.\log_7 x = \log_x 7.\log_7 x$, a upravíme pomocí (8): $\log_3 5.\log_7 x = 1$. Abychom osamostatnili logaritmus s proměnnou, vynásobíme obě strany $\log_5 3$ a použijeme opět (8). Dostaneme tak již celkem slušnou rovnici $\log_7 x = \log_5 3$. Z definice potom $x = 7^{\log_5 3}$.

Rovnice a funkce

Už v T10 z minulé kapitoly jsme si odvodili některé ekvivalentní úpravy rovnic (tvrzení (0) jsme nedokazovali, ale jeho platnost jsme předpokládali):

(0) Mějme $a,b,c\in R$; potom: $a+c=b+c \Leftrightarrow a=b$.
(1) Mějme $a,b,c\in R; c\neq 0$; potom: $c.a=c.b \Leftrightarrow a=b$.
(2) Mějme $a,b\in R^+; c\in R^+-\{1\}$; potom: $\log_c a=\log_c b \Leftrightarrow a=b$.
(3) Mějme $a,b\in R_0^+; c\in R_0^+-\{1\}$; potom: $c^a=c^b \Leftrightarrow a=b$.
(4) Mějme $a,b\in R_0^+; n\in N$; potom: $a^n=b^n \Leftrightarrow a=b$; $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a=b$.

Tyto ekvivalentní úpravy jsme si zatím odvodili pouze pro určitá čísla, která splňují jisté podmínky. Je však očividné, že pokud vytvoříme výraz $f(x)$ takový, aby obor hodnot tohoto výrazu také splňoval naše podmínky, pak by naše ekvivalentní úpravy platily i pro výraz $f(x)$, protože tento výraz pro každé $x\in D_f$ splňuje požadované podmínky (pokud chceme, můžeme na tento výraz nahlížet jako na předpis reálné funkce jedné reálné proměnné, kde definujeme $y=f(x)$, jak jsme na to ze střední školy zvyklí). Naše ekvivalentní úpravy by se pak daly napsat následovně:
(0´) Mějme $a(x),b(x),c(x)\in R$; potom: $a(x)+c(x)=b(x)+c(x) \Leftrightarrow a(x)=b(x)$.
(1´) Mějme $a(x),b(x),c(x)\in R; c(x)\neq 0$; potom:

$$c(x).a(x)=c(x).b(x) \Leftrightarrow a(x)=b(x).$$

(2´) Mějme $a(x),b(x)\in R^+; c\in R^+-\{1\}$; potom:

$$\log_c a(x)=\log_c b(x) \Leftrightarrow a(x)=b(x).$$

(3´) Mějme $a(x),b(x)\in R_0^+; c\in R_0^+-\{1\}$; potom: $c^{a(x)}=c^{b(x)} \Leftrightarrow a(x)=b(x)$.
(4´) Mějme $a(x),b(x)\in R_0^+; n\in N$; potom:

$$(a(x))^n=(b(x))^n \Leftrightarrow a(x)=b(x);$$
$$\sqrt[n]{a(x)}=\sqrt[n]{b(x)} \Leftrightarrow a(x)=b(x).$$

Je načase poznamenat, že v této kapitole se budeme zabývat pouze rovnicemi o jedné reálné neznámé a reálnými funkcemi jedné reálné proměnné.

Dobrá, to bychom měli středoškolské ekvivalentní úpravy, ale my jsme přeci používali i tzv. úpravy důsledkové, tedy úpravy, s jejichž pomocí (jak nám bylo suše sděleno) neztratíme žádné řešení, avšak musíme provést zkoušku, protože některá takto získaná řešení nevyhovují původní rovnici (např. (4´), když jsme nevěděli, jestli $a(x)$ a $b(x)$ jsou nezáporná).

V této kapitole se budeme snažit odpovědět na tři důležité otázky, které možná napadají i vás:
O1: Existují ještě nějaké jiné ekvivalentní úpravy rovnic?
O2: Je skutečně nutné tvrzení (0) předpokládat, nešlo by nějak odvodit?
O3: Jak víme, že pomocí ekvivalentních a důsledkových úprav neztratíme žádné řešení původní rovnice?

Prozradím rovnou, že odpovědí na všechny tyto otázky je následující věta:

O všech ekvivalentních úpravách [7][8]: Mějme zadanou rovnici $L(x) = P(x)$ pro $x \in D_L \cap D_P$. Najděme funkci $f: \ y = f_x(t)$ pro $t \in H_{L(x)} \cup H_{P(x)}$, prostou na celém svém definičním oboru (pro všechna $x \in D_L \cap D_P$). Potom platí:

$$L(x) = P(x) \Leftrightarrow f_x(L(x)) = f_x(P(x)).$$

Vysvětlivky:
$x \in D_L \cap D_P$ - průnik definičních oborů výrazu $L(x)$ a $P(x)$.
$f: \ y = f_x(t)$ - jde o funkci v proměnné *t*, která může obsahovat parametr *x* nezávislý na *t*.
$t \in H_{L(x)} \cup H_{P(x)}$ - obory hodnot výrazů (mohli bychom matematicky zapsat, že $D_{f(t)} = H_{L(x)} \cup H_{P(x)}$).

Výraz $L(x)$ označuje levou stranu rovnice a *x* v závorce říká, že *x* je proměnnou daného výrazu, nikoli funkce $f = f_x(t)$. Tato funkce má skutečně proměnnou *t*, ale může obsahovat i *x*. Z hlediska funkce *f* však na *x* nahlížíme jako na parametr (můžeme si na jeho místě představit číslo a tak se také chová). Pokud se parametr *x* ve funkci nepoužije, značíme zkráceně *f*(*t*).

Musíme si uvědomit jednu důležitou skutečnost. Přestože v předpisu funkce *f* uvažujeme *x* za parametr, tak definiční obor funkce *f* je na tomto parametru *x* závislý (přesněji řečeno, je závislý na definičním oboru $L(x)$ a $P(x)$). Platí tedy, že $D_{f(t)} = D_{f(t)}(x)$. Pokud tedy hledáme funkci *f* prostou na celém $D_{f(t)}$, musíme ověřit, že je tato funkce prostá pro každé $x \in D_L \cap D_P$.

O této skutečně mocné větě budeme hovořit celou tuto kapitolu a budeme ji dokazovat. Aby bylo jasné, k čemu budeme směřovat, podíváme se nejprve na nástin důkazu [7]:

Aby $L(x) = P(x) \Leftrightarrow f(L(x)) = f(P(x))$, musí být funkce *f* definovaná pro celou levou a pravou stranu. Takováto *f* potom musí splňovat následující podmínky:

Z čísel, která se rovnají, musí „vyrobit“ čísla, která se opět rovnají.

Tuto vlastnost má každá funkce. My však potřebujeme zaručit i následující podmínku, která nám zajistí, že úprava bude ekvivalentní:

Z čísel, která se nerovnají, musí vyrobit čísla, která se opět nerovnají.

To je podmínka pro prostou funkci.

P7: Řešte pomocí výše uvedené věty rovnici $3x - 3 = 2x + 5$, $x \in R$.

Naše $L(x) = 3x - 3$, $P(x) = 2x + 5$. Chtěli bychom od obou stran odečíst 2*x* a k oběma stranám přičíst +3. Otázka zní, zda najdeme nějakou funkci *f*, která by nám to podle výše uvedené věty umožnila. Ano, tato funkce má následující předpis: $f_x(t) = t - 2x + 3$; *x* považujeme uvnitř funkce *f* pouze jako parametr. Až po zobrazení se z něj stane proměnná.

$$f(L(x)) = L(x) - 2x + 3 = 3x - 2x - 3 + 3 = x$$

$$f(P(x)) = P(x) - 2x + 3 = 2x - 2x + 5 + 3 = 8$$

Ještě se musíme zamyslet, jestli je *f* prostá na celém $D_{f(t)}(x)$. My ale víme, že každá funkce ve tvaru $f(t) = t + q$, kde *q* je libovolná reálná konstanta, je lineární funkcí se směrnicí 1, přičemž konstanta *q* pouze „posouvá“ graf funkce po ose *y*, nebo chceme-li po ose $f(t)$. Naše funkce f je tedy pro každé *x* na celém $D_{f(t)}(x)$ prostá.

P8: Řešte pomocí výše uvedené věty rovnici $2^x = 8$, $x \in R$.

Hledanou funkcí je $f(t) = \log_2 t$. Tato funkce je prostá na celém svém definičním oboru $D_f = (0;\infty)$. My však potřebujeme, aby $D_f = H_{L(x)} \cup H_{P(x)}$, jinak řečeno, aby určitě $t \in H_{L(x)} \cup H_{P(x)}$. To je podmínka věty o ekvivalentních úpravách. Ale oborem hodnot $L(x) = 2^x$ je $(0;\infty)$. Oborem hodnot $P(x) = 8$ je $\{8\}$.
$D_f = H_{L(x)} \cup H_{P(x)} = (0;\infty) \cup \{8\} = (0;\infty)$. Požadovaná podmínka věty je tedy splněna. Zlogaritmování obou stran je tedy ekvivalentní úpravou.

$$L(x) = P(x) \Leftrightarrow f(L(x)) = f(P(x))$$
$$f(L(x)) = f(P(x))$$
$$\log_2(L(x)) = \log_2(P(x))$$
$$\log_2 2^x = \log_2 8$$
$$x = 3$$

Ekvivalentní úpravě vynásobení obou stran nenulovým číslem *a* odpovídá funkce $f(t) = at$, která je zjevně pro $a \neq 0$ prostá na $D_f = R$.

Možnost zaměnit strany rovnice plyne ze základní vlastnosti rovnosti, kterou nazýváme symetrie, ale i pomocí naší věty toho můžeme docílit tak, že provedeme postupně následující tři ekvivalentní úpravy: odečtení celé levé strany od obou stran rovnice, odečtení celé pravé strany od obou stran rovnice, vynásobení obou stran číslem -1.

Se zněním věty o ekvivalentních úpravách jsme se již seznámili a víme, jak funguje. Nyní je na čase zjistit proč. Abychom mohli tuto větu dokázat, bude nejprve potřeba nadefinovat si několik potřebných pojmů.

D5 Rovnost

Mějme uspořádanou dvojici reálných čísel *a, b*. Uvažujme vztah *V* mezi prvním a druhým číslem (záleží na pořadí) takový, že lze vždy jednoznačně prohlásit, zda daná čísla v daném pořadí ve vztahu *V* jsou anebo nejsou. Pokud *a, b* jsou ve vztahu *V*, zapíšeme to následujícím způsobem: $a\,V\,b$.

Vztah *V* nazýváme „rovnost“ právě tehdy, když má následující vlastnosti:

$$a\,V\,a \qquad (1a)$$
$$b\,V\,b \qquad (1b)$$
$$a\,V\,b \Leftrightarrow b\,V\,a \qquad (2)$$

$(a \, V \, b \wedge b \, V \, c) \Rightarrow a \, V \, c$ (3)

Tento vztah má svůj vlastní symbol „=“. Místo $a \, V \, b$ tedy píšeme $a = b$ (čteme *a* „se rovná“ *b*). Když přepíšeme výše uvedené vztahy a vezmeme v potaz, že jsme rovnost definovali pomocí dvojice libovolných reálných čísel, dostaneme jednu ze základních vlastností reálných čísel [5]:

(1) Pro každé $a \in R$: $a = a$ (reflexivnost).
(2) Pro každé $a, b \in R$: $a = b \Rightarrow b = a$ (symetrie).
(3) Pro každé $a, b, c \in R$: $(a = b \wedge b = c) \Rightarrow a = c$ (tranzitivnost).

Jenom na okraj poznamenejme, že vztah, který má tyto tři vlastnosti (reflexivnost, symetrii a tranzitivnost), je ekvivalencí. Tedy i rovnost je ekvivalencí. Obráceně toto tvrzení neplatí. Ne každá ekvivalence je rovnost. Když tedy napíšeme, že $a = b$, pak tím navíc tvrdíme, že *a* je ekvivalentní k *b* na množině reálných čísel.

Ze vztahů (1), (2) a (3) lze přímo odvodit i vztahy, které místo implikace obsahují ekvivalenci.

(2´) Pro každé $a, b \in R$: $a = b \Leftrightarrow b = a$.

Ze vztahu (2), který platí pro každá *a* a *b*, totiž zároveň plyne: $b = a \Rightarrow a = b$.
$((a = b \Rightarrow b = a) \wedge (b = a \Rightarrow a = b)) \Rightarrow (a = b \Leftrightarrow b = a)$.

(3´) Pro každé $a, b, c \in R$: $(a = b \wedge b = c) \Leftrightarrow a = c$.

Chceme dokázat $a = c \Rightarrow (a = b \wedge b = c)$. Pro spor předpokládejme, že tato implikace neplatí (využíváme logický vztah $\neg(V_1 \Rightarrow V_2) \Leftrightarrow V_1 \wedge \neg V_2$), tedy že existují *a*, *b* nebo *c* taková, že $a = c \wedge \neg(a = b \wedge b = c)$, ale my víme, že $(a = b \wedge b = c) \Rightarrow a = c$. Dostáváme tak $a = c \wedge \neg(a = c)$, tedy $a = c \wedge a \neq c$, což by znamenalo, že $c \neq c$. Což je výrok, který je pro každé $c \in R$ nepravdivý kvůli vztahu (1). Tím jsme dospěli ke sporu, s předpokladem, že $a = c \Rightarrow (a = b \wedge b = c)$ neplatí a tudíž tento vztah musí platit. Platnost dokazovaného vztahu pak plyne opět z definice ekvivalence obdobně jako u (2´).

D6 Funkce jedné reálné proměnné

Reálnou funkcí *f* jedné reálné proměnné *x* myslíme cokoliv, co každému $x \in D_f$, kde $D_f \subset R$, přiřadí právě jedno $y \in H_f$, *kde* $H_f \subset R$.

Tuto vlastnost přiřazení můžeme zapsat následovně: Pro každá dvě $x_1, x_2 \in D_f$: $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$, nebo chceme-li (pomocí logického vztahu $(V_1 \Rightarrow V_2) \Leftrightarrow (\neg V_2 \Rightarrow \neg V_1)$): $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$.

Množinu D_f nazýváme „definiční obor funkce *f*“ (zkráceně „definiční obor“).

Množinu H_f nazýváme „obor hodnot funkce *f*“ (zkráceně „obor hodnot“).

Obvykle máme funkci zadanou funkčním předpisem $y = f(x)$, $x \in D_f$.

Množinu bodů z $R \times R$ (dvojrozměrný Euklidovský prostor), nebo chceme-li množinu uspořádaných dvojic, následující: $\{[x; y]; x \in D_f, y \in H_f; y = f(x)\}$ nazýváme grafem funkce *f*.

Pokud je jasné, jakou funkci reálné proměnné (zkráceně „funkce“) máme na mysli, používáme zkrácená označení.

Funkce je obvykle v matematice zadána (jednoznačně určena) funkčním předpisem a definičním oborem. Nutně obojím! Některé středoškolské úlohy po nás chtějí, abychom určili definiční obor zadané funkce, čímž je od nás nešikovně požadováno, abychom určili maximální možný definiční obor, který může být s předpisem spojován. Zadaná funkce ovšem vůbec zadaná není, protože jí chybí právě onen definiční obor. Zadaný je totiž pouze funkční předpis.

D7 Výraz

Mějme dánu funkci *f* proměnné *x*, $x \in D_f$, předpisem $y = f(x)$. Potom $f(x)$ nazýváme výrazem s proměnnou *x* a definičním oborem D_f.

Výrazem tedy myslíme vše, co může být na pravé straně předpisu funkce $y = f(x)$, k čemuž se pevně váže definiční obor oné funkce. Výraz tedy, podobně jako funkce, nemůže být zadán bez svého definičního oboru.

Zpravidla se funkce pojmenovává stejně jako výraz. Např.: funkce *g*: $y = g(x)$; $x \in D_g$.

D8 Prostá funkce

Funkci *f*: $y = f(x)$ nazýváme prostou, pokud pro každá $x_1, x_2 \in D_f$ platí: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, nebo chceme-li $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Jelikož každá funkce přiřadí každému $x \in D_f$ právě jedno $y \in H_f$ ($x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$) a jelikož prostá funkce nedovoluje, aby bylo dvěma *x* přiřazeno stejné *y* ($f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$), můžeme prohlásit, že prostá funkce přiřadí vzájemně jednoznačně každému *x* unikátní *y* (tedy *y* takové, které žádné jiné *x* nemá). Platí tedy, že pro každé *x* a $y = f(x)$: $x_1 = x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

D9 Rovnice

Rovnicí s neznámou *x* myslíme úlohu, kde máme určit, pro která $x \in R$ platí: $L(x) = P(x)$, kde $L(x)$ je výraz s proměnnou $x \in D_L$ a $P(x)$ výraz s proměnnou $x \in D_P$.

$L(x)$ nazýváme levou stranou rovnice, $P(x)$ pravou.

Když rovnici řešíme, využíváme vždy základních vlastností rovnosti a poznatků o funkcích. Máme-li najít všechna $x \in R$, pro která platí $L(x) = P(x)$, pak k problému přistupujeme následovně:

1. Nejprve každou stranu rovnice považujeme za předpis funkce. Dostaneme tak funkci levé a funkci pravé strany:

$$L: \ y = L(x), \ x \in D_L$$
$$P: \ y = P(x), \ x \in D_p$$

2. Určíme grafy těchto dvou funkcí.
3. Využijeme vlastnosti rovnosti:

$$y = L(x) \Leftrightarrow L(x) = y \qquad (2´)$$
$$(L(x) = y \wedge y = P(x)) \Leftrightarrow L(x) = P(x) \qquad (3´)$$

Stačí nám tedy hledat taková $x \in R$, pro která platí $L(x) = y \wedge y = P(x)$. Když porovnáme grafy funkcí *L* a *P* a nalezneme společné body obou grafů, pak *x*-ové souřadnice těchto bodů jsou řešeními rovnice.

Tento postup možná známe jako tzv. grafické řešení rovnice, kdy do soustavy souřadnic vyneseme grafy funkcí levé i pravé strany, a z tohoto nákresu pak přečteme body, kde se tyto grafy protínají.

My si ale ukážeme, že tento logický postup potřebujeme i pro řešení početní. Samotný postup nám pomůže s důkazem věty o ekvivalentních úpravách. Právě jsme totiž zjistili, že pro všechna řešení rovnice nutně musí platit $x \in D_L \cap D_P$. Pro jiná *x* se totiž grafy funkcí *L* a *P* nemohou protnout (mít společný bod).

Nyní máme vše připraveno, přistupme tedy k důkazu:

O všech ekvivalentních úpravách [7][8]: Mějme zadanou rovnici $L(x) = P(x)$ pro $x \in D_L \cap D_P$. Najděme funkci $f: \ y = f_x(t)$ pro $t \in H_{L(x)} \cup H_{P(x)}$, prostou na celém svém definičním oboru. Potom platí:

$$L(x) = P(x) \Leftrightarrow f_x(L(x)) = f_x(P(x)).$$

Důkaz: Uvažujeme levou i pravou stranu jako předpisy funkcí: $y_L = L(x)$, $y_P = P(x)$. Dále víme, že všechna řešení rovnice leží v $D_L \cap D_P$. Potom ale všechna *y*, která jsou k řešením přiřazena (řešeními rovnice, jak jsme si již odvodili, jsou *x*-ové souřadnice společných bodů grafů funkcí, tedy bodů, které mají stejnou *x*-ovou i *y*-ovou souřadnici), leží v $H_L \cup H_P$ (viz poznámka pod D9 – rovnice). Tím jsme zaručili, že žádné řešení rovnice nebude ztraceno.

Pokud budeme nyní uvažovat, že *x* je pevně zvoleno, bude nám stačit dokázat následující ekvivalenci: $y_L = y_P \Leftrightarrow f(y_L) = f(y_P)$. Tato ekvivalence je však podle poznámky pod D8 – prostá funkce – evidentně platná, pokud je uvažovaná funkce *f* prostá pro každé dosazené $y \in H_L \cup H_P$, to je ovšem požadavkem věty. Tím je věta dokázána, pokud uvažujeme, že funkce *f* neobsahuje konstantní parametr *x*.

Tento parametr můžeme povolit, ale musíme potom ověřit, že funkce *f* zůstane prostou pro každou hodnotu parametru *x*, která by mohla být dosazena. Tím zůstane podmínka nutná k platnosti ekvivalence splněna. Tento požadavek je však rovněž uveden v podmínkách věty.

P10 [6]: Řešte rovnici $\sqrt{x+1}=2$ na jejím maximálním možném definičním oboru.

Stanovíme definiční obor $x+1\geq 0$, $x\in\langle -1;\infty)$. Oborem hodnot levé strany rovnice je $H_L=\langle 0;\infty)$. Oborem hodnot pravé strany rovnice je $H_P=\{2\}$. $H_L\cup H_P=\langle 0;\infty)$. Hledané ekvivalentní úpravě přísluší funkce $f(t)=t^2$, $t\in H_L\cup H_P$, tedy $t\in\langle 0;\infty)$. Tato funkce je na daném intervalu prostá, proto je úprava ekvivalentní a jelikož $t\in H_L\cup H_P$, máme též jistotu, že neztratíme žádná řešení. Po provedení ekvivalentní úpravy dostáváme

$\sqrt{x+1}=2\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+1}\right)^2=2^2\Leftrightarrow x+1=4$. Řešením rovnice tedy je $x=3$.

Závěr

Cílem této práce je usnadnit čtenáři, který ukončuje studium na střední škole a chystá se na studium vysokoškolské, tento nesnadný přechod.

Udržet se v prvním ročníku matematicky zaměřené školy není dnes lehkým úkolem. Hovořím pouze o vlastním vnímáním současné atmosféry. Snižují se nároky na složení maturitní zkoušky z matematiky i na absolvování středoškolského studia, důsledkem čehož klesá matematická gramotnost. Tato skutečnost však má i další negativní vliv. Nadanější studenti (uchazeči) nabudou mylného dojmu, že jsou na vysokoškolské studium perfektně připraveni. Celé roky dostávají z matematiky samé jedničky a snadno složí maturitní zkoušku. Přitom se nemusely se slovem „důkaz“ ani setkat a pokud ano, vnímali jej možná jako další příklad, nikoli jako nutnost k porozumění.

Nepodceňuji nutnost naučit středoškolské studenty praktické aplikování středoškolské matematiky (čímž myslím početní zdatnost a schopnost řešit středoškolské úlohy), ale pokud je teoretický přístup poprvé zastihne na vysoké škole, domnívám se, že budou vystaveni těžké, až neúnosné, situaci.

Středoškolští učitelé (ti, se kterými jsem o tomto problému hovořil) shodně tvrdí, že na odvozování a dokazování prostě není čas.

Řešení této situace vidím, alespoň pro začátek, a netvrdím, že to je řešení jediné, a už vůbec ne, že je dostatečné, v této a podobných pracích, určených k samostudiu. Student zde má možnost setkat se s teoretickým přístupem k matematice, tento přístup si osvojit a pochopit jeho účel. To vše na látce, která je jednoduchá a kterou zná.

Věřím, že tato práce čtenáře zaujme a že mu pomůže.

Seznam použité literatury

[1] Jiří Herman, Vítězslava Chrápavá, Eva Jančovičová, Jaromír Šimša. Matematika pro nižší třídy víceletých gymnázií, Výrazy 2. Prometheus ISBN 80-7196-064-0. Praha 1997.

[2] Ivan Bušek, Leo Boček, Emil Calda. Matematiky pro gymnázia - základní poznatky z matematiky. Prométheus ISBN 80-85849-34-8. Praha 1995.

[3] Oldřich Odvárko. Matematika pro gymnázia - funkce. Prometheus ISBN 80-85849-09-7. Praha 1996.

[4] Oldřich Odvárko, Miloš Božek, Marta Ryšánková, Josef Smida. Matematika pro II. ročník gymnázií. Státní pedagogické nakladatelství Praha, číslo publikace 54-00-02/1. Praha 1985

[5] Josef Polák. Přehled středoškolské matematiky. Státní pedagogické nakladatelství Praha, číslo publikace 5-43-12/4. Praha 1983.

[6] Zdeněk Vošický, Vladimír Lank, Miroslav Vondra. Matematika a fyzika. Nakladatelství Fragment 2007.

[7] http://www.ucebnice.krynicky.cz/Matematika/02_Funkce_a_rovnice/2_Linearni_rovnice_a_nerovnice/2201_Rovnice_ekvivalentni_upravy.pdf

[8] http://www.cynyc.net/PedF/MRU/Rovnice.pdf

[9] Hans-Jochen Bartsch, Matematické vzorce. Nakladatelství technické literatury, n. p., typové číslo L11-E1-II-84/12017. Praha 1987.

[10] Jaromír Šimša, elektronická prezentace „K výuce mocnin a logaritmů“. Ústav matematiky a statistiky PřF MU Brno.

[11] http://www.wikipedia.org