Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Quynh Lan Vu Pham

Řešení okrajové úlohy pomocí spline funkcí

Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce:	doc. RNDr. Vít Dolejší Ph.D., DSc.
Studijní program:	matematika
Studijní obor:	obecná matematika

Praha 2011

Bakalářská práce je zrealizována v době mého studia na Matematicko-fyzikální fakultě. Část práce je programování, které mě baví, a část práce je matematika, která je teoretická a zajímavá. Znalosti, které jsem získala za studium na MFF, a učitelé, které jsem respektovala, přispěli k mé motivaci pokračovat. Jsem ráda za možnost pracovat s lidmi, pro které je matematika zábavná.

Moje poděkování patří i mé rodině, která mě v průběhu podporovala, a mému vedoucímu práce panu doc. RNDr. Vítu Dolejšímu Ph.D., DSc. za odborné rady a za čas, který mi věnoval.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 4.8.2011 Podpis autora

Název práce: Řešení okrajové úlohy pomocí spline funkcích

Autor: Quynh Lan Vu Pham

Katedra: Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Vít Dolejší Ph.D., DSc.

Abstrakt: Pro zadanou Poissonovu úlohu používáme metodu konečných prvků na aproximaci jejího řešení. Dle teorie metody konečných prvků zkonstruujeme v jistém Sobolevově prostoru konečnědimenzionální podprostor, na rozdíl oproti klasickému přístupu jej však generujeme pomocí báze ze splinů. Nalezené řešení v tomto podprostoru aproximuje funkci i její derivaci. Tím je aproximace více přesná.

Klíčová slova: spline, okrajová, úloha, numerický.

Title: Solution of a boundary problem with the aid of spline functions

Author: Quynh Lan Vu Pham

Department: Department of Numerical Mathematics

Supervisor: doc. RNDr. Vít Dolejší Ph.D., DSc.

Abstract: For the given Poisson's equation, we use the finite element method to find an approximate solution. According to the theory of the finite element method, we construct in a certain Sobolev space a finite dimensional subspace; unlike the classical approach, we generate the subspace using a basis of splines. The solution in the subspace approximates both the function and its derivative. This makes the approximation more accurate.

Keywords: spline, boundary, problem, numerical.

Obsah

Úvod **1**

1 Metody konečných prvků **2**
1.1 Sobolevův prostor 2
1.2 Poissonova rovnice a princip slabého řešení 3
1.3 Metoda konečných prvků 3
1.4 Diskretizace úlohy pomocí MKP 5

2 Přirozený kubický spline **7**
2.1 Definice přirozeného kubického splinu 7
2.2 Konstrukce báze prostoru ze splinů 7
Obrázky této kapitoly 9

3 Numerické výsledky **10**
3.1 Numerická realizace 10
3.2 Chyba metody 10
Tabulky a obrázky této kapitoly 12

Seznam použité literatury **15**

Úvod

Práce je věnována řešení eliptické úlohy pomocí metody konečných prvků, kde místo klasické báze používáme bázové funkce typu kubický spline. Funkce z klasické báze jsou po částech lineární a numerické řešení je spojité zobrazení na celém intervalu (ale ne nutně diferencovatelné), kdežto kubický spline je po částech polynomiální funkce a numerické řešení má derivaci 1. a 2. řádu na celém intervalu.

Řešíme rovnici $-u'' = f$ na otevřeném intervalu $(0, 1)$, spolu s počátečními podmínkami $u(0) = u(1) = 0$, kde f je L^2.

Zkonstruujeme konečnědimenzionální prostor tak, že hledáme přibližné řešení v tomto prostoru. Výsledné řešení porovnáváme s řešením analytickým a zkoumáme, zda je řešení dobře aproximovatelné. Současně matematicky zavedeme označení $\|e_h\|_{L^2} := e(h) = \|u - u_h\|_{L^2}$, kde $\|e_h\|_{L^2}$ značí L^2 normu, u je přesné řešení, a u_h je řešení úlohy, které vychází z naší metody. Zajímá nás, zda chyba metody $\|e_h\|_{L^2}$ konverguje k 0 a jak rychlá je tato konvergence.

1. Metody konečných prvků

1.1 Sobolevův prostor

Jako prostor $L^p_{loc}(\Omega)$ budeme označovat množinu $\{f$ měřitelné $: f \in L^p(K)\,, \forall K \subset \Omega$ kompaktní$\}$, kde $L^p(\Omega) = \{f$ měřitelné $: \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}$.

Nechť $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, kde Ω je oteřená množina.

Nechť α je n-tice nezáporných celých čísel, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ a $|\alpha| = \sum_i \alpha_i$.

Nechť $D(\Omega) \subset \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ je množina nekonečnědiferencovatelných zobrazení, které mají kompaktní nosič v Ω. Zvolíme $\varphi \in D(\Omega)$ libovolné.

Nechť $D^\alpha\varphi(x) := \varphi^{(\alpha)}(x)$ je derivace zobrazení φ ve směru $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, tj.

$$D^\alpha\varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Definice. Říkáme, že funkce $g(x)$ je *zobecněná derivace* zobrazení $f(x)$, jestliže

$$\int_\Omega g(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}\,x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x)\, D^\alpha\varphi(x)\,\mathrm{d}\,x\;, \forall\,\varphi(x) \in D(\Omega).$$

Značíme $D^\alpha u := g$ a říkáme že u má zobecněnou derivaci k-tého řádu, kde $k = |\alpha|$.

Nyní definujme Sobolevův prostor

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega)\,,\ \forall\,|\alpha| \le k\}.$$

Jinými slovy, Sobolevův prostor řádu k je množina měřitelných funkcí $u \in L^p(\Omega)$, pro které existuje zobecněná derivace až do k-tého stupně v $L^p(\Omega)$. Norma v tomto prostoru je definována

$$\|f\|_{W^k_p(\Omega)} = (\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha f\|^p_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}}. \tag{1.1}$$

S tomto normou je Sobolevův prostor Banachův. Je-li $p = 2$, je to Hilbertův prostor.

Podrobnější informace o zobecněných derivacích a Sobolevových prostorech najdeme ve skriptech Evans[5] kapitola 5.

V našem případě zkoumáme řešení na otevřeném intervalu $\Omega = (0, 1)$, v Sobolevově prostoru

$$H^1 = H^1_2 = W^{1,2}(0, 1) = \{u \in L^2(0, 1) : u' \,\text{existuje s.v.}\}. \tag{1.2}$$

1.2 Poissonova rovnice a princip slabého řešení

Definice. $H_0^1 := \{v \in H^1(0,1) : v(0) = v(1) = 0 \text{ ve smyslu stop}\}$.

Definici a vlastnosti *stopy* najdeme ve skriptech Evans[5] str. 257 - 259.

Poissonovou úlohou rozumíme rovnici

$$-u'' = f, \tag{1.3}$$

pro kterou hledáme řešení u.

Zvolme libovolnou testovací funkci $\varphi \in H_0^1$. Po násobení φ na obou stranách rovnice (1.3) a poté integrování dostáváme rovnici

$$\int_0^1 -u''\varphi \,\mathrm{d}\, x = \int_0^1 f\varphi \,\mathrm{d}\, x. \tag{1.4}$$

Po použití Greenovy věty je rovnice (1.4) ekvivalentní

$$-u'(1)\varphi(1) + u'(0)\varphi(0) + \int_0^1 u'\varphi' \,\mathrm{d}\, x = \int_0^1 f\varphi \,\mathrm{d}\, x,$$

což je ekvivalentní

$$\int_0^1 u'\varphi' \,\mathrm{d}\, x = \int_0^1 f\varphi \,\mathrm{d}\, x \tag{1.5}$$

díky vlastnosti, že $\varphi(1) = \varphi(0) = 0$. Poslední rovnice platí pro libovolnou $\varphi \in H_0^1$. To nás vede k úloze hledání řešení u v prostoru H^1. Toto řešení se nazývá slabé řešení.

Poznámka. Slabé řešení je v kontrastu s klasickým řešením. Klasické řešení hledáme v prostoru diferencovatelných funkcí C^2, kdežto slabé řešení hledáme v prostoru H^1 se zobecněnou první derivací.

Další poznámka k pochopení je, že slabé řešení není řešení úlohy (1.3), nýbrž řešení rovnice (1.5).

1.3 Metoda konečných prvků

Metodou konečných prvků, dále jen MKP, rozumíme Ritz-Galerkinovu metodu se speciálním výběrem konečnědimenzionálních prostorů V_h. Tuto metodu vysvětlíme níže.

Na začátku představíme náznak metody, kterou používáme při aproximacích, a náznak, proč je metoda tak vystavěna.

Hledáme řešení v nějakém Hilbertově prostoru H.

Nechť H' je topologický duální prostor k prostoru H. Jsou dány $\mathcal{U} \subseteq H$ neprázdná, konvexní, uzavřená podmnožina, $a\colon H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineární forma a $f \in H'$.

Definice. a je H-*eliptická* (neboli *koercivní*) na $\mathcal{U}$, jestliže existuje konstanta $\alpha > 0$ taková, že $a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2$ pro všechny $v \in \mathcal{U}$.

Definice. a je *omezená* na $\mathcal{U}$, jestliže existuje konstanta $M > 0$ taková, že $|a(u,v)| \leq M\|u\|\|v\|$, pro všechny $u, v \in \mathcal{U}$.

Definice. Mějme $u \in \mathcal{U}$ vyhovující podmínce

$$a(u, v-u) \geq f(v-u)\,, \forall v \in \mathcal{U}. \tag{1.6}$$

Potom nerovnost (1.6) nazýváme *eliptický problém* a u nazýváme *řešení* toho problému.

Jestliže $\mathcal{U} = H$, píšeme místo nerovnosti rovnost

$$a(u, v-u) = f(v-u)\,, \forall v \in H. \tag{1.7}$$

Věta 1.1. *(Lax-Milgramova). Nechť $\mathcal{J}\colon H \longrightarrow \mathbb{R}$ je kvadratický funkcionál daný výrazem*

$$\mathcal{J}(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - f(v),$$

kde $a\colon H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ je symetrická, H-eliptická a omezená bilineární forma. Potom existuje právě jediné řešení $u^* \in H$ problému

$$\mathcal{J}(u^*) \leq \mathcal{J}(v)\,, \forall v \in H. \tag{1.8}$$

Navíc $u^* \in H$ řeší (1.8) *právě tehdy, když řeší* (1.6).

Důkaz. Najdeme ve skriptech Haslinger[1] str. 13. □

Poznámka. Pro a symetrickou a H-eliptickou bilineární formu, (1.6) je ekvivalentní problému

$$\mathcal{J}(u) \leq \mathcal{J}(v)\,, \forall v \in \mathcal{U}\,, \tag{1.9}$$

kde $u \in \mathcal{U}$ a $\mathcal{J}$ je výše definovaný funkcionál.

Nechť $V \subset H$ je jiná neprázdná, konvexní, uzavřená podmožina. Nyní máme dva problémy: u je právě jediné řešení problému (1.6) v $\mathcal{U}$ a u_V je právě jediné řešení stejné nerovnice, ale ve V.

Následující tvrzení nám dá odhad na $\|u - u_V\|_H$.

Tvrzení 1.1. *Nechť $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ je omezená a H-eliptická bilineární forma. Potom*

$$\|u - u_V\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v \in V} \|u - v\|.$$

Důkaz. Najdeme ve skriptech HASLINGER[1] str. 18. □

Nyní víme, že $\|u - u_V\|$ lze omezit a tedy má smysl uvažovat konstrukce V. Důležitý případ nastavá, když V je konečnědimenzionální prostor, díky čemuž je daný prostor prakticky konstruovatelný.

Poznámka. Předchozí dva problémy vedou na řešení soustav lineárních algebraických rovnic. (Viz skripta HASLINGER[1] str. 17-20.). Podobným postupem vyřešíme na konci této kapitoly jednu konkretní úlohu.

Pro přesnější aproximaci nevystačíme s jediným konečnědimenzionálním prostorem, nýbrž budeme uvažovat posloupnost podprostorů s rostoucí dimenzí. Nechť $h \in (0, 1)$ a ke každému h přiřaďme konečnědimenzionální podprostor $V_h \subseteq H$, $\dim V_h = n(h)$, kde $n(h) \to \infty$ pro $h \to 0$.

Definice. Mějme $u_h \in V_h$, které vyhovuje následující podmínce

$$a(u_h, v - u_h) = f(v - u_h)\,, \forall v \in V_h. \tag{1.10}$$

Potom se rovnice (1.10) nazývají eliptické problémy pro různá h a u_h je řešení těchto eliptických problémů.

Označení: Galerkinova metoda je postup, kde zaměňujeme problém (1.6) za posloupnost problémů (1.10).

Poznámka. Je-li navíc a symetrická, jsou eliptické problémy (1.10) ekvivalentní úloze nalézt $u_h \in V_h$, v němž $\mathcal{J}$ nabývá na V_h svého minima, tj.

$$\mathcal{J}(u_h) \leq \mathcal{J}(v)\,, \forall v \in V_h. \tag{1.11}$$

Ritzova metoda je postup, kde zaměňujeme problém minimalizace $\mathcal{J}$ na celém H za problém minimalizace $\mathcal{J}$ na V_h, pro různé h.

Ritz-Galerkinova metoda je pojem pro obě metody, kdy nerozlišujeme symetrii bilineární formy a.

1.4 Diskretizace úlohy pomocí MKP

Předtím, než budeme řešit zmíněnou matematickou úlohu, podívejme se na jednu situaci, kdy tato úloha vzniká. Jeden z případů Poissonovy úlohy je případ, kdy máme pružně-plastickou gumu. Rovnice je sestavena z pravé strany f, která reprezentuje tíhovou sílu působující na pružinu, a z hledané funkce u, která odpovídá tvaru, do jakého je pružina ohnutá pod danou silou f.

Nyní přejdeme na naši konkretní Poissonovu úlohu, tj. $-u'' = f$ na otevřeném intervalu $(0,1)$, s Dirichletovými počátečními podmínkami $u(0) = u(1) = 0$ na hranici.

$$\text{Rovnice } -u'' = f \quad \Leftrightarrow \quad \textstyle\int_0^1 -u''v = \int_0^1 fv, \text{ pro všechny } v \in H_0^1$$
$$\Leftrightarrow \int_0^1 u'v' = \int_0^1 fv\,, \forall v \in H_0^1. \tag{1.12}$$

Zvolme konečnědimenzionální podprostor $V_h \preceq H_0^1$ takový, že má báze tvořenou přirozenými kubickými spliny φ_i, $i = 1, \ldots, n-1$, kde $h = \frac{1}{n}$. Hledáme v něm přibližné řešení u_h tak, aby splňovalo tutéž úlohu. Další podmínky pro bázové funkce φ_i, $i = 1, \ldots, n-1$ budou upřesněny v kapitole 2.2, kde je zkonstruujeme.

Poznámka. Značení $\dim V_h = n - 1$ pro $h = \frac{1}{n}$ usnadní programování.

Převedeme rovnice (1.5), kde hledáme řešení u v prostoru H^1, na stejnou úlohu v podprostoru V_h. Hledáme tedy řešení u_h, které splňuje podmínku ekvivalentní s podmínkou (1.12):

$$\int_0^1 u_h' v_h' = \int_0^1 f v_h\,,\ \forall\, v_h \in V_h \tag{1.13}$$

Protože $\{\varphi_i\}$ je báze prostoru V_h, hledané řešení $u_h \in V_h$ lze jednoznačně napsat ve tvaru

$$u_h(x) = \sum_1^{n-1} u_i \varphi_i(x)\,,\ \ u_h'(x) = \sum_1^{n-1} u_i \varphi_i'(x),\ \text{kde } u_i \in \mathbb{R}.$$

Protože $\{\varphi_i\}$ je báze prostoru V_h a hledáme řešení u_h tak, že vyhovuje rovnici (1.13) pro každý prvek $v_h \in V_h$, problém se zredukuje na to, že bude stačit, když rovnice (1.13) bude platit pro všechny bázové funkce $\varphi_i(x)$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Po dosazení u_h do rovnice (1.13) a s úvahou, že rovnice musí platit pro všechny bázové funkce, dostáváme soustavu lineárních algebraických rovnic

$$\sum_{i=1}^{n-1} u_i \int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\varphi_j(x)\mathrm{d}x,\ \forall j = 1, \ldots, n-1. \tag{1.14}$$

Dále se zabýváme konstrukcí báze tohoto prostoru, neboli konstrukcí přirozených kubických splinů (s určitými podmínkami).

2. Přirozený kubický spline

2.1 Definice přirozeného kubického splinu

Jedním z problémů dnešní vědy je aproximovat funkci interpolační metodou. Aproximujeme danou funkci po částech, nejčastěji lineární, v našem případě polynomiální funkcí. Taková funkce ψ, která je po částech polynom a v uzlech má spojitou derivaci až do řádu k, se nazývá spline.

Definice. Budeme používat *ekvidistantní dělení* na intervalu $[x_0, x_n]$ pro přirozené n. Ekvidistantní dělení na intervalu $[x_0, x_n]$ rozumíme množinu $D = \{x_0, \dots, x_n\}$ takovou, že $x_i = x_0 + ih(x_n - x_0), i = 0, \dots, n$, kde $h = \frac{1}{n}$.

Můžeme zvolit i jiné dělení, kde bude $h = \max\{|x_{i+1} - x_i|; i = 0, \dots, n-1\}$.

Definice. Řekneme, že funkce ψ: $[x_0, x_{n+1}] \longrightarrow \mathbb{R}$ je *kubický spline*, kde $x_0, x_1, \dots,$ x_{n+1} jsou prvky ekvidistantního dělení, jestliže

1. $\psi \in \mathcal{C}^2[x_0, x_n]$,
2. $\psi|_{[x_i, x_{i+1}]}$ je polynom stupně nejvýše 3.

Říkáme, že ψ je *kubický interpolační spline* k funkci g v bodech x_0, $x_1, \dots,$ x_{n+1}, jestliže jsou navíc splněny podmínky $\psi(x_i) = g(x_i)$, $i = 0, \dots, n+1$.

Máme, že $\psi_i := \psi|_{[x_i, x_{i+1}]}$ je polynom stupně nejvýše 3, lze ho tedy vyjádřit ve tvaru $\psi_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$, pro $i = 0, \dots, n$.

Funkce ψ je určena $4n$ parametry, přičemž máme $4n - 2$ podmínek ($2n$ podmínek z rovnosti s funkcí g v uzlech a spojitosti ψ v uzlech, $2n - 2$ podmínek ze spojitosti 1. a 2. derivace ψ). Zvolíme poslední dva parametry typu: $\psi''(x_0) = \psi''(x_n) = 0$. Taková volba tvoří *přirozený* kubický spline.

2.2 Konstrukce báze prostoru ze splinů

Z předchozí kapitoly víme, že báze prostoru jsou $\{\varphi_i\}_1^{n-1}$. Vektor z báze φ_i konstruujeme řadou polynomů ψ_j na jednotlivých intervalech, což matematicky zapíšeme

$$\psi_j^i := \varphi_i|_{[x_j, x_{j+1}]}, j = 0, \dots, n-1$$

s dodatečnou podmínkou, že $\varphi_i(x_j) = \delta_{i,j}$, kde $\delta_{i,j}$ je Kroneckerovo delta.

Poznámka. Index $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ vyjadřuje index bázové funkce. Index $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ značí interval.

Konstrukci přirozeného kubického splinu najdeme ve skriptech FEISTAUER[2] str. 2-4.

Náznak konstrukce přirozeného kubického splinu neboli bázové funkce φ_1:

Je dáno: $h = \frac{1}{n}$, $M_0 = \psi''(0) = 0$, $M_n = \psi''(1) = 0$,

$$\varphi_1(x_j) = \begin{cases} 1 & j = 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Poznámka. Značme $\psi_j := \psi_j^1 = \varphi_1|_{[x_j, x_{j+1}]}$, $j = 0, \ldots, n-1$.

ψ_j'' je polynom stupně nejvýše 1, zapíšeme ho ve tvaru

$$\psi_j''(x) = M_j \frac{x_{j+1} - x}{h} + M_{j+1} \frac{x - x_j}{h}.$$

Po integrování dostaváme

$$\psi_j'(x) = -M_j \frac{(x_{j+1} - x)^2}{2h} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^2}{2h} + A_j,$$

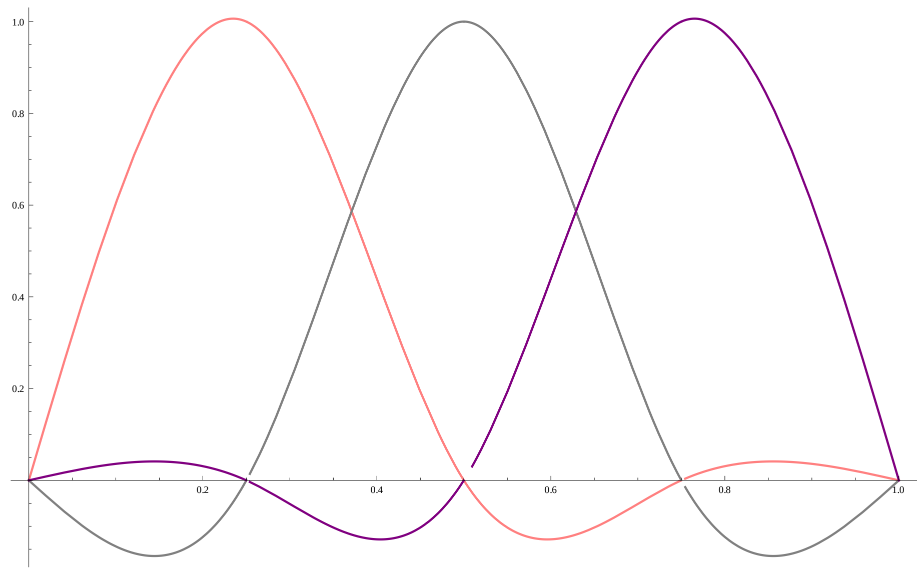
$$\psi_j(x) = -M_j \frac{(x_{j+1} - x)^2}{2h} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^2}{2h} + A_j(x - x_j) + B_j.$$

Ze znamých hodnot $\psi_j(x_j) = \varphi_1(x_j)$, $\psi_j(x_{j+1}) = \varphi_1(x_{j+1})$ a $\psi_{j-1}'(x_j-) = \psi_j(x_j+)$ vychází hodnoty $A_j = \frac{\delta_{1,j+1} - \delta_{1,j}}{h} - \frac{1}{6} h (M_{j+1} - M_j)$, $B_j = \delta_{1,j} - h^2 \frac{M_j}{6}$ a soustava

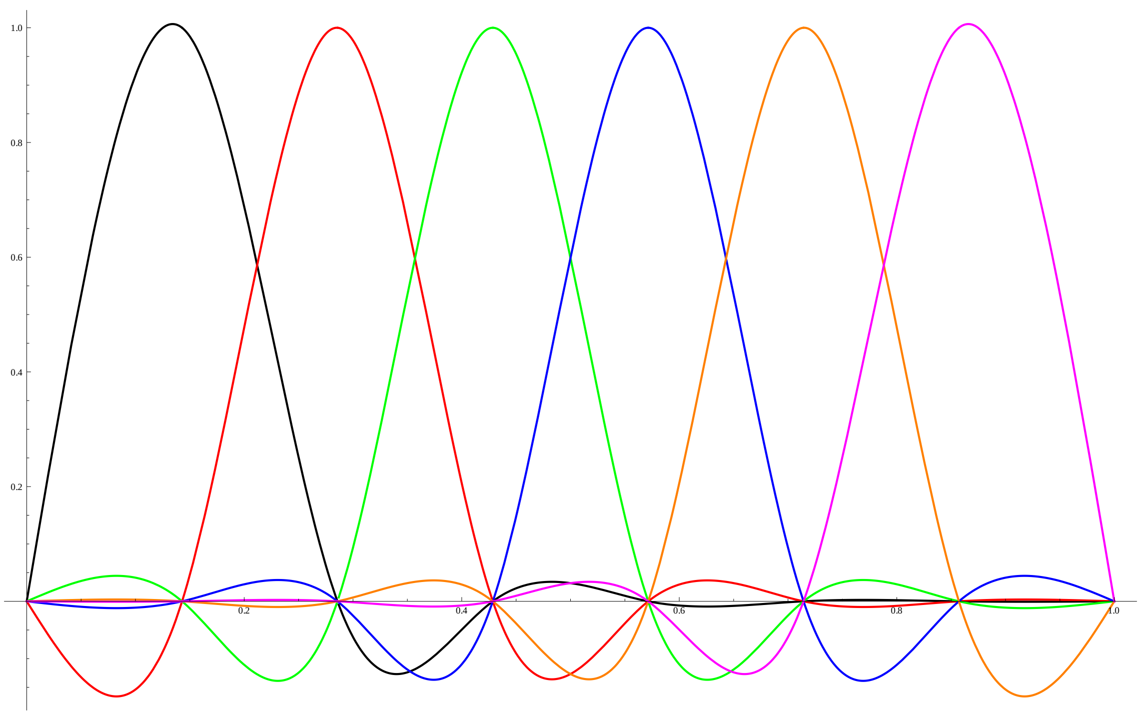
$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 2M_1 & + & \mu_1 M_2 & = & g_1 \\
1/2 M_1 & + & 2M_2 & + & \mu_2 M_3 & = & g_2 \\
1/2 M_2 & + & 2M_3 & + & \mu_3 M_4 & = & g_3 \\
 & & & & \cdots & & \\
1/2 M_{n-2} & + & 2M_{n-1} & & & = & g_{n-1},
\end{array}$$

kde $g_j = (\frac{\delta_{1,j+1} - \delta_{1,j}}{h} - \frac{\delta_{1,j} - \delta_{1,j-1}}{h}) \frac{6}{2h}$. Vyřešíme matici pomocí znamých metod, např. QR rozklad (viz skripta [3]), získáme potom polynomy $\psi_0, \ldots, \psi_{n-1}$, z čehož dostáváme vyjadření bázové funkce φ_1.

Na následujících obrázcích (2.1) a (2.2) jsou bázové funkce po konstrukci. Na obrázku (2.1) jsou 3 bázové funkce pro 3 dimenzionální prostor. A na obrázku (2.2) je zkonstruováno 6 bázových funkcí.



Obrázek 2.1: Bázové funkce pro dim 3.



Obrázek 2.2: Bázové funkce pro dim 6.

3. Numerické výsledky

3.1 Numerická realizace

Chceme řešit soustavu (1.14), abychom dostali přibližné řešení u_h.

$$\text{Buďte}\quad \begin{array}{ll} s_{i,j} = \int_0^1 \varphi_i' \varphi_j' \, \mathrm{d}x & \text{a } S = \{s_{i,j}\} \\ p_j = \int_0^1 f \varphi_j \, \mathrm{d}x & \text{a } p = \{p_j\}_{j=1}^{n-1}. \\ u_I = \{u_j\}_{j=1}^{n-1}. & \end{array}$$

Dostáváme z rovnice (1.14) soustavu lineárních algebraických rovnic $Su_I = p$, kde jsou známé hodnoty S a p.

Integrál $\int_0^1 \varphi_i' \varphi_j' \, \mathrm{d}x$ lze počítat pomocí numerické metody, např. numerická kvadratura Gaussova (viz ve skriptech [4]).

Matice S je plná, a proto je nevýhodná vůči klasické volbě bázové funkce. Pro více rozměrnou množinu Ω je řešení soustavy výpočetně náročné.

Vyřešíme tuto soustavu, např. pomocí Gaussovy eliminace. Řešení soustavy jsou koeficienty u_i, $i = 1, \ldots, n-1$. Odtud $u_h(x) = \sum_1^{n-1} u_i \varphi_i(x)$.

3.2 Chyba metody

Nejdřív zopakujeme některé potřebné znalosti.

$H^1(\Omega)$ je Hilbertův prostor se skalárním součinem $(\, , \,)$. Definice prostoru $H^1(\Omega)$ je v kapitole (1.1) a (1.2).

Pro f, g libovolné funkce v $L^2(\Omega)$ platí:

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega fg$$

$$\text{a } \|f\|^2_{L^2(\Omega)} = (f, f)_{L^2(\Omega)}.$$

Pro libovolné funkce u, v v $H^1(\Omega)$, z obecné definice (1.1), platí:

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=0}^{1} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)},$$

$$\text{a tedy } |u|^2_{H^1(\Omega)} = \|D^0 u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|D^1 u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Nechť je u přesné řešení naší základní rovnice (1.3). Po úspěšné konstrukci přibližného řešení u_h se podíváme na to, zda je náš zvolený prostor dobrou volbou. Před tím zaveďme nové značení.

Normu rozdílu mezi přesným a numerickým řešením značíme $\|e_h\|_{L^2}$, kde $\|e_h\|_{L^2} := \|u - u_h\|_{L^2}^2$. Zároveň ji nazýváme chyba aproximace.

Podobně zavedeme značení $|e_h|_{H^1}$ pro rozdíl v seminormě v prostoru H^1.

Norma tohoto rozdílu v Hilbertovu prostoru H^1 je
$|u - u_h|_{H^1}^2 = \|u - u_h\|_{L^2}^2 + \|u' - u_h'\|_{L^2}^2 = \int_0^1 (u - u_h)^2 + \int_0^1 (u' - u_h')^2$.
Odtud seminormu $|e_h|_{H^1}$ definujeme $|e_h|_{H^1} := \int_0^1 (u' - u_h')^2$.

Kladnou funkci $\|e_h\|_{L^2}$ nebo $|e_h|_{H^1}$, dále jen $e(h)$, používáme k prohlednutí konvergence metody. α je řád metody a je definována ve smyslu $e(h) = c\,h^\alpha$, pro nějakou kladnou konstantu c. Čím je α větší, tím je metoda přesnější. O α říkáme také, že je to experimentální řád konvergence (dále jen EOC). A počítáme ji následovně:

Pro kroky h_i a h_{i+1} máme dvě rovnice

$$e(h_i) = c\,h_i^{\alpha_{i,i+1}} \text{ a } e(h_{i+1}) = c\,h_{i+1}^{\alpha_{i,i+1}},$$

kde $\alpha_{i,i+1}$ je řád metody příslušný krokům h_i a h_{i+1}. Po logaritmování dostaneme

$$EOC = \frac{\log e(h_i) - \log e(h_{i+1})}{\log h_i - \log h_{i+1}}.$$

Zvolme za pravou stranu rovnice (1.3) následující funkce:

1. $f \equiv 1$ je konstantní funkce, pro jednoduchý případ. Přesné řešení je pak $u = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$.
2. $f = x^2 - x$ kvadratická funkce pro polynomiální případ, polynom do 3. stupně. Po úpravě rovnice (1.3) vyjde řešení $u = -1/12x + 1/6x^3 - 1/12x^4$.
3. Pro $f = \sin(2\pi x)$ máme analytické řešení $u = \frac{1}{4\pi^2}\sin(2\pi x)$.
4. Pro $f = \sin(10\pi x)$ je analytické řešení $u = \frac{1}{100\pi^2}\sin(10\pi x)$.

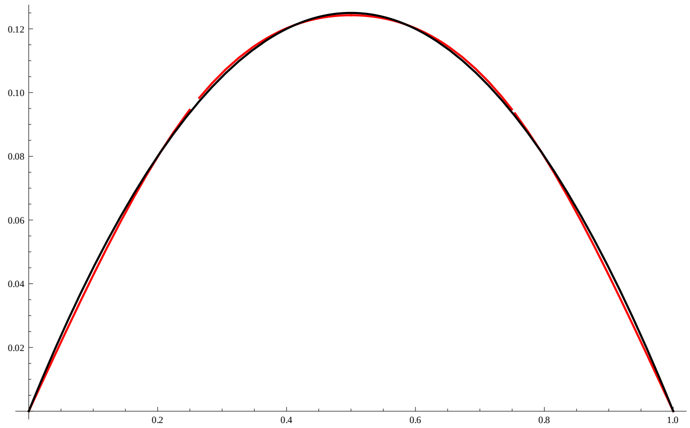
Legenda k obrázkům

černá křivka: analytické řešení $u(x)$

červená křivka: numerické přibližné řešení (NPR) $u_h(x)$

h	n	$\|e_h\|_{L^2}$	EOC	$\|e_h\|_{H^1}$	EOC
0.1	10	1.93117252467226E-08		2.73397501525202E-05	
0.05	20	6.05237478557109E-10	4.99	3.4195281040303E-06	2.99
0.025	40	1.89136931332185E-11	4.99	4.27441069425759E-07	2.99
0.0125	80	5.91052897794079E-13	5.00	5.34301336301363E-08	3.00
0.00625	160	1.84707323095535E-14	4.99	6.67876682589236E-09	2.99
$0.0041\overline{6}$	240	2.43237354171031E-15	4.99	1.97889381943335E-09	3.00

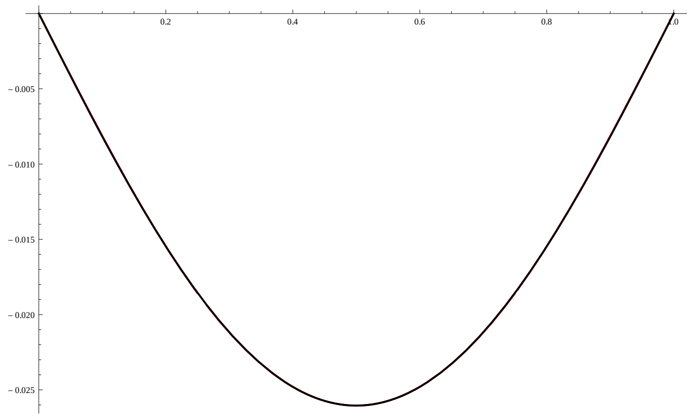
Tabulka 3.1: Chyba metody a EOC pro $f \equiv 1$.



Obrázek 3.1: Přesné řešení u a její NPR pro $n = 4$, $u = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$.

h	n	$\|e_h\|_{L^2}$	EOC	$\|e_h\|_{H^1}$	EOC
0.1	10	1.40234511326862E-13		2.15343878178321E-10	
0.05	20	3.66601487693022E-16	8.57	2.40621115590726E-12	6.48
0.025	40	1.0765890509733E-18	8.41	3.01013320568908E-14	6.32
0.0125	80	3.51468556464358E-21	8.25	4.11772766444224E-16	6.19
0.00625	160	2.19789507170761E-22	3.99	5.97730064761049E-18	6.10

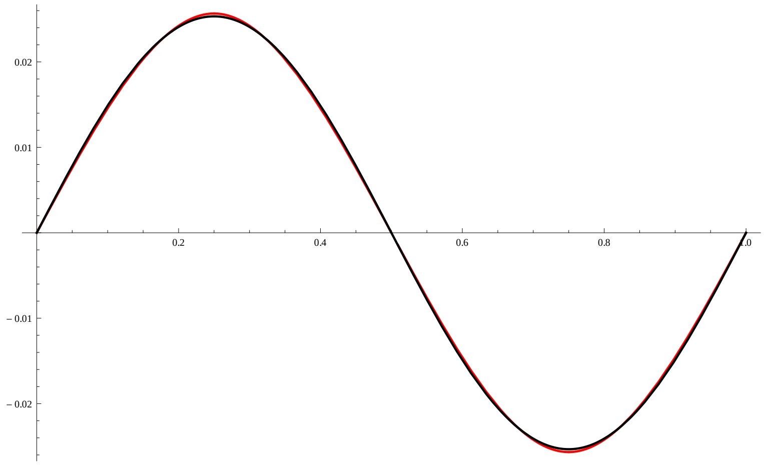
Tabulka 3.2: Chyba metody a EOC pro kvadratickou pravou stranu, $f = x^2 - x$.



Obrázek 3.2: Řešení $u = -\frac{1}{12}x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4$ a její NPR, pro $n = 4$.

h	n	$\|e_h\|_{L^2}$	EOC	$|e_h|_{H^1}$	EOC
0.1	10	1.18578807277746E-11		2.34890764882301E-08	
0.05	20	3.83843325526074E-14	8.27	3.0217749948989E-10	6.28
0.025	40	1.42814033544551E-16	8.07	4.48245619763378E-12	6.07
0.0125	80	5.51059955355194E-19	8.01	6.91178991619415E-14	6.01
0.00625	160	2.67209890481277E-21	7.68	1.07638731778083E-15	6.00

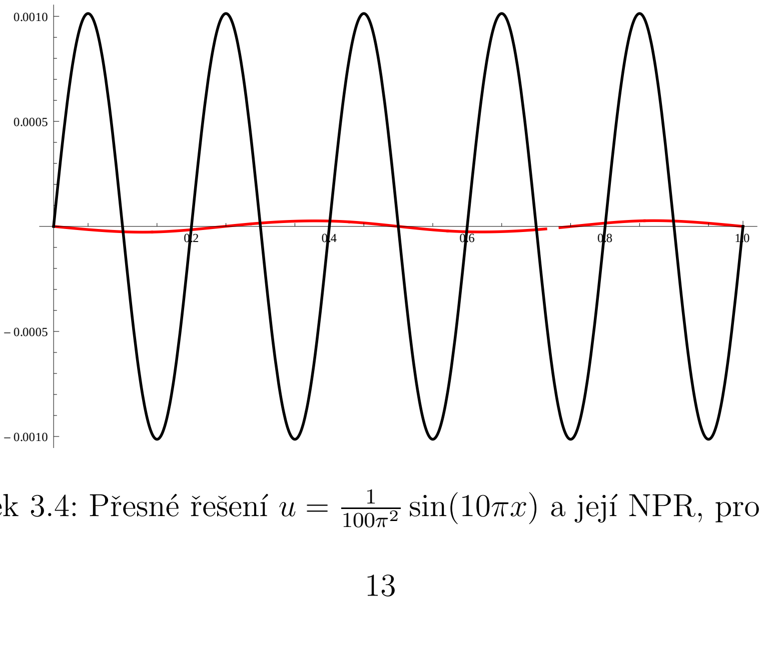
Tabulka 3.3: Chyba metody a EOC pro sinusovu pravou stranu, $f = \sin(2\pi x)$.



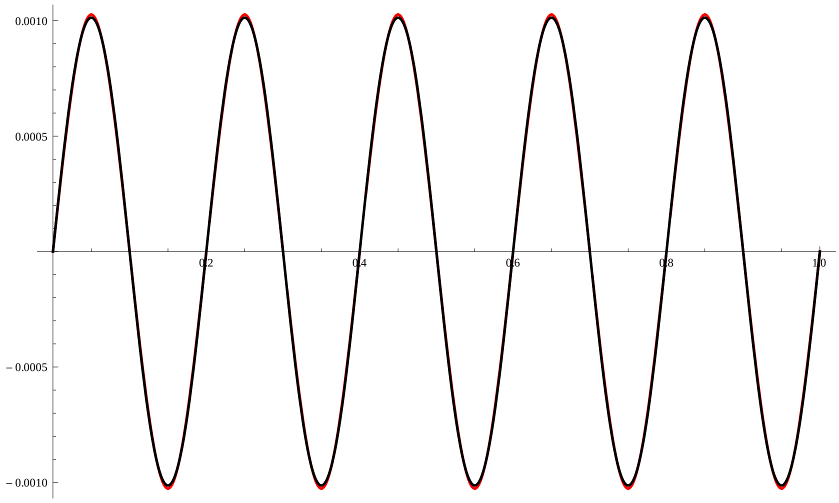
Obrázek 3.3: Řešení $u = \frac{1}{4\pi^2}\sin(2\pi x)$ a její NPR, pro $n = 4$.

h	n	$\|e_h\|_{L^2}$	EOC	$|e_h|_{H^1}$	EOC
0.1	10	5.24824833913843E-07		0.000495230487363672	
0.05	20	8.94824336070305E-11	12.51	6.4168522620276E-07	9.59
0.025	40	1.29396870477728E-13	9.43	4.09846606616581E-09	7.29
0.0125	80	3.79494467642423E-16	8.41	4.78952243947078E-11	6.41
0.00625	160	1.37454734786664E-18	8.10	6.90744414065156E-13	6.11
$0.0041\overline{6}$	240	5.31111803701336E-20	8.02	5.9724561334985E-14	6.03

Tabulka 3.4: Chyba metody a EOC pro sinusovu pravou stranu, $f = \sin(10\pi x)$.



Obrázek 3.4: Přesné řešení $u = \frac{1}{100\pi^2}\sin(10\pi x)$ a její NPR, pro $n = 7$.



Obrázek 3.5: $u = \frac{1}{100\pi^2}\sin(10\pi x)$ a její NPR, $n = 20$.

V prvních třech případech přibližné řešení konverguje velmi rychle k výslednému řešení, v prostoru dimenze 3. A v posledním případě $\sin(10\pi x)$ je dobře aproximována v prostoru s 19 bázovými funkcemi. Dá se říct, že v těchto případech máme superaproximaci.

Experimentální řád konvergence v tabulkách je vysoký, dokonce vyšší, než se dá očekávat z aproximativních vlastností funkcí (EOC = 4 v L^2 normě a EOC = 3 v H^1 seminormě).

Tento jev je zajímavou otázkou pro budoucí výzkum.

Seznam použité literatury

[1] Haslinger, Jaroslav. *Metoda konečných prvků pro řešení eliptických rovnic a nerovnic*. 1. vydání. Praha: SPN, 1980. 242 s.

[2] Feistauer, Miloslav. *Základy numerické matematiky.* URL: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~feist/ZNM-scripta.pdf>

[3] Tebbens, Hnětýková, Plešinger, Strakoš, Tichý. *Základní metody numerické lineární algebry.* Předběžný učební text.

[4] Segethová, Jitka. *Základy numerické matematiky.* 2. vydání. Praha: Karolinum, 2002 ISBN 80-246-0585-6

[5] Evans, Lawrence Craig. *Partial differential equations.* 2nd ed. 2010. ISBN 978-0-8218-4974-3