Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Tomáš Penk

Vysoké okruhy

Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Jan Žemlička, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: obecná matematika

Praha 2011

Děkuji vedoucímu své práce za cenné podněty, připomínky a za trpělivost, kterou se mnou měl po celou dobu psaní práce.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 1. srpna 2011

Název práce: Vysoké okruhy

Autor: Tomáš Penk

Katedra / Ústav: Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Jan Žemlička, Ph.D., katedra algebry

Abstrakt: Perfektní a max okruhy jsou známy přes padesát let. Jejich teorie se stále intenzivně studuje. Podmínky, které je definují, jsou přitom zajímavé hlavně při studiu modulů, které nejsou noetherovské. V této práci nejprve shrneme základní poznatky o okruzích a modulech, přičemž se předpokládají předchozí znalosti pouze na úrovni základního kurzu. Poté, co shrneme některé elementární výsledky týkající se noetherovských modulů, budeme připraveni na definici vysokých modulů a vysokých okruhů. Dále ukážeme, že jsou v určitém směru zobecněním perfektních a max okruhů. Uvedeme některé příklady vysokých a nevysokých okruhů, přičemž se podrobněji zaměříme na komutativní okruhy. Poznatky, které tak získáme, se pokusíme zobecnit a využít je při hledání některých nutných a některých postačujících podmínek pro to, abychom o komutativním okruhu mohli prohlásit, zda je či není vysoký. Na závěr ukážeme, že pro noetherovské komutativní okruhy jsou tyto podmínky navzájem ekvivalentní, a dávají tak k pojmu vysoký okruh ekvivalentní charakterizaci.

Klíčová slova: nenoetherovský modul, vysoký modul, vysoký okruh, komutativní noetherovský vysoký okruh

Title: Tall Rings

Author: Tomáš Penk

Department: Department of Algebra

Supervisor: Mgr. Jan Žemlička, Ph.D., Department of Algebra

Abstract: Perfect and max rings are known for over fifty years. Their theory is being steadily and intensively studied. The conditions defining them are mainly interesting while studying non-noetherian modules. In this work we summarize at first basic information about rings and modules with previous knowledge requiring just in elementary level. After summing up basic results in the theory of noetherian modules we will be prepaired for the definition of tall modules and tall rings. We show then that they are a generalization of prefect and max rings in a specific way. We bring out some examples of tall and non-tall rings with accenting commutative rings. Information which we obtain we try to generalize and use for searching some necessary and some sufficient conditions with the goal to be able to say about a commutative ring if it is tall or not. At the end we point out that in case of a commutative noetherian ring they are equivalent to each other and they give together to the concept tall ring an equivalent characterization.

Keywords: non-noetherian module, tall module, tall ring, commutative noetherian tall ring

Obsah

Úvod

V této práci budeme studovat *vysoké okruhy*. Tento pojem je motivován studiem perfektních a max okruhů. Max okruhy jsou takové okruhy, nad nimiž každý nenulový modul obsahuje vlastní maximální podmodul. Jejich speciálním případem jsou okruhy perfektní. Teorie perfektních okruhů je přitom velice propracovaná a intenzivně se studuje již od šedesátých let dvacátého století. My se však nezaměříme na tuto teorii, ale na definující podmínku. Každý modul, který je noetherovský, totiž obsahuje maximální podmodul. Proto je podmínka vynucující existenci maximálního podmodulu zajímavá zejména pro moduly, které nejsou noetherovské. V takovém případě zjišťujeme, že tento maximální podmodul opět není noetherovský. Můžeme tedy v procesu vytváření maximálních podmodulů pokračovat dále. Vyvstává přirozeně otázka, zda vždy takto „vyčerpáme” celou nenoetherovskou část tohoto modulu, tzn. zda průnik všech takto vytvořených nenoetherovských podmodulů už je nutně noetherovský.

První kapitola obsahuje definice základních pojmů. Čtenáře seznámíme s informacemi, jejchž znalost je předpokladem pro porozumění dalšímu textu. Důkazy v ní obsažených tvrzení nejsou uvedeny, neboť je lze nalézt v každé knize učené pro základní kurz okruhů a modulů.

Ve druhé kapitole se zaměříme nejprve na noetherovské moduly. Nepůjde nám přitom o rozvíjení této části teorie, ale jen o uvedení některých známých tvrzení. Tím budeme připraveni na definici vysokého modulu a vysokého okruhu, která je, stejně jako převážná část druhé kapitoly, převzata z práce [1]. Okruh nazveme vysokým, pokud každý jeho nenotherovský modul je vysoký, to znamená obsahuje takový vlastní nenoetherovský podmodul, že faktor celého modulu podle tohoto podmodulu opět není noetherovský. Jde tedy o situaci, kdy v modulu, který není noetherovský, existuje nenoetherovský podmodul takový, že nad ním „zbývající úsek”rovněž není noetherovský. Ponoříme se do hlubšího zkoumání nenoetherovských modulů a jejich podmodulů. Pomocí nenadbytečných množin, které jsou v jistém smyslu zobecněním lineární nezávislosti z vektorových prostorů, dokážeme tvrzení, že okruh je vysoký, právě když každý jeho nenoetherovský modul obsahuje vlastní nenoetherovský podmodul. Z něj pak snadno vyplyne, že příkladem vysokého okruhu je každý max okruh i každý perfektní okruh. Na závěr kapitoly nalezneme také příklady okruhů, které nejsou vysoké.

Ve třetí kapitole se budeme zabývat komutativními okruhy a moduly nad nimi. Pokusíme se najít (nejspíš dosud nepublikované) některé nutné a postačující podmínky pro to, aby byl komutativní okruh vysoký. Zjistíme tak, že nad každým komutativním nevysokým okruhem existuje modul, který si je velice podobný s grupou $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ jako $\mathbb{Z}$-modulem. Z toho mimo jiné odvodíme, že jednou z nutných podmínek je existence nekonečné klesající posloupnosti ideálů, jejichž průnikem je prvoideál. Pokud komutativní okruh obsahuje takový maximální ideál, že průnik jeho mocnin je prvoideálem, plyne z toho, že není vysoký. Uvažujeme-li o noetherovských komutativních okruzích, zjistíme, že nutné podmínky pro nevysokost již zaručují existenci takovéhoto maximálního ideálu. Dostáváme tak ekvivalentní charakterizaci komutativních noetherovských okruhů: Okruh je vysoký, právě když neobsahuje takový maximální ideál, že průnik jeho mocnin je prvoideálem.

1 Pojem okruhu a modulu

V této kapitole se zaměříme na základní tvrzení o modulech nad okruhy, která nebudeme dokazovat, neboť je lze i s důkazem nalézt v libovolné literatuře úvodního kurzu okruhů a modulů.

1.1 Použitá symbolika a pojmy z teorie množin

V celém textu budeme pracovat v ZFC, tj. v Zermelo-Fraenkelově axiomatice teorie množin s axiomem výběru. Označení $A \subseteq B$ znamená, že A je podmnožinou B, označení $A \subset B$ znamená, že A je vlastní podmnožinou B ($A \neq B$). Množinou přirozených čísel budeme rozumět ordinál $\omega = \{0; 1; 2; 3; ...\}$, $\mathbb{Q}$ značí těleso racionálních čísel. Relací mezi množinami A a B rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$. Zobrazením (funkcí) f z množiny A do množiny B rozumíme relaci splňující $\forall a \in A \ \exists! b \in B \ : (a; b) \in f$ ($(a; b)$ znamená uspořádanou dvojici prvků a a b). Píšeme $f\colon A \to B$. Obraz množiny M při zobrazení f značíme $f[M]$, vzor množiny N značíme $f^{-1}[N]$, inverzní zobrazení (pokud existuje) značíme f^{-1}. Je-li α ordinál a R libovolná množina, pak zobrazení $z\colon \alpha \to R$ nazýváme posloupností a píšeme také $\left(z_\beta\right)_{\beta<\alpha}$, kde $z_\beta \in R$.

1.2 Základní objekty a jejich definice

Nejprve uveďme definice okruhu a modulu, což jsou ty objekty, které budeme dále zkoumat.

Definice (Okruh) *Strukturu* $(\mathbf{R}, +, -, 0, \cdot, 1)$, *kde* $+ : \mathbf{R}\times\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *a* $\cdot : \mathbf{R}\times\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *jsou binární funkce,* $- : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *je unární funkce a* 0, 1 *jsou konstanty, nazýváme* **okruhem**, *pokud splňuje:*

- $\forall a, b, c \in \mathbf{R} : a + (b + c) = (a + b) + c$
- $\forall a \in \mathbf{R} : a + 0 = a$

- $\forall a \in \mathbf{R} : a + (-a) = 0$
- $\forall a, b \in \mathbf{R} : a + b = b + a$
- $\forall a, b, c \in \mathbf{R} : a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- $\forall a \in \mathbf{R} : a \cdot 1 = 1 = 1 \cdot a$
- $\forall a, b, c \in \mathbf{R} : a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
- $\forall a, b, c \in \mathbf{R} : (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

Definice (Levý modul) *Buď* $(\mathbf{R}, +, -, 0, \cdot, 1)$ *okruh. Strukuturu* $(\mathbf{M}, +, -, 0, \cdot)$, *kde* $+ : \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ *je binární funkce,* $- : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ *je unární funkce,* 0 *konstanta a* $\cdot : \mathbf{R} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ *je skalární násobení zleva, nazýváme* **levým modulem nad okruhem R**, *pokud splňuje:*

- $\forall a, b, c \in \mathbf{M} : a + (b + c) = (a + b) + c$
- $\forall a \in \mathbf{M} : a + 0 = a$
- $\forall a \in \mathbf{M} : a + (-a) = 0$
- $\forall a, b \in \mathbf{M} : a + b = b + a$
- $\forall a, b \in \mathbf{M}\ \forall r \in \mathbf{R} : r \cdot (a + b) = (r \cdot a) + (r \cdot b)$
- $\forall a \in \mathbf{M}\ \forall r, s \in \mathbf{R} : (r + s) \cdot a = (r \cdot a) + (s \cdot a)$
- $\forall a \in \mathbf{M}\ \forall r, s \in \mathbf{R} : r \cdot (s \cdot a) = (r \cdot s) \cdot a$
- $\forall a \in \mathbf{M} : 1 \cdot a = a$

Poznámka
V dalším textu budeme mluvit o levém modulu jako o modulu, budeme tedy přívlastek levý vynechávat.

Je dobré si uvědomit, že každý okruh je zároveň levým modulem nad sebou samým. V tomto případě skalární násobení splývá s okruhovým násobením. Budeme tedy o každém okruhu, bude-li to potřeba, uvažovat také jako o modulu. Dále budeme, pokud nebude hrozit nedorozumění, mluvit o okruhu $\mathbf{R}$, a pokud nebude nic jiného uvedeno, budeme tím myslet okruh $(\mathbf{R}, +, -, 0, \cdot, 1)$. Stejně tak budeme mluvit o modulu $\mathbf{M}$, a pokud nebude nic jiného uvedeno, budeme tím myslet modul $(\mathbf{M}, +, -, 0, \cdot)$ uvažovaný nad okruhem $(\mathbf{R}, +, -, 0, \cdot, 1)$.

Definice (Podmodul) *Je-li* $(\mathbf{M}, +, -, 0, \cdot)$ *modul a* $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{M}$ *podmnožina modulu* $\mathbf{M}$*, pro kterou platí:*

- $\forall a, b \in \mathbf{N} : a + b \in \mathbf{N}$
- $\forall a \in \mathbf{N} : -a \in \mathbf{N}$
- $0 \in \mathbf{N}$
- $\forall a \in \mathbf{N}\, \forall r \in \mathbf{R} : r \cdot a \in \mathbf{N}$

potom $(\mathbf{N}, + \restriction_{\mathbf{N}\times\mathbf{N}}, - \restriction_{\mathbf{N}}, 0, \cdot \restriction_{\mathbf{R}\times\mathbf{N}})$ *je modul. Nazýváme ho* **podmodulem** *modulu* $(\mathbf{M}, +, -, 0, \cdot)$ *a značíme* $\mathbf{N} \leq \mathbf{M}$*. Pokud* $\mathbf{N} \leq \mathbf{M}$ *a zároveň* $\mathbf{N} \neq \mathbf{M}$*, potom o podmodulu* $\mathbf{N}$ *mluvíme jako o* **vlastním podmodulu** *modulu* $\mathbf{M}$ *a značíme* $\mathbf{M} < \mathbf{N}$*.*

Definice (Levý ideál) *Je-li* $(\mathbf{R}, +, -, 0, \cdot, 1)$ *okruh a* $\mathbf{I} \leq \mathbf{R}$ *jeho podmodul, potom* $\mathbf{I}$ *nazýváme* **levým ideálem** *okruhu* $\mathbf{R}$*.*

Definice (Generování) *Je-li* $\mathbf{M}$ *modul a* $A \subseteq \mathbf{M}$*, potom symbol* $\langle A \rangle$ *značí nejmenší podmodul modulu* $\mathbf{M}$ *obsahující množinu* A*. Je-li* $A = \{a_1; \ldots ; a_k\}$*, potom používáme značení* $\langle a_1; \ldots ; a_k \rangle$

Označení Symbolem $\mathbf{0}$ označujeme kromě nulového prvku modulu také nulový podmodul, tj. množinu $\{0\}$.

Lemma 1 *Je-li* $\mathbf{M}$ *modul, potom* $\langle A \rangle = \{\sum\limits_{j<n} r_j a_j;\ r_j \in \mathbf{R}, a_j \in A, n < \omega\}$ *pro libovolnou podmnožinu* $A \subseteq \mathbf{M}$*.*

Nyní se podíváme na vztahy mezi podmoduly daného modulu. Je-li $\mathbf{K} \leq \mathbf{N} \leq \mathbf{M}$, potom také $\mathbf{K} \leq \mathbf{M}$. Tedy na množině $\mathcal{L}(\mathbf{M})$ všech podmodulů daného modulu $\mathbf{M}$ je relace $\leq$ neostré uspořádání, ve kterém $\mathbf{0}$ je nejmenší prvek a $\mathbf{M}$ je největší prvek.

Podmodul $\mathbf{N} \leq \mathbf{M}$ nazýváme *maximálním podmodulem modulu* $\mathbf{M}$, pokud v množině $\mathcal{L}(\mathbf{M}) \setminus \mathbf{M}$ neexistuje prvek $\mathbf{P}$ takový, že $\mathbf{N} < \mathbf{P}$. Analogicky $\mathbf{N} \leq \mathbf{M}$ nazýváme *minimálním podmodulem modulu* $\mathbf{M}$, pokud v množině $\mathcal{L}(\mathbf{M}) \setminus \mathbf{0}$ neexistuje prvek $\mathbf{P}$ takový, že $\mathbf{P} < \mathbf{N}$. Tedy názvy maximální podmodul a minimální podmodul znamenají maximální vlastní podmodul a mimimální nenulový podmodul.

Je-li $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}(\mathbf{M})$ soubor podmodulů, potom nejmenší podmodul obsahující všechny prvky tohoto souboru je $\sum \mathcal{C} = \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{C}} \mathbf{K} = \langle \bigcup \mathcal{C} \rangle = \{\sum_{j<n} x_j; x_j \in \bigcup \mathcal{C}, n < \omega\}$, jak se snadno dokáže s použitím Lemmatu 1. Největší podmodul obsažený ve všech prvcích souboru $\mathcal{C}$ je podmodul $\bigcap \mathcal{C} = \bigcap_{\mathbf{K} \in \mathcal{C}} \mathbf{K}$. Pro $\mathbf{K} \leq \mathbf{M}$ a $\mathbf{L} \leq \mathbf{M}$ tedy značí $\mathbf{K} + \mathbf{L} = \langle \mathbf{K} \cup \mathbf{L} \rangle$ *součet modulů* $\mathbf{K}$ *a* $\mathbf{L}$. V případě, že navíc $\mathbf{L} \cap \mathbf{M} = \mathbf{0}$, používáme pro zdůrazdnění tohoto faktu zápis $\mathbf{K} \oplus \mathbf{L}$ a mluvíme o *direktním součtu modulů* $\mathbf{K}$ *a* $\mathbf{L}$. Lze ověřit, že struktura $(\mathcal{L}(\mathbf{M}), +, \cap)$ je úplný svaz.

Poznámka

$\mathcal{L}(\mathbf{M})$ je modulární, to znamená, že pro libovolné $\mathbf{K} \leq \mathbf{N} \leq \mathbf{M}$ a $\mathbf{P} \leq \mathbf{M}$ platí $\mathbf{K} + (\mathbf{P} \cap \mathbf{N}) = (\mathbf{K} + \mathbf{P}) \cap \mathbf{N}$. Skutečně, volíme-li $x \in \mathbf{K} + (\mathbf{P} \cap \mathbf{N})$, potom $x = k + p$ pro jistá $p \in \mathbf{P} \cap \mathbf{N}$ a $k \in \mathbf{K}$. Protože $\mathbf{K} \leq \mathbf{N}$, máme $k \in \mathbf{N}$ a $p \in \mathbf{N}$, tedy $x \in \mathbf{N}$ a $x = k + p \in \mathbf{K} + \mathbf{P}$. Naopak volíme-li $x \in (\mathbf{K} + \mathbf{P}) \cap \mathbf{N}$, potom $x = k + p \in \mathbf{N}$ pro jistá $k \in \mathbf{K}$ a $p \in \mathbf{P}$. Opět máme $k \in \mathbf{N}$, tedy $p = x - k \in \mathbf{N}$. Odtud $x = k + p$ pro $k \in \mathbf{K}$ a $p \in \mathbf{P} \cap \mathbf{N}$.

Označení Je-li $\mathbf{M}$ modul, $\mathbf{N} \leq \mathbf{M}$ podmodul a $x \in \mathbf{M}$, potom symbolem $x + \mathbf{N}$ označujeme množinu $x + \mathbf{N} = \{x + n; n \in \mathbf{N}\}$. Je-li $\mathbf{S} \leq \mathbf{R}$ levý ideál okruhu $\mathbf{R}$, potom symbolem $\mathbf{SN}$ označujeme množinu $\mathbf{SN} = \{\sum_{i<k} s_i n_i; s_i \in \mathbf{I}, n_i \in \mathbf{N}, k < \omega\}$. Pro $r \in \mathbf{R}$ a $x \in \mathbf{M}$ značí $r\mathbf{N}$ množinu $r\mathbf{N} = \{r \cdot n; n \in \mathbf{N}\}$ a $\mathbf{S}x$ značí množinu $\mathbf{S}x = \{s \cdot x; s \in \mathbf{S}\}$.

Poznámka

Je-li $\mathbf{S} \leq \mathbf{R}$ levý ideál okruhu $\mathbf{R}$, $\mathbf{N} \leq \mathbf{M}$ podmodul modulu $\mathbf{M}$ a $x \in \mathbf{M}$, snadno se ověří, že $\mathbf{SN}$ i $\mathbf{S}x$ je podmodul modulu $\mathbf{M}$.

Lemma 2 *Jsou-li A a B podmnožiny modulu* $\mathbf{M}$, *potom* $\langle A \cup B \rangle = \langle A \rangle + \langle B \rangle$.

Lemma 3 *Buď* $\mathbf{M}$ *modul a* $\mathbf{N} \leq \mathbf{M}$ *podmodul. Potom*

1. *relace* $\sim = \{(x; y) \in \mathbf{M}^2; x - y \in \mathbf{N}\}$ *je ekvivalence*
2. $\forall x, y \in \mathbf{M}\ \forall r \in \mathbf{R}\ r(x + \mathbf{N}) = y + \mathbf{N} \Leftrightarrow rx \sim y$
3. $\forall x \in \mathbf{M}\ \{y \in \mathbf{M}; y \sim x\} = x + \mathbf{N}$

Definice (Faktormodul) *Je-li* $\mathbf{M}$ *modul a* $\mathbf{N} \leq \mathbf{M}$ *jeho podmodul, potom díky Lemmatu 3 lze snadno ověřit, že* $(\mathbf{M}/\mathbf{N}, +, -, 0, \cdot)$, *kde* $\mathbf{M}/\mathbf{N} = \{m + \mathbf{N}; m \in \mathbf{M}\}$, $(x + \mathbf{N}) + (y + \mathbf{N}) \overset{df}{=} (x + y) + \mathbf{N}$, $-(x + \mathbf{N}) \overset{df}{=} (-x) + \mathbf{N}$, $r \cdot (x + \mathbf{N}) \overset{df}{=} (rx) + \mathbf{N}$ *pro* $r \in \mathbf{R}$ *a* $0 \overset{df}{=} \mathbf{N}$, *je modul nad okruhem* $\mathbf{R}$. *Tento modul s takto definovanými operacemi nazýváme* **faktormodulem M podle N** *a značíme* $\mathbf{M}/\mathbf{N}$.

Lemma 4 *Je-li* $\mathbf{M}$ *modul a* $\mathbf{N} \leq \mathbf{M}$ *podmodul, potom každý podmodul faktormodulu* $\mathbf{M}/\mathbf{N}$ *je tvaru* $\mathbf{P}/\mathbf{N}$ *pro vhodný podmodul* $\mathbf{P}$ *splňující* $\mathbf{N} \leq \mathbf{P} \leq \mathbf{M}$.

Důkaz. Buď $\mathbf{K} \leq \mathbf{M}/\mathbf{N}$ podmodul. Potom $\mathbf{K} = \{A; A \in \mathbf{K}\}$, kde A jsou jisté podmnožiny $\mathbf{M}$ obsahující $\mathbf{N}$ (přesněji jsou tvaru $A = x + \mathbf{N}$ pro vhodné $x \in \mathbf{M}$). Definujme $\mathbf{P} = \bigcup \mathbf{K}$. Potom lze z faktu, že $\mathbf{K}$ je podmodul, snadno ověřit, že $\mathbf{P}$ je podmodul modulu $\mathbf{M}$, $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{P}$ a $\mathbf{P}/\mathbf{N} = \mathbf{K}$. □

Pozorování 5: *Je-li* $\mathbf{M}$ *modul a* $\mathbf{N} \leq \mathbf{M}$, *pak* $\mathbf{N}$ *je maximálním podmodulem modulu* $\mathbf{M}$, *právě když* $\mathcal{L}(\mathbf{M}/\mathbf{N})$ *obsahuje právě dva prvky, a to* $\mathbf{0} = \mathbf{N}/\mathbf{N}$ *a* $\mathbf{M}/\mathbf{N}$ *(což navíc znamená* $\mathbf{0} \neq \mathbf{M}/\mathbf{N}$, *neboli* $\mathbf{N} \neq \mathbf{M}$*).*

Modul $\mathbf{M}$, který obsahuje právě dva podmoduly, to jest $\mathbf{0}$ a $\mathbf{M}$ jsou jeho jediné podmoduly, přičemž $\mathbf{M} \neq \mathbf{0}$, potom takovýto modul nazýváme **jednoduchý**.

Definice (Součin modulů) *Buď* $\varkappa$ *kardinál a* $(\mathbf{N}_\alpha; \alpha < \varkappa)$ *soubor podmodulů modulu* $\mathbf{M}$. *Potom modul* $(\prod_{\alpha<\varkappa} \mathbf{N}_\alpha, +, -, 0, \cdot)$ *s operacemi definovanými pro všechna* $\alpha < \varkappa$ *vztahy* $(f + g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha)$, $(-f)(\alpha) = -f(\alpha)$, $(r \cdot f)(\alpha) = r \cdot f(\alpha)$ *pro* $r \in \mathbf{R}$ *a* $0(\alpha) = 0$ *nazýváme* **součinem souboru modulů** $(\mathbf{N}_\alpha; \alpha < \varkappa)$. *Přitom pro* $\varkappa > 0$ *je* $\prod_{\alpha<\varkappa} \mathbf{N}_\alpha = \{f : \varkappa \to \bigcup_{\alpha<\varkappa} \mathbf{N}_\alpha$ *funkce*$; \forall \alpha < \varkappa\ f(\alpha) \in \mathbf{N}_\alpha\}$ *a pro* $\varkappa = 0$ *je* $\prod_{\alpha<\varkappa} \mathbf{N}_\alpha = \mathbf{0}$.

1.3 Homomorfismy

Definice (Homomorfismus, jádro a obraz) *Buďte* $(\mathbf{M}, +, -, 0, \cdot)$ *a* $(\mathbf{N}, +, -, 0, \cdot)$ *moduly nad okruhem* $\mathbf{R}$*. Zobrazení* $f : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ *nazveme* **homomorfismem modulů** *nebo také* **R-lineárním zobrazením***, pokud pro všechna* $a, b \in \mathbf{M}$ *a všechna* $r \in \mathbf{R}$ *splňuje vztah* $f(ra+b) = rf(a) + f(b)$*. Množinu* $\mathcal{K}\mathrm{er}(f) = \{x \in \mathbf{M} : f(x) = 0\} \subseteq \mathbf{M}$ *nazýváme* **jádrem f** *a množinu* $\mathcal{I}\mathrm{m}(f) = f[\mathbf{M}] \subseteq \mathbf{N}$ *nazýváme* **obrazem f***.*

Označení Symbolem 0 označíme *nulový homomorfismus*, to znamená zobrazení $0 : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ definované vztahem $0(m) = 0 \ \forall m \in \mathbf{M}$. Homomorfismus, který je prostý a na, nazýváme *isomorfismem*. Jsou-li moduly $\mathbf{M}$ a $\mathbf{N}$ isomorfní, značíme tuto skutečnost $\mathbf{M} \simeq \mathbf{N}$, nebo též $\mathbf{M} \overset{\varphi}{\simeq} \mathbf{N}$, cheme-li zdůraznit, že isomorfismem je zobrazení φ.

Lemma 6 *Jsou-li* $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ *moduly a* $f : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ *homomorfismus, potom:*

1. $f(0) = 0$ *a* $\forall m \in \mathbf{M} : f(-m) = -f(m)$
2. $\mathcal{K}\mathrm{er}(f) \leq \mathbf{M}$ *a* $\mathcal{I}\mathrm{m}(f) \leq \mathbf{N}$
3. f *je prosté, právě když* $\mathcal{K}\mathrm{er}(f) = \mathbf{0}$
4. f *je na, právě když* $\mathcal{I}\mathrm{m}(f) = \mathbf{N}$

Pozorování 7: *Máme-li moduly* $\mathbf{N} \leq \mathbf{M}$*, potom zobrazení* $\pi_{\mathbf{N}} : \mathbf{M} \to \mathbf{M}/\mathbf{N}$ *definované předpisem* $\pi_{\mathbf{N}}(x) = x + \mathbf{N}$ *pro* $x \in \mathbf{M}$ *je homomorfismus, který je na, což lze snadno ověřit. Nazývá se* **kanonická projekce podle (modulo) N***.*

Věta 8 (První věta o isomorfismu) *Buďte* $\mathbf{M}$ *a* $\mathbf{N}$ *moduly a* $f : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ *homomorfismus. Potom* $\mathbf{M}/\mathcal{K}\mathrm{er}(f) \simeq \mathcal{I}\mathrm{m}(f)$*.*

Věta 9 (Druhá věta o isomorfismu) *Buďte* $\mathbf{K} \leq \mathbf{N} \leq \mathbf{M}$ *moduly. Potom platí* $(\mathbf{M}/\mathbf{K})/(\mathbf{N}/\mathbf{K}) \simeq \mathbf{M}/\mathbf{N}$*.*

Věta 10 (Třetí věta o isomorfismu) *Buďte* $\mathbf{K} \leq \mathbf{M}$ *a* $\mathbf{N} \leq \mathbf{M}$ *podmoduly modulu* $\mathbf{M}$*. Potom platí* $(\mathbf{K} + \mathbf{N})/\mathbf{K} \simeq \mathbf{N}/(\mathbf{K} \cap \mathbf{N})$*.*

2 Vysoké okruhy obecné

V této kapitole nejprve uvedeme známá tvrzení o noetherovských a artinovských modulech, poté se podíváme na vysoké okruhy (tall rings) podle práce [1] a nakonec uvedeme některé příklady jak okruhů, které jsou vysoké, tak i okruhů, které vysoké nejsou.

2.1 Noetherovské a artinovské moduly

Nyní uvedeme některé pro naše úvahy důležité pojmy, které budeme dále využívat. Tvrzení zde uvedená lze také nalézt např. v [3]

Definice (Noetherovský modul a okruh) *Modul* $(\mathbf{M}, +, -, 0, \cdot)$ *nazýváme* **noetherovský**, *pokud neexistuje nekonečná posloupnost* $\left(\mathbf{N}_j\right)_{j<\omega}$ *podmodulů taková, že by pro každé* $j \in \omega$ *platilo* $\mathbf{N}_j < \mathbf{N}_{j+1}$.

Okruh $(\mathbf{R}, +, -, 0, \cdot, 1)$ *nazýváme* **zleva noetherovský**, *pokud* $\mathbf{R}$ *jakožto levý* $\mathbf{R}$*-modul je noetherovský.*

Definice (Artinovský modul a orkuh) *Modul* $(\mathbf{M}, +, -, 0, \cdot)$ *nazýváme* **artinovský**, *pokud neexistuje nekonečná posloupnost* $\left(\mathbf{N}_j\right)_{j<\omega}$ *podmodulů taková, že by pro každé* $j \in \omega$ *platilo* $\mathbf{N}_j > \mathbf{N}_{j+1}$.

Okruh $(\mathbf{R}, +, -, 0, \cdot, 1)$ *nazýváme* **zleva artinovský**, *pokud* $\mathbf{R}$ *jakožto levý* $\mathbf{R}$*-modul je artinovský.*

Zformulujeme a dokážeme některé základní vlastnosti noetherovských a artinovských modulů.

Věta 11

1. *Modul* $\mathbf{M}$ *je noetherovský, právě když každý podmodul* $\mathbf{N} \leq \mathbf{M}$ *je konečně generovaný.*

2. *Jsou-li* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ *moduly,* $\mu : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *prostý homomorfismus a* $\pi : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ *surjektivní homomorfismus splňující* $\mathcal{I}\mathrm{m}(\mu) = \mathcal{K}\mathrm{er}(\pi)$, *potom* $\mathbf{B}$ *je noetherovský (artinovský), právě když* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{C}$ *jsou noetherovské (artinovské).*

Důkaz.

1. Předpokládejme, že existuje $\mathbf{N} \leq \mathbf{M}$ podmodul, který není konečně generovaný. Potom existuje posloupnost $(x_j)_{j<\omega}$ prvků $x_j \in \mathbf{N}$, $x_j \neq 0$, taková, že $0 < \mathbf{N}_0$ a $\forall j \in \omega : \ \mathbf{N}_j < \mathbf{N}_{j+1} < \mathbf{N}$ pro podmoduly $\mathbf{N}_0 = \mathbf{R}x_0$ a $\mathbf{N}_{j+1} = \mathbf{N}_j + \mathbf{R}x_{j+1}$ $(j < \omega)$. Potom ale posloupnost podmodulů $\left(\mathbf{N}_j\right)_{j<\omega}$ modulu $\mathbf{M}$ je ve sporu s jeho noetherovskostí.

   Naopak pokud by $\mathbf{M}$ nebyl noetherovský, pak existuje rostoucí posloupnost podmodulů $\left(\mathbf{N}_j\right)_{j<\omega}$. Definujme modul $\mathbf{N} = \bigcup\limits_{j<\omega} \mathbf{N}_j \leq \mathbf{M}$ a nalezněme z předpokladu jeho konečnou množinu generátorů $G = \{x_i\,;\, i < n\}$. Potom ale $G \subseteq \mathbf{N}_k$ pro jisté $k < \omega$, a tedy $\mathbf{N} = \sum\limits_{i<n} \mathbf{R}x_i \leq \mathbf{N}_k < \mathbf{N}_{k+1} \leq \mathbf{N}$, což je spor. Tedy $\mathbf{M}$ je noetherovský.

2. Předpokládejme, že $\mathbf{B}$ je noetherovský. Je-li $\mathbf{C}' \leq \mathbf{C}$, potom $\pi^{-1}[\mathbf{C}'] \leq \mathbf{B}$ je konečně generovaný - existuje $n < \omega$ a prvky $b_j \in \pi^{-1}[\mathbf{C}']$, $(j < n)$, že $\langle b_j\,;\, j < n\rangle = \pi^{-1}[\mathbf{C}']$. Potom $\langle \pi(b_j)\,;\, j < n\rangle = \mathbf{C}'$, tedy $\mathbf{C}'$ je konečně generovaný a $\mathbf{C}$ je noetherovský podle 1. bodu. Dále $\mu^{-1} : \mu[\mathbf{A}] \to \mathbf{A}$ je surjektivní homomorfismus. Protože v $\mu[\mathbf{A}] \leq \mathbf{B}$ je každý podmodul konečně generovaný (neboť $\mathbf{B}$ je noetherovský), je podle předchozí úvahy rovněž $A = \mu^{-1}[\mu[\mathbf{A}]]$ noetherovský.

   Naopak předpokládejme, že $\mathbf{A}$ i $\mathbf{C}$ jsou noetherovské. Buď $\left(\mathbf{B}_j\right)_{j<\omega}$ neklesající posloupnost podmodulů modulu $\mathbf{B}$. Potom $\left(\mu^{-1}[\mathbf{B}_j]\right)_{j<\omega}$ je posloupnost podmodulů modulu $\mathbf{A}$. Tedy existuje $m < \omega$, že $\forall j < \omega : \ \mu^{-1}[\mathbf{B}_m] = \mu^{-1}[\mathbf{B}_{m+j}]$ ($\mathbf{A}$ je noetherovský). Dále $\left(\pi[\mathbf{B}_j]\right)_{j<\omega}$ je posloupnost podmodulů modulu $\mathbf{C}$, a tedy existuje $n < \omega$, $m \leq n$, takové, že $\forall j < \omega : \ \pi[\mathbf{B}_n] = \pi[\mathbf{B}_{n+j}]$ ($\mathbf{C}$ je noetherovský). Potom $\forall j < \omega$ máme: Je-li $x \in \mathbf{B}_{n+j}$, potom existuje $y \in \mathbf{B}_n$ takové, že $\pi(x) = \pi(y)$, tedy $0 = \pi(x) - \pi(y) = \pi(x - y)$, neboli $x - y \in \mathcal{K}\mathrm{er}(\pi) = \mathcal{I}\mathrm{m}(\mu)$. Protože ale $\mathbf{B}_n \subseteq \mathbf{B}_{n+j}$, platí $x - y \in \mathbf{B}_{n+j}$, a proto existuje $a \in \mu^{-1}[\mathbf{B}_{n+j}]$ takové, že $\mu(a) = x - y$. Protože $n \geq m$, máme $\mu^{-1}[\mathbf{B}_{n+j}] = \mu^{-1}[\mathbf{B}_n]$. Odtud $\mu(a) \in \mathbf{B}_n$, a jelikož $x - y = \mu(a)$ a $y \in \mathbf{B}_n$, dostáváme $x \in \mathbf{B}_n$. Zjistili jsme tedy, že kdykoliv zvolíme $x \in \mathbf{B}_{n+j}$, dostaneme $x \in \mathbf{B}_n$. Jinými slovy $\forall j < \omega : \ \mathbf{B}_{n+j} = \mathbf{B}_n$, tedy $\mathbf{B}$ je noetherovský. Důkaz pro artinovský případ je zcela duální k důkazu pro noetherovský případ.

$\square$

DŮSLEDEK

1. *Každý podmodul a každý faktormodul noetherovského (artinovského) modulu je noetherovský (artinovský).*

2. *Nechť* $\mathbf{K} \leq \mathbf{L} \leq \mathbf{M}$. *Jsou-li* $\mathbf{M}/\mathbf{L}$ *i* $\mathbf{L}/\mathbf{K}$ *noetherovské (artinovské), pak* $\mathbf{M}/\mathbf{K}$ *je noetherovský (artinovský).*

Věta 12 *Je-li* $n < \omega$ *a* $(\mathbf{M}_i)_{i<n}$ *soubor noetherovských (artinovských) modulů, potom* $\prod\limits_{i<n} \mathbf{M}_i$ *je noetherovský (artinovský).*

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí podle n:

1.) $n = 0$. V tomto případě $\prod\limits_{i<n} \mathbf{M}_i = \mathbf{0}$ a nulový modul je zřejmě noetherovský.

2.) Předpokládejme, že tvrzení platí pro n, dokážeme jej pro $n+1$. Předně platí $\prod\limits_{i<n+1} \mathbf{M}_i \simeq \Big(\prod\limits_{i<n} \mathbf{M}_i\Big) \times \mathbf{M}_n$. Definujme $\mu : \prod\limits_{i<n} \mathbf{M}_i \to \prod\limits_{i<n+1} \mathbf{M}_i$ předpisem $\mu\big((m_i)_{i<n}\big) = (m_0, \ldots, m_{n-1}, 0)$ a $\pi : \prod\limits_{i<n+1} \mathbf{M}_i \to \mathbf{M}_n$ předpisem $\pi\big((m_i)_{i<n+1}\big) = m_n$. μ je vnoření součinu $\prod\limits_{i<n} \mathbf{M}_i$ do součinu $\prod\limits_{i<n+1} \mathbf{M}_i$ a π je pojekce na poslední n-tou složku. Obě tato zobrazení jsou homomorfismy, které splňují předpoklady bodu 2 Věty 11, kde položíme $\mathbf{A} = \prod\limits_{i<n} \mathbf{M}_i$, který je noetherovský z indukčního předpokladu, $\mathbf{B} = \prod\limits_{i<n+1} \mathbf{M}_i$ a $\mathbf{C} = \mathbf{M}_n$, který je noetherovský z předpokladu této věty. Dostáváme tak, že modul $\mathbf{B} = \prod\limits_{i<n+1} \mathbf{M}_i$ je také noetherovský. Důkaz pro artinovský případ je zcela duální k důkazu pro noetherovský případ. $\square$

S právě uvedenými fakty o noetherovských a artinovských modulech budeme dále bez jakéhokoliv upozornění pracovat.

2.2 Vysoké moduly

Nyní zavedeme stěžejní pojem této práce. Ten, stejně jako celá tato podkapitola, pochází z práce [1].

Definice (Vysoký modul a vysoký okruh) *Modul* $(\mathbf{M}, +, -, 0, \cdot)$ *nazveme* **vysokým**, *pokud existuje nenoetherovský* $\mathbf{N} \leq \mathbf{M}$ *takový, že* $\mathbf{M}/\mathbf{N}$ *je nenoetherovský. Okruh* $(\mathbf{R}, +, -, 0, \cdot, 1)$ *nazveme* **zleva vysokým**, *pokud každý nenoetherovský modul nad* $\mathbf{R}$ *je vysoký.*

Lemma 13 *Obsahuje-li modul* $\mathbf{M}$ *podmodul* $\mathbf{N}$, *který je vysoký, pak také* $\mathbf{M}$ *je vysoký.*

Důkaz. Buď $\mathbf{K} \leq \mathbf{N}$ nenoetherovský takový, že $\mathbf{N}/\mathbf{K}$ je také nenoetherovský. Potom existuje nekonečně generovaný podmodul $\mathbf{L} \leq \mathbf{N}$ takový, že $\mathbf{L}/\mathbf{K} \leq \mathbf{N}/\mathbf{K}$ je nekonečně generovaný. Máme tedy $\mathbf{K} \leq \mathbf{M}$ nenoetherovský a $\mathbf{L}/\mathbf{K} \leq \mathbf{N}/\mathbf{K} \leq \mathbf{M}/\mathbf{K}$, kde $\mathbf{L}/\mathbf{K}$ je nekonečně generovaný, tedy $\mathbf{M}/\mathbf{K}$ není noetherovský. Odtud $\mathbf{M}$ je vysoký. □

Lemma 14 *Obsahuje-li modul* $\mathbf{M}$ *podmodul* $\mathbf{N} \leq \mathbf{M}$ *takový, že faktormodul* $\mathbf{M}/\mathbf{N}$ *je vysoký, pak také* $\mathbf{M}$ *je vysoký.*

Důkaz. Buď $\mathbf{K} \leq \mathbf{M}$ takový, aby $\mathbf{N} \leq \mathbf{K}$ a aby pro faktormodul $\mathbf{K}/\mathbf{N} \leq \mathbf{M}/\mathbf{N}$ platilo, že $\mathbf{K}/\mathbf{N}$ není noetherovský a že $(\mathbf{M}/\mathbf{N})/(\mathbf{K}/\mathbf{N})$ není noetherovský. Takový podmodul $\mathbf{K}$ existuje, neboť $\mathbf{M}/\mathbf{N}$ je vysoký podle předpokladu. Tedy také $\mathbf{K}$ není noetherovský. Z Věty 9 máme $(\mathbf{M}/\mathbf{N})/(\mathbf{K}/\mathbf{N}) \simeq \mathbf{M}/\mathbf{K}$, neboli $\mathbf{M}/\mathbf{K}$ není noetherovský. Našli jsme tedy nenoetherovský podmodul $\mathbf{K} \leq \mathbf{M}$ takový, že $\mathbf{M}/\mathbf{K}$ není noetherovský. Proto je modul $\mathbf{M}$ vysoký. □

Definice (Nadbytečná podmnožina) *Buď* $(\mathbf{M}, +, -, 0, \cdot)$ *modul a* $B \subseteq \mathbf{M}$. *Řekneme, že* B *je* **nadbytečná**, *pokud existuje* $A \subset B$ *taková, že platí* $\langle A \rangle = \langle B \rangle$. *V opačném případě říkáme, že* B *je* **nenadbytečná**.

Lemma 15 *Je-li A nenadbytečná podmnožina modulu $\mathbf{M}$ a $B \subseteq A$. Potom B je nenadbytečná.*

Důkaz. Je-li $C \subseteq B$ taková, že $\langle C \rangle = \langle B \rangle$, potom použitím Lemmatu 2 dostáváme $\langle C \cup (A \setminus B) \rangle = \langle C \rangle + \langle A \setminus B \rangle = \langle B \rangle + \langle A \setminus B \rangle = \langle B \cup (A \setminus B) \rangle = \langle A \rangle$, tedy protože A je nenadbytečná, máme $C \cup (A \setminus B) = A$, a protože navíc $C \cap (A \setminus B) = \emptyset$, máme odtud $C = A \setminus (A \setminus B) = B$, neboť $B \subseteq A$. Tedy B je nenadbytečná. $\square$

Lemma 16 *Podmnožina $B \subseteq \mathbf{M}$ modulu $\mathbf{M}$ je nenadbytečná, právě když každá konečná podmnožina $C \subseteq B$ je nenadbytečná.*

Důkaz. Buď $C \subseteq B$ konečná podmnožina nenadbytečné $B \subseteq \mathbf{M}$. Potom C je nenadbytečná podle Lemmatu 15. Naopak volme $A \subseteq B$ libovolnou podmnožinu a předpokládejme, že $\langle A \rangle = \langle B \rangle$. Pokud je množina $B \setminus A$ neprázdná, volme $x \in B \setminus A$. Potom $x \in \langle B \rangle$, proto $x \in \langle A \rangle$, a tedy existuje $n < \omega$, $r_i \in \mathbf{R}$ pro $i < n$ a $u_i \in A$ pro $i < n$ takové, že $x = \sum_{i<n} r_i u_i$. Položme dále $C = \{u_i; i < n\} \cup \{x\}$. Potom $C \subseteq B$, ale C je nadbytečná, neboť $\{u_i; i < n\} \subset C$, přičemž $\langle C \rangle = \langle u_i; i < n \rangle$. To je ale spor s předpokladem, že každá konečná $C \subseteq B$ je nenadbytečná. Tedy množina $B \setminus A$ je prázdná. Odtud $A = B$ a množina $B \subseteq \mathbf{M}$ je nenadbytečná. $\square$

Lemma 17 *Buď $\mathbf{M}$ modul a $B \subseteq \mathbf{M}$ nekonečná nenadbytečná. Potom je $\mathbf{M}$ vysoký.*

Důkaz. Označme $\widetilde{\mathbf{M}} = \langle B \rangle$ a položme $B = C \cup D$, kde C i D jsou nekonečné, $C \cap D = \emptyset$. Potom pro podmodul $\mathbf{N} = \langle C \rangle \leq \widetilde{\mathbf{M}}$ je $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{N}$ podle Lemmatu 15 nekonečná nenadbytečná množina, tedy $\mathbf{N}$ není noetherovský. Podle Lemmatu 2 platí $\widetilde{\mathbf{M}} = \mathbf{N} + \langle D \rangle$. Ověříme, že modul $\langle D \rangle / \mathbf{N}$ není konečně generovaný. Pro spor předpokládejme, že existuje $n < \omega$ a prvky $u_i \in \langle D \rangle$ pro $i < n$ takové, že platí $\langle u_i + \mathbf{N}; i < n \rangle = \langle D \rangle / \mathbf{N}$. Pro každé $i < n$ existuje $m_i < \omega$ a $r_j^i \in \mathbf{R}$ a $v_j^i \in D$ pro $j < m_i$ taková, že $u_i = \sum_{j<m_i} r_j^i v_j^i$. Položme $K = \{v_j^i; j < m_i, i < n\}$. Potom $K \subseteq D$ je konečná a $u_i \in \langle M \rangle$ pro všechna $i < n$. Proto $\langle u_i; i < n \rangle \subseteq \langle K \rangle$, odkud $\langle D \rangle / \mathbf{N} = \langle u_i + \mathbf{N}; i < n \rangle = \langle u_i; i < n \rangle / \mathbf{N} \subseteq \langle K \rangle / \mathbf{N} \subseteq \langle D \rangle / \mathbf{N}$, neboli $\langle K \rangle / \mathbf{N} = \langle D \rangle / \mathbf{N}$. Odtud již snadno plyne, že množina $\widetilde{K} = K \cup C$ generuje celý modul $\langle D \rangle + \mathbf{N} = \widetilde{\mathbf{M}} = \langle B \rangle$. Jenže $\widetilde{K} \subset B$ je konečná, což je spor s předpokladem, že B je nenadbytečná. Tedy modul $\langle D \rangle / \mathbf{N}$ není konečně generovaný. Protože $\langle D \rangle / \mathbf{N} \leq \widetilde{\mathbf{M}} / \mathbf{N}$ (neboť $\langle D \rangle \leq \widetilde{\mathbf{M}}$), není modul $\widetilde{\mathbf{M}}/\mathbf{N}$ noetherovský. Protože ani modul $\mathbf{N}$ není noetherovský, je modul $\widetilde{\mathbf{M}} \leq \mathbf{M}$ vysoký. Z Lemmatu 13 dostáváme, že i modul $\mathbf{M}$ je vysoký, což jsme chtěli dokázat. $\square$

Definice *Buď* $(\mathbf{M}, +, -, 0, \cdot)$ *modul nad okruhem* $(\mathbf{R}, +, -, 0, \cdot, 1)$.

- *Definujeme* $\mathcal{J}(\mathbf{M}) = \bigcap\{\mathbf{N} \leq \mathbf{M}; \neg\exists \mathbf{P} : \mathbf{N} < \mathbf{P} < \mathbf{M}\}$. $\mathcal{J}(\mathbf{R})$ *nazýváme* **Jacobsonův radikál**.
- *Dále definujeme* $\mathcal{G}(\mathbf{M}) = \bigcap\{\mathbf{N} \leq \mathbf{M}; \mathbf{M}/\mathbf{N}$ *noetherovský*$\}$.
- *Je-li* $\mathbf{M}$ *noetherovský, pokládáme* $\mathcal{H}(\mathbf{M}) = \mathbf{0}$, *je-li* $\mathbf{M}$ *nenoetherovský, definujeme* $\mathcal{H}(\mathbf{M}) = \bigcap\{\mathbf{N} \leq \mathbf{M}; \mathbf{N}$ *nenoetherovský*$\}$.

Poznámka
a) Jinými slovy $\mathcal{J}(\mathbf{R}) = \bigcap\{\mathbf{N} \leq \mathbf{M}; \mathbf{N}$ je maximální podmodul $\mathbf{M}\}$.
b) Označíme-li množiny $J = \{\mathbf{N} \leq \mathbf{M}; \mathbf{N}$ je maximální podmodul $\mathbf{M}\}$, $G = \{\mathbf{N} \leq \mathbf{M}; \mathbf{M}/\mathbf{N}$ noetherovský$\}$, $H = \{\mathbf{N} \leq \mathbf{M}; \mathbf{N}$ nenoetherovský$\}$ a uvažujeme-li nenoetherovský modul $\mathbf{M}$, máme: Je-li $\mathbf{N} \in J$, potom faktormodul $\mathbf{M}/\mathbf{N}$ je noetherovský, a tedy $\mathbf{N} \in G$. Je-li $\mathbf{N} \in G$, potom nutně $\mathbf{N}$ není noetherovský, a tedy $\mathbf{N} \in H$. Tedy $J \subseteq G \subseteq H$. Odtud $\bigcap H \subseteq \bigcap G \subseteq \bigcap J$. Uvědomíme-li si, že $\mathcal{J}(\mathbf{M}) = \bigcap J$, $\mathcal{G}(\mathbf{M}) = \bigcap G$ a $\mathcal{H}(\mathbf{M}) = \bigcap H$, dostáváme $\mathcal{H}(\mathbf{M}) \subseteq \mathcal{G}(\mathbf{M}) \subseteq \mathcal{J}(\mathbf{M})$.
c) Protože $\mathcal{J}(\mathbf{M})$, $\mathcal{G}(\mathbf{M})$ i $\mathcal{H}(\mathbf{M})$ jsou definovány jako průnik některých podmodulů modulu $\mathbf{M}$, platí též $\mathcal{J}(\mathbf{M}) \leq \mathbf{M}$, $\mathcal{G}(\mathbf{M}) \leq \mathbf{M}$ a $\mathcal{H}(\mathbf{M}) \leq \mathbf{M}$.

Nyní učiníme jednoduchý poznatek:

Pozorování 18: *Je-li* $\mathbf{M}$ *modul, potom platí* $\mathcal{G}(\mathbf{M}/\mathcal{G}(\mathbf{M})) = \mathbf{0}$, *jak dokazuje výpočet* $\mathcal{G}(\mathbf{M}/\mathcal{G}(\mathbf{M})) = \bigcap\{\mathbf{P}/\mathcal{G}(\mathbf{M}) \leq \mathbf{M}/\mathcal{G}(\mathbf{M}); (\mathbf{M}/\mathcal{G}(\mathbf{M}))/(\mathbf{P}/\mathcal{G}(\mathbf{M}))$ *je noetherovský*$\}$ = $= \bigcap\{\mathbf{P}/\mathcal{G}(\mathbf{M}) \leq \mathbf{M}/\mathcal{G}(\mathbf{M}); \mathbf{M}/\mathbf{P}$ *je noetherovský*$\}$, *neboť z Věty 9 dostáváme, že* $(\mathbf{M}/\mathcal{G}(\mathbf{M}))/(\mathbf{P}/\mathcal{G}(\mathbf{M})) \simeq \mathbf{M}/\mathbf{P}$, *a tedy* $(\mathbf{M}/\mathcal{G}(\mathbf{M}))/(\mathbf{P}/\mathcal{G}(\mathbf{M}))$ *je noetherovský, právě když* $\mathbf{M}/\mathbf{P}$ *je noetherovský. Potom dostáváme*
$\mathcal{G}(\mathbf{M}/\mathcal{G}(\mathbf{M})) = \left(\bigcap\{\mathbf{P} \leq \mathbf{M}; \mathbf{M}/\mathbf{P} \text{ je noetherovský}\}\right)/\mathcal{G}(\mathbf{M}) = \mathcal{G}(\mathbf{M})/\mathcal{G}(\mathbf{M}) = \mathbf{0}$.

Lemma 19 *Je-li $\mathbf{M}/\mathcal{G}(\mathbf{M})$ noetherovský a $\mathcal{H}(\mathcal{G}(\mathbf{M})) \neq \mathcal{G}(\mathbf{M})$, potom $\mathbf{M}$ je vysoký.*

Důkaz. Kdyby $\mathcal{G}(\mathbf{M}) = \mathbf{0}$, potom též $\mathcal{H}(\mathcal{G}(\mathbf{M})) = \mathbf{0} = \mathcal{G}(\mathbf{M})$. Tedy $\mathcal{G}(\mathbf{M}) \neq \mathbf{0}$ a $\mathbf{M}$ tedy není noetherovský. Protože $\mathbf{M}/\mathcal{G}(\mathbf{M})$ je noetherovský, ale $\mathbf{M}$ není noetherovský, musí být $\mathcal{G}(\mathbf{M})$ nenoetherovský. Protože $\mathcal{H}(\mathcal{G}(\mathbf{M})) \neq \mathcal{G}(\mathbf{M})$, existuje $\mathbf{P} < \mathcal{G}(\mathbf{M})$ nenoetherovský. Kdyby byl $\mathcal{G}(\mathbf{M})/\mathbf{P}$ noetherovský, tak (z předpokladu máme, že $\mathbf{M}/\mathcal{G}(\mathbf{M})$ je noetherovský) by i $\mathbf{M}/\mathbf{P}$ byl noetherovský, a protože $\mathcal{G}(\mathbf{M})$ je průnik všech podmodulů s touto vlastností, tak bychom dostali $\mathcal{G}(\mathbf{M}) \subseteq \mathbf{P}$, což by byl spor s volbou $\mathbf{P} < \mathcal{G}(\mathbf{M})$. Je proto $\mathcal{G}(\mathbf{M})/\mathbf{P}$ nenoetherovský a $\mathbf{P}$ nenoetherovský, tedy $\mathcal{G}(\mathbf{M})$ je vysoký. Z Lemmatu 13 plyne, že i modul $\mathbf{M}$ je vysoký. □

Věta 20 *Buď $\mathbf{M}$ nenoetherovský modul takový, že $\mathcal{G}(\mathbf{M}) = \mathbf{0}$. Dále předpokládejme, že pro každý konečně generovaný podmodul $\mathbf{I} \leq \mathbf{M}$ je modul $\mathcal{G}(\mathbf{M}/\mathbf{I})$ noetherovský. Potom $\mathbf{M}$ je vysoký.*

Důkaz. Protože $\mathbf{M}$ není noetherovský, existuje $\mathbf{N} \leq \mathbf{M}$ nekonečně generovaný. Zřejmě platí $\mathcal{G}(\mathbf{N}) = \mathbf{0}$. Ukážeme, že existuje nekonečná nenadbytečná podmnožina $\mathbf{N}$. Volme $a_0 \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Protože $\{a_0\}$ je nenadbytečná a $\mathcal{G}(\mathbf{N}) = \mathbf{0}$, existuje podmodul $\mathbf{L}_0 \leq \mathbf{N}$, pro který $\mathbf{N}/\mathbf{L}_0$ je noetherovský a $a_0 \notin \mathbf{L}_0$. Předpokládejme, že máme definovány prvky a_i, $i < k$, a podmoduly $\mathbf{L}_i \leq \mathbf{N}$, $i < k$, splňující:

1. $\forall i < k \; \mathbf{N}/\mathbf{L}_i$ je noetherovský
2. $\forall i < k \; a_i \notin \mathbf{L}_i$
3. $\forall i < k \; \forall j < k : i \neq j \Rightarrow a_j \in \mathbf{L}_i$
4. $\{a_i; i < k\}$ je nenadbytečná podmnožina $\mathbf{N}$

Nyní položme $\tilde{\mathbf{L}} = \bigcap_{i<k} \mathbf{L}_i$ a $\mathbf{I} = \langle a_i; i < k\rangle$. Označme $\pi_{\mathbf{I}} : \mathbf{N} \to \mathbf{N}/\mathbf{I}$ kanonickou projekci (podle Pozorování 7). Potom platí:

- Modul $\mathbf{I} \leq \mathbf{N}$ je konečně generovaný, tedy dle předpokladu věty $\mathcal{G}(\mathbf{N}/\mathbf{I})$ je noetherovský, neboť zřejmě $\mathcal{G}(\mathbf{N}/\mathbf{I}) \leq \mathcal{G}(\mathbf{M}/\mathbf{I})$.
- Modul $(\tilde{\mathbf{L}}+\mathbf{I})/\tilde{\mathbf{L}}$ je noetherovský. Definujeme-li $\nu : \mathbf{N}/\tilde{\mathbf{L}} \to \prod_{i<k} \mathbf{N}/\mathbf{L}_i$ předpisem $\nu(n+\tilde{\mathbf{L}}) = (n+\mathbf{L}_i)_{i<k}$, potom ν je homomorfismus, který je prostý. Pro $a+\tilde{\mathbf{L}}$, $\nu(a+\tilde{\mathbf{L}}) = 0$, máme $a+\mathbf{L}_i = \mathbf{L}_i$ pro všechna $i < k$, tedy $a \in \bigcap_{i<k} \mathbf{L}_i = \tilde{\mathbf{L}}$, neboli

$a + \tilde{\mathbf{L}} = \tilde{\mathbf{L}}$. Tedy $\mathbf{N}/\tilde{\mathbf{L}} \overset{\nu}{\simeq} \mathcal{I}\mathrm{m}(\nu)$, $\mathcal{I}\mathrm{m}(\nu) \leq \prod_{i<k} \mathbf{N}/\mathbf{L}_i$, všechny moduly $\mathbf{N}/\mathbf{L}_i$ jsou noetherovské, a odtud $\mathbf{N}/\tilde{\mathbf{L}}$ je noetherovský. Proto i $(\tilde{\mathbf{L}} + \mathbf{I})/\tilde{\mathbf{L}} \leq \mathbf{N}/\tilde{\mathbf{L}}$ je noetherovský.

- Modul $\mathbf{N}/\mathbf{I}$ není noetherovský: Kdyby byl modul $\mathbf{N}/\mathbf{I}$ noetherovský, potom by byl konečně generovaný, a protože $\mathbf{I}$ je konečně generovaný, byl by i modul $\mathbf{N}$ konečně generovaný, což ale zřejmě neplatí.

Modul $\pi_{\mathbf{I}}[\tilde{\mathbf{L}}]$ není noetherovský, neboť $\pi_{\mathbf{I}}[\tilde{\mathbf{L}}] = \tilde{\mathbf{L}}/(\mathbf{I} \cap \tilde{\mathbf{L}}) \simeq (\tilde{\mathbf{L}} + \mathbf{I})/\mathbf{I}$ podle Věty 10 a $(\mathbf{N}/\mathbf{I})/((\tilde{\mathbf{L}} + \mathbf{I})/\mathbf{I}) \simeq \mathbf{N}/(\tilde{\mathbf{L}} + \mathbf{I})$ podle Věty 9. Přitom $\mathbf{N}/\mathbf{I}$ není noetherovský, zatímco $\mathbf{N}/(\tilde{\mathbf{L}}+\mathbf{I})$ noetherovský je. Protože modul $\mathcal{G}(\mathbf{N}/\mathbf{I})$ je noetherovský, můžeme volit $a_k \in \tilde{\mathbf{L}}$ takové, že $\pi_{\mathbf{I}}(a_k) \in \pi_{\mathbf{I}}[\tilde{\mathbf{L}}] \setminus \mathcal{G}(\mathbf{N}/\mathbf{I})$. Dále volme $\bar{\mathbf{P}} \leq \mathbf{N}/\mathbf{I}$ takový, že $(\mathbf{N}/\mathbf{I})/\bar{\mathbf{P}}$ je noetherovský a $\pi_{\mathbf{I}}(a_k) \notin \bar{\mathbf{P}}$. To lze, neboť $\pi_{\mathbf{I}}(a_k) \notin \mathcal{G}(\mathbf{N}/\mathbf{I})$. Nyní stačí položit $\mathbf{L}_k = \pi_{\mathbf{I}}^{-1}[\bar{\mathbf{P}}]$. Zřejmě $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{L}_k$. Nyní ověříme podmínky 1 až 4 pro prvky a_i, $i < k + 1$:

1. $\bar{\mathbf{P}} = \pi_{\mathbf{I}}(\mathbf{L}_k) = (\mathbf{L}_k)/\mathbf{I}$, tedy $\mathbf{N}/\mathbf{L}_k \simeq (\mathbf{N}/\mathbf{I})/(\mathbf{L}_k/\mathbf{I}) = (\mathbf{N}/\mathbf{I})/\bar{\mathbf{P}}$, a dle naší volby modulu $\bar{\mathbf{P}}$ je $(\mathbf{N}/\mathbf{I})/\bar{\mathbf{P}}$ noetherovský, tedy i $\mathbf{N}/\mathbf{L}_k$ je noetherovský.

2. $a_k \notin \mathbf{L}_k$, neboť $\pi_{\mathbf{I}}(a_k) \notin \bar{\mathbf{P}} = \pi_{\mathbf{I}}[\mathbf{L}_k]$

3. Protože $a_k \in \tilde{\mathbf{L}} = \bigcap_{i<k} \mathbf{L}_i$, máme $a_k \in \mathbf{L}_i$ pro všechna $i < k$. Protože $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{L}_k$ a $a_j \in \mathbf{I}$, máme $a_j \in \mathbf{L}_k$ pro všechna $j < k$.

4. Předpokládejme, že existuje $i < k + 1$ takové, že $a_i \in \langle a_j; j < k + 1 \,\&\, j \neq i\rangle$. Protože $\forall j < k + 1\ j \neq i \Rightarrow a_j \in \mathbf{L}_i$ (jak plyne z třetího bodu) a $\mathbf{L}_i$ je modul, dostáváme, že $\langle a_j; j < k+1 \,\&\, j \neq i\rangle \subseteq \mathbf{L}_i$. Odtud $a_i \in \mathbf{L}_i$, což je spor s druhým bodem. Z této úvahy plyne, že množina $\{a_i; i < k + 1\} \subseteq \mathbf{N}$ je nenadbytečná.

Nyní položme $B = \{a_i; i < \omega\}$. $B \subseteq \mathbf{N}$ je nekonečná nenadbytečná: Zřejmě B je nekonečná. Podle Lemmatu 16 stačí ukázat, že každá konečná podmnožina $C \subseteq B$ je nenadbytečná. Volme proto $C \subseteq B$ konečnou. Potom existuje $n < \omega$ takové, že $C \subseteq \{a_i; i < n\}$, a protože množina $\{a_i; i < n\} \subseteq \mathbf{N}$ je podle čtvrtého bodu nenadbytečná, dostáváme z Lemmatu 15, že C je nenadbytečná. Tedy i B je nenadbytečná. Z Lemmatu 17 dostáváme, že modul $\mathbf{N}$ je vysoký, a z Lemmatu 13 dostáváme nakonec, že modul $\mathbf{M} \geq \mathbf{N}$ je vysoký, což jsme měli dokázat.

$\square$

Věta 21 (Ekvivalentní popis) *Buď* $\mathbf{R}$ *okruh. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

1. $\mathbf{R}$ *je zleva vysoký*

2. *Každý nenoetherovský modul* $\mathbf{M}$ *obsahuje vlastní nenoetherovský podmodul*

Důkaz.

1. $\Rightarrow$ 2.: Tato implikace plyne přímo z definice.

2. $\Rightarrow$ 1.: Buď $\mathbf{M}$ nenoetherovský modul. Rozlišíme dva případy:

a) $\mathbf{M}/\mathcal{G}(\mathbf{M})$ je noetherovský. Protože $\mathbf{M}$ není noetherovský, musí být též $\mathcal{G}(\mathbf{M})$ nenoetherovský. Protože $\mathcal{G}(\mathbf{M})$ je nenoetherovský $\mathbf{R}$-modul, obsahuje podle předpokladu vlastní nenoetherovský podmodul. Proto platí $\mathcal{H}(\mathcal{G}(\mathbf{M})) \neq \mathcal{G}(\mathbf{M})$, a tedy z Lemmatu 19 dostáváme, že $\mathbf{M}$ je vysoký modul.

b) $\mathbf{M}/\mathcal{G}(\mathbf{M})$ není noetherovský. Dokažme, že modul $\mathbf{L} = \mathbf{M}/\mathcal{G}(\mathbf{M})$ je vysoký:
Předpokládejme nejprve, že existuje konečně generovaný podmodul $\mathbf{K} \leq \mathbf{L}$ takový, že $\mathcal{G}(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ není noetherovský. Definujme $\mathbf{P} = (\mathbf{L}/\mathbf{K})/\mathcal{G}(\mathbf{L}/\mathbf{K})$. Pokud není $\mathbf{P}$ noetherovský, máme přímo z definice závěr, že $\mathbf{L}/\mathbf{K}$ je vysoký, pokud je $\mathbf{P}$ noetherovský, potom platí $\mathcal{H}(\mathcal{G}(\mathbf{L}/\mathbf{K})) \neq \mathcal{G}(\mathbf{L}/\mathbf{K})$, neboť $\mathcal{G}(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ není noetherovský, a tedy z předpokladu obsahuje vlastní nenoetherovský podmodul. Použitím Lemmatu 19 opět zjišťujeme, že modul $\mathbf{L}/\mathbf{K}$ je vysoký. Tedy z Lemmatu 14 dostáváme, že modul $\mathbf{L}$ je vysoký.
Předpokládejme nyní, že pro každý konečně generovaný $\mathbf{K} \leq \mathbf{L}$ je modul $\mathcal{G}(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ noetherovský. Z Pozorovnání 18 víme, že $\mathcal{G}(\mathbf{L}) = \mathbf{0}$. Použijeme Větu 20 a zjišťujeme, že modul $\mathbf{L}$ je vysoký.
Skutečně jsme tedy dokázali, že modul $\mathbf{L} = \mathbf{M}/\mathcal{G}(\mathbf{M})$ je vysoký. Z Lemmatu 14 ihned plyne, že i modul $\mathbf{M}$ je vysoký $\square$

2.3 Příklady vysokých a nevysokých okruhů

V této podkapitole uvedeme některé příklady vysokých okruhů. Poté se ale více zaměříme na příklady okruhů, které nejsou vysoké. V následující kapitole se pak pokusíme přijít na některé nutné podmínky pro komutativní nevysoké okruhy. Bude proto dobré mít tyto příklady na paměti.

Příklad 1

Každé těleso je vysoký okruh, neboť každý nenoetherovský modul nad tělesem je nekonečně dimenzionální vektorový prostor, který zřejmě obsahuje vlastní nekonečně dimenzionální podprostor takový, že i faktorprostor je nekonečně dimenzionální.

Definice (polonoetherovský modul) *Modul* $(\mathbf{M}, +, -, 0, \cdot)$ *nazýváme* **polonoetherovský** *(nebo též* **max modul***), pokud každý nenulový podmodul* $\mathbf{0} \neq \mathbf{N} \leq \mathbf{M}$ *obsahuje maximální podmodul.*

Definice (zleva polonoetherovský okruh) *Okruh* $(\mathbf{R}, +, -, 0, \cdot, 1)$ *nazýváme* **zleva polonoetherovský** *(nebo též* **levý max okruh***), pokud každý* $\mathbf{R}$*-modul* $(\mathbf{M}, +, -, 0, \cdot)$ *je polonoetherovský, neboli max modul.*

Věta 22 *Je-li* $(\mathbf{R}, +, -, 0, \cdot, 1)$ *zleva polonoetherovský okruh, pak je zleva vysoký.*

Důkaz. Mějme nenoetherovský modul $\mathbf{M}$. Protože $\mathbf{R}$ je zleva polonoetherovský, existuje maximální podmodul $\mathbf{N} < \mathbf{M}$, neboť $\mathbf{M} \neq \mathbf{0}$. Nyní pro spor předpokládejme, že $\mathbf{N}$ je noetherovský. Podle Pozorování 5 máme, že $\mathbf{M}/\mathbf{N}$ obsahuje pouze dva podmoduly, a to $\mathbf{0} = \mathbf{N}$ a $\mathbf{M}/\mathbf{N}$ ($\mathbf{N}$ je maximální). Tedy faktormodul $\mathbf{M}/\mathbf{N}$ je noetherovský. Potom ale dostáváme, že i modul $\mathbf{M}$ je noetherovský, což je spor. Zjistili jsme tedy, že kdykoliv zvolíme nenoetherovský $\mathbf{R}$-modul $\mathbf{M}$, potom obsahuje vlastní podmodul $\mathbf{N} < \mathbf{M}$, který rovněž není noetherovský. Podle Věty 21 je okruh $\mathbf{R}$ zleva vysoký. □

Příklad 2

Každý zleva perfektní okruh je zleva vysoký. Podle Bassovy věty lze perfektní okruhy charakterizovat mnoha ekvivalentními podmínkami. Jednou z nich je tato: okruh $(\mathbf{R}, +, -, 0, \cdot, 1)$ nazveme **zleva perfektním**, pokud každý $\mathbf{R}$-modul $\mathbf{M} \neq \mathbf{0}$ obsahuje vlastní maximální podmodul a faktorokruh $\mathbf{R}/\mathcal{J}(\mathbf{R})$ lze vyjádřit jako direktní součet minimálních levých ideálů. Odtud je vidět, že každý zleva perfektní okruh je zleva polonoetherovský, a tedy podle Věty 22 také zleva vysoký.

Označení Je-li $\mathbf{M}$ modul nad okruhem $\mathbf{R}$ a $\varkappa$ kardinál, potom značíme $\mathbf{M}^{(\varkappa)} = \{f \in \mathbf{M}^{\varkappa}; \text{množina } \{\alpha < \varkappa; f(\alpha) \neq 0\} \text{ je konečná}\}$. Snadno se lze přesvědčit, že $\mathbf{M}^{(\varkappa)}$ je podmodulem modulu $\mathbf{M}^{\varkappa}$.
Je-li $\mathbf{R}$ okruh, potom symbol $\mathbf{R}[\mathbf{x}]$ značí polynomiální okruh polynomů v neurčité x s koeficienty v okruhu $\mathbf{R}$. Formálně se jedná o okruh $\mathbf{R}^{(\omega)}$, pokud píšeme $f = \sum_{i<n} r_i x^i$ pro $r_i = f(i)$ a $n = \max\{i < \omega; f(i) \neq 0\} < \omega$, kde násobení je určeno vztahy $(r_i x^i) \cdot (s_j x^j) \overset{df}{=} (r_i s_j) x^{(i+j)}$ a dále rozšířeno distributivními zákony. Lehce se ukáže, že $(\mathbf{R}[\mathbf{x}], +, -, 0, \cdot, 1)$ skutečně splňuje všechny vlastnosti z definice okruhu. Přitom $1 = x^0$, a tedy si můžeme představovat, že $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}[\mathbf{x}]$.

Lemma 23 *Buď $\mathbf{R}$ okruh a $\mathbf{I} \leq \mathbf{R}$ jeho levý ideál. Označme $\mathbf{M} = \mathbf{R}/\mathbf{I}$ a $\mathbf{e}^i \in \mathbf{M}^{(\omega)}$ prvek splňující $\mathbf{e}^i(\alpha) = 0$ pro všechna $\alpha \in \omega$, $\alpha \neq i$, a $\mathbf{e}^i(i) = 1$ (zde $1 = 1+\mathbf{I} \in \mathbf{R}/\mathbf{I}$). Potom $\mathbf{M}^{(\omega)}$ je modul nad okruhem $\mathbf{R}[x]$ s násobením $\star$: $\mathbf{R}[\mathbf{x}] \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ daným vztahem $t \star h = \sum_{j<S} \big(\sum_{k \leq \min\{j,n\}} t_k h_j \mathbf{e}^{j-k} \big)$, kde $t \in \mathbf{R}[\mathbf{x}]$ a $h = \sum_{j<S} h_j \mathbf{e}^j \in \mathbf{M}^{(\omega)}$ pro jisté $S < \omega$.*

Důkaz. Nejprve si všimněme, že $\mathbf{M}^{(\omega)}$ je $\mathbf{R}$-modulem. Pro libovolné $t \in \mathbf{R}[\mathbf{x}]$ platí pro jisté $n < \omega$ vztah $t = \sum_{k<n} t_k x^k$, kde $t_k \in \mathbf{R}$. Nyní si uvědomme, že pro libovolné $h \in \mathbf{M}^{(\omega)}$ existují $S < \omega$ a $h_j \in \mathbf{M}$ pro $j < S$ taková, že $h = \sum_{j<S} h_j \mathbf{e}^j$. Stačí totiž položit $S = \max\{j < \omega; h(j) \neq 0\}$ a uvědomit si, že z definice $\mathbf{M}^{(\omega)}$ je množina $\{j < \omega; h(j) \neq 0\}$ konečná, tedy $n < \omega$. Poté stačí volit $h_j = h(j)$ pro $j < n$. Všimněme si, že operace $\star$ rozšiřuje násobení prvků z $\mathbf{M}^{(\omega)}$ skaláry z okruhu $\mathbf{R}$ na násobení všemi skaláry (polynomy) z $\mathbf{R}[\mathbf{x}]$ vztahy $x \star \mathbf{e}^i = \mathbf{e}^{i-1}$ pro $i \geq 1$, $x \star \mathbf{e}^0 = 0$ a $x \star (r \cdot h) = r \cdot (x \star h)$ pro $h \in \mathbf{M}^{(\omega)}$ a $r \in \mathbf{R}$. Nyní je lehké ověřit, že struktura $(\mathbf{M}, +, -, 0, \star)$ je modulem nad okruhem $\mathbf{R}[\mathbf{x}]$. $\square$

Lemma 24 *Buď $\mathbf{I} < \mathbf{R}$ maximální levý ideál okruhu $\mathbf{R}$. Označme $\mathbf{P} = \mathbf{R}/\mathbf{I}$. Potom $\mathbf{P}$ je jednoduchý $\mathbf{R}$-modul (tzn. $\mathbf{0}$ a $\mathbf{P} \neq \mathbf{0}$ jsou jediné jeho $\mathbf{R}$-podmoduly). Uvažujme modul $\mathbf{P}^{(\omega)}$ jako modul nad polynomiálním okruhem $\mathbf{R}[\mathbf{x}]$ ve smyslu Lemmatu 23. Buď dále $\mathbf{K} \leq \mathbf{P}^{(\omega)}$ jeho $\mathbf{R}[\mathbf{x}]$-podmodul. Je-li $0 \neq h \in \mathbf{K}$ jeho nenulový* *prvek, pro který platí* $h = \sum_{i<n} h_i \mathbf{e}^i$ *pro vhodná* $n < \omega$, $n > 0$, *a* $h_i \in \mathbf{P}$, $h_{n-1} \neq 0$, *potom:*

1. *existuje* $\widetilde{h} = \sum_{i<n} \widetilde{h}_i \mathbf{e}^i \in \mathbf{K}$ *splňující* $\widetilde{h}_{n-1} = 1 + \mathbf{I}$,
2. $\mathbf{e}^j \in \mathbf{K}$ *pro všechna* $j < n$

Důkaz.

1. Všimněme si, že $\mathbf{R}h_{n-1} = \langle h_{n-1} \rangle \leq \mathbf{P}$ je nenulový $\mathbf{R}$-podmodul jednoduchého $\mathbf{R}$-modulu $\mathbf{P}$ obsahující $h_{n-1} \neq 0$. Tedy $\langle h_{n-1} \rangle = \mathbf{P}$. Protože $1+\mathbf{I} \in \mathbf{P}$, existuje $s \in \mathbf{R}$ splňující $sh_{n-1} = 1 + \mathbf{I} \in \mathbf{R}h_{n-1} = \langle h_{n-1} \rangle$. Protože $\mathbf{K}$ je podmodul a $h \in \mathbf{K}$, máme $sh \in \mathbf{K}$. Počítejme: $sh = s \cdot \sum_{i<n} h_i \mathbf{e}^i = \sum_{i<n} sh_i \mathbf{e}^i = \sum_{i<n} \widetilde{h}_i \mathbf{e}^i$, kde jsme položili $\widetilde{h}_i = sh_i$. Přitom platí $\widetilde{h}_{n-1} = sh_{n-1} = 1 + \mathbf{I}$. Odtud vidíme, že stačí položit $\widetilde{h} = sh$.

2. Postupujme indukcí podle n:
   $n = 1$: Máme $h = h_0 \mathbf{e}^0 \in \mathbf{K}$. Z předchozího bodu máme, že $\widetilde{h} = \mathbf{e}^0 \in \mathbf{K}$.
   $n \rightsquigarrow n+1$: Předpokládejme, že kdykoliv je $g \in \mathbf{K}$ vyjádřeno ve tvaru $g = \sum_{i<n} g_i \mathbf{e}^i \in \mathbf{K}$, kde $g_{n-1} \neq 0$, potom $\mathbf{e}^j \in \mathbf{K}$ pro všechna $j < n$. Vezměme z předpokladu Lemmatu $h \in \mathbf{K}$, $h = \sum_{i<n+1} h_i \mathbf{e}^i$, kde $h_n \neq 0$. Protože $\mathbf{K}$ je podle předpokladu $\mathbf{R}[\mathbf{x}]$-podmodul modulu $\mathbf{P}^{(\omega)}$, musí být $g = x \star h \in \mathbf{K}$. Počítejme: $g = x \star h = x \star \sum_{i<n+1} h_i \mathbf{e}^i = \sum_{i<n+1} x \star (h_i \mathbf{e}^i) = \sum_{i<n+1} h_i (x \star \mathbf{e}^i) = \sum_{0<i<n+1} h_i \mathbf{e}^{i-1}$, neboť $x \star (h_i \mathbf{e}^i) = h_i (x \star \mathbf{e}^i) = h_i \mathbf{e}^{i-1}$, je-li $0 < i < n+1$, a $x \star (h_0 \mathbf{e}^0) = h_0 (x \star \mathbf{e}^0) = h_0 \cdot 0 = 0$. Tedy $y = \sum_{0<i<n+1} h_i \mathbf{e}^{i-1} = \sum_{i<n} h_{i+1} \mathbf{e}^i = \sum_{i<n} g_i \mathbf{e}^i$, kde $g_i = h_{i+1} \, \forall i < n$. Použijeme nyní indukční předpoklad a vidíme, že $\mathbf{e}^j \in \mathbf{K}$ pro všechna $j < n$. Existují prvky $r_i \in \mathbf{R}$ pro $i < n$ splňující $r_i + \mathbf{I} = h_i$, neboť $h_i \in \mathbf{P} = \mathbf{R}/\mathbf{I}$. Protože $\mathbf{K}$ je $\mathbf{R}[\mathbf{x}]$-modul, musí platit $\bar{h} = \sum_{i<n} r_i \mathbf{e}^i \in \mathbf{K}$, a dále $h_n \mathbf{e}^n = h - \bar{h} \in \mathbf{K}$. Protože $h_n \neq 0$, můžeme použít první bod Lemmatu, podle kterého $\widetilde{h_n \mathbf{e}^n} = \mathbf{e}^n \in \mathbf{K}$. Celkem tedy vidíme, že $\mathbf{e}^j \in \mathbf{K}$ pro všechna $j < n+1$, což jsme měli dokázat.

$\square$

Pozorování 25: *Je-li* $\mathbf{K} < \mathbf{R}$ *vlastní levý ideál okruhu* $\mathbf{R}$*, potom existuje* $\mathbf{I} < \mathbf{R}$ *maximální levý ideál splňující* $\mathbf{K} \leq \mathbf{I}$. *Položme* $\mathcal{I} = \{\mathbf{J} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbf{R}); \mathbf{K} \leq \mathbf{J} < \mathbf{I}\}$. *Z Zornova lemmatu dostáváme, že existuje* $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{I}$ *maximální řetězec. Položme* $\mathbf{I} = \bigcup \mathcal{R}$. *Snadno se ověří, že* $\mathbf{I}$ *je levý ideál a že* $\mathbf{K} \leq \mathbf{I}$. *Předpokládejme nyní, že* $\mathbf{I} \leq \bar{\mathbf{I}} < \mathbf{R}$. *Protože pro všechna* $\mathbf{J} \in \mathcal{I}$ *platí* $\mathbf{J} \leq \mathbf{I}$*, je množina* $\mathcal{R} \cup \{\bar{\mathbf{I}}\} \subseteq \mathcal{I}$ *řetězec. Protože* $\mathcal{R}$ *byl maximální řetězec, je* $\mathcal{R} \cup \{\bar{\mathbf{I}}\} = \mathcal{R}$*, neboli* $\bar{\mathbf{I}} \in \mathcal{R}$*, neboli* $\bar{\mathbf{I}} \leq \mathbf{I}$*, a tedy* $\mathbf{I} = \bar{\mathbf{I}}$. *Pokud* $1 \in \mathbf{I} = \bigcup \mathcal{R}$*, potom existuje* $\mathbf{J} \in \mathcal{I}$ *takové, že* $1 \in \mathbf{J}$. *Protože* $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{I}$*, máme* $\mathbf{J} \in \mathcal{I}$*, což je spor s* $\mathbf{J} < \mathbf{R}$. *Tedy* $1 \notin \mathbf{I}$*, proto* $\mathbf{I} < \mathbf{R}$ *je maximální levý ideál okruhu* $\mathbf{R}$ *obsahující ideál* $\mathbf{K}$. *Protože speciálně* $\mathbf{0} < \mathbf{R}$ *je vždy vlastní levý ideál, obsahuje každý okruh maximální levý ideál.*

Příklad 3

Je-li $(\mathbf{R}, +, -, 0, \cdot, 1)$ libovolný okruh, potom polynomiální okruh jedné neurčité $(\mathbf{R}[\mathbf{x}], +, -, 0, \cdot, 1)$ není zleva vysoký. Podle Věty 21 stačí najít nenoetherovský $\mathbf{R}[x]$-modul $\mathbf{M}$ takový, že kdykoliv je $\mathbf{N} < \mathbf{M}$ jeho podmodul, potom již $\mathbf{N}$ je noetherovský.

Nechť $\mathbf{I} \leq \mathbf{R}$ je maximální levý ideál okruhu $\mathbf{R}$. Takový levý ideál podle Pozorování 25 skutečně existuje. Označme $\mathbf{P} = \mathbf{R}/\mathbf{I}$. Položme $\mathbf{M} = \mathbf{P}^{(\omega)}$. Nyní použijeme Lemma 23 a zavedeme na $\mathbf{M}$ strukturu $\mathbf{R}[\mathbf{x}]$-modulu. Definujme podmoduly $\mathbf{N}_\lambda = \langle \mathbf{e}^i; i < \lambda \rangle \leq \mathbf{M}$ pro $\lambda < \omega$. Snadno se přesvědčíme, že $\mathbf{N}_\lambda$ jsou pro všechna $\lambda < \omega$ $\mathbf{R}[\mathbf{x}]$-podmoduly modulu $\mathbf{M}$. Učiňme následující úvahu: Volme libovolně $0 \neq h \in \mathbf{M}$. Potom existuje $\lambda < \omega$, $\lambda > 0$, že $h \in \mathbf{N}_\lambda \setminus \mathbf{N}_{\lambda-1}$. Pro toto h jsou splněny předpolady Lemmatu 24, a tedy $\mathbf{N}_\lambda \leq \langle h \rangle = \mathbf{R}[\mathbf{x}]h$. Z této úvahy plynou dva závěry: Podmodul $\mathbf{N}_\lambda$ je pro každé $\lambda < \omega$ noetherovský a pro libovolný $\mathbf{N} < \mathbf{M}$ existuje $\lambda < \omega$ takové, že $\mathbf{N} = \mathbf{N}_\lambda$. Pokud zvolíme $\widetilde{\mathbf{N}} \leq \mathbf{N}_\lambda$, potom existuje $\mu \leq \lambda$ takové, že $\widetilde{\mathbf{N}} = \mathbf{N}_\mu$, tedy jediné podmoduly modulu $\mathbf{N}_\lambda$ jsou $\mathbf{N}_\mu$ pro $\mu \leq \lambda$. Proto je každý podmodul $\mathbf{N}_\lambda$ noetherovský. Pokud zvolíme $\mathbf{N} < \mathbf{M}$, potom musí existovat $\lambda_0 < \omega$ takové, že $\mathbf{N} \cap (\mathbf{M} \setminus \mathbf{N}_{\lambda_0+1}) = \emptyset$. Tedy $\mathbf{N} \leq \mathbf{N}_{\lambda_0}$, a proto existuje $\lambda \leq \lambda_0$ takové, že $\mathbf{N} = \mathbf{N}_\lambda$. Učiníme-li jednouché pozorování, že pro podmoduly $\mathbf{N}_\lambda = \langle \mathbf{e}^i; i < \lambda \rangle \leq \mathbf{M}$ platí $\mathbf{N}_0 = \mathbf{0}$ a $\forall \lambda < \omega\ \mathbf{N}_\lambda < \mathbf{N}_{\lambda+1} < \mathbf{M}$, tedy posloupnost $\big(\mathbf{N}_\lambda\big)_{\lambda<\omega}$ je nekonečná rostoucí, zjišťujeme, že modul $\mathbf{M}$ není noetherovský.

Dáme-li předchozí úvahy dohromady, dostáváme, že $\mathbf{R}[\mathbf{x}]$-modul $\mathbf{M}$ není noetherovský. Přitom jediné jeho $\mathbf{R}[\mathbf{x}]$-podmoduly jsou $\mathbf{N}_\lambda$ pro $\lambda < \omega$, přičemž všechny jsou noetherovské. Odtud ihned podle Věty 21 plyne, že $\mathbf{M}$ není vysoký. Proto okruh $\mathbf{R}[\mathbf{x}]$ není zleva vysoký.

Příklad 4

Okruh $\mathbb{Z}$ celých čísel není zleva vysoký. Označme $\mathbb{Q}$ těleso racionálních čísel. Každé racionální číslo $q \in \mathbb{Q}$ lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru $q = \frac{a}{b}$, kde $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$ a a, b nesoudělná. Zvolme p libovolné prvočíslo. Položme $\mathbb{Q}_p = \{\frac{a}{p^k} \in \mathbb{Q}; a \in \mathbb{Z}, k < \omega\}$. Vybrali jsme tedy jen ta racionální čísla, která mají jmenovatele ve tvaru mocniny prvočísla p. Tato množina je spolu se sčítáním, odčítáním a násobením definovaným stejně jako na $\mathbb{Q}$ zřejmě okruhem. My ale uvažujme tuto strukturu jako $\mathbb{Z}$-modul. Potom $\mathbb{Z} < \mathbb{Q}_p$ je jeho $\mathbb{Z}$-podmodulem. Uvažujme nyní faktormodul $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$. Ukážeme, že tento modul je hledaným modulem. Za tímto účelem označme $\mathbb{Q}_{p,n} = \{\frac{a}{p^k} \in \mathbb{Q}; a \in \mathbb{Z}, k < n\}$. Potom $\mathbb{Q}_{p,n} < \mathbb{Q}_p$ jsou pro $0 < n < \omega$ vlastní $\mathbb{Z}$-podmoduly. Přitom $\mathbf{0} = \mathbb{Q}_{p,1}/\mathbb{Z} < \mathbb{Q}_{p,2}/\mathbb{Z} < \ldots < \mathbb{Q}_{p,n}/\mathbb{Z} < \ldots < \mathbb{Z}_{p^\infty}$. $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ tedy není noetherovský. Uvažujme nyní nenulový podmodul $\mathbf{N} < \mathbb{Z}_{p^\infty}$ a $0 \neq \frac{a}{p^k} \in \mathbf{N}$. Protože p je prvočíslo, existuje kladné c takové, že $\frac{c \cdot a - 1}{p^k}$ je jako racilonální číslo číslem celým, neboli v $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ to znamená, že $c \cdot \frac{a}{p^k} = \frac{1}{p^k}$. Odtud snadno odvodíme, že $\mathbb{Q}_{p,k}/\mathbb{Z} \leq \mathbf{N}$. Tedy jedinými vlastními $\mathbb{Z}$-podmoduly modulu $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ jsou podmoduly $\mathbb{Q}_{p,n}$ pro $0 < n < \omega$. Každý podmodul $\mathbb{Q}_{p,n}$ má však jen konečně mnoho prvků, je proto noetherovský. Protože jsme našli nenoetherovský $\mathbb{Z}$-modul, jehož každý vlastní podmodul už noetherovský je, dostáváme podle Věty 21, že okruh $\mathbb{Z}$ není zleva vysoký. (Právě sestrojená abelovská grupa $(\mathbb{Z}_{p^\infty}, +, -, 0)$ se nazývá Prüferova p-grupa.)

3 Komutativní vysoké okruhy

V této kapitole se pokusíme nalézt některé nutné podmínky a postačující podmínky pro to, aby komutativní okruh byl vysoký.

3.1 Předběžné úvahy

Neprve se podívejme na vlastnosti okruhu, který není vysoký. V takovém případě podle Věty 21 existuje nenoetherovský modul $\mathbf{M}$ takový, že každý jeho vlastní podmodul už noetherovský je. Budeme říkat, že takovýto modul **prokazuje nevysokost** modulu $\mathbf{M}$.

Pozorování 26: *Modul* $\mathbf{M}$ *už musí být nutně (nekonečně) spočetně generovaný. Konečně generovaný být nemůže, neboť* $\mathbf{M}$ *není noetherovský, a tedy by musel obsahovat vlastní nekonečně generovaný podmodul. Ten by však nebyl noetherovský. Vlastní nenoetherovský podmodul ale modul* $\mathbf{M}$ *neobsahuje. Tedy modul* $\mathbf{M}$ *není konečně generovaný. Pokud by neexistovala nekonečná spočetná generující množina, pak v libovolné nespočetné generující* $G \subseteq \mathbf{M}$ *existuje vlastní spočetná část* $G_0 = \{g_i; i < \omega\}$ *splňující pro všechna* $n < \omega$ *podmínku* $g_n \notin \langle g_i; i < n\rangle$*. V takovém případě by* $\mathbf{N} = \langle G_0\rangle$ *byl nenoetherovský vlastní podmodul modulu* $\mathbf{M}$*. Ale takový podmodul neexistuje, protože předpokládáme, že* $\mathbf{M}$ *není vysoký. Tedy* $\mathbf{M}$ *musí být spočetně generovaný.*

Lemma 27 *Buď* $\mathbf{M}$ *modul, který prokazuje nevysokost okruhu* $\mathbf{R}$*. Je-li* $\mathbf{N} < \mathbf{M}$ *jeho vlastní podmodul, potom faktormodul* $\mathbf{M}/\mathbf{N}$ *rovněž prokazuje nevysokost okruhu* $\mathbf{R}$*.*

Důkaz. Protože $\mathbf{N} \neq \mathbf{M}$, je modul $\mathbf{N}$ noetherovský, a tedy faktormodul $\mathbf{M}/\mathbf{N}$ není noetherovský. Pro podmodul $\bar{\mathbf{N}} < \mathbf{M}/\mathbf{N}$ volme podmodul $\mathbf{K} < \mathbf{M}$ takový, že $\mathbf{N} \leq \mathbf{K}$ a $\bar{\mathbf{N}} = \mathbf{K}/\mathbf{N}$. Protože moduly $\mathbf{N}$ i $\mathbf{K}$ jsou noetherovské, je noetherovský také $\mathbf{K}/\mathbf{N}$. Tedy každý vlastní podmodul $\mathbf{M}/\mathbf{N}$ už noetherovský je, proto $\mathbf{M}/\mathbf{N}$ je nevysoký prokazující nevysokost $\mathbf{R}$ □

Definice (Anihilátor) *Buď* $(\mathbf{M}, +, -, 0, \cdot)$ *modul nad okruhem* $(\mathbf{R}, +, -, 0, \cdot, 1)$. *Označme* $\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{M}) = \{r \in \mathbf{R}; r\mathbf{M} = \mathbf{0}\}$. *Množina* $\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{M})$ *se nazývá* **anihilátor modulu M**. *Pro* $m \in \mathbf{M}$ *značí* $\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(m)$ **anihilátor** *prvku* m*, tj. množinu* $\{r \in \mathbf{R}; r \cdot m = 0\}$.

Poznámka

a) Je-li $\mathbf{R}$ libovolný okruh a $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}$ jeho levý ideál, který je zároveň pravým ideálem, pak $\mathbf{I}$ nazýváme stručně ideál.

b) Je-li $\mathbf{I}$ ideál libovolného okruhu $\mathbf{R}$, potom $\mathbf{I}$ určuje ekvivalenci $\sim$ podle Lemmatu 3, pro kterou navíc pro každé $r, s, t \in \mathbf{R}$ platí vztahy $(s + \mathbf{I})r = t + \mathbf{I} \Leftrightarrow sr \sim t$ a $r(s + \mathbf{I}) = t + \mathbf{I} \Leftrightarrow rs \sim t$. V takovém případě můžeme na množině $\mathbf{R}/\mathbf{I}$ definovat navíc $(r+\mathbf{I})\cdot(s+\mathbf{I}) \overset{df}{=} (rs)+\mathbf{I}$ a položit $1 \overset{df}{=} 1+\mathbf{I}$. Potom struktura $(\mathbf{R}/\mathbf{I}, +, -, 0, \cdot, 1)$ je okruhem, který se nazývá **faktorokruh**.

Lemma 28 *Pro modul* $\mathbf{M}$ *nad okruhem* $\mathbf{R}$ *je* $\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{M})$ *ideál okruhu* $\mathbf{R}$*. Pro* $m \in \mathbf{M}$ *je* $\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(m)$ *levý ideál okruhu* $\mathbf{R}$.

Důkaz. Ověření, že $\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{M})$ je levý ideál, je jednoduché. Pro $r \in \mathbf{R}$ a $p \in \mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{M})$ máme $(pr)\mathbf{M} = p(r\mathbf{M}) \subseteq p \cdot \mathbf{M} = \mathbf{0}$, tedy $pr \in \mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{M})$. Tedy $\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{M})$ je také pravý ideál okruhu $\mathbf{R}$, a proto je (oboustranným) ideálem.

Ověřme, že $\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(m)$ je levý ideál. Je-li $r \in \mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(m)$ a $s \in \mathbf{R}$, potom $rm = 0$, a tedy $(sr)m = s(rm) = s \cdot 0 = 0$, tedy $sr \in \mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(m)$. Ostatní vlastnosti jsou jednoduché. $\square$

Definice (Esenciální podmodul) *Podmodul* $\mathbf{N}$ *modulu* $(\mathbf{M}, +, -, 0, \cdot)$ *nazýváme* **esenciální**, *pokud pro každý* $\mathbf{0} \neq \mathbf{K} \leq \mathbf{M}$ *platí, že* $\mathbf{K} \cap \mathbf{N} \neq \mathbf{0}$. *V takovém případě píšeme* $\mathbf{N} \trianglelefteq \mathbf{M}$.

Definice (Injektivní modul) *Modul* $(\mathbf{M}, +, -, 0, \cdot)$ *nazýváme* **injektivní**, *pokud pro každé dva moduly* $\mathbf{K}$ *a* $\mathbf{L}$ *spolu s vnořením* $\nu\colon \mathbf{K} \hookrightarrow \mathbf{L}$ *lze pro každý homomorfismus* $f\colon \mathbf{K} \to \mathbf{M}$ *nalézt homomorfismus* $g\colon \mathbf{L} \to \mathbf{M}$ *splňující* $g \circ \nu = f$.

Věta 29 ([3] **18.10. Theorem.**) *Je-li* $\mathbf{M}$ *libovolný modul, pak existuje modul* $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{M})$ *splňující:*

- $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{M})$ *je injektivní*
- $\mathbf{M} \trianglelefteq \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{M})$
- *pro každý injektivní modul* $\mathbf{K}$ *splňující* $\mathbf{M} \trianglelefteq \mathbf{K}$ *existuje isomorfismus* $\varphi\colon \mathbf{K} \to \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{M})$ *takový, že* $\varphi \restriction \mathbf{M} = id_{\mathbf{M}}$.

Definice (Injektivní obal) *Modul* $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{M})$ *z předchozí Věty nazýváme* **injektivní obal** *modulu* $\mathbf{M}$.

Pozorování 30: *Je-li* $\mathbf{M}$ *modul a* $m \in \mathbf{M}$, *potom* $\mathbf{R}m \simeq \mathbf{R}/\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(m)$. *Definujeme-li totiž zobrazení* $\varphi_m\colon \mathbf{R} \to \mathbf{M}$ *předpisem* $\varphi_m(r) = rm$, *potom* $\mathcal{K}\mathrm{er}(\varphi_m) = \mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(m)$ *a* $\mathcal{I}\mathrm{m}(\varphi_m) = \mathbf{R}m$. *Podle Věty 8 platí* $\mathbf{R}/\mathcal{K}\mathrm{er}(\varphi_m) \simeq \mathcal{I}\mathrm{m}(\varphi_m)$.

Mějme nyní $\mathbf{M}$ modul, který prokazuje nevysokost okruhu $\mathbf{R}$. Zvolme $0 \neq m \in \mathbf{M}$. Potom pro cyklický modul $\mathbf{R}m$ platí $\mathbf{R}m \simeq \mathbf{R}/\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(m)$ podle Pozorování 30. Protože $m \neq 0$, je $\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(m) < \mathbf{R}$. Podle Prozorování 25 existuje maximální ideál $\mathbf{I}$ splňující $\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(m) \leq \mathbf{I} < \mathbf{R}$. Potom $\mathbf{I}/\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(m) < \mathbf{R}/\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(m)$ je maximální podmodul, přičemž platí $\mathbf{I}m = \mathbf{I}\cdot\mathbf{R}m \simeq \mathbf{I}\cdot(\mathbf{R}/\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(m)) = \mathbf{I}/\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(m)$, a tedy faktormodul $\mathbf{R}m/\mathbf{I}m$ je jednoduchý, neboť $\mathbf{R}m/\mathbf{I}m \simeq (\mathbf{R}/\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(m))/(\mathbf{I}/\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(m)) \simeq \mathbf{R}/\mathbf{I}$ podle Věty 9. Označme $\mathbf{L} = \mathbf{R}m/\mathbf{I}m$. Uvážíme-li nyní inklusi $\iota\colon \mathbf{L} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{L})$ a projekci $\pi_{\mathbf{I}m}\colon \mathbf{R}m \to \mathbf{L}$, dostáváme zobrazení $\iota \circ \pi_{\mathbf{I}m}\colon \mathbf{R}m \to \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{L})$. Dále uvažme inklusi $\mu\colon \mathbf{R}m \subseteq \mathbf{M}$. Protože $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{L})$ je injektivní, existuje homomorfismus $g\colon \mathbf{M} \to \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{L})$ splňující $g \circ \mu = \iota \circ \pi_{\mathbf{I}m}$. Z Věty 8 dostáváme, že $\mathcal{I}\mathrm{m}(g) \simeq \mathbf{M}/\mathcal{K}\mathrm{er}(g)$. Protože $\mathbf{0} \neq \mathbf{L} \subseteq \mathcal{I}\mathrm{m}(g)$, je $\mathcal{K}\mathrm{er}(g) < \mathbf{M}$, a tedy podle Lemmatu 27 též $\mathcal{I}\mathrm{m}(g) \simeq \mathbf{M}/\mathcal{K}\mathrm{er}(g)$ prokazuje nevysokost okruhu $\mathbf{R}$. Přitom ale $\mathcal{I}\mathrm{m}(g)$ obsahuje jednoduchý podmodul $\mathbf{L}$, který je navíc esenciální, neboť $\mathbf{L} \trianglelefteq \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{L})$ a $\mathcal{I}\mathrm{m}(g) \leq \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{L})$. Z této úvahy plyne následující

Pozorování 31: *Pokud okruh* $\mathbf{R}$ *není zleva vysoký a* $\mathbf{I} < \mathbf{R}$ *jeho maximální ideál, pak existuje nenoetherovský modul* $\mathbf{M}$ *prokazující nevysokost okruhu* $\mathbf{R}$ *a jednoduchý modul* $\mathbf{S}$ *takové, že* $\mathbf{S} \trianglelefteq \mathbf{M}$. *Přitom platí* $\mathbf{S} \simeq \mathbf{R}/\mathbf{I}$. *Stačí podle předchozí úvahy volit* $\mathbf{M} = \mathcal{I}\mathrm{m}(g)$ *a* $\mathbf{S} = \mathbf{L}$.

3.2 Nutné podmínky pro nevysokost

Definice (Komutativní okruh) *Okruh* $(\mathbf{R}, +, -, 0, \cdot, 1)$ *nazýváme* **komutativní**, *pokud* $\forall r, s \in \mathbf{R} : r \cdot s = s \cdot r$.

Definice (Prvoideál) *Je-li* $(\mathbf{R}, +, -, 0, \cdot, 1)$ *komutativní okruh a* $\mathbf{I} \leq \mathbf{R}$ *jeho ideál, pak* $\mathbf{I}$ *nazýváme* **prvoideálem** *okruhu* $\mathbf{R}$*, pokud pro všechna* $r, s \in \mathbf{R}$ *splňuje implikaci* $rs \in \mathbf{I} \Rightarrow r \in \mathbf{I} \vee s \in \mathbf{I}$.

Pozorování 32: *Každý maximální ideál je prvoideálem. Buď* $\mathbf{I} < \mathbf{R}$ *maximální a* $r, s \in \mathbf{R}$ *taková, že* $rs \in \mathbf{I}$*, ale* $r \notin \mathbf{I}$*. Potom* $\mathbf{I} + \mathbf{R}r \supset \mathbf{I}$*, a tedy* $\mathbf{I} + \mathbf{R}r = \mathbf{R}$*, neboť* $\mathbf{I}$ *je maximální. Existuje tedy* $i \in \mathbf{I}$ *a* $q \in \mathbf{R}$ *taková, že* $i + qr = 1$*. Odtud* $is + qrs = s$*. Protože* $i \in \mathbf{I}$*, máme* $is \in \mathbf{I}$*, a protože* $rs \in \mathbf{I}$*, máme* $qrs \in \mathbf{I}$*. Odtud nakonec* $s = is + qrs \in \mathbf{I}$*. Ověřili jsme tedy, že pokud je* $\mathbf{I} < \mathbf{R}$ *maximální ideál okruhu* $\mathbf{R}$ *a* $r, s \in \mathbf{R}$ *splňující* $rs \in \mathbf{I}$*, potom* $r \in \mathbf{I} \vee s \in \mathbf{I}$.

Definice (Obor integrity) *Pokud komutativní okruh* $(\mathbf{R}, +, -, 0, \cdot, 1)$ *splňuje pro všechna* $r, s \in \mathbf{R}$ *iplikaci* $rs = 0 \Rightarrow r = 0 \vee s = 0$*, potom okruh* $\mathbf{R}$ *nazýváme* **obor integrity**.

Pozorování 33: *Je-li* $\mathbf{R}$ *komutativní okruh a* $\mathbf{P} < \mathbf{R}$ *jeho vlastní prvoideál, potom faktorokruh* $\mathbf{R}/\mathbf{P}$ *je oborem integrity. Skutečně, pro* $a, b \in \mathbf{R}/\mathbf{P}$ *splňující* $ab = 0$ *existují* $r, s \in \mathbf{R}$ *splňující* $rs \in \mathbf{P}$ *taková, že* $a = r + \mathbf{P}$ *a* $b = s + \mathbf{P}$*. Protože* $\mathbf{P}$ *je prvoideál a* $rs \in \mathbf{P}$*, je* $r \in \mathbf{P}$ *– potom* $a = r + \mathbf{P} = \mathbf{P} = \mathbf{0}$ *v* $\mathbf{R}/\mathbf{P}$ *– nebo* $s \in \mathbf{P}$ *– potom* $b = s + \mathbf{P} = \mathbf{P} = \mathbf{0}$ *v* $\mathbf{R}/\mathbf{P}$*. Tedy ze vztahu* $ab = 0$ *v* $\mathbf{R}/\mathbf{P}$ *plyne* $a = 0$ *nebo* $b = 0$*. Proto* $\mathbf{R}/\mathbf{P}$ *je oborem integrity.*

Lemma 34 *Buď* $\mathbf{I} < \mathbf{R}$ *maximální ideál oboru integrity* $\mathbf{R}$*. Pokud existuje* $0 < k < \omega$ *takové, že* $\mathbf{I}^k = \mathbf{0}$*, potom* $\mathbf{I} = \mathbf{0}$.

Důkaz. Zvolme $i \in \mathbf{I}$. Předpokládáme-li $\mathbf{I}^k = 0$, máme $i^k = 0$. Protože $\mathbf{R}$ je obor integrity a $i^k = i \cdot i^{k-1}$, potom $i = 0$ nebo $i^{k-1} = 0$. Opakováním této úvahy nakonec dospějeme k tomu, že $i = 0$. Tedy $\mathbf{I} = \mathbf{0}$. □

Poznamenejme, že v komutativním okruhu levý ideál, pravý ideál a ideál splývají.

Nejprve učiníme úvodní pozorování týkající se komutativních nevysokých okruhů. Dále bude proto značit $\mathbf{R}$ komutativní nevysoký okruh a $\mathbf{M}$ jeho modul tuto nevysokost prokazující.

Pozorování 35: *$\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{M})$ je vlastní prvoideál. Definujme pro $t \in \mathbf{R}$ zobrazení $\varphi_t\colon \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ předpisem $\varphi_t(x) = tx\ \forall x \in \mathbf{M}$. Protože $\mathbf{R}$ je komutativní, platí pro $p \in \mathbf{R}$ a $x \in \mathbf{M}$ $\varphi_t(px) = t(px) = (tp)x = (pt)(x) = p(tx) = p\varphi_t(x)$, a tedy φ_t je homomorfismus modulu $\mathbf{M}$. Nyní předpokládejme, že $rs \in \mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{M})$, ale $s \notin \mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{M})$. To znamená, že $\varphi_{rs}[\mathbf{M}] = \mathbf{0}$, ale $\varphi_s[\mathbf{M}] \neq \mathbf{0}$, existuje tedy $y \in \mathbf{M}$ splňující $sy = \varphi_s(y) \neq 0$. Jinými slovy $\mathcal{K}\mathrm{er}(\varphi_{rs}) = \mathbf{M}$, ale $\mathcal{K}\mathrm{er}(\varphi_s) < \mathbf{M}$, neboť $y \notin \mathcal{K}\mathrm{er}(\varphi_s)$. Tedy $\mathcal{K}\mathrm{er}(\varphi_s)$ je noetherovský, a protože $\mathbf{M}$ není noetherovský, není noetherovský též $\mathcal{I}\mathrm{m}(\varphi_s) \simeq \mathbf{M}/\,\mathcal{K}\mathrm{er}(\varphi_s)$. Odtud $\mathcal{I}\mathrm{m}(\varphi_s) = \mathbf{M}$. Snadno se ověří vztah $\varphi_{rs} = \varphi_r \circ \varphi_s$, ze kterého plyne $\mathbf{0} = \varphi_{rs}[\mathbf{M}] = \varphi_r[\varphi_s[\mathbf{M}]] = \varphi_r[\mathcal{I}\mathrm{m}(\varphi_s)] = \varphi_r[\mathbf{M}]$. Odtud máme $r \in \mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{M})$.*

Lemma 36 *V situaci v Pozorování 35 můžeme modul $\mathbf{M}$ uvažovat jako modul nad faktorokruhem $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R}/\,\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{M})$.*

Důkaz. Zřejmě $\mathbf{M}$ bude i nadále splňovat všechny vlastnosti týkající se operací $+$, $-$ a 0 z definice modulu. Zbývá definovat násobení $\cdot\colon \bar{\mathbf{R}} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}$. To definujeme takto: $(r + \mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{M})) \cdot x = rx$. Pokud se přesvědčíme, že definice je korektní, jsou zřejmě splněny i vlastnosti operací $\cdot$ i 1 z definice modulu. Buďte tedy $r, s \in \mathbf{R}$ takové, že $r + \mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{M}) = s + \mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{M})$. Volme libovolné $x \in \mathbf{M}$. Protože $r + \mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{M}) = s + \mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{M})$, máme $r - s \in \mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{M})$, tedy $(r - s) \cdot x = 0$, odkud ihned $(r \cdot x) - (s \cdot x) = 0$, tedy $r \cdot x = s \cdot x$. □

Poznámka
Okruh $\bar{\mathbf{R}}$ z předchozího Lemmatu je oborem integrity.

Nyní vyjděme z této situace. Podle Pozorování 31 existují modul $\mathbf{M}$, jednoduchý modul $\mathbf{S}$ a maximální ideál $\mathbf{I} < \mathbf{R}$ okruhu $\mathbf{R}$ takové, že

- $\mathbf{M}$ prokazuje nevysokost okruhu $\mathbf{R}$
- $\mathbf{S} \trianglelefteq \mathbf{M}$
- $\mathbf{S} \simeq \mathbf{R}/\mathbf{I}$, tedy $\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{S}) = \mathbf{I}$

Podle Pozorování 35 je $\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{M})$ prvoideálem okruhu $\mathbf{R}$ a podle Lemmatu 36 můžeme jak modul $\mathbf{M}$, tak i jeho jednoduchý esenciální podmodul $\mathbf{S}$ uvažovat nad faktorokruhem $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R}/\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{M})$. Ten tedy také není vysoký a je podle Poznámky následující za Lemmatem 36 oborem integrity. Přitom jistě $\mathbf{I} \neq \mathbf{0}$. V opačném případě je totiž $\mathbf{R}$ tělesem, o kterém podle Příkladu 1 víme, že je vysokým okruhem.

Poznámka

Je-li $m \in \mathbf{M}$, potom $\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\langle m \rangle) = \mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(m)$. To plyne ihned ze vztahů $r(sx) = (rs)x = (sr)x = s(rx)$, které platí pro všechna $r, s \in \mathbf{R}$, neboť $\mathbf{R}$ je komutativní.

Pozorování 37: *Je-li $0 \neq x \in \mathbf{M}$ takové, že $\mathbf{I}x = \mathbf{0}$, potom $x \in \mathbf{S}$. Máme totiž $\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(x) = \mathbf{I}$ a podle Pozorování 30 $\mathbf{R}x \simeq \mathbf{R}/\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(x) = \mathbf{R}/\mathbf{I}$. Tedy $\mathbf{R}x$ je nenulový jednoduchý podmodul modulu $\mathbf{M}$. Protože $\mathbf{S}$ je esenciální, je $\mathbf{R}x \cap \mathbf{S} \neq \mathbf{0}$. Protože však $\mathbf{R}x \cap \mathbf{S} \leq \mathbf{S}$ a $\mathbf{S}$ je jednoduchý, musí být $\mathbf{R}x \cap \mathbf{S} = \mathbf{S}$. Protože i $\mathbf{R}x$ je jednoduchý a $\mathbf{R}x \cap \mathbf{S} \leq \mathbf{R}x$, máme také $\mathbf{R}x \cap \mathbf{S} = \mathbf{R}x$. Celkem pak máme $\mathbf{R}x = \mathbf{R}x \cap \mathbf{S} = \mathbf{S}$, tedy skutečně $x \in \mathbf{S}$.*

Naše situace bude nyní taková, že uvažujeme obor integrity $\mathbf{R}$, $\mathbf{I} < \mathbf{R}$ jeho maximální ideál, $\mathbf{M}$ a $\mathbf{S}$ moduly, které splňují tyto vlastnosti:

- $\mathbf{M}$ prokazuje nevysokost okruhu $\mathbf{R}$
- $\mathbf{S} = \{m \in \mathbf{M}; \mathbf{I}m = \mathbf{0}\}$
- $\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{S}) = \mathbf{I}$
- $\mathbf{S} \trianglelefteq \mathbf{M}$

Uvažujme nyní faktormodul $\mathbf{M}/\mathbf{S}$. Pro libovolný podmodul $\mathbf{S} < \mathbf{N} \leq \mathbf{M}$ zvolme libovolně $0 \neq \bar{x} \in \mathbf{N}/\mathbf{S}$. Z Lemmatu 27 plyne, že také modul $\mathbf{M}/\mathbf{S}$ prokazuje nevysokost okruhu $\mathbf{R}$, neboť zřejmě $\mathbf{S} < \mathbf{M}$. Z Pozorování 26 plyne $\mathbf{R}\bar{x} < \mathbf{M}/\mathbf{S}$. Tedy $\mathbf{R}\bar{x}$ je noetherovský vlastní podmodul modulu $\mathbf{M}/\mathbf{S}$. Z faktu, že $\mathbf{R}\bar{x} \simeq \mathbf{R}/\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\bar{x})$ tedy plyne, že také modul $\mathbf{R}/\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\bar{x})$ je noetherovský (přitom $\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\bar{x}) \neq \mathbf{R}$, neboť $\bar{x} \neq 0$). Proto libovolná množina jeho podmodulů obsahuje maximální prvek. Protože $\mathbf{R}/\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\bar{x})$ je také faktorokruh, splývají v tomto případě pojmy podmodul a ideál. Jelikož každý ideál faktorokruhu $\mathbf{R}/\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\bar{x})$ je tvaru $\mathbf{K}/\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\bar{x})$, kde $\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\bar{x}) \leq \mathbf{K} \leq \mathbf{R}$, existuje v každé množině ideálů okruhu $\mathbf{R}$ obsahujících $\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\bar{x})$ maximální prvek.

Uvažujme tedy množinu $\{\mathbf{K} < \mathbf{R}; \mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\bar{x}) \leq \mathbf{K} \,\&\, \exists \bar{y} \in \mathbf{N}/\mathbf{S} : \mathbf{K} = \mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\bar{y})\}$ všech vlastních ideálů okruhu $\mathbf{R}$ obsahujících $\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\bar{x})$, které jsou anihilátorem nějakého prvku modulu $\mathbf{N}/\mathbf{S}$. Tato množina má podle předchozí úvahy maximální prvek. Označme ho $\mathbf{J}$. Dále označme $\bar{n}$ prvek modulu $\mathbf{N}/\mathbf{S}$ splňující $\mathbf{J} = \mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\bar{n})$. Protože $\mathbf{J} \neq \mathbf{R}$, je $\bar{n} \neq 0$.

Lemma 38 *V situaci popsané výše platí, že* $\mathbf{J} = \mathbf{I}$.

Důkaz. Zřejmě stačí dokázat, že $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{J}$, neboť poté již $\mathbf{I} = \mathbf{J}$, protože $\mathbf{I}$ je maximální ideál okruhu $\mathbf{R}$. Označme $n \in \mathbf{N}$ prvek splňující $n + \mathbf{S} = \bar{n}$ a volme libovolné $i \in \mathbf{I}$. Z předpokladu $i\bar{n} = 0$ plyne $i \in \mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\bar{n}) = \mathbf{J}$. Dále proto předpokládejme, že $i\bar{n} \neq 0$, tedy že $in \notin \mathbf{S}$. Odtud plyne $\langle in \rangle \neq \mathbf{0}$ (neboť $in \notin \mathbf{S} \ni 0$), a tedy $\langle in \rangle \cap \mathbf{S} \neq \mathbf{0}$ (neboť $\mathbf{S}$ je esenciální). Tedy existuje $r \in \mathbf{R}$ takové, že $0 \neq rin \in \mathbf{S}$. Nyní si všimněme, že $rn \notin \mathbf{S}$. Jinak pokud by $rn \in \mathbf{S}$, potom $rin = i(rn) = 0$, neboť $i \in \mathbf{I} = \mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{S})$. To by byl ovšem spor s volbou r, neboť předpokládáme $0 \neq rin$. Tedy skutečně $rn \notin \mathbf{S}$. V modulu $\mathbf{M}/\mathbf{S}$ to znamená, že $r\bar{n} \neq 0$. Vidíme tedy, že $\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(r\bar{n}) \neq \mathbf{R}$. Definujme ideál $\tilde{\mathbf{J}}$ okruhu $\mathbf{R}$ jako $\tilde{\mathbf{J}} = \mathbf{J} + \mathbf{R}i$. Zřejmě $\mathbf{J} \leq \tilde{\mathbf{J}}$. Protože předpokládáme, že $i \notin \mathbf{J}$, máme $\mathbf{J} < \tilde{\mathbf{J}}$. Dokažme, že $\tilde{\mathbf{J}} \subseteq \mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(r\bar{n})$. K tomu zvolme $\tilde{j} \in \tilde{\mathbf{J}}$ a k němu nalezněme $s \in \mathbf{R}$ a $j \in \mathbf{J}$ taková, že $\tilde{j} = j + si$. Počítejme v modulu $\mathbf{M}/\mathbf{S}$: $\tilde{j} \cdot r\bar{n} = (j + si)r\bar{n} = jr\bar{n} + sir\bar{n} = rj\bar{n} + s(ri\bar{n}) = 0 + 0 = 0$, neboť $(ri\bar{n}) = 0$ a $j \in \mathbf{J} = \mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\bar{n})$ (odtud $rj\bar{n} = r \cdot 0 = 0$). Dokázali jsme tedy, že $\tilde{\mathbf{J}} \subseteq \mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(r\bar{n}) < \mathbf{R}$ a že $\mathbf{J} < \tilde{\mathbf{J}}$. Přitom $\mathbf{N}$ je podmodul, tedy $rn \in \mathbf{N}$. To ovšem společně s volbou $\mathbf{J}$ jako maximálního anihilátoru dává spor. Proto $i\bar{n} = 0$ a $i \in \mathbf{J}$. □

DŮSLEDEK

Pro každý podmodul $\mathbf{N} \leq \mathbf{M}$, *který splňuje* $\mathbf{S} < \mathbf{N}$, *existuje* $n \in \mathbf{N} \setminus \mathbf{S}$ *takové, že* $\mathbf{I}n \subseteq \mathbf{S}$.

Důkaz. Podle úvahy předcházející Lemmatu 38 volme za $n \in \mathbf{N}$ prvek s maximálním anihilátorem a označme opět $\bar{n} = n + \mathbf{S}$. Na jejím konci jsme si všimli, že $\bar{n} \neq 0$. což znamená, že $n \notin \mathbf{S}$. Máme tedy $n \in \mathbf{N} \setminus \mathbf{S}$. Podle Lemmatu 38 platí $\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\bar{n}) = \mathbf{I}$, což v modulu $\mathbf{M}/\mathbf{S}$ znamená $\mathbf{I}\bar{n} = 0$. V modulu $\mathbf{N}$ to pak znamená $\mathbf{I}n \subseteq \mathbf{S}$. □

Nyní položme $\tilde{\mathbf{S}} = \{v \in \mathbf{M}; \mathbf{I}v \subseteq \mathbf{S}\}$. $\tilde{\mathbf{S}}/\mathbf{S}$ je podmodul $\mathbf{M}/\mathbf{S}$ tvořený těmi prvky, jejichž anihilátor obsahuje ideál $\mathbf{I}$. Přitom jistě víme, že $\tilde{\mathbf{S}}/\mathbf{S} \neq \mathbf{0}$, neboť $\bar{m} \in \tilde{\mathbf{S}}/\mathbf{S}$. Odtud již plyne, že $\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{S}}/\mathbf{S}) = \mathbf{I}$.

Lemma 39 $\quad \tilde{\mathbf{S}}/\mathbf{S} \trianglelefteq \mathbf{M}/\mathbf{S}$.

Důkaz. Uvažujme libovolný podmodul $\mathbf{N}$ modulu $\mathbf{M}$ splňující $\mathbf{S} < \mathbf{N} < \mathbf{M}$. Chceme dokázat, že $\mathbf{N}/\mathbf{S} \cap \tilde{\mathbf{S}}/\mathbf{S} \neq \mathbf{0}$, neboli $\mathbf{N} \cap \tilde{\mathbf{S}} > \mathbf{S}$. Přitom víme, že $\mathbf{N} \cap \tilde{\mathbf{S}} \geq \mathbf{S}$. Podle Důsledku Lemmatu 38 volme $n \in \mathbf{N} \setminus \mathbf{S}$ takové, že $\mathbf{I}n \subseteq \mathbf{S}$. Podle definice podmodulu $\tilde{\mathbf{S}}$ dostáváme $n \in \tilde{\mathbf{S}}$. Tedy $n \in \mathbf{N} \cap \tilde{\mathbf{S}}$. Přitom $n \notin \mathbf{S}$. Odtud ihned plyne, že skutečně platí $\mathbf{N} \cap \tilde{\mathbf{S}} > \mathbf{S}$. Proto $\tilde{\mathbf{S}}/\mathbf{S} \trianglelefteq \mathbf{M}/\mathbf{S}$. $\square$

Shrňme si nyní to, co jsme zjisitili o modulu $\mathbf{M}/\mathbf{S}$ a jeho podmodulu $\tilde{\mathbf{S}}/\mathbf{S}$:

- $\mathbf{M}/\mathbf{S}$ prokazuje nevysokost okruhu $\mathbf{R}$
- $\tilde{\mathbf{S}}/\mathbf{S} = \{\bar{m} \in \mathbf{M}/\mathbf{S}; \mathbf{I}\bar{m} = \mathbf{0}\}$
- $\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{S}}/\mathbf{S}) = \mathbf{I}$
- $\tilde{\mathbf{S}}/\mathbf{S} \trianglelefteq \mathbf{M}/\mathbf{S}$

Faktormodul $\mathbf{M}/\mathbf{S}$ a jeho podmodul $\tilde{\mathbf{S}}/\mathbf{S}$ tedy splňují stejné vlastnosti, které splňuje modul $\mathbf{M}$ a jeho podmodul $\mathbf{S}$. Můžeme tedy všechny předchozí úvahy zopakovat a dále pokračovat induktivně. Informace, které se tak dozvídáme o struktuře modulu $\mathbf{M}$ a okruhu $\mathbf{R}$, shrnuje následující věta.

Věta 40 *Buď $\mathbf{R}$ obor integrity, $\mathbf{0} \neq \mathbf{I} < \mathbf{R}$ jeho maximální ideál a $\mathbf{M}$ modul tak, jak jsme je výše uvažovali. Pro každé $k < \omega$ definujme $\mathbf{S}_k = \{m \in \mathbf{M}; \mathbf{I}^k m = \mathbf{0}\}$ a položme $\mathbf{J}_k = \mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{S}_k)$. Potom:*

1. *pro všechna $k < \omega$ platí $\mathbf{S}_k < \mathbf{S}_{k+1} < \mathbf{M}$,*
2. *pro všechna $k < \omega$ platí $\mathbf{I} \cdot \mathbf{S}_{k+1} \leq \mathbf{S}_k$,*
3. $\mathbf{M} = \bigcup_{k<\omega} \mathbf{S}_k$,
4. $\bigcap_{k<\omega} \mathbf{J}_k = \mathbf{0}$,

5. *pro všechna* $0 < k < \omega$ *existuje* $0 < \mu < \omega$ *takové, že* $\mathbf{S}_{k+1}/\mathbf{S}_k \simeq (\mathbf{R}/\mathbf{I})^{\mu}$*,*

6. *pro všechna* $k < \omega$ *je* $\mathbf{S}_k$ *artinovský i noetherovský podmodul modulu* $\mathbf{M}$*,*

7. *pro všechna* $0 < k < \omega$ *je okruh* $\mathbf{R}/\mathbf{J}_k$ *artinovský,*

8. *pro všechna* $k < \omega$ *platí* $\mathbf{I} \cdot \mathbf{J}_k \leq \mathbf{J}_{k+1}$*,*

9. *pro všechna* $k < \omega$ *platí* $\mathbf{J}_{k+1} < \mathbf{J}_k$*.*

Důkaz.

1. Postupujme indukcí podle k: Pro $k = 0$ je $\mathbf{S}_0 = \mathbf{0}$ a $\mathbf{S}_1 \neq \mathbf{0}$, neboť $\mathbf{S}_1 \trianglelefteq \mathbf{M}$. Přitom $\mathbf{S}_1 < \mathbf{M}$. Nechť tedy platí $\mathbf{S}_k < \mathbf{S}_{k+1}$. Ve faktormodulu $\mathbf{M}/\mathbf{S}_{k+1}$ platí $\mathbf{S}_{k+2}/\mathbf{S}_{k+1} \trianglelefteq \mathbf{M}/\mathbf{S}_{k+1}$ a $\mathbf{S}_{k+2}/\mathbf{S}_{k+1} \neq \mathbf{M}/\mathbf{S}_{k+1}$, tedy odtud $\mathbf{S}_{k+1} < \mathbf{S}_{k+2} < \mathbf{M}$.

2. Tento vztah plyne snadno z definice podmodulů $\mathbf{S}_k$ a ze vztahu $\mathbf{I}^k(\mathbf{I} \cdot \mathbf{S}_{k+1}) = = \mathbf{I}^{k+1}\mathbf{S}_{k+1}$.

3. Z prvního bodu plyne, že $\bigcup\limits_{k<\omega} \mathbf{S}_k$ je podmodul modulu $\mathbf{M}$, který není konečně generovaný. Je tedy nenoetherovským podmodulem modulu $\mathbf{M}$. Protože $\mathbf{M}$ žádné vlastní takovéto podmoduly nemá, musí platit $\bigcup\limits_{k<\omega} \mathbf{S}_k = \mathbf{M}$.

4. Zvolme $r \in \mathbf{R}$. Potom platí $r \cdot \mathbf{M} = r \cdot \bigcup\limits_{k<\omega} \mathbf{S}_k = \bigcup\limits_{k<\omega} \big(r \cdot \mathbf{S}_k\big)$. Z tohoto vztahu dostáváme, že $r \cdot \mathbf{M} = \mathbf{0}$, právě když $\forall k < \omega \ r \cdot \mathbf{S}_k = \mathbf{0}$, neboli jinak řečeno $r \in \mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{M})$, právě když $r \in \bigcap\limits_{k<\omega} \mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{S}_k)$. Odtud $\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{M}) = \bigcap\limits_{k<\omega} \mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{S}_k)$. Protože $\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{M}) = \mathbf{0}$ a $\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{S}_k) = \mathbf{J}_k$, získáme dosazením dokazovaný vztah.

5. Protože $\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{S}_{k+1}/\mathbf{S}_k) = \mathbf{I}$, můžeme podmodul $\mathbf{0} \neq \mathbf{S}_k/\mathbf{S}_{k-1}$ uvažovat nad faktorokruhem $\mathbf{R}/\mathbf{I}$, který je tělesem. Vidíme tedy, že $\mathbf{S}_k/\mathbf{S}_{k-1}$ je direktní sumou jednoduchých $\mathbf{R}$-modulů, které mají všechny anihilátor rovný ideálu $\mathbf{I}$. Proto jsou všechny isomorfní $\mathbf{R}/\mathbf{I}$. Přitom je jich nenulový počet. Konečný počet jich musí být proto, protože $\mathbf{S}_k/\mathbf{S}_{k-1}$ je vlastním podmodulem modulu $\mathbf{M}/\mathbf{S}_{k-1}$, tedy noetherovským, a proto konečně generovaným.

6. Postupujme indukcí podle k: Pro $k = 0$ je $\mathbf{S}_k = \mathbf{0}$ zřejmě artinovský i noetherovský modul. Nechť tedy $\mathbf{S}_k$ je artinovský i noetherovský. Z pátého bodu víme, že modul $\mathbf{S}_{k+1}/\mathbf{S}_k$ je tvořen konečně mnoha jednoduchými moduly, je proto artinovský i noetherovský. Máme tedy $\mathbf{S}_k < \mathbf{S}_{k+1}$ je artinovský i noetherovský a $\mathbf{S}_{k+1}/\mathbf{S}_k$ je artinovský i noetherovský. Tedy i modul $\mathbf{S}_{k+1}$ je artinovský i noetherovský.

7. Protože $\mathbf{S}_k < \mathbf{M}$, je podmodul $\mathbf{S}_k$ konečně generovaný. Označme $G_k \subseteq \mathbf{S}_k$ jeho konečnou podmnožinu generátorů. Definujme zobrazení $f_k\colon \mathbf{R} \to \prod\limits_{g \in G_k} \mathbf{R}g$ předpisem $f_k(r) = (rg)_{g \in G_k}$. f_k je homomorfismus modulů $\mathbf{R}$ a $\prod\limits_{g \in G_k} \mathbf{R}g$. Podle Věty 8 platí $\mathbf{R}/\mathcal{K}\mathrm{er}(f_k) \simeq \mathcal{I}\mathrm{m}(f_k)$. Přitom $\mathcal{I}\mathrm{m}(f_k) \leq \prod\limits_{g \in G_k} \mathbf{R}g$ je artinovský, neboť podle šestého bodu je artinovský modul $\mathbf{S}_k$, tedy i každý jeho podmodul $\mathbf{R}g$, a členů v součinu je jen konečně mnoho. Dále platí $\mathcal{K}\mathrm{er}(f_k) = \mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{S}_k)$: je-li $r \in \mathcal{K}\mathrm{er}(f_k)$, znamená to, že $rg = 0$ pro všechna $g \in G_k$. Tedy $r \in \mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{S}_k)$, neboť G_k generuje celé $\mathbf{S}_k$; naopak je-li $r \in \mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{S}_k)$, potom i $rg = 0$ pro všechna $g \in G_k$, a tedy $r \in \mathcal{K}\mathrm{er}(f_k)$. Proto $\mathbf{R}/\mathbf{J}_k = \mathbf{R}/\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{S}_k) \simeq \mathcal{I}\mathrm{m}(f_k)$ je artinovský modul, a protože je také komutativním okruhem, je také artinovským okruhem.

8. Podle druhého bodu platí $\mathbf{I} \cdot \mathbf{S}_{k+1} \leq \mathbf{S}_k$. Odtud po přenásobení $\mathbf{J}_k = \mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{S}_k)$ máme $(\mathbf{J}_k\mathbf{I})\mathbf{S}_{k+1} \leq \mathbf{0}$. To ovšem znamená, že $\mathbf{J}_k\mathbf{I} \leq \mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{S}_{k+1}) = \mathbf{J}_{k+1}$, což je vztah, který jsme měli dokázat (okruh $\mathbf{R}$ je komutativní, tedy $\mathbf{I} \cdot \mathbf{J}_k = \mathbf{J}_k\mathbf{I}$).

9. Vztah $\mathbf{J}_{k+1} \leq \mathbf{J}_k$ plyne ihned ze vztahu $\mathbf{S}_k < \mathbf{S}_{k+1}$ z prvního bodu. Každý prvek $r \in \mathbf{R}$, který anihiluje celý modul $\mathbf{S}_{k+1}$, musí také anihilovat i jeho podmodul $\mathbf{S}_k$. Předpokládejme nyní, že pro jisté $n < \omega$ platí $\mathbf{J}^n = \mathbf{J}^{n+1}$. Potom máme podle čtvrtého bodu $\mathbf{0} = \bigcap\limits_{k<\omega} \mathbf{J}^k = \mathbf{J}^n$. Přitom ale zřejmě $\mathbf{J}^n \supseteq \mathbf{I}^n$. Odtud by plynulo $\mathbf{I}^n = \mathbf{0}$ a podle Lemmatu 34 dále $\mathbf{I} = \mathbf{0}$, což ale neplatí. Neplatí proto ani $\mathbf{J}^n = \mathbf{J}^{n+1}$ pro žádné $n < \omega$, platí tedy $\mathbf{J}_{k+1} < \mathbf{J}_k$ pro všechna $k < \omega$.

$\square$

3.3 Postačující podmínky pro nevysokost

V této části budeme uvažovat komutativní okruh $\mathbf{R}$ a $\mathbf{0} \neq \mathbf{I} < \mathbf{R}$ jeho maximální ideál splňující:

- $\bigcap\limits_{k<\omega} \mathbf{I}^k = \mathbf{0}$ a $\mathbf{0}$ je prvoideál okruhu $\mathbf{R}$, neboli $\mathbf{R}$ je oborem integrity
- $\forall\, 0 < k < \omega$ je $\mathbf{R}/\mathbf{I}^k$ artinovský okruh

Budeme se snažit ukázat, že $\mathbf{R}$ není vysoký.

Pozorování 41: *Pokud se posloupnost $\mathbf{I} \geq \mathbf{I}^2 \geq \dots$ zastaví, tj. pokud existuje $0 < k < \omega$ takové, že $\mathbf{I}^k = \mathbf{I}^{k+1}$, potom $\mathbf{I} = \mathbf{0}$. Předpokládejme, že existuje $0 < n < \omega$ takové, že $\mathbf{I}^n = \mathbf{I}^{n+1}$. Potom $\forall i < \omega : \mathbf{I}^{n+i} = \mathbf{I}^n$, neboť $\mathbf{I}^{n+2} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{I}^{n+1} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{I}^n = = \mathbf{I}^{n+1} = \mathbf{I}^n$ atd. Odtud $\mathbf{0} = \bigcap\limits_{k<\omega} \mathbf{I}^k = \bigcap\limits_{k<n+1} \mathbf{I}^k = \mathbf{I}^n$, neboť $\mathbf{I}^k \geq \mathbf{I}^{k+1}\, \forall k < \omega$. Tedy $\mathbf{0} = \bigcap\limits_{k<\omega} \mathbf{I}^k = \mathbf{I}^n$ je prvoideál. Zvolíme-li libovolné $m \in \mathbf{I}$, potom $m \cdot m^{n-1} \in \mathbf{I}^n = \mathbf{0}$ a dále odtud $m = 0$. Tedy skutečně $\mathbf{I} = \mathbf{0}$.*

Z předchozího Pozorování tedy plyne, že můžeme předpokládat pro všechna $k < \omega$ platnost vztahu $\mathbf{I}^k > \mathbf{I}^{k+1}$. Jinak totiž $\mathbf{I} = \mathbf{0}$ je maximální ideál, to znamená $\mathbf{R}$ je komutativní těleso, o němž podle Příkladu 1 víme, že je vysokým okruhem.

Lemma 42 *Každý z okruhů $\mathbf{R}/\mathbf{I}^k$ pro $0 < k < \omega$ má jediný maximální ideál $\mathbf{I}/\mathbf{I}^k$.*

Důkaz. Buď $\mathbf{J}/\mathbf{I}^k < \mathbf{R}/\mathbf{I}^k$ maximální ideál. Označme $\mathbf{T} = (\mathbf{R}/\mathbf{I}^k)/(\mathbf{J}/\mathbf{I}^k)$. Zřejmě $\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{T}) = \mathbf{J}$. Podle Věty 9 platí $\mathbf{T} \simeq \mathbf{R}/\mathbf{J}$. Tedy $\mathbf{T}$ je jednoduchý $\mathbf{R}/\mathbf{I}^k$ modul. Přitom $\mathbf{I}/\mathbf{I}^k$ je maximální ideál. Platí proto buď $(\mathbf{I}/\mathbf{I}^k)\mathbf{T} = \mathbf{0}$, nebo $(\mathbf{I}/\mathbf{I}^k)\mathbf{T} = \mathbf{T}$. Předpokládejme nejprve druhou možnost. Z ní indukcí plyne, že $(\mathbf{I}^k/\mathbf{I}^k)\mathbf{T} = \mathbf{T}$. To je ovšem spor, neboť $\mathbf{0} \neq \mathbf{T} = \mathbf{I}^k/\mathbf{I}^k\mathbf{T} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{0}$. Platí tedy $(\mathbf{I}/\mathbf{I}^k)\mathbf{T} = \mathbf{0}$. Odtud dostáváme, že $\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{T}) = \mathbf{I}$. Tedy $\mathbf{J} = \mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{T}) = \mathbf{I}$, což jsme chtěli dokázat. $\square$

Nyní definujeme pojmy, které budeme dále potřebovat, a uvedeme některé vztahy, které mezi těmito pojmy platí.

Definice (Modul konečné délky) *Řekneme, že modul* $(\mathbf{M}, +, -, 0, \cdot)$ *je* **konečné délky**, *pokud existuje* $n < \omega$ *a posloupnost jeho podmodulů* $\left(\mathbf{N}_i\right)_{i \le n}$ *o* $n+1$ *členech, která splňuje* $\mathbf{N}_0 = \mathbf{0}$ *a* $\mathbf{N}_n = \mathbf{M}$, *přičemž pro každé* $i < n$ *je* $\mathbf{N}_{i+1}/\mathbf{N}_i$ *jednoduchý. Posloupnost* $\left(\mathbf{N}_i\right)_{i \le n}$ *nazýváme* **kompoziční řada** *modulu* $\mathbf{M}$ *délky* n.

Definice (Sokl) *Pro modul* $(\mathbf{M}, +, -, 0, \cdot)$ *nad okruhem* $(\mathbf{R}, +, -, 0, \cdot, 1)$ *označme* $\mathcal{S}\mathrm{oc}(\mathbf{M}) = \sum\{\mathbf{K} \le \mathbf{M}; \mathbf{K}$ *je jednoduchý* $\mathbf{R}$*-modul*$\}$.

Věta 43 (Hopkins, [3] **15.20. Theorem.**) *Okruh* $\mathbf{R}$ *je zleva (zprava) artinovský, právě když je zleva (zprava) noetherovský,* $\mathcal{J}(\mathbf{R})$ *je nilpotentní a* $\mathbf{R}/\mathcal{J}(\mathbf{R})$ *lze vyjádřit jako direktní součet minimálních levých (pravých) ideálů.*

Věta 44 (plyne z [4] (**3.86**) **Corollary.**) *Je-li komutativní okruh* $\mathbf{R}$ *artinovský a* $\mathbf{E}$ *jeho injektivní modul, který není rozložitelný, potom* $\mathbf{E}$ *je konečně generovaný.*

Věta 45 ([3] **11.1. Proposition.**) *Modul* $\mathbf{M}$ *nad komutativním okruhem* $\mathbf{R}$ *je konečné délky, právě když je zároveň artinovský i noetherovský.*

Věta 46 ([3] **18.12. Proposition.**, bod (4)) *Buď* $\mathbf{M}$ *modul nad okruhem* $\mathbf{R}$ *a* $n < \omega$. *Potom* $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{M}^n) \simeq (\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{M}))^n$.

Pozorování 47: *Je-li* $\mathbf{R}$*-modul* $\mathbf{M} \neq \mathbf{0}$ *artinovský, potom* $\mathcal{S}\mathrm{oc}(\mathbf{M}) \neq \mathbf{0}$. *K tomu stačí najít jednoduchý podmodul modulu* $\mathbf{M}$. *Volme* $0 \neq x_0 \in \mathbf{M}$. *Je-li* $\mathbf{R}x_0 \le \mathbf{M}$ *jednoduchý, jsme hotovi. Jinak existuje vlastní podmodul* $\mathbf{0} \neq \mathbf{N}_1 < \mathbf{R}x_0$. *Volme* $0 \neq x_1 \in \mathbf{N}_1$. *Dále postupujme indukcí. Protože* $\mathbf{M}$ *je artinovský, posloupnost se musí zastavit na nějakém prvku* $0 \neq x_k \in \mathbf{N}_k$ *pro* $k < \omega$. *Potom* $\mathbf{R}x_k$ *je jednoduchý podmodul modulu* $\mathbf{M}$.

Položme $\mathbf{S} = \mathbf{R}/\mathbf{I}$. $\mathbf{S}$ je jednoduchý $\mathbf{R}$-modul. Protože pro libovolné $0 < n < \omega$ platí $\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{S}) = \mathbf{I} \ge \mathbf{I}^n$, můžeme $\mathbf{S}$ podle Lemmatu 36 uvažovat nad faktorokruhem $\mathbf{R}/\mathbf{I}^n$. Abychom toto rozlišili, bude značka $\mathbf{S}$ znamenat, že modul $\mathbf{S}$ uvažujeme jako $\mathbf{R}$-modul, a značka ${}_{\mathbf{R}/\mathbf{I}^n}\mathbf{S}$ znamenat, že modul $\mathbf{S}$ uvažujeme jako $\mathbf{R}/\mathbf{I}^n$-modul.

Definujme nyní moduly $\mathbf{E}_0 = \mathbf{0}$ a pro $0 < n < \omega$ ${}_{\mathbf{R}/\mathbf{I}^n}\mathbf{E}_n = \boldsymbol{\mathcal{E}}({}_{\mathbf{R}/\mathbf{I}^n}\mathbf{S})$, na něž se můžeme opět dívat také jako na $\mathbf{R}$-moduly. Protože $\mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{E}_n) \supseteq \mathbf{I}^n \supset \mathbf{I}^{n+1}$, můžeme se pro tuto chvíli dívat na $\mathbf{E}_n$ jako na $\mathbf{R}/\mathbf{I}^{n+1}$-modul. Přitom uvažujme inklusi

$\iota\colon {}_{\mathbf{R}/\mathbf{I}^{n+1}}\mathbf{S} \subseteq {}_{\mathbf{R}/\mathbf{I}^{n+1}}\mathbf{E}_{n+1}$ a vnoření $\nu\colon {}_{\mathbf{R}/\mathbf{I}^{n+1}}\mathbf{S} \hookrightarrow {}_{\mathbf{R}/\mathbf{I}^{n+1}}\mathbf{E}_n$. Protože ${}_{\mathbf{R}/\mathbf{I}^{n+1}}\mathbf{E}_{n+1}$ je injektivní $\mathbf{R}/\mathbf{I}^{n+1}$-modul, existuje homomorfismus $\mu\colon {}_{\mathbf{R}/\mathbf{I}^{n+1}}\mathbf{E}_n \hookrightarrow {}_{\mathbf{R}/\mathbf{I}^{n+1}}\mathbf{E}_{n+1}$ splňující $\mu \circ \nu = \iota$, který je prostý: Pro $x \in \mathcal{K}\mathrm{er}(\mu)$ platí $\mu[{}_{\mathbf{R}/\mathbf{I}^{n+1}}\mathbf{R}x] = \mathbf{R}\mu(x) = \mathbf{0}$. Volme $y \in \mathbf{S}$ takové, aby $\nu(y) \in {}_{\mathbf{R}/\mathbf{I}^{n+1}}\mathbf{R}x$. Existuje tedy $r \in \mathbf{R}$ takové, že $\nu(y) = rx$. Potom $0 = \mu(rx) = \mu(\nu(y)) = (\mu \circ \nu)(y) = \iota(y) = y$. Odtud plyne $\nu[\mathbf{S}] \cap \mathbf{R}x = \mathbf{0}$. Protože ν je prosté a $\mathbf{S} \trianglelefteq \mathbf{E}_n$ esenciální, je $\mathbf{R}x = \mathbf{0}$, tedy $x = 0$. Jelikož $x \in \mathcal{K}\mathrm{er}(\mu)$ byl libovolný, je $\mathcal{K}\mathrm{er}(\mu) = \mathbf{0}$. Budeme proto nadále předpokládat, že ${}_{\mathbf{R}}\mathbf{E}_n \leq {}_{\mathbf{R}}\mathbf{E}_m$, kdykoliv $m \geq n$. Přitom ze stejného důvodu pro každé $n < \omega$ platí ${}_{\mathbf{R}}\mathbf{E}_n \leq \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{S})$. Položme nakonec $\tilde{\mathbf{M}} = \bigcup_{n<\omega} {}_{\mathbf{R}}\mathbf{E}_n \leq \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{S})$.

Pozorování 48: *Každý z modulů $\mathbf{E}_k$ je nerozložitelný, tj. neexistují podmoduly $\mathbf{A}, \mathbf{B} < \mathbf{E}_k$ takové, aby $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \mathbf{E}_k$. Podmodul $\mathbf{S} \leq \mathbf{E}_k$ je totiž jednoduchý a esenciální. Kdyby platilo $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \mathbf{E}_k$, potom $\mathbf{A} \cap \mathbf{S} \geq \mathbf{S}$ i $\mathbf{B} \cap \mathbf{S} \geq \mathbf{S}$, tedy $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{S} \geq \mathbf{S}$, ale $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{0} \not\geq \mathbf{S}$.*

Lemma 49 *Pro každé $k < \omega$ je modul $\mathbf{E}_k$ artinovský i noetherovský.*

Důkaz. Všechny moduly budeme nyní uvažovat nad okruhem $\mathbf{R}/\mathbf{I}^k$ a budeme toto označení vynechávat. Okruh $\mathbf{R}/\mathbf{I}^k$ je artinovský, tedy podle Věty 44 je modul $\mathbf{E}_k$ konečně generovaný, neboť je nerozložitelný podle Pozorování 48. Buď $G_k = \{g_i; i < C\} \subseteq \mathbf{E}_k$ konečná množina generátorů, kde $C < \omega$ je jejich počet. Definujme zobrazení $g\colon (\mathbf{R}/\mathbf{I}^k)^C \to \mathbf{E}_k$ předpisem $g\big((r_i)_{i<C}\big) = \sum_{i<C} r_i g_i$. g je homomorfismus, který je na, neboť G_k generuje celý modul $\mathbf{E}_k$. Přitom okruh $\mathbf{R}/\mathbf{I}^k$ je artinovský, a tedy podle Věty 43 je i noetherovský. Protože $C < \omega$, je také $\mathbf{R}/\mathbf{I}^k$-modul $(\mathbf{R}/\mathbf{I}^k)^C$ artinovský i noetherovský. Odtud tedy plyne, že $\mathcal{I}\mathrm{m}(g) = \mathbf{E}_k$ je artinovský i noetherovský modul. $\square$

Nyní si uvědomme, že $\mathcal{S}\mathrm{oc}(\mathbf{R}/\mathbf{I}^k) \simeq \mathbf{S}^C$ pro nějaké $0 < C < \omega$. Okruh $\mathbf{R}/\mathbf{I}^k$ je artinovský, tedy podle Věty 43 také noetherovský. $\mathcal{S}\mathrm{oc}(\mathbf{R}/\mathbf{I}^k) \neq \mathbf{0}$ je jeho nenulový (Pozorování 47) konečně generovaný podmodul. Přitom je to direktní suma jednoduchých modulů. Musí jich být tedy jen konečně mnoho. Označíme-li jejich počet C, potom $0 < C < \omega$. Přitom každý jednoduchý podmodul okruhu $\mathbf{R}/\mathbf{I}^k$ (což je jeho ideál) je isomorfní faktoru podle maximálního ideálu. Podle Lemmatu 42 je jediným maximálním ideálem $\mathbf{I}/\mathbf{I}^k$, proto je každý jednoduchý ideál isomorfní $(\mathbf{R}/\mathbf{I}^k)/(\mathbf{I}/\mathbf{I}^k) \simeq \mathbf{R}/\mathbf{I} = \mathbf{S}$. Odtud nakonec $\mathcal{S}\mathrm{oc}(\mathbf{R}/\mathbf{I}^k) \simeq \mathbf{S}^C$.

Lemma 50 *Každý modul $\mathbf{E}_k$ je konečné délky, přičemž každá jeho kompoziční řada je délky alespoň k.*

Důkaz. Všechny moduly budeme nyní uvažovat nad okruhem $\mathbf{R}/\mathbf{I}^k$ a budeme toto označení vynechávat. Podle Lemmatu 49 je každý modul $\mathbf{E}_k$ artinovský i noetherovský, tedy konečné délky podle Věty 45. Víme, že $\mathcal{S}\mathrm{oc}(\mathbf{R}/\mathbf{I}^k) \simeq \mathbf{S}^C$ pro nějaké $0 < C < \omega$. Uvažme prostý homomrfismus $f\colon\ \mathcal{S}\mathrm{oc}(\mathbf{R}/\mathbf{I}^k) \to \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{S}^C)$ a inklusi $\iota\colon\ \mathcal{S}\mathrm{oc}(\mathbf{R}/\mathbf{I}^k) \subseteq \mathbf{R}/\mathbf{I}^k$. Protože $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{S}^C)$ je injektivní $\mathbf{R}/\mathbf{I}^k$-modul, existuje homomorfismus $g\colon \mathbf{R}/\mathbf{I}^k \hookrightarrow \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{S}^C)$ splňující $g \circ \iota = f$, který je prostý: Pro $x \in \mathcal{K}\mathrm{er}(g)$ platí $0 = g(x) = g(\iota(x)) = (g \circ \iota)(x) = f(x)$. Protože f je prosté, je $x = 0$. Odtud $\mathcal{K}\mathrm{er}(g) = \mathbf{0}$. Uvažme nyní posloupnost $\mathbf{E}_k = (\mathbf{I}^0/\mathbf{I}^k)\mathbf{E}_k \geq (\mathbf{I}^1/\mathbf{I}^k)\mathbf{E}_k \geq \ldots \geq (\mathbf{I}^k/\mathbf{I}^k)\mathbf{E}_k = \mathbf{0}$. Předpokládejme, že existuje $j < k$ takové, že $(\mathbf{I}^j/\mathbf{I}^k)\mathbf{E}_k = (\mathbf{I}^{j+1}/\mathbf{I}^k)\mathbf{E}_k$. Potom indukcí dostáváme $(\mathbf{I}^j/\mathbf{I}^k)\mathbf{E}_k = (\mathbf{I}^k/\mathbf{I}^k)\mathbf{E}_k = \mathbf{0} \cdot \mathbf{E}_k = \mathbf{0}$. Protože $\boldsymbol{\mathcal{E}}({}_{\mathbf{R}/\mathbf{I}^k}\mathbf{S}^C) \simeq (\boldsymbol{\mathcal{E}}({}_{\mathbf{R}/\mathbf{I}^k}\mathbf{S}))^C = \mathbf{E}_k^C$ podle Věty 46, dostali bychom $(\mathbf{I}^j/\mathbf{I}^k)\,\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{S}^C) = \mathbf{0}$. Odtud by plynulo, že $g[(\mathbf{I}^j/\mathbf{I}^k)(\mathbf{R}/\mathbf{I}^k)] = (\mathbf{I}^j/\mathbf{I}^k)g[\mathbf{R}/\mathbf{I}^k] \subseteq (\mathbf{I}^j/\mathbf{I}^k)\,\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{S}^C) = \mathbf{0}$. Protože g je prostý homomorfismus, muselo by platit $(\mathbf{I}^j/\mathbf{I}^k)(\mathbf{R}/\mathbf{I}^k) = \mathbf{0}$, což ovšem pro žádné $j < k$ neplatí. Rovnost $(\mathbf{I}^j/\mathbf{I}^k)\mathbf{E}_k = (\mathbf{I}^{j+1}/\mathbf{I}^k)\mathbf{E}_k$ nenastane pro žádné $j < k$, a proto platí $\mathbf{E}_k > (\mathbf{I}/\mathbf{I}^k)\mathbf{E}_k > \ldots > \mathbf{0}$. Odtud lze snadno odvodit, že každá kompoziční řada modulu $\mathbf{E}_k$ má délku alespoň k.

□

Z Lemmatu 50 plyne, že modul $\tilde{\mathbf{M}} = \bigcup_{n<\omega} {}_{\mathbf{R}}\mathbf{E}_n$ není konečné délky, neboť ${}_{\mathbf{R}}\mathbf{E}_n \leq \tilde{\mathbf{M}}$ pro všechna $n < \omega$. Definujme induktivně $\mathbf{S}_0 = \mathbf{0}$ a pro všechna $0 < i < \omega$ $\mathbf{S}_{i+1} = \sum\{\mathbf{K} \leq \tilde{\mathbf{M}}; \mathbf{S}_i \leq \mathbf{K}\ \&\ \mathbf{K}/\mathbf{S}_i$ je jednoduchý podmodul $\tilde{\mathbf{M}}/\mathbf{S}_i\}$. Tedy pro všechna $i < \omega$ platí $\mathcal{S}\mathrm{oc}(\tilde{\mathbf{M}}/\mathbf{S}_i) = \mathbf{S}_{i+1}/\mathbf{S}_i$. Přitom zřejmě $\mathbf{S}_i \leq \mathbf{S}_{i+1}$.

Pozorování 51: *Je-li $\mathbf{A}$ modul a $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$ jeho podmodul, potom platí $\mathcal{S}\mathrm{oc}(\mathbf{B}) = \mathcal{S}\mathrm{oc}(\mathbf{A}) \cap \mathbf{B}$. Tento vztah plyne ihned z definice, neboť*
$\mathcal{S}\mathrm{oc}(\mathbf{B}) = \sum\{\mathbf{K} \leq \mathbf{B}; \mathbf{K}$ *jednoduchý*$\} = \sum\{\mathbf{K} \cap \mathbf{B}; \mathbf{K} \leq \mathbf{A}$ *jednoduchý*$\} =$
$= \sum\big(\{\mathbf{K} \leq \mathbf{A}$ *jednoduchý*$\} \cap \mathbf{B}\big) = \big(\sum\{\mathbf{K} \leq \mathbf{A}$ *jednoduchý*$\}\big) \cap \mathbf{B} = \mathcal{S}\mathrm{oc}(\mathbf{A}) \cap \mathbf{B}$.

Pozorování 52: *Pro* $0 < k < \omega$ *uvažujme* $\mathbf{A}/\mathbf{S}_k \leq \tilde{\mathbf{M}}/\mathbf{S}_k$ *jednoduchý podmodul. Protože* $\tilde{\mathbf{M}}/\mathbf{S}_k = \bigcup_{k<i<\omega} \mathbf{E}_i/\mathbf{S}_k$*, existuje* j *takové, že* $\mathbf{A}/\mathbf{S}_k \leq \mathbf{E}_j/\mathbf{S}_k$*. V modulu* $\mathbf{E}_j/\mathbf{S}_k$ *(který je také* $\mathbf{R}/\mathbf{I}^j$*-modulem) jsou však všechny jednoduché podmoduly isomorfní* $(\mathbf{R}/\mathbf{I}^j)/(\mathbf{I}/\mathbf{I}^j) \simeq \mathbf{R}/\mathbf{I} = \mathbf{S}$*, neboť* $\mathbf{I}/\mathbf{I}^j \leq \mathbf{R}/\mathbf{I}^j$ *je podle Lemmatu 42 jeho jediný maximální ideál. Tedy* $\mathbf{A}/\mathbf{S}_k \simeq \mathbf{S}$ *a navíc platí* $\mathbf{I}(\mathbf{A}/\mathbf{S}_k) = \mathbf{0}$.

Lemma 53 *Pro všechna* $k < \omega$ *platí* $\mathbf{S}_k = \{m \in \tilde{\mathbf{M}}; \mathbf{I}^k m = \mathbf{0}\}$.

Důkaz. Postupujme indukcí podle k: Pro $k = 0$ tvrzení zřejmě platí, neboť $\mathbf{S}_0 = \mathbf{0} = \{m \in \tilde{\mathbf{M}}; \mathbf{I}^0 m = \mathbf{R}m = \mathbf{0}\}$. Předpokládejme, že vztah platí pro všechna $i \leq k$. Pro důkaz $\mathbf{S}_{k+1} \subseteq \{m \in \tilde{\mathbf{M}}; \mathbf{I}^{k+1} m = \mathbf{0}\}$ volme nejprve $x \in \mathbf{S}_{k+1}$. Je-li $x \in \mathbf{S}_k$, jsme hotovi, neboť potom $\mathbf{I}^{k+1}x = \mathbf{I}(\mathbf{I}^k x) = \mathbf{I} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ z indukčního předpokladu. Je-li $x \notin \mathbf{S}_k$, potom $\mathbf{0} \neq \bar{x} = x + \mathbf{S}_k \in \mathbf{S}_{k+1}/\mathbf{S}_k$. Z Pozorování 52 plyne $\mathbf{I}\bar{x} = \mathbf{0}$, neboli $\mathbf{I}x \subseteq \mathbf{S}_k$. Z indukčního předpokladu pak dostáváme $\mathbf{I}^{k+1}x = \mathbf{I}^k(\mathbf{I}x) \subseteq \mathbf{I}^k\mathbf{S}_k = \mathbf{0}$. Pro důkaz $\mathbf{S}_{k+1} \supseteq \{m \in \tilde{\mathbf{M}}; \mathbf{I}^{k+1} m = \mathbf{0}\}$ volme nyní $m \in \tilde{\mathbf{M}}$ takové, že $\mathbf{I}^{k+1}m = \mathbf{0}$. Položme $\bar{m} = m + \mathbf{S}_k \in \tilde{\mathbf{M}}/\mathbf{S}_k$. Pro podmodul $\mathbf{R}\bar{m} \leq \tilde{\mathbf{M}}/\mathbf{S}_k$ tedy platí $\mathbf{I}(\mathbf{R}\bar{x}) = \mathbf{0}$. Proto $\mathbf{R}\bar{m}$ je buď nulový modul, nebo jednoduchý modul. V obou případech dostáváme, že $\mathbf{R}\bar{x} \subseteq \mathcal{S}\mathrm{oc}(\tilde{\mathbf{M}}/\mathbf{S}_k) = \mathbf{S}_{k+1}/\mathbf{S}_k$. Odtud ihned plyne $\bar{x} = x + \mathbf{S}_k \in \mathbf{S}_{k+1}/\mathbf{S}_k$, tedy $x \in \mathbf{S}_{k+1}$. □

Lemma 54 *Pro všechna* $k < \omega$ *platí* $\mathbf{S}_k = \mathbf{E}_k$.

Důkaz. Je-li $k = 0$, potom $\mathbf{E}_k = \mathbf{0} = \mathbf{S}_k$. Volme proto $0 < k < \omega$. Protože $\mathbf{E}_k$ je modulem nad okruhem $\mathbf{R}/\mathbf{I}^k$, musí pro něj platit $\mathbf{I}^k\mathbf{E}_k = \mathbf{0}$. Použitím Lemmatu 53 dostáváme jednak $\mathbf{E}_k \subseteq \mathbf{S}_k$, jednak $\mathbf{I}^k\mathbf{S}_k = \mathbf{0}$: Proto se na modul $\mathbf{S}_k$ budeme dále dívat jako na $\mathbf{R}/\mathbf{I}^k$-modul. Uvažujme inkluse $\iota_1 \colon \mathbf{S} \subseteq \mathbf{S}_k$ a $\iota_2 \colon \mathbf{S} \subseteq \mathbf{E}_k$. Protože $\mathbf{E}_k$ je injektivní $\mathbf{R}/\mathbf{I}^k$-modul, existuje homomorfismus $\mu \colon \mathbf{S}_k \hookrightarrow \mathbf{E}_k$ splňující $\mu \circ \iota_1 = \iota_2$. μ je prostý: Pro $x \in \mathcal{K}\mathrm{er}(\mu)$ platí $\mu[\mathbf{R}x] = \mathbf{R}\mu(x) = \mathbf{0}$. Volme $y \in \mathbf{R}x \cap \mathbf{S}$. Potom $0 = \mu(y) = (\mu \circ \iota_1)(y) = \iota_2(y) = y$. Tedy $\mathbf{R}x \cap \mathbf{S} = \mathbf{0}$. Protože $\mathbf{S} \trianglelefteq \mathbf{S}_k$, plyne odtud $\mathbf{R}x = \mathbf{0}$, tedy $x = 0$. Jelikož $x \in \mathcal{K}\mathrm{er}(\mu)$ byl libovolný, je $\mathcal{K}\mathrm{er}(\mu) = \mathbf{0}$. Podařilo se nám tedy $\mathbf{S}_k$ prostě vnořit do modulu $\mathbf{E}_k$. Již máme $\mathbf{E}_k \subseteq \mathbf{S}_k$. Proto $\mu[\mathbf{S}_k] \subseteq \mathbf{E}_k \subseteq \mathbf{S}_k$. Z těchto vztahů již lehce plyne $\mathbf{S}_k = \mathbf{E}_k$, pokud si uvědomíme, že podle Lemmatu 50 je modul $\mathbf{E}_k$ konečné délky. □

Poznámka
Protože $\mathbf{E}_k = \mathbf{S}_k$, ponecháme v dalších úvahách označení $\mathbf{S}_k$ namísto $\mathbf{E}_k$.

Nyní uvažujme libovolný podmodul $\mathbf{N} \leq \tilde{\mathbf{M}}$, který není konečné délky. Označme $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{I}$. $\mathbf{T}$ je zřejmě těleso, neboť $\mathbf{I} < \mathbf{R}$ je maximální ideál. Pro podmodul $\mathbf{N}$ definujme posloupnost $\mathrm{D}(\mathbf{N}) = \big(\dim_{\mathbf{T}} (\mathbf{S}_{i+1} \cap \mathbf{N})/(\mathbf{S}_i \cap \mathbf{N})\big)_{i<\omega}$.

Lemma 55 *Je-li $\mathbf{N} \leq \tilde{\mathbf{M}}$ podmodul, který není konečné délky, potom pro všechna $n < \omega$ můžeme $(\mathbf{S}_{n+1} \cap \mathbf{N})/(\mathbf{S}_n \cap \mathbf{N})$ uvažovat jako modul nad $\mathbf{R}/\mathbf{I}$, přičemž platí $0 < \dim_{\mathbf{T}} (\mathbf{S}_{n+1} \cap \mathbf{N})/(\mathbf{S}_n \cap \mathbf{N}) < \omega$.*

Důkaz. Z Pozorování 52 plyne, že $\mathbf{I}(\mathbf{S}_{n+1}/\mathbf{S}_n) = \mathbf{0}$. Tedy $(\mathbf{S}_{n+1} \cap \mathbf{N})/(\mathbf{S}_n \cap \mathbf{N})$ můžeme skutečně uvažovat jako modul nad $\mathbf{R}/\mathbf{I}$.

K platnosti $\dim_{\mathbf{T}} (\mathbf{S}_{n+1} \cap \mathbf{N})/(\mathbf{S}_n \cap \mathbf{N}) < \omega$ stačí ukázat, že $\dim_{\mathbf{T}} \mathbf{S}_{n+1}/\mathbf{S}_n < \omega$. Z Lemmatu 50 víme, že $\mathbf{S}_{n+1}(= \mathbf{E}_{n+1})$ je konečné délky, tedy podle Věty 45 noetherovský, a proto konečně generovaný. Odtud již snadno plyne, že $\mathbf{S}_{n+1}/\mathbf{S}_n$ je tvořen direktní sumou jen konečně mnoha jednoduchých modulů, a tedy $\dim_{\mathbf{T}} \mathbf{S}_{n+1}/\mathbf{S}_n < \omega$.

Nyní předpokládejme, že existuje n takové, že $\dim_{\mathbf{T}} (\mathbf{S}_{n+1} \cap \mathbf{N})/(\mathbf{S}_n \cap \mathbf{N}) = 0$. Protože $\mathbf{S}_n$ je konečné délky, je modul $\mathbf{N} \cap \mathbf{S}_n \leq \mathbf{N}$ také konečné délky. Protože $\mathbf{N}$ je $\mathbf{R}$-modul, který nemá konečnou kompoziční řadu, musí být faktormodul $\mathbf{N}/(\mathbf{N} \cap \mathbf{S}_n)$ nenulový a nesmí obsahovat žádný jednoduchý podmodul, neboť podle Pozorování 51 platí $\mathcal{S}\mathrm{oc}(\mathbf{N}/(\mathbf{S}_n \cap \mathbf{N})) = (\mathbf{S}_{n+1} \cap \mathbf{N})/(\mathbf{S}_n \cap \mathbf{N})$. Protože $\mathcal{S}\mathrm{oc}(\mathbf{N}/(\mathbf{S}_n \cap \mathbf{N})) = \mathbf{0}$ a $\tilde{\mathbf{M}}/\mathbf{S}_n = \bigcup\limits_{n<i<\omega} \mathbf{S}_i/\mathbf{S}_n$, musí už nutně pro všechna $\alpha \geq n+1$ platit $(\mathbf{S}_\alpha \cap \mathbf{N})/(\mathbf{S}_n \cap \mathbf{N}) = \mathbf{0}$. Odtud ale plyne $\mathbf{N} \leq \mathbf{S}_n$. Modul $\mathbf{S}_n$ je však konečné délky. Je-li tedy $\mathbf{N} \leq \tilde{\mathbf{M}}$ nekonečné délky, musí být $\dim_{\mathbf{T}} (\mathbf{S}_{n+1} \cap \mathbf{N})/(\mathbf{S}_n \cap \mathbf{N}) > 0$ pro každé $n < \omega$. □

Podívejme se nyní na množinu $\mathcal{M} = \{\mathbf{N} \leq \tilde{\mathbf{M}}; \mathbf{N} \text{ není konečné délky}\}$. Tato množina je neprázdná, neboť $\tilde{\mathbf{M}} \in \mathcal{M}$. Na množině $\mathcal{M}$ definujme uspořádání $\leq_{\mathcal{M}}$ takto: pro $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}$ bude $\mathbf{A} \leq_{\mathcal{M}} \mathbf{B}$, právě když $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$ a zároveň pro všechna $i < \omega$ $\dim_{\mathbf{T}}(\mathbf{S}_{i+1} \cap \mathbf{A})/(\mathbf{S}_i \cap \mathbf{A}) \geq \dim_{\mathbf{T}}(\mathbf{S}_{i+1} \cap \mathbf{B})/(\mathbf{S}_i \cap \mathbf{B})$. To znamená, že jeden modul $\mathbf{A}$ je v množině $\mathcal{M}$ menší nebo roven než druhý modul $\mathbf{B}$, právě když $\mathbf{B}$ je podmodulem modulu $\mathbf{A}$ a dimenze v posloupnosti $\mathrm{D}(\mathbf{A})$ jsou větší nebo rovny dimenzím v posloupnosti $\mathrm{D}(\mathbf{B})$. Z Zornova Lemmatu dostáváme, že existuje $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}$ maximální řetězec. Položme $\mathbf{M} = \bigcap \mathcal{R}$. Ke každému $i < \omega$ existuje $\mathbf{A}_i \in \mathcal{R}$ takové, že pro všechna $\mathbf{B} \in \mathcal{R}$ splňující $\mathbf{A}_i \leq_{\mathcal{M}} \mathbf{B}$ platí $\dim_{\mathbf{T}}(\mathbf{S}_{i+1} \cap \mathbf{B})/(\mathbf{S}_i \cap \mathbf{B}) = \dim_{\mathbf{T}}(\mathbf{S}_{i+1} \cap \mathbf{A}_i)/(\mathbf{S}_i \cap \mathbf{A}_i) = \dim_{\mathbf{T}}(\mathbf{S}_{i+1} \cap \mathbf{M})/(\mathbf{S}_i \cap \mathbf{M})$. Tento fakt plyne z toho, že $\big(\dim_{\mathbf{T}}(\mathbf{S}_{i+1} \cap \mathbf{C})/(\mathbf{S}_i \cap \mathbf{C})\big)_{\mathbf{C} \in \mathcal{R}}$ je vzhledem k uspořádání $\leq_{\mathcal{M}}$ nerostoucí posloupnost přirozených čísel, a tedy se musí někdy zastavit. Přitom pro všechna $i < \omega$ musí být $\dim_{\mathbf{T}}(\mathbf{S}_{i+1} \cap \mathbf{M})/(\mathbf{S}_i \cap \mathbf{M}) > 0$. Kdyby totiž existovalo $i < \omega$ takové, že $\dim_{\mathbf{T}}(\mathbf{S}_{i+1} \cap \mathbf{M})/(\mathbf{S}_i \cap \mathbf{M}) = 0$, tak by pro modul $\mathbf{A}_i \in \mathcal{R}$ nalezený podle předchozí úvahy platilo $\dim_{\mathbf{T}}(\mathbf{S}_{i+1} \cap \mathbf{A}_i)/(\mathbf{S}_i \cap \mathbf{A}_i) = \dim_{\mathbf{T}}(\mathbf{S}_{i+1} \cap \mathbf{M})/(\mathbf{S}_i \cap \mathbf{M}) = 0$, což by byl podle Lemmatu 55 spor s tím, že modul $\mathbf{A}_i$ není konečné délky.

Pozorování 56: *Modul $\mathbf{M}$ přitom není konečné délky. Kdyby totiž byl konečné délky, pak by existovalo $n < \omega$ takové, že $\mathbf{M}/(\mathbf{S}_n \cap \mathbf{M}) \cap \mathbf{S}_{n+1}/\mathbf{S}_n = \mathbf{0}$. To by byl ovšem spor s faktem, že $\dim_{\mathbf{T}}(\mathbf{S}_{n+1} \cap \mathbf{M})/(\mathbf{S}_n \cap \mathbf{M}) > 0$.*

Nyní si všinměme, že je-li $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$, potom platí $\dim_{\mathbf{T}}(\mathbf{S}_{i+1} \cap \mathbf{A})/(\mathbf{S}_i \cap \mathbf{A}) \leq \dim_{\mathbf{T}}(\mathbf{S}_{i+1} \cap \mathbf{B})/(\mathbf{S}_i \cap \mathbf{B})$ pro libovolné $i < \omega$. K tomu si stačí uvědomit, že ze vztahu $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ plyne $(\mathbf{S}_{i+1} \cap \mathbf{A})/(\mathbf{S}_i \cap \mathbf{A}) \leq (\mathbf{S}_{i+1} \cap \mathbf{B})/(\mathbf{S}_i \cap \mathbf{B})$. Učiňme proto následující

Pozorování 57: *Je-li $\mathbf{N} < \mathbf{M}$ vlastní podmodul modulu $\mathbf{M}$, potom pro všechna $i < \omega$ platí $\dim_{\mathbf{T}}(\mathbf{S}_{i+1} \cap \mathbf{N})/(\mathbf{S}_i \cap \mathbf{N}) \leq \dim_{\mathbf{T}}(\mathbf{S}_{i+1} \cap \mathbf{M})/(\mathbf{S}_i \cap \mathbf{M})$. Předpokládejme, že $\mathbf{N} \in \mathcal{M}$. Potom by nutně platilo $\mathbf{N} \leq_{\mathcal{M}} \mathbf{M}$ a tedy $\mathcal{R} \cup \{\mathbf{N}\} \subseteq \mathcal{M}$ by byl v uspořádání $\leq_{\mathcal{M}}$ řetězec. Protože $\mathcal{R}$ byl maximální řetězec, muselo by platit $\mathbf{N} \in \mathcal{R}$. Protože $\mathbf{M} = \bigcap \mathcal{R}$, bylo by $\mathbf{N} \leq \bigcap \mathcal{R} = \mathbf{M}$, což by byl spor s $\mathbf{N} < \mathbf{M}$. Nemůže tedy být $\mathbf{N} \in \mathcal{M}$. Tedy každý $\mathbf{N} < \mathbf{M}$ je konečné délky, a tedy podle Věty 45 artinovský i noetherovský. Odtud plyne, že $\mathbf{M}$ je artinovský.*

Pokud shrneme předchozí výsledky dohromady, dostaneme následující větu.

Věta 58 *Buď $\mathbf{R}$ obor integrity a $\mathbf{M}$ jeho modul jako výše. Potom modul $\mathbf{M}$ prokazuje nevysokost okruhu $\mathbf{R}$, to znamená, že není noetherovský, ale každý jeho vlastní podmodul už noetherovský je.*

Důkaz. Podle Pozorování 56 modul $\mathbf{M}$ není konečné délky. Podle Pozorování 57 je artinovský. Použitím Věty 45 tak dostáváme, že $\mathbf{M}$ není noetherovský. Volme

$\mathbf{N} < \mathbf{M}$ vlastní podmodul modulu $\mathbf{M}$. Podle Pozorování 57 je $\mathbf{N}$ noetherovský. Zjistili jsme tedy, že modul $\mathbf{M}$ není noetherovský, ale každý jeho vlastní podmodul už noetherovský je. Modul $\mathbf{M}$ tedy skutečně prokazuje nevysokost okruhu $\mathbf{R}$. $\square$

4 Shrnutí výsledků

V této závěrečné kapitole shrneme poznatky, které jsme zjistili o nevysokých komutativních okruzích.

Věta 59 *Buď $\mathbf{R}$ komutativní okruh a $\mathbf{I} < \mathbf{R}$ jeho maximální ideál. Pokud $\mathbf{R}$ není vysoký, potom existuje posloupnost ideálů $\left(\mathbf{J}_n\right)_{n<\omega}$ taková, že:*

1. $\mathbf{J}_1 = \mathbf{I}$
2. *pro všechna $k < \omega$ platí $\mathbf{J}_{k+1} < \mathbf{J}_k$,*
3. *pro všechna $k < \omega$ platí $\mathbf{I} \cdot \mathbf{J}_k \leq \mathbf{J}_{k+1}$,*
4. $\mathbf{P} = \bigcap\limits_{k<\omega} \mathbf{J}_k$ *je prvoideál,*
5. *pro všechna $0 < k < \omega$ je okruh $\mathbf{R}/\mathbf{J}_k$ artinovský,*

Důkaz. Označíme-li $\mathbf{M}$ modul prokazující nevysokost okruhu $\mathbf{R}$, potom podle Pozorování 35 je $\mathbf{P} = \mathcal{A}\mathrm{nn}_{\mathbf{R}}(\mathbf{M})$ prvoideálem a podle Lemmatu 36 můžeme modul $\mathbf{M}$ uvažovat nad okruhem $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}/\mathbf{P}$, který je oborem integrity s maximálním ideálem $\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{I}/\mathbf{P}$. Závěr věty pak plyne z Věty 40. □

Věta 60 *Buď $\mathbf{R}$ komutativní okruh a $\mathbf{I} < \mathbf{R}$ jeho maximální ideál. Pokud $\mathbf{P} = \bigcap\limits_{k<\omega} \mathbf{I}^k$ je prvoideál a pro všechna $0 < k < \omega$ je faktorokruh $\mathbf{R}/\mathbf{I}^k$ artinovský, potom okruh $\mathbf{R}$ není vysoký.*

Důkaz. Důkaz plyne z Věty 58, pokud ji použijeme na okruh $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}/\mathbf{P}$. Získáme tak modul, který prokazuje nevysokost okruhu $\tilde{\mathbf{R}}$, přičemž z Lemmatu 36 plyne, že prokazuje také nevysokost okruhu $\mathbf{R}$. □

Věta 61 *Komutativní noetherovský okruh $\mathbf{R}$ je vysoký, právě když neobsahuje maximální ideál $\mathbf{I} < \mathbf{R}$ takový, že $\bigcap\limits_{k<\omega} \mathbf{I}^k$ je prvoideál.*

Důkaz. Důkaz provedeme nepřímo.

Nejprve předpokládejme, že $\mathbf{R}$ obsahuje maximální ideál $\mathbf{I}$ takový, že $\mathbf{P} = \bigcap\limits_{k<\omega} \mathbf{I}^k$

je prvoideál. V takovém případě je faktorokruh $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}/\mathbf{P}$ oborem integrity obsahujícím maximální ideál $\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{I}/\mathbf{P}$. Označme $\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{R}/\mathbf{I}$. Podle Lemmatu 42 je $\tilde{\mathbf{I}}$ jediným maximálním ideálem okruhu $\tilde{\mathbf{R}}$. Tedy $\mathcal{J}(\tilde{\mathbf{R}}/\tilde{\mathbf{I}}^k) = \tilde{\mathbf{I}}/\tilde{\mathbf{I}}^k$. Protože $(\tilde{\mathbf{I}}/\tilde{\mathbf{I}}^k)^k = \mathbf{0}$, je $\mathcal{J}(\tilde{\mathbf{R}}/\tilde{\mathbf{I}}^k)$ nilpotentní. Přitom $(\tilde{\mathbf{R}}/\tilde{\mathbf{I}}^k)/\mathcal{J}(\tilde{\mathbf{R}}/\tilde{\mathbf{I}}^k) \simeq \mathbf{R}/\mathbf{I}$ je těleso. Z Věty 43 tak dostáváme, že $\tilde{\mathbf{R}}/\tilde{\mathbf{I}}^k$ je artinovský pro každé $k < \omega$. Protože podle Věty 9 máme $\mathbf{R}/\mathbf{I}^k \simeq \tilde{\mathbf{R}}/\tilde{\mathbf{I}}^k$, je okruh $\mathbf{R}/\mathbf{I}^k$ artinovský pro libovolné $0 < k < \omega$. Podle Věty 60 okruh $\mathbf{R}$ není vysoký.

Nyní předpokládejme, že $\mathbf{R}$ není vysoký. Buď $\mathbf{I} < \mathbf{R}$ maximální ideál. Použijeme Větu 59 a označení $\mathbf{P}$ pro prvoideál z jejího čtvrtého bodu. Potom musí platit $\mathbf{P} \leq \mathbf{I}^k$ pro všechna $0 < k < \omega$. Jinak bychom ve faktorokruhu $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}/\mathbf{P}$ dostali pro jeho maximální ideál $\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{I}/\mathbf{P}$ vztah $\tilde{\mathbf{I}}^k = \mathbf{0}$, který podle Pozorování 41 znamená $\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{0}$. To by ovšem znamenalo $\mathbf{I} = \mathbf{P}$, což by byl spor s druhým bodem Věty 59. Protože $\mathbf{I}^k \leq \mathbf{J}_k$ pro všechna $k < \omega$, dostáváme $\mathbf{P} \leq \bigcap_{k<\omega} \mathbf{I}^k \leq \bigcap_{k<\omega} \mathbf{J}_k = \mathbf{P}$. Odtud $\mathbf{P} = \bigcap_{k<\omega} \mathbf{I}^k$. □

Poznámka

V práci [2] je zmíněna otázka, zda každý vysoký okruh je už nuntě max okruhem. Pomocí předchozích vět lze snadno sestrojit příklad komutativního vysokého okruhu, který není max okruhem.

Seznam použité literatury

[1] SARATH, B.: Krull dimension and noetherianness, Illinois J. Math. bf 20 (1976), str. 329–335.

[2] CLARK, J.: *On max modules*, Proceedings of the 32nd Symposium on Ring Theory and Representation Theory, Tokyo 2000, str. 23-32. http://www.maths.otago.ac.nz/home/downloads/john_clark/maxmods.pdf

[3] ANDERSON, Frank W.; FULLER, Kent R.: *Rings and Categories of Modules*. Second Edition. ©1974, 1992 Springer-Verlag New York, Inc. **ISBN 0-387-97845-3**.

[4] LAM, T. Y.: *Lectures on Modules and Rings*. ©1991, Springer-Verlag New York, Inc. **ISBN 0-387-98428-3**