Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jakub Slavík

Hra o volbě teritoria

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce:	doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2011

Děkuji svému vedoucímu doc. RNDr. Daliboru Pražákovi, Ph.D. za vypsání tématu z evoluční teorie her, zajištění potřebné literatury, spoustu cenných rad a v neposlední řadě za trpělivost a pečlivost, s kterou četl průběžné verze tohoto textu.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 3. srpna 2011 Jakub Slavík

Název práce: Hra o volbě teritoria

Autor: Jakub Slavík

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: V předložené práci se zabýváme aplikací evoluční teorie her v behaviorální ekologii, konkrétně hrou o volbě teritoria, která popisuje distribuci populace na konečném počtu různě ohodnocených plošek, a dokazujeme existenci, jednoznačnost a evoluční stabilitu tzv. ideálního volného rozdělení (IFD) pozorovaného v přírodě. K popisu průběhu samotné distribuce formulujeme dynamiku hry o volbě teritoria pomocí tzv. disperzní dynamiky a ukazujeme stabilitu IFD pro různé typy disperzních dynamik pomocí klasické teorie obyčejných diferenciálních rovnic a teorie obyčejných diferenciálních rovnic s nespojitou pravou stranou.

Klíčová slova: hra, Nashovo ekvilibrium, asymptotická stabilita, ODR s nespojitou pravou stranou.

Title: Habitat selection game

Author: Jakub Slavík

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D., Department of Mathematical Analysis

Abstract: In the presented work we study an application of evolutionary game theory in behavioral ecology, specifically the habitat selection game, which describes the distribution of population into a finite number of patches. We also show the existence, uniqueness and evolutionary stability of the ideal free distribution (IFD) observed in natural environments. To describe the process of the distribution we specify the dynamics of the habitat selection game using dispersion dynamics, and we show the stability of the IFD for different types of dispersion dynamics using the classical theory of ordinary differential equations and the theory of ordinary differential equations with discontinuous righthand sides.

Keywords: game, Nash equilibrium, asymptotic stability, ODE with discontinuous righthand side.

Obsah

Úvod

Vznik evoluční teorie her jako matematické disciplíny v 70. a 80. letech 20. století byl motivován aplikacemi v přírodních vědách, zejména v biologii, a ekonomii. V předkládané práci se zaměřujeme na tzv. hru o výběru teritoria (habitat selection game), která popisuje rozložení populace na konečném počtu různě ohodnocených plošek, a vyšetřujeme vlastnosti tzv. ideálního volného rozdělení (ideal free distribution, IFD) pozorovaného v přírodě. Dále explicitně formulujeme dynamiku hry o volbě teritoria a ukazujeme stabilitu ideálního volného rozdělení pro různé typy disperzních dynamik, k čemuž využíváme i teorii obyčejných diferenciálních rovnic s nespojitou pravou stranou.

První kapitola definuje základní pojmy teorie her jako strategie, Nashovo ekvilibrium a evolučně stabilní strategie a popisuje přechod od hry v normálním tvaru ke hrám, kterými se zabýváme dále. Obsah první kapitoly vychází převážně z [7].

Ve druhé kapitole popisujeme hru o volbě teritoria pomocí pojmů teorie her, vyslovíme požadavky na prostředí, v němž hra probíhá, a jedince, kteří se hry účastní, a ukážeme existenci, jednoznačnost a evoluční stabilitu ideálního volného rozdělení. Hlavním zdrojem pro tuto kapitolu je opět [7] a článek [4].

Třetí kapitola rozšiřuje pojem řešení diferenciální rovnice i na rovnice s nespojitou pravou stranou, obsahuje existenční věty pro taková řešení a věnuje se vlastnostem tzv. řešení ve Filippovově smyslu, které v klasickém případě nemají ekvivalent. Dále vyslovujeme řetízkové pravidlo pro funkce podél řešení ve Filippovově smyslu, které využijeme v kapitole následující. Text v této kapitole vychází z [3] a [10].

Ve čtvrté kapitole formulujeme explicitní dynamiku pro hru o volbě teritoria, tzv. disperzní dynamiku, a ukazujeme význačnost ideálního volného rozdělení jako lokálně stabilního bodu i pro dynamiky, které na jedince kladou slabší předpoklady než předpoklady vyslovené v druhé kapitole. Text opět vychází z článku [7].

Důkazy předkládaných tvrzení v textu [7] i v původním článku [1], zejména tvrzení uvedených ve čtvrté kapitole, neobsahují ověření potřebných předpokladů a rovněž jednotlivé kroky v těchto důkazech nejsou dostatečně pečlivě vysvětleny. Cílem této práce je tedy doplnění zmíněných důkazů tak, aby byly výše uvedené nedostatky v co největší míře odstraněny. V některých případech byly formulace vět pozměněny. Vlastním dílem autora je také důkaz existence a jednoznačnosti ideálního volného rozdělení.

Předpokládáme, že čtenář ovládá teorii obyčejných diferenciálních rovnic, zejména pak vyšetřování stability pomocí linearizace a Ljapunovských funkcí.

1. Základy teorie her

Pod pojmem hra si můžeme představit konflikt několika účastníků, přičemž zisk každého z nich závisí na způsobu, jakým bude hru hrát. Zisk vyjadřujeme reálným číslem. V biologických aplikacích uvažovaných v následujících kapitolách ziskem rozumíme tzv. *zdatnost* (fitness), která je přímo úměrná očekávanému počtu potomků. Předpokládáme dále, že fenotyp (tj. strategie, kterou jedinec hraje) se dědí od rodičů. Jedinec s větší zdatností tedy bude mít větší počet potomků a jeho zastoupení v populaci vůči hráčům s menší zdatností bude růst. Zdatnost je vždy nezáporná.

1.1 Zjednodušení pojmu hra v normálním tvaru

V klasické teorii her zadáváme hry dvěma základními způsoby, v tzv. normálním (někdy též strategickém) či extenzivním tvaru. Extenzivní tvar podrobněji popisuje vnitřní strukturu hry, která v aplikacích, jimiž se dále zabýváme, nehraje žádnou roli, a proto se mu dále nevěnujeme. V tomto oddílu definujeme hru v normálním tvaru a provedeme zjednodušení vhodná pro další použití v evoluční teorii her.

Definice. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $P = \{1, 2, \dots, n\}$, S_1, S_2, $\dots$, S_n jsou konečné množiny a w_1, w_2, $\dots$, w_n jsou funkce z $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ do $\mathbb{R}$. Uspořádanou trojici $G = \{P, S, W\}$, kde $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ a $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, nazveme* hrou v normálním tvaru.
Množinu P nazveme množinou hráčů, *množinu S_i* množinou ryzích strategií *hráče i, prvky $s_i \in S_i$* strategiemi *hráče i a funkci w_i* výplatní funkcí *hráče i.*

Příklad. Popišme hru „kámen, nůžky, papír“ v termínech předchozí definice. Zřejmě $n = 2$. Označme strategii „zahraji kámen“ e_1, „zahraji nůžky“ e_2 a konečně „zahraji papír“ e_3. Ohodnoťme výhru ziskem 1, prohru -1 a remízu nulou. Nechť $p, q \in \{e_1, e_2, e_3\}$. Položme

$$w_1(p,\ q) = \begin{cases} 1 & \text{pro } (p,q) \in \{(e_k, e_n), (e_n, e_p), (e_p, e_n)\} \\ -1 & \text{pro } (p,q) \in \{(e_n, e_k), (e_p, e_n), (e_n, e_p)\} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Potom můžeme psát

$$w_1(p, q) = (p, Aq)\,,$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

je tzv. výplatní matice a $(\cdot, \cdot)$ je skalární součin na $\mathbb{R}^n$. Výplatní funkci w_2 získáme ze vztahu $w_1(p, q) = -w_2(q, p)$.

Množina ryzích strategií dobře popisuje situaci, kdy jedinec hrající i-tou ryzí strategii tuto použije proti každému protivníkovi, se kterým se utká. Abychom byli schopni modelovat složitější chování, rozšiřme množinu ryzích strategií o prvek náhody tak, aby obsahovala i strategie umožňující jedincům hrát každou ryzí strategii s určitou pravděpodobností.

Definice. *Nechť* $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ *je množina ryzích strategií jistého hráče. Vektor* $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ *nazveme* smíšenou strategií*, pokud platí* $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ *a* $p_i \geq 0, i = 1, \dots, n$*, kde* p_i *je pravděpodobnost, s kterou hráč zahraje ryzí strategii* e_i*.*
Množinu všech smíšených strategií značíme Δ^n*, tedy*

$$\Delta^n = \{p \in \mathbb{R}^n;\ p_i \geq 0,\ \forall i = 1, \dots, n,\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\}.$$

Všimněme si, že množina ryzích strategií je v množině smíšených strategií obsažena, a tedy každá ryzí strategie může být vyjádřena jako smíšená, protože i-tou ryzí strategii lze zapsat ve tvaru $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, přičemž 1 je na i-té pozici. Dále budeme používat termín strategie ve smyslu jak strategie ryzí, tak smíšené. Geometricky je množina Δ^n n-rozměrným simplexem, jehož vrcholy odpovídají ryzím strategiím.

V dalším textu tedy bude pojem hra označovat hru v normálním tvaru pro dva hráče, kteří mají oba k dispozici množinu smíšených strategií Δ^n. Výplatní funkci prvního hráče bereme jako zdatnost mutanta (prvního hráče) v populaci hráčů druhé strategie, tedy role hráčů není v dalším textu symetrická. Formálně bychom měli zadat i druhou výplatní funkci, ta však díky asymetrii nenese žádnou podstatnou informaci a můžeme ji tedy vynechat. Hru dále reprezentujeme jednou výplatní funkcí $W : \Delta^n \times \Delta^n \to [0, \infty)$.

Mějme dvě strategie $p, q \in \Delta^n$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon < 1$. Strategii, kdy hráč použije strategii p s pravděpodobností ε a strategii q s pravděpodobností $(1 - \varepsilon)$, budeme značit $\varepsilon p + (1 - \varepsilon)\, q$.

Linearitou výplatní funkce v první složce rozumíme, že platí

$$W(p, q) = \sum_{i=1}^{n} p_i W(e_i, q).$$

Linearitu v druhé složce definujeme podobně. Požadujeme, aby každá výplatní funkce byla lineární v první složce a spojitá.

Definice. *Nechť* $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \Delta^n$ *je strategie. Potom definujeme* nosič strategie p *jako*

$$\mathrm{supp}(p) = \{i \in \mathbb{N};\ 1 \leq i \leq n,\ p_i > 0\},$$

tedy $\mathrm{supp}(p)$ *určuje množinu ryzích strategií, které jsou hrány ve strategii* p *s nenulovou pravděpodobností.*

1.2 Nashovo ekvilibrium (NE) a evolučně stabilní strategie (ESS)

Definice. *Strategii* $p \in \Delta^n$ *nazveme* rovnováhou *nebo* ekvilibriem*, pokud platí*

$$W(p, p) = W(e_i, p)$$

pro každé $i \in \mathrm{supp}(p)$*.*

Z definice ihned vyplývá, že každá ryzí strategie je ekvilibrium.

Důležitým pojmem v teorii her je tzv. Nashovo ekvilibrium. Strategie, která je Nashovým ekvilibriem, je nejlepší odpovědí sama na sebe, tedy zahrána proti sobě je přinejmenším stejně úspěšná, jako když je proti ní hrána kterákoliv jiná strategie. Matematicky tuto myšlenku popíšeme v následující definici.

Definice. *Strategii $p \in \Delta^n$ nazveme* Nashovým ekvilibriem *(Nash equilibrium, NE), pokud pro každou strategii $q \in \Delta^n$ platí*

$$W(p,p) \geq W(q,p).$$

Pokud pro každou $q \in \Delta^n$, $q \neq p$, platí

$$W(p,p) > W(q,p),$$

mluvíme o silné Nashově rovnováze *či* ekvilibriu.

Tvrzení 1.1. *Nechť $p \in \Delta^n$ je Nashovo ekvilibrium. Potom platí*

$$W(e_i,p) = W(p,p)$$

pro každé $i \in \operatorname{supp}(p)$.

Důkaz. Z definice NE ihned plyne $W(p,p) \geq W(e_i,p)$, $i \in \operatorname{supp}(p)$. Opačnou nerovnost ukažme sporem. Nechť tedy existuje $j \in \operatorname{supp}(p)$ takové, že platí $W(e_j,p) < W(p,p)$. Potom z linearity výplatní funkce plyne

$$W(p,p) = \sum_{i \in \operatorname{supp}(p)} p_i W(e_i,p) < W(p,p),$$

což je spor. □

Z předchozího tvrzení plyne, že každé Nashovo ekvilibrium je i ekvilibrium.

Věta 1.2. (Existence Nashova ekvilibria) *Nechť $W : \Delta^n \times \Delta^n \to \mathbb{R}$ je spojitá výplatní funkce lineární v první složce. Potom existuje Nashovo ekvilibrium.*

Důkaz. Viz. [7], strana 10, Proposition 2. □

Nechť $p \in \Delta^n$ je smíšené Nashovo ekvilibrium, tedy nechť $\operatorname{supp}(p)$ je alespoň dvouprvkový. Podle Tvrzení 1.1 platí $W(e_i,p) = W(p,p)$ pro každé $i \in \operatorname{supp}(p)$. Zvolme $q \in \Delta^n$ tak, aby platilo $\operatorname{supp}(p) = \operatorname{supp}(q)$. Nyní

$$W(q,p) = \sum_{i=1}^{n} q_i W(e_i,p) = W(p,p),$$

tedy pokud uvažujeme smíšené Nashovo ekvilibrium, potom má každá strategie se stejným nosičem stejný zisk. Pokud $\operatorname{supp}(p) = \{1,\ldots,n\}$, potom kterákoliv strategie má stejný zisk.

Nashova ekvilibria tedy nemůžeme brát jako koncový bod evoluce, protože podle předchozího existují strategie, které se v populaci hráčů NE budou množit stejně rychle. Maynard Smith a Price v [9] definují tzv. evolučně stabilní strategie jako taková NE, která jsou rezistentní vůči invazi mutantů.

Definice. *Strategii* $p^* \in \Delta_n$ *nazveme* evolučně stabilní*, pokud splňuje následující dvě podmínky:*

(i) $W(p^*, p^*) \geq W(p, p^*)$,

(ii) kdykoliv $p \neq p^*$ *a* $W(p^*, p^*) = W(p, p^*)$, *potom nutně* $W(p^*, p) > W(p, p)$.

První podmínka říká, že každá evolučně stabilní strategie je Nashovým ekvilibriem, druhá podmínka se nazývá *podmínka stability.*

Definice. *Řekneme, že strategie* $p^* \in \Delta^n$ *splňuje* podmínku lokální převahy *(local superiority condition, LSC), pokud platí*

$$W(p^*, p) > W(p, p) \tag{1.1}$$

pro každou strategii $p \in \Delta^n$, $p \neq p^*$, *z jistého okolí* p^* *v* Δ^n.

Pro hry s výplatní funkcí lineární navíc i v druhé složce platí (důkaz viz např. [7], str. 12, poznámky za Definition 7, a str. 13, Proposition 6), že strategie je evolučně stabilní právě tehdy, když splňuje podmínku lokální převahy. Pro analýzu her, jejichž výplatní funkce není lineární ve druhé složce, se LSC bere jako definice evoluční stability. Této skutečnosti využijeme při dokazování evoluční stability v následující kapitole.

2. Hra o volbě teritoria

V minulé kapitole jsme definovali strategii jako vektor reálných čísel. V evoluční teorii her můžeme strategie interpretovat dvěma způsoby. V prvním případě chápeme i-tou složku vektoru jako pravděpodobnost, se kterou jedinec zvolí i-tou ryzí strategii, ve druhém případě i-tá složka vektoru odpovídá poměrnému zastoupení hráčů i-té strategie v populaci. Konkrétní interpretace by měla být vždy zřejmá z vlastností dané hry.

Podobně můžeme dělit samotné hry na dva typy. Prvním z nich jsou tzv. *hry jeden na jednoho* (pairwise contest games), kdy jedinec soupeří s náhodně vybraným protivníkem z populace, tedy má stejný zisk, jako kdyby soupeřil s jedincem používající smíšenou strategii odpovídající průměrné strategii populace. Z formálního hlediska jsou tyto hry stejné jako hry pro dva hráče z klasické teorie her a jsou lineární v druhé složce. Druhým z nich jsou tzv. *hry proti celku* (games against the field). V takových hrách předpokládáme složitější interakce, při kterých se zisk jedince odvíjí skutečně od toho, jak se chová zbytek populace. Tyto hry obecně nejsou lineární ve druhé složce.

V této kapitole popíšeme hru o volbě teritoria (habitat selection game), která je hrou proti celku.

2.1 Popis hry o volbě teritoria

Oblast, která se liší od svého okolí, budeme dále nazývat *ploškou* (patch).

Hra o volbě teritoria se zabývá rozložením populace na konečném počtu plošek. Abychom mohli tento problém matematicky popsat jako hru, klademe na plošky i živočichy, jejichž chování zkoumáme, určité požadavky. Níže popsaný model byl poprvé navržen Fretwellem a Lucasem v [4].

Zaměřme se nejprve na prostředí, ve kterém se budou jedinci pohybovat. Prostředí reprezentujeme konečným počtem diskrétních oblastí (plošek) a na každé z nich definujeme funkci, která v závislosti na množství jedinců v ní sídlících určuje kvalitu této plošky. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je počet těchto plošek. Označme m_i počet jedinců v i-té plošce a položme $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$. Předpokládáme dále, že každá z plošek má jistou základní kvalitu, tedy kvalitu, kdy není obydlena žádným živočichem, která pro žádné dvě různé plošky není stejná. Obecně sledujeme větší množství veličin určujících kvalitu života v dané plošce a pokud by nějaké dvě plošky měly stejnou počáteční kvalitu, daly by se potom sloučit do plošky jedné. Počáteční kvality jednotlivých plošek označme B_i, přičemž jejich pořadí zvolme tak, aby platilo

$$B_1 > B_2 > \cdots > B_n > 0.$$

Předpokládáme, že kvalita plošek se s větším počtem rezidentů zhoršuje. Kvalitu i-té plošky v závislosti na počtu živočichů obývajících danou plošku vyjadřujeme funkcí $V_i(m_i)$, přičemž požadujeme aby $V_i(m_i)$ byla nezáporná, klesající a spojitá. Zřejmě tedy platí $V_i(0) = B_i$.

Původní model navržený v [4] požaduje, aby členové populace, jejichž chování popisujeme, splňovali dvě základní podmínky. Za prvé každý jedinec musí v každý okamžik znát kvalitu všech plošek a každý z nich se usídlí v plošce pro něj nejvýhodnější. Takové živočichy nazveme *ideální*.

Za druhé očekáváme, že všichni jedinci mají stejné schopnosti a tedy i stejné šance na úspěch. Naše plošky proto musí být navzájem přístupné a dostatečně blízko, aby mohli jedinci mezi ploškami volně přecházet, a při přemístění z jedné plošky do druhé musí mít jedinec stejné podmínky jako obyvatelé plošky původní. Fretwell a Lucas uvádějí v [4] na str. 21 následující příklad: Představme si populaci ptáků, kteří ke stavbě svých hnízd vyžadují otvory vhodné velikosti, kterých je omezený počet. Nově příchozí tedy může očekávat, že jeho podmínky budou ve srovnání s původními obyvateli výrazně horší. Aby se na tuto situaci dal použít námi uvažovaný model, museli by v okamžiku příchodu nového jedince všichni obyvatelé, tedy původní i nově příchozí, o omezená místa losovat a jedinci, kteří v losování prohráli, by museli v plošce i tak zůstat. Předkládaný model by tedy v některých situacích kladl na živočichy nerealistické požadavky.

Kvůli druhé podmínce uvažujeme populaci jedinců, kteří jsou ve všech ohledech stejní, tj. jak z genetického hlediska, tak z jakéhokoli jiného. Uvažovaný model lze díky výše uvedeným omezením dobře použít pro populace koncentrované na malém území, u pohyblivějších druhů, např. u ptáků, lze jeho působnost rozšířit.

Mějme vektor $p \in \Delta^n$, jehož složky odpovídají poměrům času, které jedinec stráví v jednotlivých ploškách, a vektor $q \in \Delta^n$, jehož i-tá složka reprezentuje poměrný počet jedinců nacházejících se v i-té plošce, tj. $q_i = m_i/M$. Označme $V(qM) = (V_1(q_1M), \ldots, V_n(q_nM))$. Potom pro zisk jedince hrajícího strategii p v populaci ve stavu q definujeme

$$W(p, q) = (p, V(qM))\,.$$

2.2 Ideální volné rozdělení (IFD)

Naším cílem je nalézt evolučně stabilní strategie hry o volbě teritoria. V tomto oddíle ukážeme, že takovým rozdělením je tzv. *ideální volné rozdělení.*

Definice. *Rozdělení* $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \Delta^n$ *nazveme* ideálním volným rozdělením *(ideal free distribution, IFD), pokud jsou splněny následující dvě podmínky:*

1. *Existuje* $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, *takové, že* $p_1 > 0, \ldots, p_k > 0$, $p_{k+1} = \ldots = p_n = 0$.
2. *Platí* $V_1(p_1M) = \ldots = V_k(p_kM) = V^*$ *a zároveň* $V^* \geq V_i(0)$ *pro každé* $i \in \{k+1, \ldots, n\}$.

Nechť $p^* \in \Delta^n$. V dalším textu rozumíme konstantami příslušnými p^* čísla k a V^* z předchozí definice.

Věta 2.1. *Nechť* V_i *je nezáporná spojitá klesající funkce pro každé* $1 \leq i \leq n$. *Potom existuje právě jedno IFD.*

Důkaz. Za uvedených předpokladů je funkce V_i prostá pro každé $1 \leq i \leq n$.

Ukažme nejprve jednoznačnost, tedy pokud p^* je IFD a $p \neq p^*$, potom p není IFD. Postupujme sporem. Nechť $p \in \Delta^n$, $p \neq p^*$, je IFD. Potom pro rozdělení p (resp. pro p^*) nalezněme příslušné konstanty $l \in \{1, \ldots, n\}$ a $V > 0$ (resp. k a V^*) z definice IFD.

Uvažujme případ $l = k$. Nyní pokud $V = V^*$, pak díky prostotě funkcí V_i musí platit $p = p^*$, což je spor. Pokud platí $V > V^*$, potom musí být $p_i < p_i^*$ pro každé $i \in \text{supp}(p)$ a tedy

$$1 = \sum_{i \in \text{supp}(p^*)} p_i^* > \sum_{i \in \text{supp}(p)} p_i,$$

což je opět spor. Pro $V < V^*$ postupujeme analogicky.

Nechť nyní $k < l$. Potom nutně existuje $j \in \text{supp}(p^*)$ takové, že $p_j < p_j^*$, a platí $V_j(p_jM) > V_j(p_j^*M)$. Protože rozdělení p, p^* jsou IFD, z předchozí nerovnosti plyne $V > V^*$. Zřejmě $V^* \geq B_{k+1}$. Platí $p_{k+1} > 0$, $V = V_{k+1}(p_{k+1}M) < B_{k+1}$, což je ve sporu s $V > V^*$. Podobně dostaneme spor i v případě $k > l$ a tedy pokud IFD existuje, je určeno jednoznačně.

Zaměřme se nyní na existenci. Položme $p^1 := e_1$. Pokud p^1 je IFD, jsme hotovi. Pokud není, zkonstruujeme p^2 následujícím způsobem.

Předpokládejme, že již máme zkonstruovány $p^1, \dots, p^k$, $1 \leq k < n$, takové, že platí $\text{supp}(p^j) = \{1, \dots, j\}$ a $V_1(p_1^jM) = \dots = V_j(p_j^jM) = V^j > 0$ pro každé $1 \leq j \leq k$ a p^j není IFD pro žádné $1 \leq j \leq k$. Naším cílem je nyní nalézt rozdělení $p^{k+1} \in \Delta^n$ a $V^{k+1} > 0$ taková, že $\text{supp}(p^{k+1}) = \{1, \dots, k+1\}$ a $V_1(p_1^jM) = \dots = V_{k+1}(p_{k+1}^j) = V^{k+1}$.

Protože funkce V_i je prostá pro každé $1 \leq i \leq n$, můžeme ke každé V_i nalézt funkci inverzní, tj. $V_i^{-1} : [V_i(M), V_i(0)] \to [0, 1]$. Zřejmě pro každé $1 \leq i \leq n$ je V_i^{-1} spojitá rostoucí. Definujme pomocnou funkci $U : [0, V_k(0) - V^k] \to [0, 1]$ předpisem

$$U(s) = \sum_{j=1}^{k} (V_j^{-1}(V^k) - V_j^{-1}(V^k + s)).$$

Proměnná s zde reprezentuje kvalitu, o kterou zvýšíme kvalitu prvních k plošek, a funkce U vyjadřuje poměrné množství populace, které se tímto zvýšením uvolní a které tedy můžeme přesunout do $k + 1$-ní plošky. Funkce U je spojitá díky spojitosti V_i^{-1} a spojitosti sčítání a je rostoucí.

Chceme ukázat, že existuje $s \in [0, V_{k+1}(0) - V^k]$ takové, že platí rovnost

$$V^k + s = V_{k+1}(U(s)M).$$

Protože p^k není IFD, platí $V^k + U(0) = V^k < V_{k+1}(U(0)M) = V_{k+1}(0)$. Zároveň pro $r \in (0, V_{k+1}(0) - V^k]$ platí $V_{k+1}(0) > V_{k+1}(U(r)M)$ a tedy s hledaných vlastností existuje. Položme nyní

$$p_{k+1} = (V_1^{-1}(V^k + s), V_2^{-1}(V^k + s), \dots, V_k^{-1}(V^k + s), U(s)).$$

Zřejmě $p^{k+1} \in \Delta^n$. Pro p^{k+1} ověřme, zda jde o IFD. Pokud ano, podle předchozí části důkazu je jediné. Takto postupujme, dokud nenalezneme $m \in \{1, \dots, n-1\}$ takové, že p^m je IFD, nebo do konstrukce p^n, které díky vlastnostem konstrukce již požadované vlastnosti splňuje.

$\square$

Věta 2.2 (Cressman, Křivan: [1]). *Ideální volné rozdělení je evolučně stabilní strategie.*

Důkaz. Nechť $p^* \in \Delta^n$ je IFD, $p \in \Delta^n$ libovolná. Chceme ukázat, že existuje takové okolí bodu p^*, že na něm je splněna LSC, tj. $W(p^*, p) > W(p, p)$. Uvažujme nejprve, že všechny plošky jsou obsazené, tedy $k = n$. Platí $V_i(p_i^* M) = V^*$, $1 \le i \le n$. Počítejme

$$\begin{aligned} W(p^*, p) - W(p, p) &= (p^*, V(pM)) - (p, V(pM)) = \sum_{i=1}^{n} (p_i^* - p_i) V_i(p_i M) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (p_i^* - p_i)(V_i(p_i M) - V^*), \end{aligned}$$

přičemž poslední rovnost platí, protože

$$\sum_{i=1}^{n} (p_i^* - p_i) V^* = \sum_{i=1}^{n} p_i^* V^* - \sum_{i=1}^{n} p_i V^* = V^* - V^* = 0.$$

Funkce V_i je klesající, tedy platí $p_i^* - p_i > 0$ právě když $V_i(p_i M) - V^* > 0$, obdobná implikace platí i pro obrácenou nerovnost. Potom pro každé $p \in \Delta^n, p \neq p^*$, platí

$$W(p^*, p) - W(p, p) > 0$$

a IFD je tedy ESS.

Nyní předpokládejme, že existuje alespoň jedna neobsazená ploška, tedy $k < n$. Pro $k + 1 \le i \le n$ máme $V_i(p_i M) \le V^*$. Potom

$$\begin{aligned} W(p^*, p) \quad - \quad & W(p, p) = (p^*, V(pM)) - (p, V(pM)) = \sum_{i=1}^{n} (p_i^* - p_i) V_i(p_i M) \\ = \quad & \sum_{i=1}^{k} (p_i^* - p_i) V_i(p_i M) - \sum_{i=k+1}^{n} p_i V_i(p_i M) \\ \ge \quad & \sum_{i=1}^{k} (p_i^* - p_i) V_i(p_i M) - \sum_{i=k+1}^{n} p_i V^* \\ = \quad & \sum_{i=1}^{k} (p_i^* - p_i)(V_i(p_i M) - V^*) + \sum_{i=1}^{k} (p_i^* - p_i) V^* - \sum_{i=k+1}^{n} p_i V^* \\ = \quad & \sum_{i=1}^{k} (p_i^* - p_i)(V_i(p_i M) - V^*) + \sum_{i=1}^{n} (p_i^* - p_i) V^* \\ = \quad & \sum_{i=1}^{k} (p_i^* - p_i)(V_i(p_i M) - V^*) \end{aligned}$$

Zřejmě pro $p \in \Delta^n$, $p \neq p^*$ existuje $j \in \{1, \dots, k\}$ takové, že $p_j \neq p_j^*$. Poslední suma v předchozí rovnosti je proto podobně jako v případě $k = n$ striktně větší jak nula pro každé $p \neq p^*$, a tedy je LSC podmínka splněna. $\square$

3. Obyčejné diferenciální rovnice s nespojitou pravou stranou

Dynamika hry o volbě teritoria je, jak ukážeme v další kapitole, popsána diferenciální rovnicí, která má v obecném případě nespojitou pravou stranu. Pro takové rovnice nelze použít definici řešení a existenční věty z klasické teorie diferenciálních rovnic. Pro definici řešení a existenční věty pro případ s nespojitou pravou stranou tak, jak je definujeme v této kapitole, je klíčovým pojmem tzv. diferenciální inkluze. Pro účely analýzy dynamiky hry o volbě teritoria stačí vybudovat teorii pro autonomní rovnice, obecnější případ je popsán v [3]. Dále uvádíme tzv. řetízkové pravidlo a definice potřebné k jeho vyslovení. Toto pravidlo použijeme v důkazu Věty 4.2.

3.1 Řešení ve Filippovově smyslu

Definice. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast. Funkci $f : G \to \mathbb{R}^n$ nazveme* po částech spojitou*, pokud existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že platí*

$$G = (\cup_{i=1}^{k} G_i) \cup M,$$

kde $G_i \subset \mathbb{R}^{n+1}$ jsou oblasti a $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je množina nulové míry sestávající z hraničních bodů těchto oblastí, f je spojitá na G_i a pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in G_i$, splňující $x_n \to x$, $x \in M$, existuje $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ vlastní.

Řekneme, že funkce f je po částech spojitá na neomezené oblasti *G, pokud sjednocení výše je obecně nekonečné a každá omezená podmnožina $H \subset G$ má neprázdný průnik pouze s konečně mnoha oblastmi $G_i \subset G$.*

Všimněme si, že hodnota $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ závisí na oblasti, jejíž prvky tvoří samotnou posloupnost $\{x_n\}$. Nechť dále $G \subset \mathbb{R}^n$ je oblast, $G = (\cup_{i=1}^{k} G_i) \cup M$ jako v předchozí definici, $f(x) : G \to \mathbb{R}^n$ je po částech spojitá funkce, $x \in \mathbb{R}^n$ a $M \subset G$ je množina bodů nespojitosti fuknce f. Uvažujme rovnici

$$\dot{x} = f(x), \tag{3.1}$$

kde $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

Naším cílem je rozšířit pojem řešení, jak ho známe z klasické teorie obyčejných diferenciálních rovnic, na problém (3.1) tak, aby byl v souladu s definicí původní. Pro každý bod $x \in G$ tedy zkonstruujme množinu $F(x) \subset \mathbb{R}^n$ tak, aby v každém bodě $m \in G$, ve kterém je funkce f spojitá, obsahovala množina $F(m)$ pouze jeden bod, a to hodnotu limity funkce f v m. V bodech nespojitosti množinu $F(x)$ definujeme pomocí uzavřeného konvexního obalu obsahujícího všechny takové body x^*, pro které existuje posloupnost bodů $x_n \notin M$ taková, že $x_n \to x^*$, a řešení definujeme následovně.

Definice. *Nechť I je interval. Absolutně spojitou funkci $x(t) : I \to \mathbb{R}^n$ nazveme* řešením problému (3.1) ve Filippovově smyslu *na I, pokud pro skoro všechna $t \in I$ platí*

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)), \tag{3.2}$$

kde

$$F(x) = \overline{\text{co}}\{\lim_{n\to\infty} f(x_n); x_n \to x, x \notin M\}. \tag{3.3}$$

Vztah $\dot{x} \in F(x)$ *nazveme* diferenciální inkluzí.

V bodech, kde je funkce f spojitá, se řešení ve Filippovově smyslu shoduje s řešením v obvyklém slova smyslu. Dále, pokud nebude řečeno jinak, bude pojem řešení označovat řešení ve Filippovově smyslu.

Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je dále hladká plocha a funkce $f : G \to \mathbb{R}^n$ je nespojitá na S. Okolí plochy S je touto plochou rozděleno na dvě oblasti, které označíme G_A a G_B. Nechť $x \in S$. Funkce f je spojitá na G_A a G_B až na hranici, tedy existují limity

$$f^A(x) = \lim_{y\to x, y\in G_A} f(y) \quad a \quad f^B(x) = \lim_{y\to x, y\in G_B} f(y).$$

Potom podle (3.3) platí

$$F(x) = \{f^A(x) + t(f^B(x) - f^A(x)); t \in [0,1]\},$$

tedy $F(t)$ je úsečka spojující $f^A(x)$ a $f^B(x)$. Pro lepší představu umístěme vektory $f^A(x)$ a $f^B(x)$ do bodu x. Nechť T je tečná nadrovina plochy S v bodě x. Nyní mohou nastat dva základní případy.

Předpokládejme nejprve, že množina $F(x)$ nemá s tečnou rovinou T žádný společný bod. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že množina $F(x)$ leží na straně roviny T příslušné oblasti G_A. V takovém případě řešení $x(t)$ projde skrz plochu S z oblasti G_B do oblasti G_A.

Druhou možností je situace, kdy $F(x) \cap T$ je neprázdná. Označme $f^0(x)$ vektor z x s koncovým bodem v $F(x) \cap T$. Tento vektor určuje směr pohybu řešení procházejícího bodem x, které pokračuje podél plochy S. Uvažujme tedy $x_1(t)$ klasické řešení rovnice

$$\dot{x}_1 = f(x)$$

na intervalu $I_1 = (t_1, t_2)$ splňující $x_1(t_2) \in S$. Nechť dále $x_2(t)$ je klasické řešení rovnice

$$\dot{x}_2 = f^0(x)$$

s počáteční podmínkou $x_2(t_2) = y$, $y \in S$, na intervalu $I_2 = (t_2, t_3)$. Potom řešení definované předpisem

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t) & \text{pro } t \in I_1 \\ x_2(t) & \text{pro } t \in I_2 \end{cases}$$

je řešením ve Filippovově smyslu. Pokud platí $f^0(x) \neq f^A(x)$ a $f^0(x) \neq f^B(x)$, mluvíme o *klouzání* řešení po ploše S.

Nechť $f_N^A(x)$ (resp. $f_N^B(x)$) je projekce vektoru $f^A(x)$ (resp. $f^B(x)$) na normálu roviny S v bodě, tedy $f_N^A(x), f_N^B(x) \in \mathbb{R}$. Bez újmy na obecnosti nechť je tato normála orientována směrem k oblasti G_A. Opět mohou nastat dva případy.

Pokud $f_N^A(x) < 0$, $f_N^B(x) > 0$, tedy pokud vektory $f_N^A(x), f_N^B(x)$ směřují k ploše S v obou oblastech G_A, G_B, potom řešení nemůže plochu S opustit, protože pokud by se od plochy vzdálilo v kterémkoliv směru, bylo by hodnotami funkce f nuceno se na plochu vrátit, a tedy musí dále pokračovat klouzáním po ploše S.

Pokud naopak $f_N^A(x) > 0$, $f_N^B(x) < 0$, tedy pokud vektory směřují v obou oblastech od plochy S, potom řešení $x(t)$, pro které platí $x(t_1) \in S$, $x(t) \notin S$ pro

$t < t_1$, může pro $t > t_1$ buď pokračovat do libovolné z oblastí G_A, G_B nebo pokračovat klouzáním po ploše S. V takovém případě může řešení při zachování stejných podmínek přestat klouzat v libovolném čase $t > t_1$.

Definice. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ a nechť pro každé $g \in G$ existuje neprázdná uzavřená množina F_g. Zobrazení $F : G \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$, kde $\mathcal{P}(M)$ je potenční množina M, definované předpisem $F(g) = F_g$ nazveme* množinovým zobrazením *(set-valued map).*

Příkladem množinového zobrazení budiž zobrazení definované vztahem (3.3) v definici řešení ve Filippovově smyslu.

Nechť dále F je množinové zobrazení definované na $D \subset \mathbb{R}^n$. Pro $M \subset D$ označme

$$F(M) = \bigcup\nolimits_{p\in M} F(p), \quad |F(M)| = \sup\nolimits_{y\in F(M)} |y|.$$

Definice. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$, F je množinové zobrazení na množině G. Potom F nazveme*

- polospojité shora v bodě $x \in G$*, pokud pro každou otevřenou množinu $N \subset \mathbb{R}^n$ splňující $F(x) \subset N$ existuje otevřená množina $M \subset G$ taková, že platí $x \in M$ a $F(M) \subset N$.*

  Řekneme, že zobrazení F je polospojité shora na množině $M \subset G$*, pokud je polospojité shora pro každé $p \in M$.*

- omezené na množině $M \subset G$*, pokud $|F(M)| < \infty$.*

Lemma. *Množinové zobrazení F z oblasti $G \subset \mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$ definované předpisem* (3.3) *je shora polospojité.*

Důkaz. Viz [3], str. 67, Lemma 3. ☐

Lemma. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je oblast a $f : G \to \mathbb{R}^n$ je po částech spojitá na G. Potom množina $F(x)$ definovaná předpisem* (3.3) *je neprázdná, uzavřená a konvexní pro každé $x \in G$.*

Důkaz. Množina $F(x)$ je zřejmě konvexní a uzavřená pro každé $x \in G$ a neprázdná v bodech spojitosti funkce f. Nechť funkce f není spojitá v bodě $y \in G$. Potom existuje množina $N \subset \{1, \ldots, k\}$ taková, že $y \in \cap_{i\in N} G_i$. Funkce f je na každé oblasti G_i, $i \in N$, spojitá až na hranici, a tedy existuje limita funkce f v y vzhledem k G_i. Množina $F(x)$ je tedy neprázdná pro každé $x \in G$. ☐

Existence řešení ve Filippovově smyslu plyne díky předchozím lemmatům z následující věty.

Věta 3.1. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je oblast a pro každé $x \in G$ je množina $F(x)$ neprázdná, omezená, uzavřená a množinové zobrazení F je shora polospojité. Potom pro každé $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times G$ existuje řešení diferenciální inkluze 3.2 splňující počáteční podmínku $x(t_0) = x_0$.*

Nechť dále $D \subset G$ je uzavřená souvislá omezená množina a F je na D omezené. Potom pro každou počáteční podmínku $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times G$ řešení $x(t)$ existuje buď pro $t \to \infty$ nebo dokud neprotne hranici D.

Důkaz. Viz [3], str. 77, Theorem 1, str. 78, Theorem 2, a vlastnosti řešení pro autonomní systémy na str. 123. ☐

3.2 Řetízkové pravidlo

Definice. *Nechť* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ *a* $v \in \mathbb{R}^n$. Jednostrannou derivací funkce f v bodě x ve směru v *rozumíme vlastní limitu*

$$\mathrm{D}_v^+ f(x) = \lim_{t\to 0+} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

Definice. *Pro funkci* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *definujme* zobecněnou derivaci ve směru $v \in \mathbb{R}^n$ *předpisem*

$$\mathrm{D}_v^\circ f(x) = \limsup_{(y\to x, t\searrow 0)} \frac{f(y+tv) - f(y)}{t}.$$

Věta (Rademacher)**.** *Nechť* $G \subset \mathbb{R}^n$ *je otevřená a* $f : G \to \mathbb{R}^m$ *je Lipschitzovská. Pak* f *je diferencovatelná skoro všude.*

Důkaz. Viz. [8], str. 122, věta 30.3. □

Definice. *Nechť* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *je lokálně Lipschitzovská funkce. Potom* Clarkeův zobecněný gradient *funkce* V *v bodě* x *definujeme jako*

$$\partial V(x) = \overline{\mathrm{co}}\{\lim_{n\to\infty} \nabla V(x_n); x_n \to x, x_n \notin M\},$$

kde M *je množina nulové míry, kde není* ∇V *definován.*

Podle Rademacherovy věty existuje ∇V skoro všude, tedy je předchozí definice korektní.

Definice. *Funkci* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *nazveme* regulární*, pokud pro každé* $x \in \mathbb{R}^n$

(i) $\mathrm{D}_v^+ f(x)$ *existuje pro každé* $v \in \mathbb{R}^n$*,*

(ii) a pro každé $v \in \mathbb{R}^n$ *platí* $\mathrm{D}_v^+ f(x) = \mathrm{D}_v^\circ f(x)$.

Příklad. Nechť $W : \Delta^n \to \mathbb{R}$ je hladká funkce. Ukažme, že W je potom regulární.

Nechť $x \in \Delta^n$ a $v \in \mathbb{R}^n$ takové, že existuje $\eta > 0$ splňující $x + \eta v \in \Delta^n$. Potom protože W je hladká funkce, $\mathrm{D}_v^+ W$ existuje a první podmínka regularity je tedy splněna.

Nechť dále $x^m \to x$ a $t^m \searrow 0$ jsou posloupnosti takové, že platí $x^m + t^m v \in \Delta^n$ pro každé $m \in \mathbb{N}$. Nyní chceme ukázat

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{W(x^m + t^m v) - W(y)}{t^m} = \lim_{t\to 0+} \frac{W(x+tv) - W(x)}{t}.$$

Platí

$$W(x^m + t^m v) - W(x^m) = [W(x^m + \sigma t^m v)]_{\sigma=0}^{\sigma=1} = \int_0^1 \mathrm{D}\, W(x^m + \sigma t^m v) t^m v d\sigma.$$

Předchozí rovnost vydělme t^m a odečtěme $\mathrm{D}\, W(x)v$. Naším cílem je tedy ukázat

$$\int_0^1 (\mathrm{D}\, W(x^m + \sigma t^m v) - \mathrm{D}\, W(x)) v d\sigma \to 0, m \to \infty.$$

Funkce W je hladká, funkce $\frac{\partial W}{\partial x_i}$ jsou spojité na kompaktu Δ^n pro $1 \leq i \leq n$ a jsou tedy na Δ^n stejnoměrně spojité. Zvolme $\varepsilon > 0$ a nalezněme $\delta > 0$ takové, že pokud platí $|x - y| < \delta$, potom $|\frac{\partial W}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial W}{\partial x_i}(y)| < \varepsilon$ pro každé $1 \leq i \leq n$. Nalezněme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $m \geq n_0$ platí $|x^m + t^m v - x| < \delta$. Potom pro $m \geq n_0$ platí

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\mathrm{D}(W(x^m + \sigma t^m v) &- W(x)))v d\sigma \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial W}{\partial x_i}(x^m + \sigma t^m v) - \frac{\partial W}{\partial x_i}(x) \right) v_i \right) d\sigma \\ &< \int_0^1 \varepsilon \sum_{i=1}^n v_i d\sigma = \varepsilon \sum_{i=1}^n v_i,\end{aligned}$$

pro každé $\varepsilon > 0$ a podle Heineho věty je tedy splněna i druhá podmínka regularity.

Věta 3.2 (řetízkové pravidlo)**.** *Nechť I je interval a $x : I \to \mathbb{R}^n$ je řešením problému* (3.1) *na I. Nechť $t \in I$ a $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je regulární Lipschitzovská funkce. Potom funkce $V(x(t))$ je absolutně spojitá, $\frac{d}{dt}V(x(t))$ existuje skoro všude a pro skoro všechna $t \in I$ platí*

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \in \bigcap_{\xi \in \partial V(x(t))} \xi^T F(x(t)) \tag{3.4}$$

kde

$$\xi^T F(x(t)) = \{c \in \mathbb{R}; c = \xi^T \eta \text{ pro nějaké } \eta \in F(x(t))\}.$$

Důkaz. Viz [10], str. 1911, Theorem 2.2. □

Z důkazu řetízkového pravidla v původním článku vyplývá, že inkluze (3.4) je ekvivalentní s rovností

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \xi^T \eta \tag{3.5}$$

pro všechna $\xi \in \partial V(x(t))$ a pro $\eta \in F(x(t))$ splňující

$$\dot{x}(t) = \eta.$$

4. Disperzní dynamika hry o volbě teritoria

Pojem hra, jak jsme ho definovali v první kapitole, používáme k nalezení stabilních bodů jistých dynamických procesů. Uvědomme si, že popis této dynamiky hra ve skutečnosti neobsahuje. Teoreticky by tento fakt mohl působit problémy, ukazuje se však, že při explicitní specifikaci konkrétní dynamiky odpovídají řešení příslušných diferenciálních rovnic evolučně stabilním strategiím či Nashovým ekvilibriím. Příkladem budiž tzv. replikátorová rovnice, pro kterou platí, že každá ESS je asymptoticky stabilním řešení příslušné replikátorové rovnice. Tento výsledek je dokázán v [5].

V této kapitole popíšeme dynamiku hry o volbě teritoria pomocí tzv. disperzní dynamiky a popíšeme pravidla pro disperzi postačující pro konvergenci řešení příslušných diferenciálních rovnic k evolučně stabilnímu IFD.

4.1 Disperzní dynamika

Disperzi popisujeme zobrazením $D : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ reprezentovaným maticí. Prvek matice $d_{ij}(m)$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, kde $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ je vektor absolutního rozložení populace, označuje pravděpodobnost, že za časovou jednotku se jedinec obývající j-tou plošku přesune do i-té plošky. Potom pro změnu velikosti populace v i-té plošce platí vztah

$$\frac{dm_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} (d_{ij}(m)m_j - d_{ji}(m)m_i), \tag{4.1}$$

kde členy $d_{ij}(m)m_j$ odpovídají imigraci do i-té plošky a členy $d_{ji}(m)m_i$ vyjadřují emigraci jedinců z i-té plošky do plošek jiných. Člen $d_{ii}(m)m_i$ se v předchozí sumě odečte, můžeme tedy prvek zvolit $d_{ii}(m)$ tak, aby platilo $\sum_{i=1}^{n} d_{ij}(m) = 1$. Všechny prvky $d_{ij}(m)$ jsou zřejmě nezáporné.

Pro $p \in \Delta^n$ definujme nyní pomocné zobrazení funkci $\phi : \Delta^n \to \mathbb{R}^n$ předpisem $\phi(p) = (p_1 M, p_2 M, \ldots, p_n M)$. Definujme nyní $D^* : \Delta^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ předpisem $D^* = D \circ \phi$, tedy zobrazení D^* nabývá stejných hodnot pro odpovídající si vektory p a m. Zobrazením D budeme v dalším textu kvůli jednoduchosti rozumět zobrazení D^*.

Pokud vydělíme rovnost (4.1) aktuální velikostí populace M, dostáváme díky úmluvě z předchozího odstavce rovnost pro jednotlivé složky

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} (d_{ij}(p)p_j - d_{ji}(p)p_i). \tag{4.2}$$

Soustavu n diferenciálních rovnic tvaru (4.2) pro $i = 1, \ldots, n$ nazveme *disperzní dynamikou.* Tuto soustavu pro jednoduchost zapisujeme ve vektorovém tvaru

$$\frac{dp}{dt} = D(p)p - p, \tag{4.3}$$

všimněme si však, že pro $i, j \in \{1, \dots, n\}$ splňující $i \neq j$ máme

$$\frac{\partial}{\partial p_j}\left(\sum_{j=1}^{n}(d_{ij}(p)p_j - d_{ji}(p)p_i)\right) \neq \frac{\partial}{\partial p_j}(D(p)p - p)_i,$$

a pro výpočet Jakobiho matice disperzní dynamiky musíme tedy použít původní rovnice (4.2).

Věta (Brouwerova o pevném bodě)**.** *Nechť $K \subset \mathbb{R}^n$, K konvexní kompaktní neprázdná. Nechť $f : K \to K$ je spojitá. Potom f má pevný bod, tj. existuje $x \in K$ takové, že platí $f(x) = x$.*

Důkaz. Viz. [2], str. 253, Theorem 5.1.3. □

Věta 4.1 (Cressman, Křivan: [1])**.** *Nechť $D : \Delta^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ je navíc spojité a pozitivní, tj. $d_{ij}(p) > 0$ pro každé $i, j \in \{1, \dots, n\}$, a platí, že $d_{ij}(p)$ není klesající, pokud kvalita i-té plošky roste, a $d_{ij}(p)$ není rostoucí, pokud roste kvalita j-té plošky, tedy*

$$\frac{\partial d_{ij}(p)}{\partial p_i} \leq 0 \text{ a } \frac{\partial d_{ij}(p)}{\partial p_j} \geq 0.$$

Potom existuje lokálně asymptoticky stabilní stacionární bod $p^* \in \Delta^n$, pro které navíc platí $p_i^* > 0$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$, neboli v populaci ve stavu p^* jsou všechny plošky obsazené.

Důkaz. Zobrazení $p \to D(p)p$ je spojité ze spojitosti zobrazení D. Zobrazení $D(p)p$ je dále z Δ^n do Δ^n, množina Δ^n je konvexní, kompaktní a neprázdná. Podle Brouwerovy věty o pevném bodě existuje $p^* \in \Delta^n$ takové, že platí $D(p^*)p^* = p^*$ a tedy dostáváme

$$(D(p^*)p^*)_i = p_i^* = \sum_{k=1}^{n} d_{ki}(p^*)p_i^*.$$

Potom p^* je stacionární bod disperzní dynamiky. Protože D je pozitivní, platí

$$0 < \sum_{j=1}^{n} d_{ij}(p^*)p_j^* = (e_i, D(p^*)p^*) = p_i^*,$$

čímž jsme ukázali, že pro rozdělení p^* jsou všechny plošky obsazené.

Ukažme nyní asymptotickou stabilitu rozdělení p^* pomocí linearizace. Položme

$$f_i(p) = \sum_{j=1}^{n}(d_{ij}(p)p_j - d_{ji}(p)p_i)$$

a definujme pomocné zobrazení F předpisem $F(p) = (f_1(p), f_2(p), \dots, f_n(p))$. Nyní můžeme zapsat disperzní dynamiku ve vektorovém tvaru $\frac{dp}{dt} = F(p)$. Linearizujme nyní zobrazení F v bodě p^*, tedy položme $Q = \nabla F(p)(p^*)$. Potom z rovnosti (4.2) platí

$$q_{ij} = \frac{\partial d_{ij}(p^*)}{\partial p_j}p_j^* + d_{ij}(p^*) - \frac{\partial d_{ji}(p^*)}{\partial p_j}p_i^* \text{ pro } i \neq j.$$

Z podmínek na funkce d_{ij} z nerovnosti $d_{ij}(p^*) > 0$ dostáváme $q_{ij} > 0$ pro $i \neq j$.

Jelikož determinant, a tedy ani vlastní čísla matice se transponováním nemění, stabilitu můžeme vyšetřovat pro transponovanou úlohu. Protože platí

$$\sum_{k=1}^{n} d_{ki}(p^*) = 1$$

pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$, musí zároveň platit

$$\sum_{k=1}^{n} q_{ki} = 0.$$

Vektory $(q_{1i}, \ldots, q_{ni})$ jsou potom lineárně závislé a tedy $0 \in \sigma(Q)$, kde $\sigma(Q)$ je spektrum matice Q. Vlastnímu číslu 0 odpovídá levý vlastní vektor $x = (1, \ldots, 1)$, tedy platí

$$x^T Q = o.$$

Zřejmě vektor x je kolmý na množinu Δ^n.

Nejprve ukažme, že podprostor kolmý na vektor x je invariantní vzhledem k matici Q. Nechť tedy P je podprostor dimenze $n-1$ kolmý na x a nechť dále $v_k \in P, k = 1, \ldots, n-1$, je báze prostoru P. Potom pro $p \in P$ platí $p = \sum_{k=1}^{n-1} c_k v_k$, kde $c_k \in \mathbb{R}$ jsou souřadnice vektoru p vzhledem k bázi v_k. Nyní počítejme

$$(Qp, x) = (\sum_{k=1}^{n-1} Qc_k v_k, x) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k (Qv_k, x) = \sum_{k=1}^{n-1} (c_k v_k, Q^T x) = 0$$

a tedy podprostor P je vůči matici Q invariantní.

Můžeme nalézt podprostor P kolmý na vektor x tak, že $\Delta^n \subset P$. Protože P je invariantní vůči matici Q, stačí k vyšetření stability disperzní dynamiky, která se pohybuje jen v prostoru P, uvažovat pouze vlastní čísla příslušná vlastním vektorům kolmým na vektor x.

Díky invarianci prostoru P vůči Q neexistuje vlastní vektor u příslušný nule takový, že $u \in P$, protože $o \notin P$. Pro nenulové vlastní číslo λ a příslušný vlastní vektor v z rovnosti

$$\lambda(v, x) = (\lambda v, x) = (Qv, x) = (v, Q^T x) = 0$$

dostáváme, že vlastní vektory příslušné nenulovým vlastním číslům jsou na vektor x kolmé. Podobně ukážeme kolmost i pro zobecněné vlastní vektory.

Nechť v je levý vlastní vektor matice Q kolmý na vektor x. Potom v má minimálně jednu a maximálně $n-1$ záporných složek. Pokud by tomu tak nebylo a všechny složky by byly například kladné, potom by nutně platilo $(v, x) > 0$, což je ve sporu s ortogonalitou vektorů v a x.

Ukažme, že vlastní číslo $\lambda \in \sigma(Q)$ příslušné levému vlastnímu vektoru v kolmému na vektor x má zápornou reálnou část, čímž dokážeme asymptotickou stabilitu rozdělení p^*.

Nalezněme $j \in \{1, \ldots, n\}$ takové, že $|v_j| = \max_{1 \le i \le n} |v_i|$. Platí $|v_j| > 0$, protože $v \neq o$. Z rovnosti $v^T Q = \lambda v^T$ dostáváme pro j-tou složku

$$\sum_{i=1}^{n} v_i q_{ij} = \lambda v_j.$$

Převedením členu $v_j q_{jj}$ na pravou stranu, vydělením v_j a aplikováním absolutní hodnoty na obě strany rovnice máme potom

$$|\lambda - q_{jj}| = \left| \frac{\sum_{i \neq j} q_{ij} v_i}{|v_j|} \right| < \frac{\sum_{i \neq j} |q_{ij} v_i|}{|v_j|} \leq \sum_{i \neq j} q_{ij} = |q_{jj}|,$$

přičemž ostrá nerovnost platí, protože v má minimálně jednu a maximálně $n-1$ záporných složek, a neostrá díky nerovnostem $q_{ij} > 0$ a $\left|\frac{x_i}{x_j}\right| \leq 1$ platným pro $i \neq j$. Ze vztahu $\sum_{i=1}^{n} q_{ij} = 0$ ihned dostáváme $q_{jj} < 0$ pro každé $j \in \{1, \ldots, n\}$, a tedy vlastní číslo λ má zápornou reálnou část a rozdělení p^* je asymptoticky stabilní. □

Vraťme se nyní k původnímu modelu navrženému Fretwellem a Lucasem v [4] vedoucímu k definici IFD. Tento model, popsaný v druhé kapitole této práce, uvažuje ideální živočichy, tedy živočichy, kteří v každém okamžiku znají kvalitu každé plošky a usídlují se v plošce s kvalitou nejvyšší. Ukažme nyní, že za takových předpokladů je zobrazení D obecně nespojité v bodech odpovídajících rozdělením, kdy dvě či více plošek má stejnou momentální kvalitu. V případě, že existuje více plošek s nejvyšší kvalitou, předpokládáme, že živočichové si vyberou náhodně jednu z nich.

Nechť V_i jsou navíc hladké pro každé $i = 1, \ldots, n$. Pro spor předpokládejme, že zobrazení D odpovídající disperzi ideálních živočichů je spojité, tedy že zobrazení d_{ij} je spojité pro každé $1 \leq i, j \leq n$. Položme

$$W(p) = \max_{1 \leq i \leq n} V_i(p_i M).$$

Nechť $p \in \Delta^n$, p není IFD, a $K \subset \{1, \ldots, n\}$ je množina indexů, pro které platí $W(p) = V_k(p)$, přičemž množina K je alespoň dvouprvková. Předpokládejme dále

$$\frac{d}{dp_i} V_i(p_i M) \neq \frac{d}{dp_j} V_j(p_j M) \text{ pro } i \neq j, i, j \in K. \tag{4.4}$$

Protože p není IFD, existuje $l \notin K$ splňující $p_l > 0$ a protože D odpovídá disperzi ideálních živočichů, musí být $d_{kl} > 0$ pro každé $k \in K$. Zvolme $\varepsilon > 0$ a zkonstruujme rozdělení p^ε tak, že položíme $p_l^\varepsilon = p_l - \varepsilon$ a $p_k^\varepsilon = p_k + \frac{\varepsilon}{|K|}$ pro $k \in K$.

Nalezněme nyní množinu indexů K_0, pro které platí $W(p^\varepsilon) = V_m(p_m^\varepsilon M)$ pro každé $m \in K_0$. Pokud zvolíme ε dost malé, bude $K_0 \subset K$. Díky (4.4) dostáváme, že množina $K \setminus K_0$ je neprázdná a pro každé $m \in K \setminus K_0$ potom platí $d_{ml}(p^\varepsilon) = 0$. Jelikož jsme však volili ε libovolné, platí toto obecně pro $\varepsilon > 0$ a tedy ze spojitosti funkce d_{ml} pak dostáváme $d_{ml}(p) = 0$, což je spor, protože $m \in K$ a z konstrukce množiny K máme $d_{kl}(p) > 0$ pro každé $k \in K$. Zobrazení odpovídající disperzi ideálních živočichů tedy není obecně spojité. Samotnou disperzní dynamikou pro ideální živočichy se zabýváme v příkladu na konci kapitoly.

Pokud zobrazení D splňuje podmínky z Věty 4.1, dostáváme, že pokud je populace ve stavu IFD, neprobíhá mezi ploškami žádná disperze. Jedinci v takovou chvíli, až na speciální případy, ztrácí možnost, jak sledovat změny v ostatních ploškách, a po zbytek svého života zůstávají v jedné konkrétní plošce, což je výsledek, který neodpovídá pozorování v přírodě, viz. [6], str. 3. Naším dalším cílem tedy bude rozšíření stávajícího modelu tak, aby i v populaci ve stavu IFD probíhala disperze. Jednou z možností, jak toho docílit, je připustit nespojitost zobrazení D, což se díky předchozímu pozorování pro ideální živočichy ukazuje jako přirozený předpoklad.

V následující větě ukážeme, že řešení disperzní dynamiky konvergují k IFD i za slabších předpokladů, než vyžadoval původní model uvedený v [4], konkrétně požadujeme, aby disperze nikdy neprobíhala z plošky s vyšší kvalitou do plošky s kvalitou nižší (podmínka (i)) a v případě, že existuje osídlená ploška s kvalitou ostře menší než maximální, se nějací jedinci přesunuli do plošky s nejvyšší kvalitou (podmínka (ii)). Stabilitu IFD ukážeme pomocí Ljapunovské funkce

$$W(p) = \max_{1 \leq i \leq n} V_i(p_i M).$$

Všimněme si, že k ověření, že W je klesající funkce podél každého řešení disperzní dynamiky, nepožadujeme existenci derivace funkce W v každém bodě, ale hladkost jednotlivých funkcí $V_i, i = 1, \ldots, n$.

Věta 4.2 (Cressman, Křivan: [1])**.** *Nechť $V_i, i = 1, \ldots, n$, jsou navíc hladké a jsou splněny následující dvě podmínky:*

(i) Pokud $V_i(p_i M) < V_j(p_j M)$, potom nutně $d_{ij}(p) = 0$.

(ii) Nechť $V_i(p_i M) = \max_{1 \leq k \leq n} V_k(p_k M)$. Potom pro nějaké $j \in \{1, \ldots, n\}$ splňující $p_j > 0$ a $V_i > V_j$ platí $d_{ij}(p) > 0$.

Potom rozdělení IFD je globálně stabilní.

Důkaz. Naším cílem je nalézt Ljapunovskou funkci $W : \Delta^n \to \mathbb{R}$ takovou, že podél řešení rovnice (4.3) klesá a nabývá minimální hodnoty v IFD. Položme tedy

$$W(p) = \max_{1 \leq i \leq n} V_i(p_i M)$$

a ověřme, že funkce W skutečně nabývá minima v IFD.

Nechť $p^* \in \Delta^n$ je IFD příslušné funkcím $V_1, V_2, \ldots, V_n$ a nechť pro spor existuje $p \in \Delta^n$, $p \neq p^*$, takové, že $W(p)$ je minimální. Protože $p \neq p^*$, nutně existuje $j \in \operatorname{supp}(p^*)$ takové, že $p_j < p_j^*$. Platí tedy

$$W(p) \geq V_j(p_j M) > V(p^* M) = V^* = W(p^*),$$

což je spor s předpokladem, že p je minimální.

Uvažujme nejprve, že zobrazení $D : \Delta^n \to \mathbb{R}^{n \times n}$ je spojité. Předpokládejme dále, že v konkrétním čase t platí, že $p(t) \in \Delta^n$ není IFD. Nechť $K \subset \{1, \ldots, n\}$ je množina indexů takových, že pro $k \in K$ platí $W(p(t)) = V_k(p_k(t)M)$. Zvolme nyní $i \in K$ pevné. Protože p není IFD, existuje $j \in \{1, \ldots, n\}$ takové, že $p_j(t) > 0$ a $V_j < V_i$. Potom podle podmínky (ii) platí $d_{ij}(p(t)) > 0$. Pro $k \in K, k \neq i$, kvůli spojitosti zobrazení D musí být $d_{ik}(p(t)) = 0$. Protože platí (i) a

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ji}(p(t)) = 1,$$

musí platit $d_{ii}(p(t)) = 1$. Nyní

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} d_{ij}(p(t)) p_j(t) - p_i(t) > 0,$$

protože $d_{ii}(p) = 1$ a existuje $j \neq i$ takové, že $d_{ij}(p) > 0$, a tedy funkce W je podél řešení klesající.

Nechť nyní zobrazení D není spojité. Řešení takové disperzní dynamiky potom uvažujeme ve Filippovově smyslu, tj. jako řešení diferenciální inkluze (3.2).

Ukažme nejprve, že $W = \max_{1 \leq k \leq n} V_k$ je regulární funkce. Nechť $p \in \Delta^n$ pevné a $v \in \mathbb{R}^n$ takové, že existuje $\eta > 0$ splňující $p + \eta v \in \Delta^n$. Nalezněme množinu $K_0 \subset \{1, \dots, n\}$ takovou, že pro každé $k \in K_0$ platí

$$W(p) = V_k(p_k M) \text{ a } D_v^+ W(p) = D_v^+ V_k(p_k M). \tag{4.5}$$

Pokud je množina K_0 jednoprvková, splnění druhé podmínky regularity v bodě p ukážeme podobně jako pro hladkou funkci.

Pokud není, pro libovolné $k \in K_0$ potom díky druhé rovnosti v (4.5) dostáváme

$$W(p + tv) = V_k((p_k + tv_k)M) + o(t), t \to 0+ .$$

Druhou podmínku regularity opět ukážeme podobně jako pro hladkou funkci, protože z definice $o(t)$ víme, že chyba $\frac{o(t)}{t}$ je v limitě $t \to 0+$ zanedbatelná.

Nechť $p(t)$ je tedy řešení rovnice (4.3) ve Filippovově smyslu a předpokládejme, že v konkrétním čase t_0 platí, že $p(t_0)$ není IFD. Nechť $K \subset \{1, \dots, n\}$ je množina taková, že každé $k \in K$ splňuje

$$W(p(t_0)) = V_k(p_k(t_0)M)$$

a zároveň

$$W_+'(p(t_0)) = (V_k)_+'(p_k(t_0)M) \text{ nebo } W_-'(p(t_0)) = (V_k)_-'(p_k(t_0)M),$$

kde $f_+'(\tau)$ (resp. $f_-'(\tau)$) je derivace funkce $f(t)$ zprava (resp. zleva) podle t v bodě τ. Splnění těchto podmínek můžeme požadovat, protože podle řetízkového pravidla (Věta 3.2) existuje $\frac{d}{dt}W(p(t))$ skoro všude.

Z definice Clarkeova zobecněného gradientu dostáváme

$$\partial W(p(t_0)) = \overline{\text{co}}\{\lim_{m \to \infty} \max_{1 \leq k \leq n} \nabla V_k(p_m M); p_m \to p(t_0), p_m \notin M\},$$

kde M je množina bodů míry nula, na které není zobrazení D spojité. Z hladkosti funkcí V_k a volby množiny K můžeme pro $w \in \partial W(p(t_0))$ psát

$$w = \sum_{k \in K} \xi_k \frac{dV_k(p_k(t_0)M)}{dp_k} e_k,$$

kde e_k jsou vektory kanonické báze $\mathbb{R}^n$ a zároveň platí $\sum_{k \in K} \xi_k = 1$. Podle ekvivalentního vyjádření řetízkového pravidla (3.5) pro skoro všechna t platí

$$\frac{dW(p(t))}{dt} = \sum_{k \in K} \xi_k \frac{dV_k(p_k(t)M)}{dp_k} \frac{dp_k(t)}{dt}.$$

Z rovnosti

$$V_k(p_k(t_0)M) = V_l(p_l(t_0)M)$$

pro $k, l \in K$ dostáváme derivací podle času

$$\frac{dV_k(p_k(t_0)M}{dp_k} \frac{dp_k(t_0)}{dt} = \frac{dV_l(p_l(t_0)M)}{dp_l} \frac{dp_l(t_0)}{dt}.$$

Protože $\frac{dV_i}{dp_i} < 0$ pro každé $1 \leq i \leq n$, musí mít pro všechna $k \in K$ derivace $\frac{dp_k}{dt}$ stejné znaménko. Pokud nemají všechny osídlené plošky stejnou kvalitu, potom musí díky (i) a (ii) být tyto derivace kladné, W je tedy klesající a IFD je stabilní. $\square$

Výše uvedená věta ukazuje stabilitu IFD i pro živočichy, kteří nejsou ideální, jelikož nepožaduje, aby se jedinci přesouvali přímo do plošky s nejvyšší kvalitou, k čemuž by potřebovali znát kvalitu všech plošek v každý okamžik. Namísto toho takovým živočichům stačí schopnost porovnat kvalitu své současné plošky s nějakou jinou ploškou.

Příklad (podle [7]). Ukažme nyní konkrétní tvar disperzní dynamiky pro ideální živočichy. Zvolme $n = 3$ a položme $V_i(p_i M) = B_i(1 - \frac{p_i M}{K_i})$, $r_i, K_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, kde K_i odpovídá kapacitě dané plošky a B_i je její počáteční kvalita. Označme dále

$$\begin{aligned} G_1 &= \{p \in \Delta^n; V_1(p_1 M) > \max\{V_2(p_2 M), V_3(p_3 M)\}\}, \\ G_2 &= \{p \in \Delta^n; V_2(p_1 M) > \max\{V_1(p_2 M), V_3(p_3 M)\}\}, \\ G_3 &= \{p \in \Delta^n; V_3(p_1 M) > \max\{V_1(p_2 M), V_2(p_3 M)\}\}. \end{aligned}$$

Definujme dále zobrazení D předpisem

$$D(p) = \begin{cases} D^1 & \text{pro } p \in G_1, \\ D^2 & \text{pro } p \in G_2, \\ D^3 & \text{pro } p \in G_3, \end{cases}$$

kde

$$D^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ a } D^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zobrazení D je zřejmě po částech spojité, a tedy existuje řešení problému (4.3) v Filippovově smyslu. Předpokládejme dále, že M je dostatečně velké, aby pro IFD $p^* \in \Delta^3$ příslušné funkcím V_1, V_2, V_3 platilo $\mathrm{supp}(p^*) = \{1, 2, 3\}$. Potom platí

$$\begin{aligned} p_1^* &= \frac{K_1(r_2 r_3(M - K_2 - K_3) + r_1(K_2 r_3 + K_3 r_2))}{M(K_1 r_2 r_3 + K_2 r_1 r_3 + K_3 r_1 r_2)} \\ p_2^* &= \frac{K_2(r_1 r_3(M - K_1 - K_3) + r_2(K_1 r_3 + K_3 r_1))}{M(K_1 r_2 r_3 + K_2 r_1 r_3 + K_3 r_1 r_2)} \\ p_3^* &= \frac{K_3(r_1 r_2(M - K_1 - K_2) + r_3(K_1 r_2 + K_2 r_1))}{M(K_1 r_2 r_3 + K_2 r_1 r_3 + K_3 r_1 r_2)}. \end{aligned}$$

Uvažujme nyní řešení procházející bodem $p \in \Delta^3$, který splňuje

$$V_1(p_1 M) = V_2(p_2 M) > V_3(p_3 M). \tag{4.6}$$

Potom máme

$$D(p) = \lambda D^1 + (1 - \lambda) D^2 = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ 1 - \lambda & 1 - \lambda & 1 - \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde $\lambda \in [0,1]$. Disperzní dynamika pro řešení klouzající po ploše tvořené body splňujícími (4.6) má potom tvar

$$\begin{aligned}
\frac{dp_1}{dt} &= \lambda - p_1 \\
\frac{dp_2}{dt} &= 1 - \lambda - p_2 \\
\frac{dp_3}{dt} &= -p_3.
\end{aligned}$$

Zabývejme se nyní hodnotou zobrazení D v bodě p^*, tj. v IFD. Zřejmě platí

$$D(p^*) = \lambda D^1 + \mu D^2 + (1 - \lambda - \mu) D^3$$

pro nějaká $\lambda, \mu \geq 0, \lambda + \mu \leq 1$. Protože ale při IFD platí $D(p^*)p^* = p^*$, dostáváme $\lambda = p_1^*, \mu = p_2^*, 1 - \lambda - \mu = p_3^*$ a tedy

$$D(p^*) = \begin{pmatrix} p_1^* & p_1^* & p_1^* \\ p_2^* & p_2^* & p_2^* \\ p_3^* & p_3^* & p_3^* \end{pmatrix}.$$

Seznam použité literatury

[1] Cressman, R. , Křivan, V.: *Migration dynamics for the ideal free distribution.* The American Naturalist **168**, str. 384-397, 2006.

[2] Drábek, P. , Milota, J.: *Methods of nonlinear analysis: Applications to differential equations.* Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.

[3] Filippov, A. F: *Differential equations with discontinuous righthand sides.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988.

[4] Fretwell, S. D., Lucas, H. L.: *On territorial behavior and other factors influencing habitat distribution in birds.* Acta Biotheoretica **19**, str. 16-36, 1970.

[5] Hofbauer, J., Sigmund, K.: *Evolutionary Games and Population Dynamics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[6] Hugie, D. M., Grand, T. C: *Movement between patches, unequal competitors and the ideal free distribution.* Evolutionary Ecology **12**, str. 1 - 19, 1998.

[7] Křivan, V.: *Evolutionary games and population dynamics. Proceedings of Seminar in Differential Equations.* Kamenice nad Lipou, Volume II, ed. P. Drabek. Vydavatelsky servis, Plzen, 2009.

[8] Lukeš, J., Malý, J.: *Measure an Integral.* Matfyzpres, Praha, 2005.

[9] Maynard Smith, J., Price, G. R: *The logic of animal conflict.* Nature **246**, str. 15-18, 1973.

[10] Shevitz, D., Paden, B: *Lyapunov stability theory of nonsmooth systems.* IEEE Transaction on Automatic Control **39**, str. 1910-1914, 1994.

Seznam použitých zkratek a symbolů

Δ^n	množina smíšených strategií	str 4
$\operatorname{supp} p$	nosič strategie p (support)	str. 4
NE	Nashovo ekvilibrium (Nash equilibrium)	str. 5
ESS	evolučně stabilní strategie (evolutionarily stable strategy)	str. 6
LSC	lokální podmínka převahy (local superiority condition)	str. 6
IFD	ideální volné rozdělení (ideal free distribution)	str. 8
$\mathrm{D}_v^+ f(x)$	jednostranná derivace funkce f ve směru v v bodě x	str. 14
$\mathrm{D}_v^\circ f(x)$	zobecněná derivace funkce f ve směru v v bodě x	str. 14
$\partial V(x)$	Clarkeův zobecněný gradient funkce V v bodě x	str. 14