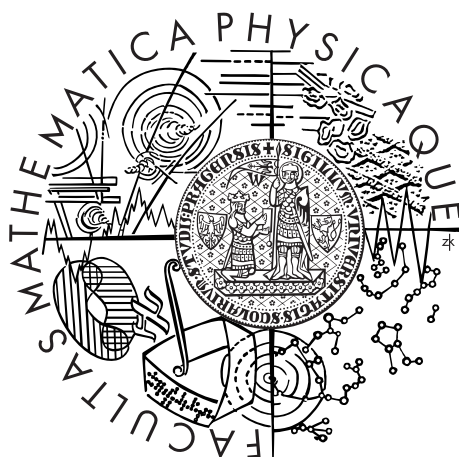


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Ivana Myšičková

### **Analýza úrokového rizika metodou hlavních komponent**

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Lucia Jarešová

Studijní program: matematika

Studijní obor: finanční matematika

Praha 2011

Ráda bych poděkovala své vedoucí Mgr. Lucii Jarešové za spolupráci při tvorbě této bakalářské práce, za cenné rady a trpělivost. Dále mé poděkování patří všem, kteří mě v této činnosti podporovali.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Ivana Myšíčková

Název práce: Analýza úrokového rizika metodou hlavních komponent

Autor: Ivana Myšíčková

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Lucia Jarešová, MFF UK, Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Předložená práce analyzuje úrokové riziko, které je spojeno s držením konkrétně zadaného dluhopisu s fixním kuponem. V první části práce definujeme některé základní pojmy a uvádíme popis dat, která máme k dispozici. Jsou to historické údaje o spotových úrokových mírách bezkuponových dluhopisů pro různé doby do splatnosti, které budou využity ke konstrukci výnosových křivek. Na základě těchto výnosových křivek dluhopis oceníme, čímž získáme představu o vývoji jeho ceny, a v dalších částech se pokusíme odhadnout jeho cenu zítra. Přistupovat k tomuto problému budeme dvěma způsoby. Nejprve použijeme běžnou analýzu úrokového rizika na základě durace a konvexity a poté se seznámíme s metodou hlavních komponent, kterou aplikujeme na historické denní změny výnosových křivek.

Klíčová slova: dluhopis s fixním kuponem, hrubá cena, úrokové riziko, výnosová křivka, durace, konvexita, metoda hlavních komponent

Title: Interest Rate Risk Analysis by Principal Component Method

Author: Ivana Myšíčková

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Lucia Jarešová, MFF UK, Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: Presented study analyzes interest rate risk associated with the possession of given fixed coupon bond. In the first chapter, we define some of the basic concepts and provide description of available data. These are historical data on spot interest rates of zero-coupon bonds for various times to maturity which will be used for the construction of the yield curves. Based on these bond yield curves we evaluate the bond, thus obtaining a picture of the evolution of its price. Later on, we try to estimate its price tomorrow. We present two approaches how to deal with this problem. First approach is the normal interest rate risk analysis based on duration and convexity, second approach is the method of principal components which will be applied to the historical daily changes in yield curves. The method of principal components is introduced in detail.

Keywords: fixed coupon bond, dirty price, interest rate risk, yield curve, duration, convexity, principal component analysis

# Obsah

Úvod	2
<b>1 Popis dat</b>	<b>4</b>
1.1 Základní pojmy	4
1.1.1 Dluhopisy	4
1.1.2 Tvar a pohyb výnosových křivek	5
1.2 Popis dat	7
<b>2 Ocenění dluhopisu</b>	<b>10</b>
2.1 Úvod	10
2.2 Ocenění dluhopisu	13
2.3 Analýza citlivosti dluhopisu	15
<b>3 Metoda hlavních komponent</b>	<b>20</b>
3.1 Krátká exkurze do maticové algebry	20
3.1.1 Značení	20
3.1.2 Vlastní čísla, vlastní vektory	21
3.1.3 Spektrální rozklad matice	22
3.1.4 Kvadratické formy	23
3.2 Rozklad matice dat na faktory	24
3.2.1 Problém redukce dimenze	24
3.2.2 Vztahy mezi $C(X^T)$ a $C(X)$	28
3.3 Odvození metody hlavních komponent	29
3.3.1 Standardizované lineární kombinace (SLC)	29
3.3.2 Aproximace pomocí $R$ hlavních komponent	32
3.3.3 Hlavní komponenty v praxi	32
3.4 Analýza úrokového rizika metodou hlavních komponent	33
3.4.1 Příprava dat	33
3.4.2 Aplikace PCA na data	35
3.4.3 Interpretace vlastních vektorů	38
3.5 Analýza úrokového rizika	39
<b>Závěr</b>	<b>42</b>
<b>Seznam použité literatury</b>	<b>43</b>
<b>Přílohy</b>	<b>44</b>

# Úvod

Držení dluhopisu představuje řadu rizik. Jedním z nich je *kreditní riziko*, které vyjadřuje možnost zvýšení pravděpodobnosti neplnění závazků ze strany emitenta dluhopisu, tj. riziko neplacení kuponových plateb či nesplacení nominální hodnoty. *Likviditní riziko* naopak reflektuje nebezpečí „vyschnutí“ trhu, kdy je snížena poptávka po dluhopisech a držitel tedy dluhopis nemůže prodat, přestože se o to snaží. Dalším velmi důležitým příkladem rizika je *úrokové riziko*, které je spojeno s pohybem tržních úrokových sazeb. Pro držitele dluhopisu s fixním kuponem představuje nebezpečí, že se úrokové sazby neočekávaně zvýší. Při růstu úrokových sazeb totiž cena tohoto dluhopisu klesá a zároveň roste jeho výnos do splatnosti.

Cílem této práce je analyzovat úrokové riziko 20-letého dluhopisu s fixním kuponem. Ne každý si zřejmě dokáže okamžitě představit, co se pod tímto pojmem vlastně skrývá. Začneme proto raději od začátku.

Ze závěru druhého odstavce vyplývá, že analyzujeme-li úrokové riziko dluhopisu, neděláme vlastně nic jiného, než že zkoumáme, jaká bude jeho cena, dojde-li ke zvýšení resp. snížení úrokových sazeb. To, jakým způsobem nahlížíme na změnu úrokových sazeb, nás vede ke dvěma odlišným způsobům řešení tohoto problému.

První způsob je založen na faktu, že změnou úrokových sazeb je ovlivněn očekávaný výnos dluhopisu, spočtený za předpokladu, že dluhopis je držen až do konce doby splatnosti (tzv. výnos do splatnosti). Potom se tedy náš problém transformuje a zkoumáme, jaká bude cena dluhopisu, dojde-li ke zvýšení resp. snížení výnosu do splatnosti. Tento způsob je popsán v druhé kapitole této práce.

Druhá kapitola se nejprve věnuje ocenění dluhopisu za účelem získání představy o historickém vývoji jeho ceny. Ocenění dluhopisu probíhá na základě výnosových křivek zkonstruovaných z našich dat. Tato data jsou spolu s konstrukcí výnosových křivek popsána v kapitole první, na jejímž začátku najdete i stručný úvod k dluhopisům a definice některých základních pojmů užívaných ve finanční matematice. Dále je pak v druhé kapitole řešen uvedený problém; a to dvěma různými přístupy. První přístup představuje výpočet změny ceny na základě přecenění dluhopisu, označovaný jako *full valuation approach*, čímž je zjištěna jeho skutečná cena při změně vstupních parametrů. Druhým přístupem je lineární či kvadratická aproximace změny ceny, tj. odhad změny ceny na základě durace a konvexity, označovaný jako *sensitivity approach*. Oba tyto přístupy jsou v závěru kapitoly porovnány.

Druhý způsob řešení problému se odvíjí od skutečnosti, že se změnou úrokových sazeb dochází k pohybu a změně tvaru výnosové křivky. Problém pak vypadá následovně: Zkoumáme závislost ceny dluhopisu na konkrétních změnách v tvaru výnosové křivky. Jinými slovy jde o to, co se stane, pokud se výnosová křivka posune nahoru či dolů, otočí doprava či doleva a nebo více či méně prohne. Tento úhel pohledu na změnu úrokových měr je klíčovým pro třetí kapitolu této práce.

Třetí kapitola nejprve připomíná základní poznatky z maticové algebry, které jsou důležité pro odvození metody hlavních komponent. Ta je následně podrobně popsána. Dále je vyloženo, jak metodu použít k řešení našeho konkrétního problému společně s aplikací na upravená data, tj. na historické denní změny výnosových křivek. Prostřednictvím metody hlavních komponent získáme fakto-

ry reprezentující různé typy pohybu výnosových křivek, jež jsou komentovány v kapitole první. Tyto faktory následně použijeme pro analýzu možných změn aktuální výnosové křivky a vlivu těchto změn na cenu dluhopisu.

# 1. Popis dat

Před tím, než se pustíme do popisu dat, je nutné nejprve vytvořit jisté teoretické zázemí. Zejména je třeba ujasnit si názvosloví, které nemusí být v praxi vždy jednotné.

## 1.1 Základní pojmy

Tento oddíl je pro přehlednost rozdělen ještě do dalších dvou samostatných částí. První část zavádí pojmy z finanční matematiky, týkající se zejména dluhopisů. Čerpáno je z knih [2] a [3]. Druhá část je věnována výnosovým křivkám, konkrétně jejich tvarům a možným pohybům, jak je uvedeno v publikaci [10].

### 1.1.1 Dluhopisy

Dluhopisy patří mezi nejdůležitější reprezentanty dlouhodobých cenných papírů. Emise dluhopisu představuje základní způsob, jímž si emitent může opatřit potřebný úvěrový kapitál. Tyto finanční prostředky získává na delší dobu a s jistotou, že majitel dluhopisu od svého rozhodnutí neustoupí.

Dluhopis lze jednoduše označit jako doklad o uzavřené dohodě, kterou emitentovi dluhopisu (tj. *dlužníkovi*) vzniká dlužnický závazek vůči oprávněnému majiteli obligace (tj. *věřiteli*). Je tedy povinen splatit majiteli k danému datu zapůjčenou částku a případně platit v daných termínech sjednaný úrok. Tento doklad je navíc na rozdíl od klasických úvěrů obchodovatelný na sekundárních trzích cenných papírů.

Nejčastějším typem dluhopisů je *dluhopis s pevným (fixním) kuponem*. Jeho držitel inkasuje v pravidelných termínech (*data kuponových plateb*) pevné úrokové splátky označované jako *kupony (kuponové platby)* a po uplynutí jeho *doby do splatnosti* (tj. k *datu splatnosti dluhopisu*) inkasuje spolu s posledním kuponem také příslušnou *nominální hodnotu* dluhopisu. Kuponovou platbu vyjádřenou v procentech z nominální hodnoty označujeme jako *kuponovou sazbu*.

Při obchodování s dluhopisy na finančních trzích se dostáváme do styku s mnoha pojmy, jejichž výčet by byl poměrně rozsáhlý. Pro účely této práce bude stačit, omezíme-li se pouze na následující, pro nás klíčové pojmy, které jsou pro přehlednost uvedeny formou definic.

**Definice 1.** *Spotová úroková míra (spot rate)  $R_t$  pro dobu splatnosti  $t$  je okamžitě platná (roční) úroková míra pro úročení a diskontování částek přes následné období délky  $t$  [2].*

**Poznámka:** Speciálně se někdy mluví o *spotové míře zisku, spotové výnosnosti* či *spotovém výnosu do splatnosti* apod.  $\diamond$

**Definice 2.** *Výnosová křivka (yield curve) je posloupnost výnosností do splatnosti uspořádaných podle rostoucí doby splatnosti a často znázorněných graficky [3].*

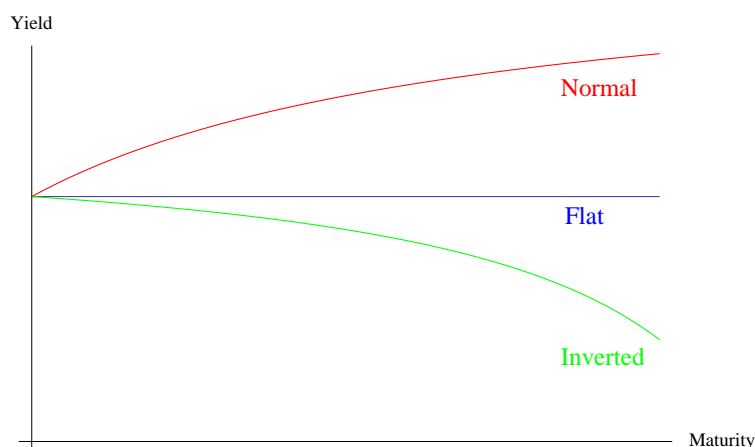


**Poznámka:** V souvislosti s bezkuponovými dluhopisy hovoříme o *výnosové křivce bezkuponových dluhopisů* (*zero-coupon yield curve*), která znázorňuje závislost mezi spotovými výnosy do splatnosti bezkuponových dluhopisů (*zero-coupon rate*) a jejich dobou splatností. Budeme ji nazývat tzv. *zero křivkou*. Pro kuponové dluhopisy obdobně zavádíme pojem *výnosová křivka kuponových dluhopisů* (*coupon yield curve*). ◇

**Poznámka:** Pro výnosové křivky s rostoucí tendencí platí, že výnosová křivka kuponových dluhopisů leží vždy pod výnosovou křivkou bezkuponových dluhopisů. Majitel kuponového dluhopisu totiž inkasuje určité platby již před datem splatnosti, jejichž diskontování podléhá nižším úrokovým mírám než diskontování plateb k datu splatnosti. Pokud se jedná o výnosové křivky s klesající tendencí, je tomu právě naopak. ◇

### 1.1.2 Tvar a pohyb výnosových křivek

Historicky bylo zjištěno, že výnosová křivka nabírá tři základních tvarů, které jsou zobrazeny na obrázku 1.1.



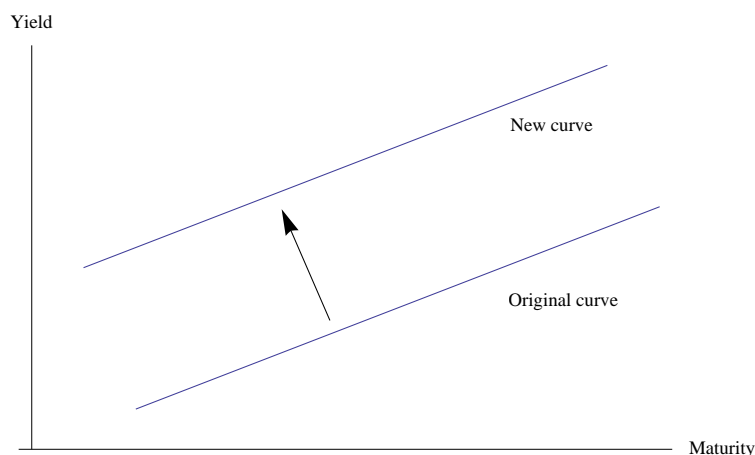
Obrázek 1.1: Tvary výnosové křivky (Yield curve shapes)

*Rostoucí výnosová křivka* (*normal yield curve*) je ta, která má dlouhodobé úrokové sazby vyšší než krátkodobé, tedy křivka má pozitivní sklon. *Plochá výnosová křivka* (*flat yield curve*) představuje situaci, kdy je výnos pro všechny doby do splatnosti v podstatě stejný. *Klesající výnosová křivka* (*inverted yield curve*) odráží stav, kdy dlouhodobé úrokové sazby jsou nižší než krátkodobé, křivka má proto negativní sklon.

Nyní se podívejme k jakým pohybům výnosových křivek může docházet.

Pokud křivka vykazuje *paralelní posun* (*parallel shift*), výnosy u všech dob do splatnosti se mění ve stejném směru a celá křivka se posune nahoru nebo dolů, jak je naznačeno na obrázku 1.2. Po paralelním posunu zůstává sklon výnosové křivky nezměněný.

Vykazuje-li křivka *neparalelní posun* (*nonparallel shift*), výnosy se u různých dob do splatnosti mění v odlišných výších a směrech. Sklon výnosové křivky po



Obrázek 1.2: Paralelní posun výnosové křivky (Parallel yield curve shift)

neparalelním posunu není stejný, jako byl před posunem. Neparalelní posuny se dělí do dvou hlavních kategorií: rotace (*twists*) a prohnutí (*butterfly shifts*).

*Rotace výnosové křivky* je takový případ pohybu výnosové křivky, kdy se její sklon stává buď plošší nebo strmější. Zploštění výnosové křivky znamená, že rozdíly mezi krátkodobými a dlouhodobými úrokovými sazbami se snížily, naopak u strmější křivky se rozdíly zvětšily.

Jak je znázorněno na obrázku 1.3, mezi nejčastější pohyby patří buď posun dolů a strmější křivka nebo posun nahoru a plošší křivka.

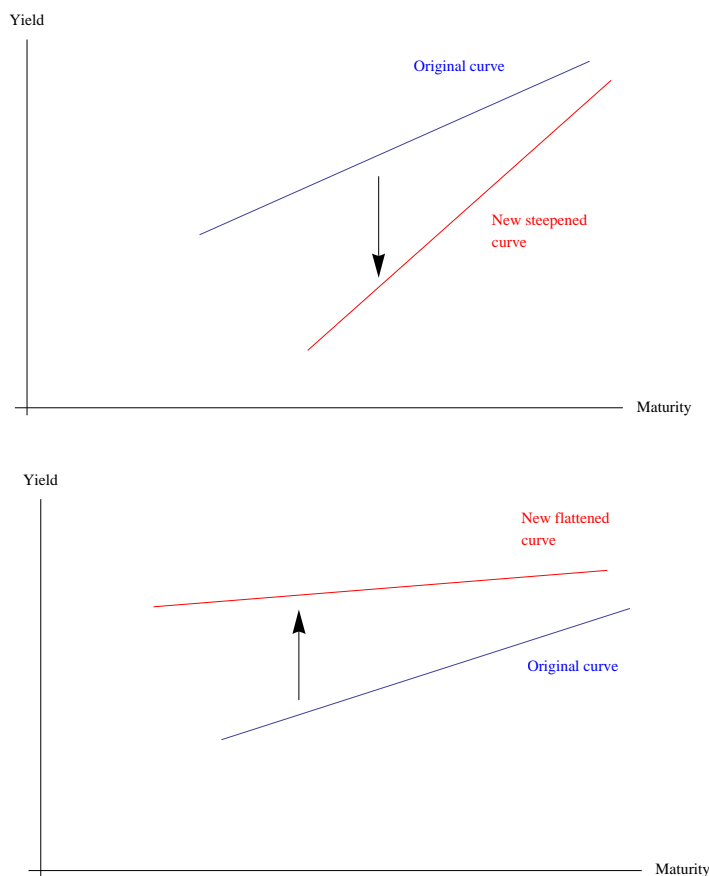
*Prohnutí výnosové křivky* je spojeno se změnou v úrovni zakřivení. *Pozitivní prohnutí (positive butterfly)* znamená, že výnosová křivka se stane méně zakřivenou. Například, když výnosy u krátkých a dlouhých dob do splatností rostou více než výnosy středních dob do splatností, jak je znázorněno na obrázku 1.4. *Negativní butterfly (negative prohnutí)* znamená, že výnosová křivka se stane více zakřivenou. Například, když výnosy u středních dob do splatností rostou více než výnosy u dlouhých a krátkých dob do splatností, viz. obrázek 1.4.

Výnosnost dluhopisu se odvíjí od výnosové křivky, jejíž tvar je ovlivněn různými faktory. Často identifikujeme právě faktory spojené s typy pohybu, které byly zmíněny v předchozích odstavcích.

1. Změny v úrovni úrokových sazeb (paralelní posuny výnosové křivky).
2. Změny ve sklonu výnosové křivky (rotace výnosové křivky).
3. Změny v zakřivení výnosové křivky (prohnutí výnosové křivky).

Publikace [10] uvádí, že Litterman a Scheikman v deníku [8] ukázali, že tyto tři faktory společně vysvětlují více než 95% rozptylu celkového výnosu u 6-měsíčních až 18-ročních dluhopisů s nulovým kuponem.

- Faktor 1: Změny v úrovni úrokových sazeb přispívají nejvíce, vysvětlují téměř 90% pozorovaných rozdílů v celkových výnosech pro všechny doby do splatnosti.
- Faktor 2: Změny sklonu vysvětlují průměrně 8.5% rozptylu celkového výnosu u všech dob do splatnosti.



Obrázek 1.3: Neparalelní posun výnosové křivky - rotace (Nonparallel yield curve shifts - twists)

- Faktor 3: Změny v zakřivení přispívají relativně málo k vysvětlení celkových výnosů, s průměrným podílem na celkově vysvětleném rozptylu rovným 1.5%.

## 1.2 Popis dat

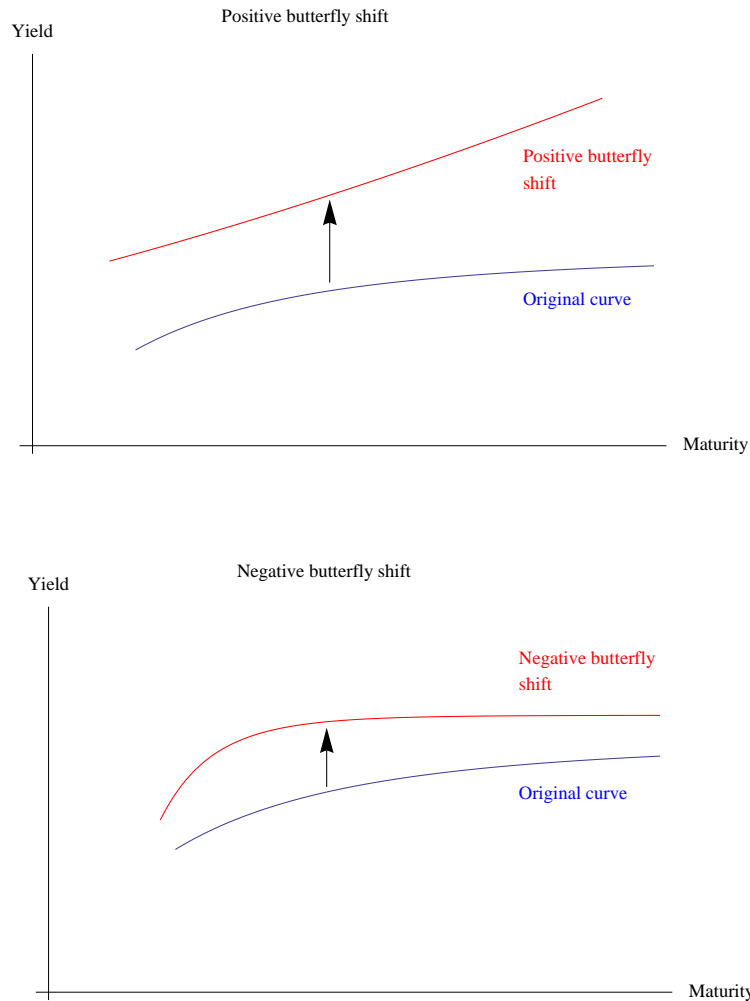
K dispozici máme historické záznamy o spotových úrokových mírách  $R_t$  bezkuponových dluhopisů pro různé doby splatnosti  $t$ ,  $t = t_1, \dots, t_p$ ,  $p \in N$ .

Konkrétně se jedná o denní údaje z období od 2. 1. 1995 do 1. 1. 2011, vyjma víkendů, pro 15 různých dob splatností. Celkově tedy máme 4176 pozorování.

Nechť  $R_t(\tau)$  je spotová úroková míra pro dobu splatnosti  $t$  v čase  $\tau$ ,  $\tau = 1, \dots, n$ . Označme matici

$$R = \begin{pmatrix} R_{t_1}(1) & R_{t_2}(1) & \dots & \dots & R_{t_p}(1) \\ R_{t_1}(2) & R_{t_2}(2) & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ R_{t_1}(n) & \dots & \dots & \dots & R_{t_p}(n) \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

jež na  $i$ -tém řádku obsahuje spotové úrokové míry pro doby splatnosti  $t$ ,



Obrázek 1.4: Neparalelní posun výnosové křivky - prohnutí (Nonparallel yield curve shifts - butterfly shifts)

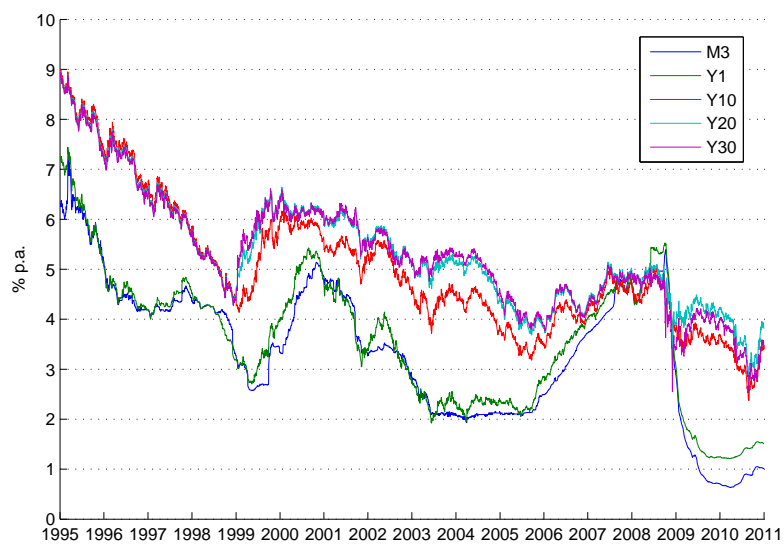
$t = t_1, \dots, t_p$ , v čase  $i$  a v  $j$ -tém sloupci spotové úrokové míry pro dobu splatnosti  $t_j$  v čase  $\tau$ ,  $\tau = 1, \dots, n$ .

Aplikujeme-li toto značení na naše data, dostáváme matici spotových úrokových měr bezkuponových dluhopisů rozměru  $(4176 \times 15)$ .

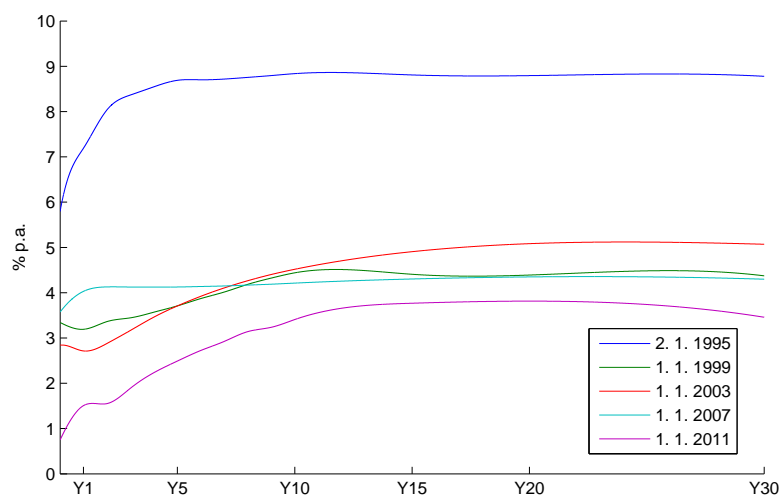
Na obrázku 1.5 jsou znázorněny vývoje těchto měr pro dobu splatnosti 3 měsíce, 1 rok, 10, 20 a 30 let, označené postupně jako M3, Y1, Y10, Y20 a Y30.

Křivky M3 a Y1 představují pohyb úrokových měr během daného období na peněžních trzích, kde jsou obchodovány instrumenty s maturitou menší než 1 rok. Výrazný propad křivek v krátkém období 2009 až 2010 nastal během světové finanční krize, která začala v roce 2008. Snížení krátkodobých úrokových měr mělo za účel dodání likvidity na finanční trhy. Ostatní křivky pak popisují vývoj na kapitálovém trhu, kde je maturita instrumentů delší.

Nyní pomocí funkce *splines* (viz. Příloha 1) aproximujeme  $YC(\tau)$  výnosovou křivku bezkuponových dluhopisů v čase  $\tau$ . Tato funkce proloží příslušnými daty kubický spline. Vybrané křivky jsou vykresleny na obrázku 1.6.



Obrázek 1.5: Úrokové sazby bezkuponových dluhopisů (Zero-coupon rates)



Obrázek 1.6: Výnosové křivky bezkuponových dluhopisů (Zero-coupon yield curve)

## 2. Ocenění dluhopisu

V této kapitole se budeme zabývat jedním konkrétně zadaným dluhopisem, který nejprve oceníme, a dále budeme analyzovat jeho úrokové riziko na základě durace a konvexity. Nejprve si připomeneme nejdůležitější poznatky z finanční matematiky, o které se budeme později opírat.

### 2.1 Úvod

Držení dluhopisu představuje pro držitele jistý systém finančních toků. Vzhledem k časové hodnotě peněz je pro celkové ocenění tohoto systému nutné vztáhnout platby k témuž referenčnímu datu. Následující text spolu s odvozenými vzorci je čerpán z knih [2] a [3].

Uvažujme dluhopis s ročním kuponem, jehož platby jsou realizovány na konci ročních časových období a následujícím značením:

$N$	...	nominální hodnota
$C$	...	kupon
$n$	...	počet kuponů celkem (od data emise)

Zvolíme-li nyní za referenční datum počátek prvního období (tedy datum emise dluhopisu), pak mluvíme o tzv. *počáteční hodnotě*  $PV_0$  (*present value*).

**Poznámka:** Počáteční hodnota odpovídá za normálních podmínek i tržní ceně obligace, za kterou je momentálně na trhu obchodována, proto bývá označována jako *spravedlivá cena obligace*.  $\diamond$

Jednou z možností, jak stanovit spravedlivou cenu obligace, je pomocí *zero křivky*, kde využijeme spotových úrokových měr bezkuponových dluhopisů  $R_{t_i}(\tau)$  pro doby do splatnosti  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Spravedlivá cena obligace k datu emise je dána vztahem

$$PV_0 = C * \sum_{i=1}^n (1 + R_{t_i}(0))^{-t_i} + N * (1 + R_{t_n}(0))^{-t_n}. \quad (2.1)$$

K datu emise v našem případě platí  $t_i = i$ .

**Poznámka:** Pro obligaci s ročními kupony platí následující vztahy:

- $PV_0 = N \iff y = c$  tzv. *prodej za par*
- $PV_0 < N \iff y > c$  tzv. *prodej pod par*
- $PV_0 > N \iff y < c$  tzv. *prodej nad par*

Důkaz uveden v knize [1].  $\diamond$

Pokud bychom chtěli určit spravedlivou cenu obligace k některému datu  $\tau$ , kde  $0 < \tau \leq t$ , bereme v úvahu pouze budoucí platby kuponů a počítáme dle vzorce

$$PV_\tau = C * \sum_{[i: t_i > \tau]} (1 + R_{t_i}(\tau))^{-t_i} + N * (1 + R_{t_n}(\tau))^{-t_n}. \quad (2.2)$$

Protože spravedlivá cena již bere v úvahu narůstající podíl následné kuponové platby při časovém postupu k jejímu datu, tzv. *aliquótní úrok AI* (*accrued interest*), nazýváme ji *hrubou cenou* (*dirty price*). Aliquótní úrok spočteme jako

$$AI = \frac{k}{360} * C, \quad (2.3)$$

kde  $k$  je počet dní uplynulých od data předchozího kuponu s tím, že  $k$  jeho stanovení je využito standardu  $\frac{E30}{360}$ .

Dále se zavádí *čistá cena* (*clean price*), která tento aliquótní úrok nezahrnuje, a sice

$$clean\ price = dirty\ price - AI. \quad (2.4)$$

Čistá cena je pak kótována na trhu.

Máme-li k dispozici *výnos do splatnosti  $y$*  (*yield to maturity*), který představuje průměrný roční výnos z investice do dluhopisu od jeho okamžité koupě za aktuální tržní cenu až do data splatnosti, je *spravedlivá cena obligace* k datu emise dána jako

$$PV_0 = C * \sum_{t=1}^n (1+y)^{-t} + N * (1+y)^{-n}. \quad (2.5)$$

Označíme-li  $CF(t)$  jednotlivé finanční toky v čase  $t$ ,  $t = 1, \dots, n$ , můžeme místo (2.5) psát

$$PV_0 = \sum_{t=1}^n \frac{CF(t)}{(1+y)^t}. \quad (2.6)$$

**Poznámka:** Takto spočtená spravedlivá cena obligace zároveň odpovídá její tržní hodnotě  $P$ , neboť  $y$  je řešením rovnice

$$P = C(1+y)^{-1} + C(1+y)^{-2} + \dots + (C+N)(1+y)^{-n}. \quad (2.7)$$

◇

Následující text čerpá z knihy [7].

Víme, že vzorec (2.6), na základě doplňující poznámky, popisuje vztah mezi výnosem do splatnosti  $y$  a tržní cenou dluhopisu  $P$ . Ta může být jednoduše vyjádřena jako nelineární funkce tohoto výnosu:

$$P = f(y). \quad (2.8)$$

Nyní se podívejme na citlivost cenových změn obligace v závislosti na změnách jejího výnosu do splatnosti. Máme dluhopis jehož cena je

$$P_0 = f(y_0). \quad (2.9)$$

Dojde-li ke změně výnosu do splatnosti na

$$y_1 = y_0 + \Delta y,$$

potom novou cenu dopočteme jako

$$P_1 = f(y_1) = f(y_0 + \Delta y). \quad (2.10)$$

Vyjádríme-li nyní změnu ceny dluhopisu jako

$$\Delta P = P_1 - P_0, \quad (2.11)$$

potom na základě (2.9) a (2.10) dostáváme

$$\Delta P = f(y_0 + \Delta y) - f(y_0). \quad (2.12)$$

Tento přístup výpočtu změny ceny na základě přecenění dluhopisu bývá označován jako *full valuation approach*.

Nová cena může být ovšem aproximována pomocí Taylorova rozvoje v bodě  $y_0$ :

$$P_1 = P_0 + f'(y_0)\Delta y + \frac{1}{2}f''(y_0)(\Delta y)^2 + \dots \quad (2.13)$$

První derivace je známá pod pojmem *dollarová durace*

$$f'(y_0) = \frac{dP}{dy} = -\frac{D^*}{1+y} * P_0, \quad (2.14)$$

kde  $D^*$  je *Macaulayho durace*

$$D^* = -\frac{(1+y)}{P} \frac{dP}{dy} = \frac{1}{P} * \sum_{t=1}^n \frac{t * CF(t)}{(1+y)^t}. \quad (2.15)$$

Durace vyjadřuje střední dobu návratnosti investovaných finančních prostředků. Dalším velice často používaným typem durace je *modifikovaná durace*  $D$

$$D = \frac{D^*}{1+y}. \quad (2.16)$$

Druhá derivace se nazývá *dolarová konvexita*

$$f''(y_0) = \frac{d^2P}{dy^2} = C * P_0, \quad (2.17)$$

kde  $C$  je tzv. *konvexita*

$$C = \frac{1}{P} \frac{d^2P}{dy^2} = \frac{1}{P(1+y)^2} * \sum_{t=1}^n \frac{(t^2 + t) * CF(t)}{(1+y)^t}. \quad (2.18)$$

Na základě uvedených vztahů potom dostáváme

$$P_1 = P_0 - D * P_0 * \Delta y + \frac{1}{2} * C * P_0 * (\Delta y)^2 + \dots \quad (2.19)$$

V praxi se tento rozvoj ukončuje po kvadratickém členu a proto základní aproximace odhadu změny tržní ceny dluhopisu při změně jeho výnosu do splatnosti, která vyjadřuje *absolutní změnu ceny*, je

$$\Delta P \approx -D * P_0 * \Delta y + \frac{1}{2} * C * P_0 * (\Delta y)^2. \quad (2.20)$$

*Relativní změna ceny* je pak dána podílem

$$\frac{\Delta P}{P_0} \approx -D * \Delta y + \frac{1}{2} * C * (\Delta y)^2. \quad (2.21)$$

Tento přístup bývá označován jako *sensitivity approach*.



## 2.2 Ocenění dluhopisu

Mějme dluhopis s fixním kuponem vypláceným jednou ročně, polhůtně, který je zadán následovně:

Datum splatnosti	1.1.2031
Nominální hodnota	100
Kuponová sazba	5% p.a.

Tento dluhopis budeme dále nazývat zkráceně pouze dluhopisem, avšak budeme mít vždy na mysli právě takto zadáný dluhopis s fixním kuponem vypláceným jednou ročně.

Předpokládáme, že dluhopis existuje po celou dobu  $\tau$ , pro níž máme k dispozici historické záznamy o spotových úrokových mírách bezkuponových dluhopisů (od 2. 1. 1995 do 1. 1. 2011). To znamená, že na začátku tohoto období je zhruba 36-letý a na konci období 20-letý.

Označme nyní cenu dluhopisu v čase  $\tau$  jako

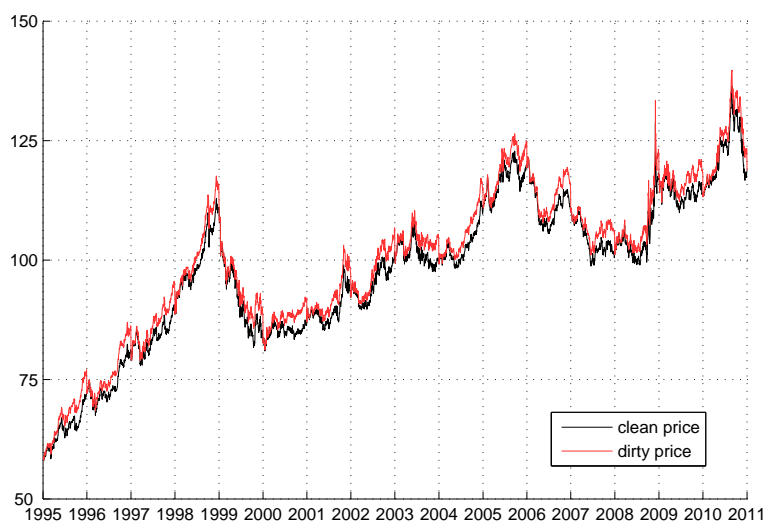
$$P(\tau) \tag{2.22}$$

a jeho výnos do splatnosti jako

$$y(\tau), \tag{2.23}$$

kde  $\tau = 1, \dots, n$ , a podívejme se na vývoj ceny v tomto časovém období.

Dluhopis oceníme pomocí oceňovací funkce *dirtyx* (Příloha 4), která počítá jeho hrubou cenu<sup>1</sup> podle vzorce (2.2). Čistá cena dluhopisu je podle vztahu (2.4) dopočtena snížením hrubé ceny o alikvótní úrok, který byl zjištěn pomocí funkce *alikkvotx* (Příloha 5). Výsledky jsou zaneseny do grafu 2.1.



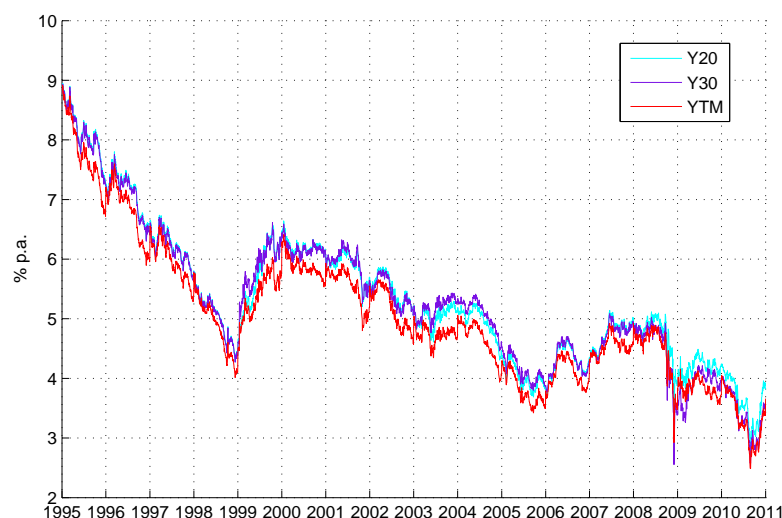
Obrázek 2.1: Vývoj ceny dluhopisu

Cena dluhopisu  $P(\tau)$  kolísá kolem nominální hodnoty 100. V časech, kdy je jeho cena pod touto hranicí (*pod par*), je jeho výnos do splatnosti  $y(\tau)$  větší než

<sup>1</sup> při dalších výpočtech a postupech budeme vycházet právě z této ceny

5% (tj. kuponová sazba), a naopak v časech, kdy je jeho cena nad hranicí (*nad par*), je  $y(\tau)$  mešší než 5%.

Jednotlivé výnosy do splatnosti můžeme nyní spočítat. Použijeme funkci  $YIELD()$ , která je přímo zabudovaná v programu Microsoft Excel. Na obrázku 2.2 jsou znázorněny spočtené výnosy křivkou, označenou jako YTM, dále jsou doplněny vývoje spotových úrokových měř bezkuponových dluhopisů pro splatnosti 20 a 30 let, v grafu označených jako Y20 a Y30.



Obrázek 2.2: Výnos do splatnosti se spotovými sazbami (Yield to maturity and zero rates)

Víme, že za předpokladu rostoucích výnosových křivek, je výnosová křivka kuponových dluhopisů vždy pod odpovídající zero křivkou. Proto v libovolném čase  $\tau$  pro dluhopis s danou maturitou platí, že jeho výnos do splatnosti je nižší než spotová úroková sazba pro stejnou maturitu. Na obrázku 2.2 vidíme, že nyní, tj. v roce 2011, kdy je maturita našeho dluhopisu 20 let, leží jeho výnos do splatnosti YTM pod křivkou Y20. V roce 2001, kdy byla jeho maturita 30 let, ležel jeho výnos do splatnosti YTM pod křivkou Y30. Pro období 2001 až 2011 bychom tedy potřebovali znát údaje o spotových úrokových mírách pro splatnosti 21 až 29 let, ale můžeme předpokládat, že tyto údaje se nebudou příliš lišit od křivek Y20 a Y30. Výnos do splatnosti zůstává nižší. Pro období 1995 až 2000 předpokládáme, že spotové úrokové míry pro splatnosti 31 až 36 let by mohly být nepatrně nad křivkou Y30, a YTM tak leží stále pod. Touto úvahou jsme jednoduše ověřili správnost výsledků při výpočtu výnosu do splatnosti.

## 2.3 Analýza citlivosti dluhopisu

Za  $\tau$  nyní pevně zvolíme konec období, pro které máme k dispozici data (tj. 1. 1. 2011), a označíme

$$P_0 = P(\tau) \quad (2.24)$$

$$y_0 = y(\tau). \quad (2.25)$$

Dluhopis je v tomto čase dvacetiletý. Bude nás zajímat k jaké změně ceny dluhopisu může dojít.

Ze vztahu (2.12) vidíme, že změna ceny dluhopisu  $\Delta P$  souvisí se změnou jeho výnosu do splatnosti  $\Delta y$ . Toto  $\Delta y$  je náhodná veličina, jejíž rozdělení určíme následujícím způsobem:

Uvědomme si, že v našem případě nyní  $\Delta y$  označuje náhodnou veličinu udávající denní změnu výnosu do splatnosti dluhopisů s maturitou právě 20 let.

Vezmeme proto  $n$  dluhopisů s touto splatností emitovaných postupně v čase  $\tau$ ,  $\tau = 1, \dots, n$ . Využitím funkce *dirtyx()* (Příloha 4) spočítáme hrubou cenu těchto dvacetiletých dluhopisů v čase  $\tau$ . Vývoj ceny je znázorněn na obrázku (2.3).



Obrázek 2.3: Vývoj ceny dvacetiletých dluhopisů

Pomocí funkce *YIELD()* zjistíme jednotlivé výnosy do splatnosti, které označíme jako

$$y_{20}(\tau), \quad (2.26)$$

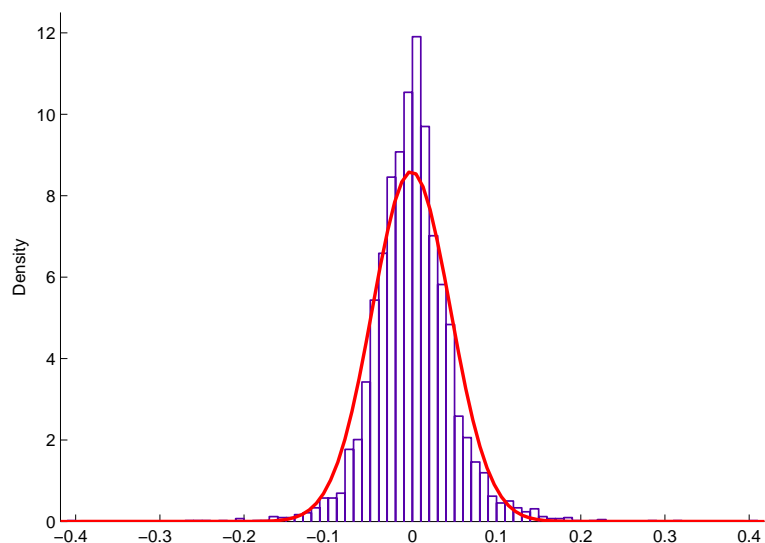
kde  $\tau = 1, \dots, n$ .

Poté obdržíme denní změny těchto výnosů jako

$$\Delta y_{20}(\tau) = y_{20}(\tau + 1) - y_{20}(\tau), \quad (2.27)$$

kde  $\tau = 1, \dots, n - 1$ .

Vytvoříme-li nyní z těchto hodnot histogram, získáme představu o rozdělení náhodné veličiny  $\Delta y$ , viz. obrázek (2.4).



Obrázek 2.4: Rozdělení  $\Delta y$

Odhadem její střední hodnoty je výběrový průměr denních změn  $\Delta y_{20}(\tau)$ , a sice

$$\overline{\Delta y} = -0.00123, \quad (2.28)$$

odhadem rozptylu je výběrový rozptyl

$$S^2 = 0.00215. \quad (2.29)$$

Obrázek (2.4) je pro srovnání doplněn o graf hustoty normálního rozdělení právě s těmito parametry. Všimneme si, že rozdělení  $\Delta y$  je oproti ní více špičaté, a můžeme tedy říci, že naše data nepochází z normálního rozdělení  $N(\overline{\Delta y}, S^2)$ .

Toto grafické ověření normality ještě doplníme vhodným testem v programu *R*. Použijeme k tomu tzv. Shapiro-Wilk test:

Označme  $F_x$  distribuční funkci  $\Delta y$  a  $F_0$  distribuční funkci normálního rozdělení  $N(\overline{\Delta y}, S^2)$ .

$$\begin{array}{ll} \text{nulová hypotéza} & H_0: F_x = F_0 \\ \text{alternativní hypotéza} & H_1: F_x \neq F_0 \end{array}$$

Na hladině významnosti  $\alpha = 0.05$  nulovou hypotézu  $H_0$  zamítneme, neboť

$$p\text{-value} < 2.2\text{e-}16, \quad (2.30)$$

a to je menší než 0.05.

Dále budeme testovat hypotézu o střední hodnotě  $\mu$  náhodné veličiny  $\Delta y$ :

$$\begin{array}{ll} \text{nulová hypotéza} & H_0: \mu = 0 \\ \text{alternativní hypotéza} & H_1: \mu \neq 0 \end{array}$$

Spočítáme testovací statistiku

$$t = \frac{-0.00123 - 0}{0.0464/\sqrt{4175}} = -1.7114 \quad (2.31)$$

a p-hodnotu

$$p\text{-value} = 2(1 - \Phi(1.7114)) = 0.08707. \quad (2.32)$$

Ta je větší než 0.05, proto nulovou hypotézu  $H_0 : \mu = 0$  nezamítáme. Vraťme se k analýze dluhopisu a stanovení jeho nové ceny

$$P_1 = P_0 + \Delta P. \quad (2.33)$$

Na základě zjištěného rozdělení budeme sledovat citlivost ceny dluhopisu, změní-li se výnos do splatnosti  $y$  o jednu, resp. dvě směrodatné odchylky<sup>2</sup>, které jsou v tabulkách 2.1 a 2.2 označené jako  $S$ . Využijeme dvou odlišných přístupů:

Prvním je výpočet ceny při změně výnosu podle (2.12), tzv. *full valuation approach*

$$\Delta P = f(y_0 + \Delta y) - f(y_0),$$

kterým spočítáme skutečnou, přesnou změnu ceny při změně výnosu  $\Delta y$ .

Druhým přístupem je *sensitivity approach*, poskytující pouze jistý odhad ceny při změně výnosu  $\Delta y$ . Základem této analýzy je vztah (2.20), který vychází z Taylorova rozvoje, tj.

$$\Delta P \approx -D * P_0 * \Delta y + \frac{1}{2} * C * P_0 * (\Delta y)^2.$$

Součin  $-D * \Delta y$  bývá označován jako *efekt durace* a součin  $\frac{1}{2} * C * (\Delta y)^2$  jako *efekt konvexity*.

Ujasníme si, co známe, případně dopočítáme ostatní neznámé:

Cena dluhopisu je

$$P_0 = f(y_0) = 118.75, \quad (2.34)$$

kde

$$y_0 = 3.66\%. \quad (2.35)$$

Postupným dosazením do (2.15) a (2.16) spočítáme modifikovanou duraci

$$D = 13.21. \quad (2.36)$$

a z (2.18) obdržíme hodnotu konvexity

$$C = 239.31. \quad (2.37)$$

Nyní máme vše potřebné pro to, abychom provedli analýzu citlivosti ceny dluhopisu na změnu jeho výnosu do splatnosti, tzn. určili novou cenu  $P_1$  při konkrétních změnách  $\Delta y$ . Výsledky jsou uvedeny v následující tabulkách:

---

<sup>2</sup> interval  $(-S, S)$  pokryje 76.47% dat a interval  $(-2S, 2S)$  95,11% dat

	$\Delta y$	$y_0 + \Delta y$	$P_1$	$\Delta P$	
+2S	0.093%	3.754%	117.301	-1.445	-1.217%
+1S	0.046%	3.708%	118.021	-0.725	-0.611%
0	0.000%	3.662%	118.746	0.000	0.000%
-1S	-0.046%	3.615%	119.477	0.731	0.616%
-2S	-0.093%	3.569%	120.214	1.468	1.236%

Tabulka 2.1: Full valuation approach

Čteme-li tabulku 2.1 po řádcích, dostáváme informace o tom, jaká je cena dluhopisu  $P_1$ , dojde-li k dané změně výnosu do splatnosti  $\Delta y$ , tzn. že aktuální výnos do splatnosti je  $y_0 + \Delta y$ . Poslední sloupec  $\Delta P$  potom obsahuje absolutní a relativní změnu ceny.

	$\Delta y$	efekt durace		$P_1$	efekt konvexity		$P_1$	$\Delta P$	
+2S	0.093%	-1.456	-1.226%	117.290	0.012	0.010%	117.302	-1.444	-1.216%
+1S	0.046%	-0.728	-0.613%	118.018	0.003	0.003%	118.021	-0.725	-0.611%
0	0.000%	0.000	0.000%	118.746	0.000	0.000%	118.746	0.000	0.000%
-1S	-0.046%	0.728	0.613%	119.474	0.003	0.003%	119.477	0.731	0.616%
-2S	-0.093%	1.456	1.226%	120.203	0.012	0.010%	120.215	1.469	1.237%

Tabulka 2.2: Sensitivity approach

Tabulka 2.2 postupně udává, jaký vliv mají jednotlivé členy Taylorova rozvoje pro aproximaci nové ceny dluhopisu (2.20) na změnu ceny dluhopisu při daném pohybu výnosu do splatnosti. Ve sloupci nazvaném efekt durace jsou uvedeny absolutní a relativní změny ceny, je-li rozvoj (2.20) ukončen již po prvním, lineárním členu. Následuje pak příslušná nová cena  $P_1$ . Je-li zahrnut i kvadratický člen, jež novou cenu vždy navyšuje o kladné přírůstky, které jsou uvedeny ve sloupci efekt konvexity (opět absolutně a relativně), je nová cena  $P_1$  daleko přesnější. Výsledky aproximace nové ceny na základě derivace a konvexity jsou potom uvedeny v posledním sloupci, záměrně pro porovnání s výsledky z předchozího přístupu *full valuation approach*.

Grafické porovnání obou těchto přístupů poskytuje obrázek (2.5), na kterém vidíme tři křivky reprezentující:

1. skutečnou, přesnou cenu (*full valuation approach*)

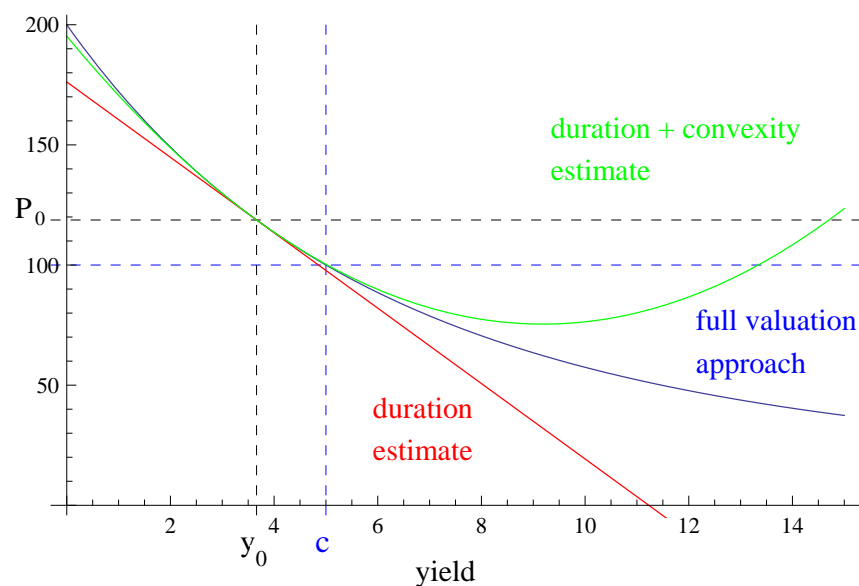
$$P_1 = f(y_0 + \Delta y)$$

2. lineární aproximaci, tj. odhad na základě durace (*duration estimate*)

$$P_1 = P_0 - D * P_0 * \Delta y$$

3. kvadratickou aproximaci, tj. odhad na základě durace a konvexity (*duration + convexity estimate*)

$$P_1 = P_0 - D * P_0 * \Delta y + \frac{1}{2} * C * P_0 * (\Delta y)^2$$



Obrázek 2.5: Aproximace ceny

Křivka skutečné ceny ukazuje zvýšení ceny dluhopisu v případě, že výnos klesne, a naopak pokles v případě, že se výnos zvyšuje. Tento efekt je zachycen tečnou ke křivce skutečné ceny, která reprezentuje lineární aproximaci založenou na duraci. Pro malé pohyby ve výnosu tato lineární aproximace poskytuje rozumný odhad přesné ceny. Srovnáme-li výsledky tabulek (2.1) a (2.2), vidíme, že pro malou změnu  $\Delta y$  reprezentovanou intervalem  $(-S, S)$ , se nová cena shoduje s přesností na dvě desetinná místa. Pokud by došlo ke změnám větším, a to konkrétně v rozsahu  $(-2S, 2S)$ , dosahujeme přesnosti pouze na jedno desetinné místo.

Tzn. že pro velké změny ve výnosu se vzhledem k zakřivení křivky skutečné ceny tyto odhady zhoršují. Proto je využívána kvadratická aproximace zohledňující konvexitu, která poskytuje znatelně lepší výsledky. Opět podíváme-li se na konkrétní číselné hodnoty do tabulek (2.1) a (2.2), vidíme, že při změně výnosu o dvě směrodatné odchyly, je aproximace pomocí durace a konvexity daleko přesnější, a to s přesností na dvě desetinná místa. Zároveň se zlepšily odhady pro změnu výnosu v rozsahu jedné směrodatné odchyly na tři desetinná místa.

# 3. Metoda hlavních komponent

V souvislosti s pozorováním různých vlastností objektů se můžeme dostat do situace, kdy máme k dispozici značný počet proměnných, který je pro zobrazení a interpretaci výsledků nepřehledný. Tím se dostáváme k problému, zda by bylo možné popsat sledované vlastnosti menším počtem jiných proměnných, a to bez velké ztráty informace. Získali bychom tak úspornější a jednodušší popis původního systému proměnných [6].

Jedním z nejstarších a nejvíce používaných způsobů, který řeší tento problém, je *metoda hlavních komponent* (PCA). Původně byla zavedena již v roce 1901 K. Pearsonem, v roce 1933 pak H. Hotelling zobecnil postup její aplikace [9]. Tato metoda posuzuje vzájemné lineární vztahy mezi původními proměnnými, které jsou však vnímány jako důsledek existence přímo neměřitelných, v pozadí stojících a tedy skrytých veličin - *hlavních komponent*.

Cílem metody je nalézt takové přímo neměřitelné a nejlépe vzájemně nezávislé lineární kombinace původních proměnných, kterých je výrazně méně a dospět k určité věcné, smysluplné interpretaci, pokud je to možné. Tím dojde k redukci dimenze řešeného problému:  $p$  původních proměnných je vyjádřeno pomocí několika nových  $R$  proměnných, kde  $R \ll p$ .

Od nových proměnných se požaduje, aby co nejlépe vysvětlovaly variabilitu a závislost původních proměnných a zároveň požadujeme, aby byly nekorelované. [6].

Před samotným odvozením PCA jsou uvedeny ještě dvě samostatné sekce, které budou klíčové k pochopení této metody.

## 3.1 Krátká exkurze do maticové algebry

Tato podkapitola je připomenutím základních pojmů z maticové algebry, které jsou obzvlášť užitečné ve vícerozměrné analýze dat, jak později sami uvidíme. Zavádí značení pro vektory a matice, kterého bude v této práci dále užíváno. Zmíníme se o vlastních číslech a vlastních vektorech, které hrají důležitou roli ve vícerozměrných statistických metodách, a také o spektrálním rozkladu matice a maximalizaci (minimalizaci) kvadratických forem za daných podmínek. Matematický text je čerpán z publikace [5].

### 3.1.1 Značení

Matice  $A$  je systém čísel o  $n$  řádcích a  $p$  sloupcích:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1p} \\ \vdots & a_{22} & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Místo  $A$  můžeme psát  $(a_{ij})$  nebo  $A(n \times p)$  pro naznačení rozměru matice.



Název	Definice	Značení
skalár	$p = n = 1$	$a$
sloupcový vektor	$p = 1$	$a$
řádkový vektor	$n = 1$	$a^T$
jednotkový vektor	$\underbrace{(1, \dots, 1)}_n^T$	$1_n$
nulový vektor	$\underbrace{(0, \dots, 0)}_n^T$	$0_n$
čtvercová matice	$n = p$	$A(p \times p)$
diagonální matice	$a_{ij} = 0, i \neq j, n = p$	$diag(a_{ii})$
identita	$diag(\underbrace{1, \dots, 1}_p)$	$I_p$
jednotková matice	$a_{ij} = 1, n = p$	$1_n 1_n^T$
symetrická matice	$a_{ij} = a_{ji}$	
ortogonální matice	$A^T A = I = A A^T$	

Tabulka 3.1: Speciální příklady matic a vektorů

**Hodnost matice**  $A$  je definována jako počet lineárně nezávislých řádků (sloupců), značíme  $rank(A)$ . Matice  $A(n \times p)$  má  $k$  lineárně nezávislých řádků  $a_j$ , pokud

$$\sum_{j=1}^k c_j a_j = 0_p,$$

kde  $c_j$  je skalár takový, že  $c_j \neq 0, \forall j = 1, \dots, k$ .

**Stopa matice**  $A$  je dána součtem diagonálních prvků

$$tr(A) = \sum_{i=1}^p a_{ii}.$$

### 3.1.2 Vlastní čísla, vlastní vektory

Výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů je důležitým výstupem pro analýzu matic.

**Definice 3.** *Mějme matici  $A(n \times p)$ . Pokud existuje číslo  $\lambda$  a vektor  $\gamma$  takové, že*

$$A\gamma = \lambda\gamma, \tag{3.1}$$

*potom nazveme  $\lambda$  vlastním číslem a  $\gamma$  vlastním vektorem matice  $A$  [5].*

Lze dokázat, že vlastní číslo  $\lambda$  je kořenem charakteristického polynomu  $p$ -tého stupně  $|A - \lambda I_p| = 0$ . Proto má matice  $A$  právě  $p$  vlastních čísel,  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ . Pro každé vlastní číslo  $\lambda_j$  existuje odpovídající vlastní vektor  $\gamma_j$ , který je určen vztahem (3.1).

**Věta 1.** *Vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům reálné symetrické matice  $X$  jsou navzájem ortogonální [11].*

**Důkaz:** podle [11]

Nechť  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  jsou vlastní čísla  $X$ . Existují k nim tedy příslušné vlastní vektory  $\gamma_1, \gamma_2$  takové, že

$$X\gamma_1 = \lambda_1\gamma_1 \quad (3.2)$$

$$\gamma_2^T X = \gamma_2^T \lambda_2. \quad (3.3)$$

(na druhou rovnost byla použita transpozice a symetrie matice  $X$ ).

Součin  $\gamma_2^T X \gamma_1$  pak podle (3.2) a (3.3) můžeme přepsat jako

$$\begin{aligned} \gamma_2^T X \gamma_1 &= \lambda_1 \gamma_2^T \gamma_1 \\ &= \lambda_2 \gamma_2^T \gamma_1, \end{aligned}$$

tedy

$$\lambda_1 \gamma_2^T \gamma_1 = \lambda_2 \gamma_2^T \gamma_1.$$

Je-li skalární součin různý od 0, můžeme jím vydělit a dostaneme spor

$$\lambda_1 = \lambda_2.$$

Skalární součin je proto nulový, tzn. vektory  $\gamma_2$  a  $\gamma_1$  jsou navzájem ortogonální.  $\oslash$

### 3.1.3 Spektrální rozklad matice

Spektrální rozklad matice, nebo také Jordanova dekompozice, reprezentuje symetrickou matici pomocí vlastních čísel a vlastních vektorů.

**Věta 2** (Jordanova dekompozice). *Každou symetrickou matici  $A(p \times p)$  lze psát ve tvaru*

$$A = \Gamma \Lambda \Gamma^T = \sum_{j=1}^p \lambda_j \gamma_j \gamma_j^T, \quad (3.4)$$

kde

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$$

a kde

$$\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_p)$$

je ortogonální matice vlastních vektorů  $\gamma_j$  matice  $A$ , tzn.  $\Gamma^T \Gamma = I_p$  [5].

Jordanova dekompozice umožňuje snadno spočítat mocniny symetrické matice  $A(p \times p)$ . Podle Věty 2

$$A = \Gamma \Lambda \Gamma^T,$$

a pro libovolné  $\alpha \in \mathbb{R}$  definujeme

$$A^\alpha = \Gamma \Lambda^\alpha \Gamma^T, \quad (3.5)$$

kde  $\Lambda^\alpha = \text{diag}(\lambda_1^\alpha, \dots, \lambda_p^\alpha)$ .

### 3.1.4 Kvadratické formy

**Definice 4.** Mějme symetrickou matici  $A(p \times p)$  a vektor  $x \in R^p$ . Kvadratickou formu  $Q(x)$  definujeme jako

$$Q(x) = x^T Ax = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_{ij} x_i x_j \quad (3.6)$$

[5].

**Definice 5.** Kvadratická forma  $Q(x)$  je pozitivně definitní, pokud  $Q(x) > 0$  pro všechna  $x \neq 0$ .  $Q(x)$  je pozitivně semidefinitní, pokud  $Q(x) \geq 0$  pro všechna  $x \neq 0$  [5].

**Poznámka:** Matici  $A$  nazveme pozitivně definitní (semidefinitní), pokud je odpovídající kvadratická forma  $Q(\cdot)$  pozitivně definitní (semidefinitní). Píšeme  $A > 0$  ( $\geq 0$ ).  $\diamond$

Ve statistické analýze vícerozměrných dat narazíme na úlohu maximalizovat kvadratickou formu při splnění určitých podmínek.

**Věta 3.** Nechť  $A$  a  $B$  jsou symetrické matice a  $B > 0$ . Maximum  $x^T Ax$  za podmínky  $x^T Bx = 1$  je dáno největším vlastním číslem matice  $B^{-1}A$ . Obecněji

$$\max_{\{x: x^T Bx=1\}} x^T Ax = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p = \min_{\{x: x^T Bx=1\}} x^T Ax, \quad (3.7)$$

kde  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  jsou vlastní čísla matice  $B^{-1}A$ . Vektor maximalizující (minimalizující)  $x^T Ax$  za podmínky  $x^T Bx = 1$  je vlastní vektor matice  $B^{-1}A$ , který přísluší jejímu největšímu (nejmenšímu) vlastnímu číslu [5].

**Důkaz:** podle [5]

Podle (3.5) máme  $B^{1/2} = \Gamma_B \Lambda_B^{1/2} \Gamma_B^T$ . Označme  $y = B^{1/2}x$ . Potom

$$\max_{\{x: x^T Bx=1\}} x^T Ax = \max_{\{y: y^T y=1\}} y^T B^{-1/2} A B^{-1/2} y. \quad (3.8)$$

Podle Věty 2, nechť

$$B^{-1/2} A B^{-1/2} = \Gamma \Lambda \Gamma^T$$

je spektrální rozklad matice  $B^{-1/2} A B^{-1/2}$ . Označme

$$z = \Gamma^T y \Rightarrow z^T z = y^T \Gamma \Gamma^T y = y^T y.$$

Tedy (3.8) je ekvivalentní

$$\max_{\{z: z^T z=1\}} z^T \Lambda z = \max_{\{z: z^T z=1\}} \sum_{i=1}^p \lambda_i z_i^2.$$

Ale

$$\max_z \sum \lambda_i z_i^2 \leq \lambda_1 \underbrace{\max_z \sum z_i^2}_{=1} = \lambda_1.$$

Maximum je tedy obdrženo pro  $z = (1, 0, \dots, 0)^T$ , tzn.

$$y = \gamma_1 \Rightarrow x = B^{-1/2} \gamma_1.$$

Jelikož  $B^{-1}A$  a  $B^{-1/2} A B^{-1/2}$  mají stejná vlastní čísla, důkaz je hotov.  $\odot$

## 3.2 Rozklad matice dat na faktory

V této kapitole bude představen základní geometrický nástroj pro redukci dimenze vícerozměrné matice dat „nejlepším“ způsobem, tj. s ohledem na požadavek nejmenších čtverců. Výsledkem budou grafické výstupy matice dat nižších dimenzí, které budou snadněji interpretovatelné. Matice dat bude rozložena na tzv. faktory, které budou uspořádávány sestupně podle své důležitosti. Na tomto velmi obecném postupu je postaveno mnoho statistických vícerozměrných metod, jako i metoda hlavních komponent. Následující text je čerpán zejména z publikace [5].

### 3.2.1 Problém redukce dimenze

Mějme matici dat  $X(n \times p)$ , která se skládá z  $n$  pozorování a  $p$  proměnných. Na  $X$  můžeme nahlížet dvěma způsoby: řádek po řádku, pak dostaneme množinu  $n$  bodů v prostoru  $R^p$ , nebo sloupec po sloupci, kdy dostaneme množinu  $p$  bodů v prostoru  $R^n$ .

Pokud jsou  $n$  a/nebo  $p$  velké (větší než 2 nebo 3), nemůžeme tyto množiny bodů graficky znázornit. Náš cíl je dvojitý. Chceme se pokusit vyjádřit sloupcový prostor  $C(X)$  a řádkový prostor  $C(X^T)$  pomocí menších podprostorů. Samozřejmě toho chceme docílit bez velké ztráty informace o datech, o struktuře množin bodů v obou prostorech. Ideálně bychom chtěli umět proniknout do struktury matice  $X$  pomocí grafů v  $R$ ,  $R^2$  nebo  $R^3$ .

Hlavním zájmem je tedy nalézt dimenzi redukující faktory. Tento úkol provedeme pro oba dva úhly pohledu na  $X$  samostatně.

#### Řádkový prostor $C(X^T)$

V této sekci je  $X$  reprezentována množinou  $n$  bodů v prostoru  $R^p$ . Každý řádek je vektor  $x_i^T = (x_{i1}, \dots, x_{ip}) \in R^p$ . Otázkou je, jak promítnout tuto množinu bodů do prostoru menší dimenze.

**Podprostor dimenze 1** Nejprve uvažujme nejjednodušší variantu a hledejme podprostor dimenze 1, tedy přímku  $F_1$  procházející počátkem. Směr této přímky můžeme definovat jednotkovým vektorem  $u_1 = (u_{11}, \dots, u_{p1})^T \in R^p$ . Takže vlastně hledáme vektor  $u_1$ , který nám umožní „nejlepší“ projekci množiny  $n$  bodů na přímku  $F_1$  danou tímto vektorem.

Projekcí  $i$ -tého pozorování  $x_i \in R^p$  na přímku  $F_1$  dostaneme projekční bod  $p_{x_i}$ . Situace je zobrazena na obrázku 3.1.

Souřadnice tohoto bodu jsou dány vztahem

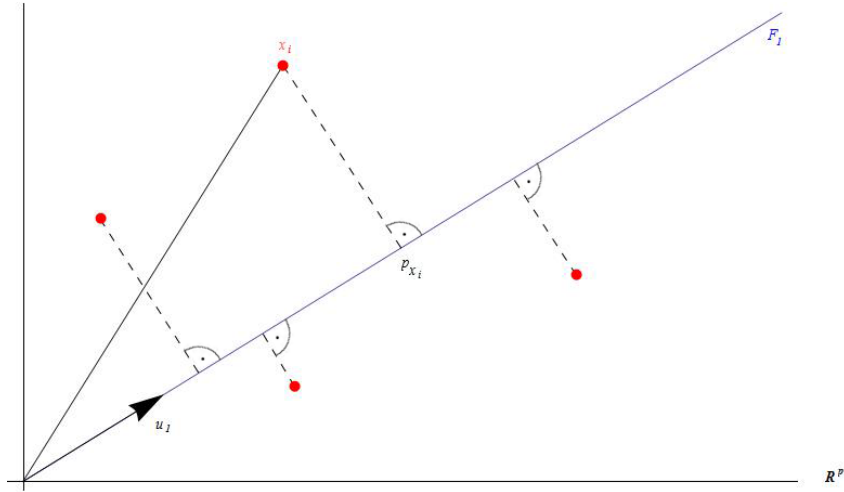
$$p_{x_i} = x_i^T \frac{u_1}{\|u_1\|} = x_i^T u_1. \quad (3.9)$$

„Nejlepší“ přímku  $F_1$  definujeme ve smyslu nejmenších čtverců následovně. Hledáme vektor  $u_1 \in R^p$ , který minimalizuje

$$\sum_{i=1}^n \|x_i - p_{x_i}\|^2. \quad (3.10)$$

Podle Pythagorovy věty

$$\|x_i - p_{x_i}\|^2 = \|x_i\|^2 - \|p_{x_i}\|^2$$



Obrázek 3.1: Projekce  $x_i$  na přímku  $F_1$

je problém minimalizace (3.10) ekvivalentní maximalizaci

$$\sum_{i=1}^n \|p_{x_i}\|^2. \quad (3.11)$$

Tedy úkolem je nalézt  $u_1 \in R^p$ , který maximalizuje  $\sum_{i=1}^n \|p_{x_i}\|^2$  za podmínky  $\|u_1\| = 1$ . Podle (3.9) můžeme psát

$$\begin{pmatrix} p_{x_1} \\ p_{x_2} \\ \vdots \\ p_{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^T u_1 \\ x_2^T u_1 \\ \vdots \\ x_n^T u_1 \end{pmatrix} = X u_1 \quad (3.12)$$

a úlohu můžeme konečně formulovat jako: najdi  $u_1 \in R^p$  takový, že  $\|u_1\| = 1$ , který maximalizuje kvadratickou formu  $(X u_1)^T (X u_1)$  neboli

$$\max_{u_1^T u_1 = 1} u_1^T (X^T X) u_1. \quad (3.13)$$

Řešení nám poskytne Věta 3, kde volíme  $A = X^T X$  a  $B = I$ .

**Věta 4.** Vektor  $u_1$ , který minimalizuje (3.10), je vlastní vektor matice  $X^T X$  odpovídající největšímu vlastnímu číslu  $\lambda_1$  matice  $X^T X$  [5].

Z (3.12) vidíme, že souřadnice všech  $n$  pozorování promítnutých na  $F_1$  jsou reprezentovány

$$z_1 = X u_1.$$

Nová proměnná  $z_1$  se nazývá *první faktor* a vektor  $u_1$  *osa prvního faktoru*. Jedná se o lineární kombinaci původních proměnných  $(x_{[1]}, \dots, x_{[p]})$ , jejíž koeficienty jsou dány vektorem  $u_1$ , tj.

$$z_1 = u_{11}x_{[1]} + \dots + u_{p1}x_{[p]}. \quad (3.14)$$

**Podprostor dimenze 2** Aproximujeme-li  $n$  pozorování podprostorem dimenze 2, tedy rovinou, lze pomocí Věty 3 ukázat, že tento podprostor je určen vektorem  $u_1$  a jednotkovým vektorem  $u_2$  ortogonálním k  $u_1$ , jenž maximalizuje kvadratickou formu  $u_2^T(X^T X)u_2$  za podmínek

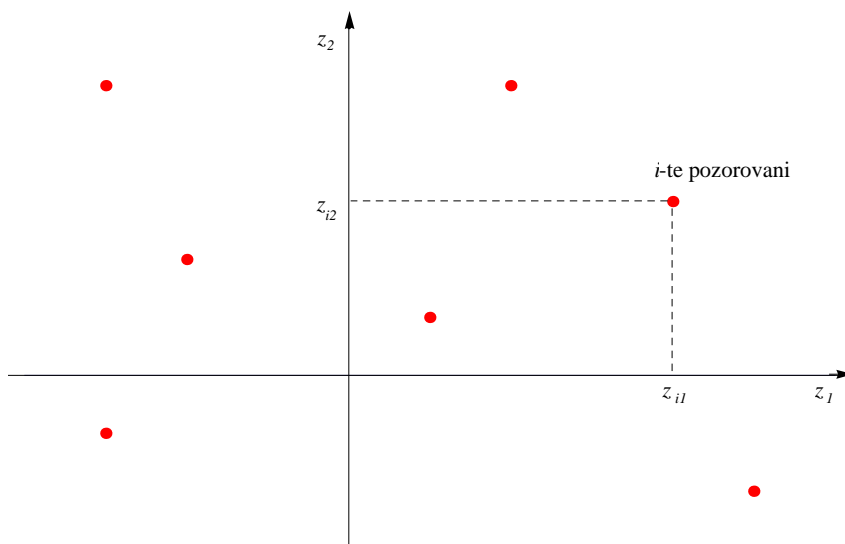
$$\|u_2\| = 1 \quad \text{a} \quad u_1^T u_2 = 0.$$

**Věta 5.** Vektor  $u_2$  je vlastní vektor matice  $X^T X$  odpovídající druhému největšímu číslu  $\lambda_2$  matice  $X^T X$  [5].

Jednotkový vektor  $u_2$  charakterizuje druhou přímku  $F_2$ , na kterou jsou body promítány. Souřadnice  $n$  pozorování na  $F_2$  jsou dány

$$z_2 = X u_2.$$

Proměnnou  $z_2$  nazýváme *druhým faktorem*. Znázornění  $n$  pozorování v dvourozměrném prostoru ( $z_1$  vs.  $z_2$ ) poskytuje obrázek 3.2.



Obrázek 3.2: Pozorování  $x_1, \dots, x_n$  v dvourozměrném prostoru

**Podprostor dimenze  $q$  ( $q \leq p$ )** Zabýváme se stále úlohou minimalizovat (3.10), avšak nyní promítáme do  $q$ -rozměrného podprostoru. Pomocí Věty 3 lze opět ukázat, že nejlepší podprostor je generován vektory  $u_1, u_2, \dots, u_q$ , což jsou ortogonální vlastní vektory  $X^T X$  odpovídající vlastním číslům  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_q$ .

Souřadnice  $n$  pozorování promítnutých na osu  $k$ -tého faktoru  $u_k$  jsou určeny  $k$ -tým faktorem

$$z_k = X u_k,$$

kde  $k = 1, \dots, q$ . Každý faktor  $z_k = (z_{1k}, z_{2k}, \dots, z_{nk})^T$  je lineární kombinací původních proměnných  $(x_{[1]}, \dots, x_{[p]})$ , jejíž koeficienty jsou dány vektorem  $u_k$ , tj.

$$z_k = u_{1k}x_{[1]} + \dots + u_{pk}x_{[p]},$$

tedy

$$z_{ik} = \sum_{m=1}^p x_{im} u_{mk}.$$

## Sloupcový prostor $C(X)$

Nyní je  $X$  reprezentována množinou  $p$  bodů v prostoru  $R^n$ . Každý sloupec je vektor  $x_{|j|} = (x_{1j}, \dots, x_{nj})^T \in R^n$ . Problémem stále zůstává, jak promítnout tuto množinu bodů do prostoru menší dimenze?

**Podprostor dimenze 1** Začneme opět s podprostorem dimenze 1, tedy chceme nalézt přímku  $G_1$ , která je definována jednotkovým vektorem  $v_1 = (v_{11}, \dots, v_{n1})^T \in R^n$ , který nám umožní „nejlepší“ projekci množiny  $p$  bodů na přímku  $G_1$ .

Algebraicky je to ta samá úloha jako v předchozí sekci, ale s tím, že  $X$  nahradíme  $X^T$ :

Projekci  $j$ -té proměnné  $x_{|j|} \in R^n$  na přímku  $G_1$  dostaneme projekční bod  $p_{x_{|j|}}$ . Tedy chceme najít takový vektor  $v_1$ , který maximalizuje

$$\sum_{j=1}^p \|p_{x_{|j|}}\|^2,$$

neboli hledáme vektor  $v_1 \in R^n$ ,  $\|v_1\| = 1$ , který maximalizuje kvadratickou formu  $(X^T v_1)(X v_1) = v_1^T (X X^T) v_1$ , tj.

$$\max_{v_1^T v_1 = 1} v_1^T (X X^T) v_1.$$

Řešení nám poskytne Věta 3, kde volíme  $A = X X^T$  a  $B = I$ .

**Věta 6.** Vektor  $v_1$  je vlastní vektor matice  $X X^T$  odpovídající největšímu vlastnímu číslu  $\mu_1$  matice  $X X^T$  [5].

Souřadnice všech  $p$  proměnných promítnutých na  $G_1$  jsou dány

$$w_1 = X^T v_1.$$

Nová proměnná  $w_1$  je lineární kombinací původních pozorování  $x_1, \dots, x_n$ , jejíž koeficienty jsou dány vektorem  $v_1$ , tj. pro  $j = 1, \dots, p$

$$w_{1j} = v_{11}x_{1j} + \dots + v_{1n}x_{nj}. \quad (3.15)$$

**Podprostor dimenze  $q$  ( $q \leq n$ )** Postup pro reprezentaci  $p$  proměnných v podprostoru dimenze  $q$  je stejný jako pro  $n$  pozorování výše. Nejlepší podprostor je generován ortogonálními vlastními vektory  $v_1, v_2, \dots, v_q$  matice  $X X^T$ , které odpovídají vlastním číslům  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_q$ .

Souřadnice  $p$  proměnných promítnutých na osu  $k$ -tého faktoru  $v_k$  jsou určeny  $k$ -tým faktorem

$$w_k = X^T v_k,$$

kde  $k = 1, \dots, q$ . Každý faktor  $w_k = (w_{k1}, w_{k2}, \dots, w_{kp})^T$  je lineární kombinací původních pozorování  $x_1, \dots, x_n$ , jejíž koeficienty jsou dány složkami vektoru  $v_k$ , tj.

$$w_{kj} = \sum_{m=1}^n v_{km} x_{mj}.$$

### 3.2.2 Vztahy mezi $C(X^T)$ a $C(X)$

Cílem této části je ukázat souvislosti mezi oběma přístupy, kterým byl věnován předešlý text. Uvažujme nejprve prostor  $R_p$ , potom dle (3.1) platí:

$$(X^T X)u_k = \lambda_k u_k \quad (3.16)$$

pro  $k \leq r$ , kde  $r = \text{rank}(X^T X) = \text{rank}(X) \leq \min(p, n)$ . Po vynásobení  $X$  dostaneme

$$X(X^T X)u_k = \lambda_k X u_k \quad (3.17)$$

$$\text{neboli } (X X^T)(X u_k) = \lambda_k (X u_k), \quad (3.18)$$

tzn. že každý vlastní vektor  $u_k$  matice  $X^T X$  odpovídá vlastnímu vektoru  $X u_k$  matice  $X X^T$ , jež přísluší stejnému vlastnímu číslu  $\lambda_k$ . To znamená, že každé nenulové vlastní číslo matice  $X^T X$  je zároveň vlastním číslem matice  $X X^T$ . Platí

$$v_k = d_k X u_k, \quad (3.19)$$

kde  $d_k$  je konstanta.

Tu samou úvahu provedeme i v prostoru  $R^n$ , dle (3.1) platí:

$$(X X^T)v_k = \mu_k v_k \quad (3.20)$$

pro  $k \leq r$ . Po vynásobení  $X^T$  dostaneme

$$(X^T X)(X^T v_k) = \mu_k (X^T v_k), \quad (3.21)$$

takže každý vlastní vektor  $v_k$  matice  $X X^T$  odpovídá vlastnímu vektoru  $X^T v_k$  matice  $X^T X$ , jež přísluší stejnému vlastnímu číslu  $\mu_k$ . Proto je každé nenulové vlastní číslo matice  $X X^T$  zároveň vlastním číslem matice  $X^T X$ . Platí

$$u_k = c_k X^T v_k, \quad (3.22)$$

kde  $c_k$  je konstanta.

Neboť  $u_k^T u_k = v_k^T v_k = 1$ , máme  $d_k = c_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}$ . To vede k následujícímu výsledku:

**Věta 7.** *Nechť  $r$  je hodnota matice  $X$ . Pro  $k \leq r$  jsou vlastní čísla  $\lambda_k$  matice  $X^T X$  a  $X X^T$  stejná a vlastní vektory ( $u_k$  a  $v_k$ ) jsou určeny vztahem*

$$v_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} X u_k \quad (3.23)$$

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} X^T v_k \quad (3.24)$$

[5].

**Poznámka:** Souřadnice bodů reprezentující  $n$  řádku (resp.  $p$  sloupců) matice  $X$  v  $q$ -rozměrném prostoru mohou být snadno spočteny jako

$$z_k = X u_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} X X^T v_k = \sqrt{\lambda_k} v_k \quad (3.25)$$

$$\text{(resp. } w_k = X^T v_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} X^T X u_k = \sqrt{\lambda_k} u_k) \quad (3.26)$$



a není tedy nutné explicitně dopočítávat  $u_k$  (resp.  $v_k$ ).  $\diamond$

Kvalita reprezentace dat v podprostoru dimenze  $q \leq p$  je dána poměrem

$$\tau_q = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_q}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p}, \quad (3.27)$$

kde  $0 < \tau_q < 1$ .

### 3.3 Odvození metody hlavních komponent

Podkapitola 3.2 nám poskytla základní geometrický nástroj, jak popsat řádky a sloupce vícerozměrné matice dat v nižších dimenzích. Metoda hlavních komponent má stejný cíl s tou výjimkou, že řádky matice dat  $X$  představují  $n$  pozorování  $p$ -rozměrné náhodné veličiny  $X$  [5]. Snížení dimenze  $X$  je dosaženo pomocí takových lineárních kombinací, které vysvětlují co největší rozdíly v hodnotách  $X$ , tedy mají největší rozptyl. Nazýváme je *hlavními komponentami* (PC) [9]. Následující text čerpá z knih [5] a [10].

#### 3.3.1 Standardizované lineární kombinace (SLC)

Nechť  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^T$  je náhodný vektor se střední hodnotou  $E\mathbf{X} = \mu \in R^p$  a kovarianční maticí

$$\text{var}(\mathbf{X}) = \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \dots & \dots & \sigma_{1p} \\ \vdots & \sigma_2^2 & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \dots & \dots & \dots & \sigma_p^2 \end{pmatrix},$$

kde  $\sigma_i^2 = \text{var}(X_i)$  a  $\sigma_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j)$  pro  $i \neq j$ , kde  $i, j = 1, \dots, p$ .

Standardizovaná lineární kombinace (SLC) je vážený průměr

$$\delta^T \mathbf{X} = \sum_{j=1}^p \delta_j X_j,$$

kde  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_p)^T \in R^p$  splňuje normalizační podmínku

$$\delta^T \delta = 1.$$

*První hlavní komponenta*  $Y_1$  je definována jako standardizovaná lineární kombinace s největším rozptylem, tj.

$$Y_1 = a_1^T \mathbf{X},$$

kde

$$a_1 := \arg \max_{a \in R^p} a^T \Sigma a \quad (3.28)$$

za podmínky

$$a^T a = 1 \quad (\text{normalizační podmínka}).$$

**Poznámka:** (3.28) vyjadřuje maximalizaci rozptylu  $Y_1$  za podmínky  $a_1^T a_1 = 1$

$$\text{var}(Y_1) = \text{var}(a_1^T \mathbf{X}) = a_1^T \text{var}(\mathbf{X}) a_1 = a_1^T \Sigma a_1.$$

◇

Podobně je definována *druhá hlavní komponenta*  $Y_2$ , neboli SLC s druhým největším rozptylem, jako

$$Y_2 = a_2^T \mathbf{X},$$

kde

$$a_2 := \arg \max_{a \in \mathbb{R}^p} a^T \Sigma a$$

za podmínky

$$\begin{aligned} a^T a &= 1 \quad (\text{normalizační podmínka}) \\ a^T a_1 &= 0 \quad (\text{podmínka kolmosti}). \end{aligned}$$

Obecně definujeme *j-tou hlavní komponentu*  $Y_j$  jako

$$Y_j = a_j^T \mathbf{X},$$

kde

$$a_j := \arg \max_{a \in \mathbb{R}^p} a^T \Sigma a$$

za podmínky

$$\begin{aligned} a^T a &= 1 \\ a^T a_i &= 0 \quad \forall i < j, \end{aligned}$$

pro  $j = 1, \dots, p$ .

Podle Věty 3 víme, že maximálního rozptylu hlavní komponenty  $Y_j$  při dodržení daných podmínek dosáhneme volbou

$$a_j = \gamma_j,$$

kde  $\gamma_j$  je vlastní vektor kovarianční matice  $\Sigma$ , který přísluší jejímu  $j$ -tému největšímu vlastnímu číslu  $\lambda_j$ .

Nyní se pokusíme zapsat tyto poznatky maticově. Označme  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_p)^T$  a  $\Gamma = (a_1, \dots, a_p)$ . Transformace vektoru  $\mathbf{X}$  metodou hlavních komponent (PC transformace) je definována jako

$$\mathbf{Y} = \Gamma^T (\mathbf{X} - \mu). \quad (3.29)$$

Zde jsme si dovolili  $\mathbf{X}$  nejprve centrovat za účelem získání  $\mathbf{Y}$  s nulovou střední hodnotou.

**Věta 8.** Necht'  $\mathbf{Y} = \Gamma^T(\mathbf{X} - \mu)$  je PC transformace náhodného vektoru  $\mathbf{X} \in R^p$  se střední hodnotou  $\mu \in R^p$  a kovarianční maticí  $\Sigma(p \times p)$ . Potom platí

1.  $EY_j = 0, j = 1, \dots, p$
2.  $\text{var}(Y_j) = \lambda_j, j = 1, \dots, p$
3.  $\text{cov}(Y_i, Y_j) = 0, i \neq j$
4.  $\text{var}(Y_1) \geq \text{var}(Y_2) \geq \dots \geq \text{var}(Y_p) \geq 0$
5.  $\sum_{j=1}^p \text{var}(Y_j) = \text{tr}(\Sigma)$
6.  $\prod_{j=1}^p \text{var}(Y_j) = |\Sigma|$

[5].

**Důkaz:**

**1.-4.** Zřejmé.

Uvažujme spektrální rozklad matice  $\Sigma = \Gamma\Lambda\Gamma^T$  dle Věty 2. Matice  $\Gamma$  je ortogonální, neboť

$$\Gamma^T\Gamma = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_p^T \end{pmatrix} (a_1, \dots, a_p) = \begin{pmatrix} a_1^T a_1 & a_1^T a_2 & \dots & a_1^T a_p \\ a_2^T a_1 & a_2^T a_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_p^T a_1 & \dots & \dots & a_p^T a_p \end{pmatrix} = I_p,$$

tedy

$$\Gamma^T = \Gamma^{-1}.$$

**5.** Můžeme psát

$$\begin{aligned} \text{tr}(\Sigma) &= \text{tr}(\Gamma\Lambda\Gamma^T) = \text{tr}(\Lambda\Gamma^T\Gamma) = \text{tr}(\Lambda I_p) = \text{tr}(\Lambda) = \sum_{j=1}^p \lambda_j \\ &= \sum_{j=1}^p \text{var}(Y_j) \quad \text{dle 2.} \end{aligned}$$

**6.** Stačí si uvědomit, že

$$|\Lambda| = \prod_{j=1}^p \lambda_j,$$

neboť  $\Lambda$  je diagonální. Potom

$$|\Sigma| = |\Gamma\Lambda\Gamma^T| = |\Lambda\Gamma\Gamma^T| = |\Lambda I_p| = |\Lambda| = \prod_{j=1}^p \lambda_j.$$

◊

### 3.3.2 Aproximace pomocí $R$ hlavních komponent

V této části je odvozen základní vztah pro aproximaci  $\mathbf{X}$  prostřednictvím  $R$  komponent, kde  $R < p$ . Vyjdeme ze vztahu (3.29). Vynásobením maticí  $\Gamma$  zleva dostaneme

$$\Gamma \mathbf{Y} = \Gamma \Gamma^T (\mathbf{X} - \mu) \quad (3.30)$$

Matice  $\Gamma$  je ortogonální

$$\Gamma \Gamma^T = I_p,$$

proto místo (3.30) můžeme psát

$$\Gamma \mathbf{Y} = \mathbf{X} - \mu. \quad (3.31)$$

Ze vztahu (3.31) vyjádříme  $\mathbf{X}$

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \Gamma \mathbf{Y} + \mu \\ &= (a_1, \dots, a_p) \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_p \end{pmatrix} + \mu \\ &= \sum_{j=1}^p a_j Y_j + \mu. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Vztah (3.32) je klíčový pro odvození aproximace  $\mathbf{X}$  pomocí  $R$  komponent, a sice

$$\mathbf{X} \approx \sum_{j=1}^R a_j Y_j + \mu = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \dots + a_R Y_R + \mu \quad (3.33)$$

pro  $R < p$ .

**Rozptyl vysvětlený prvními  $R$  komponentami** je dán podílem

$$\psi = \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_R}{\sum_{j=1}^p \lambda_j}. \quad (3.34)$$

### 3.3.3 Hlavní komponenty v praxi

V praxi musí být PC transformace nahrazena příslušnými odhady:

$$\begin{aligned} \mu &\text{ je nahrazeno } \bar{\mathbf{X}} \\ \Sigma &\text{ je nahrazeno } S, \end{aligned}$$

kde  $\bar{\mathbf{X}} = (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_p)^T$  se složkami  $\bar{X}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{ij}$ , pro  $j = 1, \dots, p$ , a  $S$  je výběrová kovarianční matice vektoru  $\mathbf{X}$ .

Nechť

$$S = GLG^T$$

je spektrální rozklad matice  $S$  podle Věty 2, kde

$$\begin{aligned} L &= \text{diag}(l_1, \dots, l_p) \\ G &= (g_1, \dots, g_p). \end{aligned}$$

Hlavní komponenty potom obdržíme jako

$$Y = G^T(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}). \quad (3.35)$$

Poznamenejme ještě, že rozptyl komponenty  $Y_j$  je roven  $j$ -tému největšímu vlastnímu číslu  $l_j$  matice  $S$ .

### 3.4 Analýza úrokového rizika metodou hlavních komponent

V této části je použito znalostí z předchozích kapitol ke zkoumání úrokového rizika, s nímž je spojené držení dluhopisu. K dispozici máme historické údaje o spotových úrokových mírách bezkuponových dluhopisů pro různé doby splatnosti, která jsou klíčová k sestrojení výnosových křivek a také k ocenění dluhopisu. Posuneme se nyní do současnosti, v našem případě do data 1.1.2011, a svou pozornost zaměříme na odpovídající výnosovou křivku, jež budeme nazývat dnešní. Podařilo-li by se nám odhadnout její příští pohyb, mohli bychom se pak odpovídajícím způsobem zajistit proti úrokovému riziku.

Pohyb výnosové křivky je dán změnou úrokových měr, proto v následující podkapitole naše data nejprve upravíme tak, abychom měli představu o tom, k jakým změnám v minulosti docházelo u jednotlivých dob do splatnosti. Posléze aplikujeme metodu hlavních komponent a ukážeme, jakým způsobem ji pro simulaci možných pohybů výnosové křivky použít. Odhadneme nejhorší vývoj výnosové křivky, představující největší riziko spojené se změnou úrokových sazeb, ale i nejlepší.

#### 3.4.1 Příprava dat

Vraťme se ke značení zavedenému v podkapitole 1.2 a pro účely metody PCA spočítejme denní změny spotových úrokových měr bezkuponových dluhopisů pro dobu splatnosti  $t$  jako

$$X_{\tau+1t} = R_t(\tau + 1) - R_t(\tau), \quad (3.36)$$

kde  $\tau = 1, \dots, n - 1$ .

Aplikací (3.36) na původní data obdržíme matici

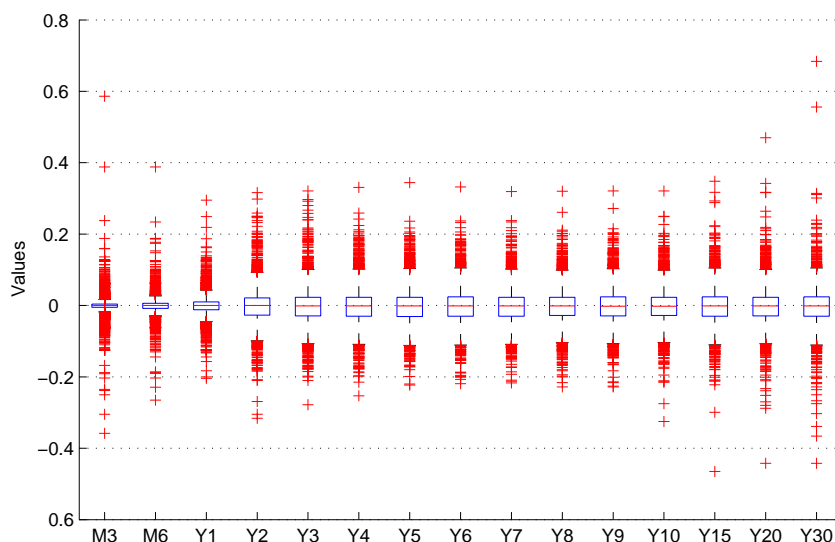
$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & \dots & X_{1p} \\ X_{21} & X_{22} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & \dots & \dots & \dots & X_{np} \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

s rozměrem konkrétně  $(4175 \times 15)$ .

Jedná se vlastně o  $n$  pozorování náhodného vektoru  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^T$ , kde  $X_j$  představuje náhodnou veličinu udávající změnu spotové úrokové míry bezkuponového dluhopisu s dobou do splatnosti  $t_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ . Nechť  $\bar{\mathbf{X}} = (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_p)^T \in R^p$  je odhad střední hodnoty náhodného vektoru  $\mathbf{X}$  a  $S$  jeho výběrová kovarianční matice.

**Poznámka:** Označení náhodných veličin  $(X_1, \dots, X_p)$  je zde za účelem propojení s výkladem kapitoly 3.3, v grafických výstupech a tabulkách ponecháváme označení náhodných veličin  $(M3, M6, Y1, \dots, Y30)$ , které lépe koresponduje s dobou do splatnosti.  $\diamond$

Rychlou představu o těchto nových datech poskytuje obrázek 3.3 a tabulka 3.2 potom uvádí konkrétní hodnoty pro odhady středních hodnot  $\bar{X}_j$  ve sloupci označeném Mean a hodnoty pro odhady směrodatných odchylek  $s_j$  ve sloupci označeném Standart Deviation.



Obrázek 3.3: Změny  $R_t$

Porovnáme-li v tabulce 3.2 odhad středních hodnot s odhadem směrodatné odchylky vidíme, že směrodatná odchylka je řádově větší a střední hodnoty jsou v porovnání s odchylkou nevýznamné.

Pokud náhodný vektor  $\mathbf{X}$  nemá nulovou střední hodnotu, můžeme ho centrovat

$$\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}, \quad (3.38)$$

čímž pak obdržíme komponenty  $Y_j$  s nulovou střední hodnotou.

V našem případě budeme předpokládat nulovou střední hodnotu

$$\bar{\mathbf{X}} = 0, \quad (3.39)$$

což odpovídá situaci, kdy apriory neočekáváme pohyb výnosové křivky nějakým směrem. Do předpokladu střední hodnoty se dá případně zakomponovat ekonomická predikce očekávaného pohybu křivky.

Variable	Mean	Standart Deviation
M3	-0.0013	0.0278
M6	-0.0013	0.0269
Y1	-0.0014	0.0305
Y2	-0.0016	0.0471
Y3	-0.0016	0.0497
Y4	-0.0015	0.0490
Y5	-0.0015	0.0486
Y6	-0.0014	0.0478
Y7	-0.0014	0.0475
Y8	-0.0013	0.0471
Y9	-0.0013	0.0465
Y10	-0.0013	0.0467
Y15	-0.0012	0.0482
Y20	-0.0012	0.0495
Y30	-0.0013	0.0521

Tabulka 3.2: Charakteristiky proměnných

### 3.4.2 Aplikace PCA na data

Aplikace metody hlavních komponent je provedena v programu MATLAB, pomocí zabudované funkce *princomp()*.

Při odvozování hlavních komponent, výpočtu vlastních vektorů a vlastních čísel, vycházíme z výběrové kovarianční matice  $S$ . Ta je uvedena níže (tabulka 3.3) v podobě tzv. kovarianční/korelační matice  $S/R$ , která má nad diagonálou kovariance centrovanych proměnných  $X_j$ , na diagonále jejich rozptyly a pod diagonálou jejich korelace.

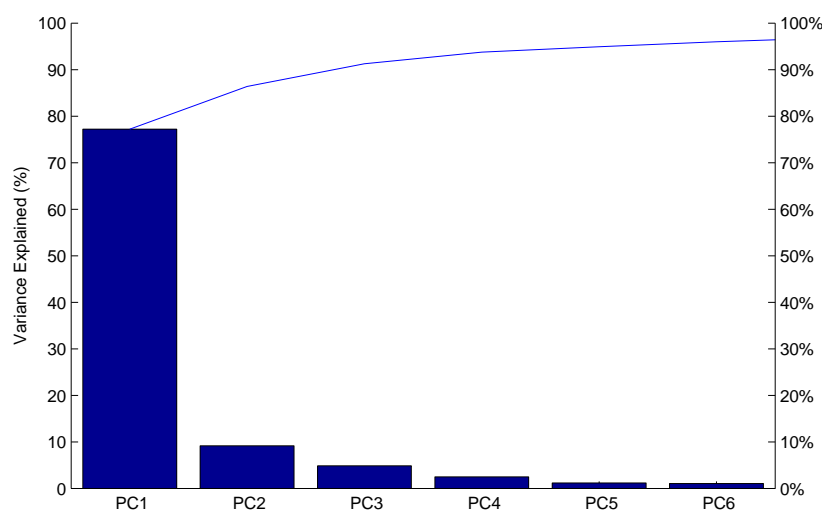
	M3	M6	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7	Y8	Y9	Y10	Y15	Y20	Y30
<b>M3</b>	0.0008	0.0006	0.0005	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
<b>M6</b>	0.8083	0.0007	0.0005	0.0004	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001
<b>Y1</b>	0.5529	0.6568	0.0009	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004
<b>Y2</b>	0.1889	0.2929	0.5545	0.0022	0.0021	0.0019	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0014	0.0013	0.0013	0.0012
<b>Y3</b>	0.1568	0.2580	0.5173	0.8794	0.0025	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019	0.0018	0.0017	0.0017	0.0015	0.0015	0.0014
<b>Y4</b>	0.1274	0.2139	0.4888	0.8097	0.8506	0.0024	0.0023	0.0022	0.0021	0.0020	0.0020	0.0019	0.0018	0.0017	0.0017
<b>Y5</b>	0.1214	0.2044	0.4899	0.7990	0.8493	0.9528	0.0024	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0020	0.0019	0.0018	0.0018
<b>Y6</b>	0.1085	0.1905	0.4591	0.7700	0.8261	0.9236	0.9505	0.0023	0.0021	0.0021	0.0020	0.0020	0.0019	0.0019	0.0018
<b>Y7</b>	0.1058	0.1785	0.4362	0.7264	0.7892	0.9011	0.9253	0.9438	0.0023	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019	0.0019	0.0019
<b>Y8</b>	0.0934	0.1689	0.4168	0.7086	0.7659	0.8752	0.9076	0.9345	0.9564	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0020	0.0019
<b>Y9</b>	0.0944	0.1572	0.3949	0.6778	0.7440	0.8569	0.8873	0.9226	0.9501	0.9621	0.0022	0.0021	0.0020	0.0020	0.0019
<b>Y10</b>	0.0952	0.1505	0.3809	0.6521	0.7109	0.8304	0.8657	0.8837	0.9217	0.9442	0.9508	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020
<b>Y15</b>	0.0711	0.1198	0.3417	0.5818	0.6408	0.7539	0.7986	0.8242	0.8532	0.8784	0.8943	0.9163	0.0023	0.0022	0.0022
<b>Y20</b>	0.0593	0.0995	0.3050	0.5385	0.6055	0.7076	0.7548	0.7890	0.8160	0.8455	0.8676	0.8889	0.9393	0.0024	0.0024
<b>Y30</b>	0.0450	0.0787	0.2665	0.4903	0.5478	0.6551	0.6982	0.7302	0.7592	0.7769	0.7978	0.8234	0.8785	0.9357	0.0027

Tabulka 3.3: Kovarianční/korelační matice

Dostáváme 15 hlavních komponent  $Y_j$ ,  $j = 1, \dots, 15$ , spočtených podle (3.35). V tabulce 3.4 jsou uvedeny rozptyly těchto komponent ve sloupci označeném Eigenvalue. V dalším sloupci označeném Percent jsou uvedeny podíly komponent na celkovém rozptylu a ve sloupci Cumulative potom kumulativní podíly podle (3.34) pro  $R = 1, \dots, 15$ , vyjádřené v procentech. Situace je graficky znázorněna na obrázku 3.4.

No.	Eigenvalue	Percent	Cumulative
$Y_1$	0.0235	77.22	77.22
$Y_2$	0.0028	9.17	86.39
$Y_3$	0.0015	4.87	91.26
$Y_4$	0.0008	2.49	93.75
$Y_5$	0.0004	1.18	94.93
$Y_6$	0.0003	1.05	95.98
$Y_7$	0.0003	0.87	96.85
$Y_8$	0.0002	0.72	97.57
$Y_9$	0.0002	0.50	98.07
$Y_{10}$	0.0001	0.43	98.51
$Y_{11}$	0.0001	0.36	98.87
$Y_{12}$	0.0001	0.34	99.21
$Y_{13}$	0.0001	0.29	99.50
$Y_{14}$	0.0001	0.26	99.76
$Y_{15}$	0.0001	0.24	100.00

Tabulka 3.4: Charakteristiky komponent



Obrázek 3.4: Scree Plot

Tento obrázek je klíčový k učinění rozhodnutí o výběru počtu hlavních komponent. Výběr počtu hlavních komponent souvisí jednak s určením dimenze prostoru, do kterého budeme promítat, a zároveň s přesností aproximace, kdy se snažíme, aby zvolené komponenty vysvětlovaly co největší podíl celkové variability původních dat.

První komponenta představuje zhruba 77.22% celkové variability. Zahrnutím druhé a třetí komponenty, které přidají asi 9.17% a 4.87%, se dostáváme k 91.26% vysvětleného celkového rozptylu.

Vidíme tedy, že zahrnutím prvních tří komponent dosáhneme nejen velice slušné aproximace, ale i grafické interpretace v trojrozměrném prostoru, jenž by byl pro případná další studování struktury dat velmi vhodný.

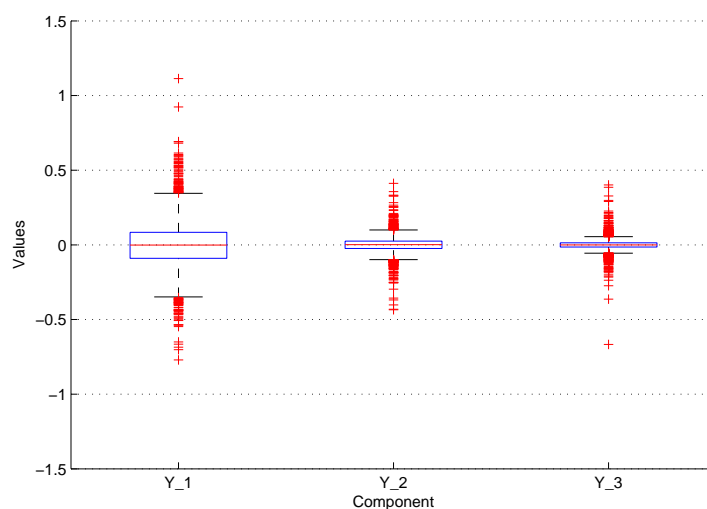
První 3 charakteristické vektory vypadají následovně:



$\mathbf{g}_1$	$\mathbf{g}_2$	$\mathbf{g}_3$
0.0244	0.2128	-0.5806
0.0371	0.2445	-0.5375
0.0952	0.2946	-0.4083
0.2419	0.4243	0.1192
0.2727	0.3786	0.1740
0.2954	0.2078	0.1635
0.3011	0.1513	0.1335
0.2992	0.0828	0.1089
0.2983	0.0070	0.0692
0.2961	-0.0441	0.0381
0.2913	-0.0927	0.0166
0.2892	-0.1464	-0.0332
0.2860	-0.2755	-0.1294
0.2858	-0.3565	-0.1806
0.2829	-0.4205	-0.2223

Tabulka 3.5: Vlastní vektory

Podívejme se na strukturu prvních tří hlavních komponent  $Y_1$ ,  $Y_2$  a  $Y_3$ .



Obrázek 3.5: Box plot

Na obrázku 3.5 vidíme, že komponenty mají střední hodnotu blízkou nule. Víme, že první komponenta vysvětluje největší podíl celkového rozptylu, což je patrné z obrázku, neboť její rozptyl je největší. Rozptyl druhé a třetí komponenty je pak výrazně menší. Podle Věty 8 jsou směrodatné odchylky těchto hlavních komponent, označené jako  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  a  $\sigma_3$ , následující:

$$\sigma_1 = \sqrt{\text{var}(Y_1)} = \sqrt{l_1} = 0.485, \quad (3.40)$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\text{var}(Y_2)} = \sqrt{l_2} = 0.053, \quad (3.41)$$

$$\sigma_3 = \sqrt{\text{var}(Y_3)} = \sqrt{l_3} = 0.039, \quad (3.42)$$

kde  $l_j$  je  $j$ -té největší vlastní číslo matice  $S$ .

### 3.4.3 Interpretace vlastních vektorů

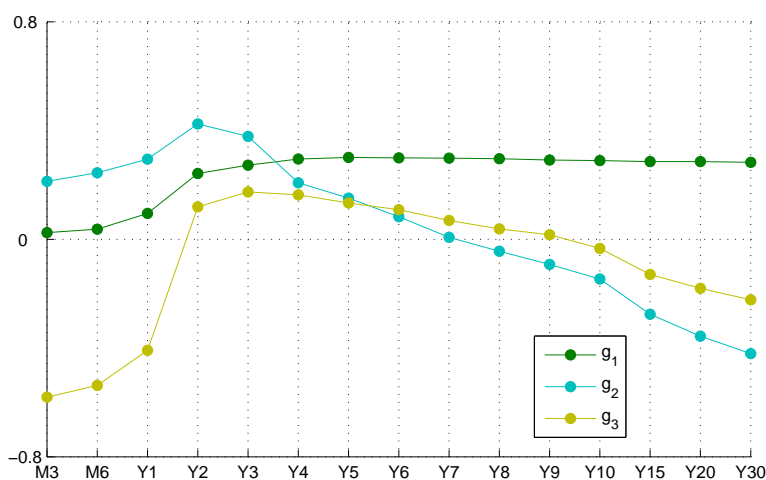
V předchozí sekci jsme se rozhodli aproximovat náhodný vektor  $\mathbf{X}$  pomocí prvních tří komponent, neboli

$$\mathbf{X} \approx g_1 Y_1 + g_2 Y_2 + g_3 Y_3. \quad (3.43)$$

Význam tohoto vztahu je následující:

Změnu spotových úrokových měr bezkuponových dluhopisů s dobou do splatnosti  $t_j$ ,  $j = 1, \dots, 15$ , představovanou vektorem  $\mathbf{X}$ , lze aproximovat pomocí faktorů záviselých pouze na třech parametrech, vlastních vektorech  $g_1$ ,  $g_2$  a  $g_3$ .

Pojďme si nyní tyto vektory graficky znázornit.



Obrázek 3.6: První 3 charakteristické vektory

Lze je interpretovat následujícím způsobem:

Složky prvního vlastního vektoru  $g_1$  jsou pouze kladné, tedy faktor

$$g_1 Y_1$$

bude podle povahy  $Y_1$  posouvat celou výnosovou křivku buď ve směru dolů ( $Y_1 < 0$ ) nebo nahoru ( $Y_1 > 0$ ). Zodpovídá tedy za *paralelní posun* výnosové křivky.

Druhý vlastní vektor  $g_2$  obsahuje nejprve  $k$  kladných složek, potom následuje  $(p - k)$  složek záporných, kde  $k < p$ . Tedy

$$g_2 Y_2$$

způsobí nárůst úrokových měr u prvních  $k$  dob do splatností a pokles u zbylých  $(p - k)$ , nebo naopak (dle povahy  $Y_2$ ). Tato složka proto způsobuje *rotaci* výnosové křivky.

Třetí vlastní vektor  $g_3$  má prvních  $k$  a posledních  $j$  složek záporných, zbylých  $(p - k - j)$  je kladných, pro  $k, j < p$ . Proto faktor

$$g_3 Y_3$$

zapříčiní pokles úrokových měr u prvních  $k$  a posledních  $j$  dob do splatnosti a u středových  $(p - k - j)$  růst pro  $Y_3 > 0$ . Obráceně tomu bude pro  $Y_3 < 0$ . Tato složka je proto spojená s *prohnutím* výnosové křivky.

## 3.5 Analýza úrokového rizika

Vyjdeme ze vztahu (3.43), který si nejprve upravíme následujícím způsobem:

Podle Věty 8 víme, že

$$EY_j = 0 \text{ a } \text{var}(Y_j) = l_j,$$

proto místo (3.43) můžeme psát

$$\mathbf{X} \approx g_1\sqrt{l_1}\xi_1 + g_2\sqrt{l_2}\xi_2 + g_3\sqrt{l_3}\xi_3, \quad (3.44)$$

kde  $\xi_j$  jsou nekorelované náhodné veličiny se střední hodnotou  $E\xi_j = 0$  a rozptylem  $\text{var}(\xi_j) = \sigma^2 = 1$ .

Dnešní výnosovou křivkou  $YC_0$  označíme výnosovou křivku konstruovanou z posledního ( $n$ -tého) vektoru spotových úrokových měř

$$(R_{t_1}(n), \dots, R_{t_p}(n))^T,$$

kde  $p = 15$  a  $n = 4176$ , tedy z údajů ze dne 1. 1. 2011.

Výnosovou křivku zítra označíme

$$YC_0 + \mathbf{X}$$

a definujeme ji jako výnosovou křivku konstruovanou z vektoru spotových úrokových měř

$$(R_{t_1}(n), \dots, R_{t_p}(n))^T + \mathbf{X}$$

neboli

$$(R_{t_1}(n) + X_1, \dots, R_{t_p}(n) + X_p)^T,$$

kde vektor  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^T$  předpovíme pomocí vztahu (3.44) a to následujícím způsobem:

Budeme předpokládat, že dojde k maximálně takové změně, která odpovídá dvěma směrodatným odchylkám náhodné veličiny  $\xi_j$ , a nejprve se omezíme na zahrnutí vlivu pouze jednoho z faktorů. Tabulka 3.6 schematicky zaznamenává, jaké výnosové křivky zítra obdržíme.

	paralelní posun	rotace	prohnutí
+2σ	$YC_0 + 2g_1\sqrt{l_1}$	$YC_0 + 2g_2\sqrt{l_2}$	$YC_0 + 2g_3\sqrt{l_3}$
+1σ	$YC_0 + g_1\sqrt{l_1}$	$YC_0 + g_2\sqrt{l_2}$	$YC_0 + g_3\sqrt{l_3}$
0σ	$YC_0$	$YC_0$	$YC_0$
-1σ	$YC_0 - g_1\sqrt{l_1}$	$YC_0 - g_2\sqrt{l_2}$	$YC_0 - g_3\sqrt{l_3}$
-2σ	$YC_0 - 2g_1\sqrt{l_1}$	$YC_0 - 2g_2\sqrt{l_2}$	$YC_0 - 2g_3\sqrt{l_3}$

Tabulka 3.6: Výnosové křivky zítra

Poznamenejme ještě, že písmeno  $\sigma$  použité v tabulce představuje pouze symbol. Pro každý sloupec, reprezentující jiný typ pohybu, odpovídá jiné hodnotě, a sice příslušným odhadům směrodatných odchylek uvedeným postupně v (3.40), (3.41) a (3.42).

Výnosové křivky v prvním sloupci vzniknou posunutím dnešní výnosové křivky nahoru nebo dolů. Ty v druhém sloupci vzniknou rotací původní křivky a ve třetím sloupci máme dnešní výnosovou křivku více či méně prohnutou.

Nyní dopočteme odpovídající nové ceny dluhopisu  $P_1$  a to obdobně, jako v podkapitole 2.3. Nejprve použijeme funkci  $splnex()$ , jejíž výstupem budou výnosové křivky pro nové hodnoty  $(R_{t_1}(n) + X_1, \dots, R_{t_p}(n) + X_p)^T$ , a poté použijeme funkce  $dirtyx()$ . Výsledky jsou zaznamenány v tabulce 3.7.

	paralelní posun	rotace	prohnutí
+2 $\sigma$	117.414	119.218	118.920
+1 $\sigma$	118.084	118.988	118.839
0 $\sigma$	118.792	118.792	118.792
-1 $\sigma$	119.438	118.529	118.678
-2 $\sigma$	120.124	118.302	118.597

Tabulka 3.7: Výsledky PCA

V tabulce 3.7 odpovídají řádky +1 $\sigma$  a +2 $\sigma$  postupně paralelnímu posunu výnosové křivky směrem nahoru, jejímu otočení doprava a prohnutí. U řádků -1 $\sigma$  a -2 $\sigma$  je tomu naopak, postupně se jedná o paralelní posun výnosové křivky směrem dolů, její otočení doleva a zploštění.

Je tedy patrné, že pokud se výnosová křivka posune směrem dolů, otočí směrem doprava nebo se více prohne, očekáváme růst ceny dluhopisu. V opačném případě, tzn. posun směrem nahoru, rotace doleva a zploštění, naopak pokles.

Kombinací všech tří faktorů bychom dále mohli simulovat i ostatní vývoje výnosových křivek. Naším cílem nyní bude, zaměřit se na to, jaká výnosová křivka zítra by byla pro nás nejhorší (resp. nejlepší) z hlediska ceny dluhopisu.

Nejhorší situace nastane pro

$$\mathbf{X} \approx 2g_1\sqrt{l_1} - 2g_2\sqrt{l_2}\xi_2 - 2g_3\sqrt{l_3}\xi_3,$$

kdy cena dluhopisu klesne až na

$$P_1 = 116.808,$$

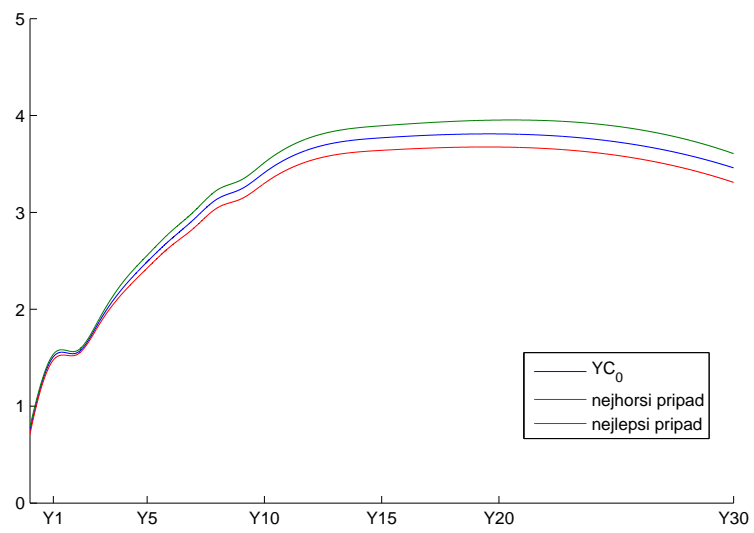
a nejlepší potom pro

$$\mathbf{X} \approx -2g_1\sqrt{l_1} + 2g_2\sqrt{l_2}\xi_2 + 2g_3\sqrt{l_3}\xi_3,$$

kdy se cena dluhopisu vyšplhá na

$$P_1 = 120.757.$$

Na obrázku 3.7 jsou znázorněna dnešní výnosová křivka a výnosové křivky zítra pro zmíněné extrémní situace.



Obrázek 3.7: Nejhorší a nejlepší případ pohybu výnosové křivky

# Závěr

V této práci jsme se seznámili s oceňováním dluhopisů s fixním kuponem na základě výnosových křivek a s analýzou úrokového rizika, jenž je spojené s držetím dluhopisu. K analýze rizika bylo využito dvou odlišných způsobů. První, jenž vycházel z historického vývoje výnosů do splatnosti dvacetiletých dluhopisů s fixním kuponem, a druhý, který byl založen na historických denních změnách výnosových křivek.

K prvnímu, běžnému způsobu, byly použity dva odlišné přístupy, výpočet změny ceny na základě přecenění dluhopisu, označovaný jako *full valuation approach*, kterým jsme spočítali skutečnou cenu dluhopisu, a výpočet změny ceny na základě durace a konvexity, označovaný jako *sensitivity approach*, jenž nám cenu dluhopisu pouze aproximoval. To, jak přesná tato ať už jen lineární či kvadratická aproximace může být, jsme zjistili porovnáním s výsledky z prvního přístupu. Obě aproximace je velice přesné, pokud předpokládáme malou změnu výnosu do splatnosti, a to o velikost jedné směrodatné odchylky, která odpovídá 0.046%. Pro větší změny výnosu do splatnosti poskytuje kvadratická aproximace daleko lepší odhad ceny dluhopisu než lineární. Došli jsme k výsledkům, že skutečná cenu dluhopisu  $P_1$  se bude s 95% pravděpodobností pohybovat v rozmezí od 117.301 do 120.214.

Druhý způsob nás zavedl k metodě hlavních komponent, jejíž popsání a správné pochopení bylo jedním z cílů této práce. Metodu hlavních komponent jsme aplikovali na historické denní změny výnosových křivek. S využitím získaných hlavních komponent, představující různé typy pohybu výnosové křivky (paralelní posun, rotaci a prohnutí), jsme modelovali možné tvary výnosové křivky a spočítali odhad nejhorší resp. nejlepší ceny dluhopisu. Konkrétní výsledky jsou následující:  $P_1 = 116.808$  resp.  $P_1 = 120.757$ .

Oba dva způsoby použité k řešení daného problému jsou od základu zcela odlišné, první způsob bych označila jako početně náročnější, druhý způsobu naopak vyžaduje rozsáhlejší teoretické znalosti, přestože výsledná aplikace je potom poměrně rychlá, jednoduchá a jasná. Metoda hlavních komponent proto představuje velice zajímavý a vhodný nástroj k provedení analýzy úrokového rizika.

# Seznam použité literatury

- [1] CIPRA, Tomáš. *Finanční matematika v praxi*. Praha: HZ, 1993. 166 s. ISBN 80-901495-1-0.
- [2] CIPRA, Tomáš. *Matematika cenných papírů*. Praha: HZ, 2000. 241 s. ISBN 80-86009-35-1.
- [3] CIPRA, Tomáš. *Praktický průvodce finanční pojistnou matematikou*. 2. vydání. Praha: Ekopress, 2005. 308 s. ISBN 80-86119-91-2.
- [4] EVERITT, Brian. *An R and S-PLUS Companion to Multivariate Analysis*. London: Springer, 2005. 221 s. ISBN 1-85233-822-2.
- [5] HÄRDLE, Wolfgang; SIMAR, Léopold. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. London: Springer, 2007. 458 s. ISBN: 3540722432
- [6] HEBÁK, Petr; HUSTOPEKÝ, Jiří; PECÁKOVÁ, Iva; et al. *Vícerozměrné statistické metody [3]*. 2. vydání. Praha: Informatorium, 2007. 271 s. ISBN 978-80-7333-001-9.
- [7] JORION, Philippe. *Financial Risk Manager Handbook*. 4th ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2007. 713 s. ISBN 0470126302.
- [8] LITTERMAN, Robert; SCHEINKMAN, Jose: *Common Factors Affecting Bond Returns*. Journal of Fixed Income. June 1991. s. 54-61.
- [9] MELOUN, Milan; MILITKÝ, Jiří; HILL, Martin. *Počítačová analýza vícerozměrných dat v příkladech*. Praha: Serifa, 2005. 449 s. ISBN 80-200-1335-0.
- [10] SCHWESER, Kaplan. *Alternative Asset Valuation and Fixed Income*, SchweserNotes for the 2011 CFA Exam Level 2.
- [11] ŠTRUPL, Miroslav; SOVKA, Pavel: *Cvičení k předmětu ADA*. c2006. <http://noel.feld.cvut.cz/vyu/ada/adacv/node24.html>.

# Přílohy

## Příloha 1.

```
function[splindex] = splindex(data,m)
% vstup: data ... matice spotovych urokovych mer (i-ty radek obsahuje udaje pro
%         prislusne maturity m v case i)
%         m ... radkovy vektor maturit (v letech)
% vystup: splindex ... vynosove krivky (i-ty radek obsahuje denni, dvoudenni, tridenni, ...
%         spotovou urokovou miru)

sizeX = size(data);
xx = (1/365):(1/365):30; % x_1 = 1/365, x_2 = 2/365, ..., x_10950 = 30
YC = [];
for t = 1:sizeX(1),
    line = data(t,:);
    YCt = spline(m,line,xx);
    YC = [YC;YCt];
end,
splindex = YC;
```

## Příloha 2.

```
function[CFx,datumCFx] = CFx(datum_dnes,datum_splatnosti,N,c,j)
% vstup: datum_dnes ... matice dat, k nimz zjistujeme prislusna cashflow a jejich data
%         (i-ty radek obsahuje datum ve tvaru rok, mesic, den)
%         datum_splatnosti ... radkovy vektor pro spolecne datum splatnosti nebo matice pro
%         ruzna data splatnosti (i-ty radek obsahuje datum ve tvaru
%         rok, mesic, den, matice je stejneho rozmeru jako datum_dnes)
%         N ... nominalni hodnota dluhopisu
%         c ... kuponova sazba
%         j ... frekvence vyplaceni kuponu (j-krat rocne)
% vystup: CFx ... matice cashflow (i-ty radek obsahuje vektor cashflow k i-temu datu)
%         datumCFx ... matice dat cashflow (i-ty radek obsahuje data cashflow vyjadrena
%         v ciselne podobě)

kupon = N*(c/j);
posun = 12/j;
rozmerd = size(datum_dnes);
rozmers = size(datum_splatnosti);
dateCF = [];
CF = [];
delka = [];
for i=1:rozmerd(1)
    if rozmers(1)==1
        y = datum_splatnosti(1,1);
        m = datum_splatnosti(1,2);
        d = datum_splatnosti(1,3);
    else
        y = datum_splatnosti(i,1);
        m = datum_splatnosti(i,2);
        d = datum_splatnosti(i,3);
    end;
    CFi = [];
    dateCFi = [];
    while y > datum_dnes(i,1) || (y == datum_dnes(i,1) && m > datum_dnes(i,2)) || (y == datum_dnes(i,1)
    && m == datum_dnes(i,2) && d > datum_dnes(i,3))
        date = [y, m, d];
        dateCFi = [datenum(date),dateCFi];
        CFi = [kupon,CFi];
        m = m - posun;
        if m <= 0
            while m <= 0
                m = 12 + m;
                y = y - 1;
            end;
        end;
    end;
    nominal = [zeros(1,length(CFi)-1),N];
    delka = [delka,length(CFi)];
    CF = [CF,CFi+nominal];
    dateCF = [dateCF,dateCFi];
end;
```



```

% k maticovemu zapisu je treba mit vektory cashflow stejne delky - doplnime nulami
% predpokladame, ze struktura dat je takova, ze prvni vektor cashflow je nejdelsi

sizedelka = size(delka);
velikost = delka(1,1);
CFnew = [];
dateCFnew = [];
posun = 0;
od = 1;
for k=1:sizedelka(2)
    p = delka(1,k);
    posun = posun + p;
    CF1 = CF(1,od:posun);
    dateCF1 = dateCF(1,od:posun);
    od = od + p;
    CFnew = [CFnew;CF1,zeros(1,velikost-length(CF1))];
    dateCFnew = [dateCFnew;dateCF1,zeros(1,velikost-length(dateCF1))];
end;

CFx = CFnew;
datumCFx = dateCFnew;

```

### Příloha 3.

```

function[doxa] = dobadokuponux(date,dateCF)
% vstup: date ... matice dat (i-ty radek obsahuje datum ve tvaru rok, mesic, den)
%         dateCF ... matice dat cashflow (i-ty radek obsahuje data cashflow vyjadrena v ciselne podobe)
% vystup: doxa ... matice poctu dnu do nasledujicich kuponovych plateb

sizedateCF = size(dateCF);
pocet=[];
for i=1:sizedateCF(1)
    poceti=[];
    for j=1:sizedateCF(2)
        dateCFvec = datevec(dateCF(i,j));
        pom=-etime([date(i,1:3),0,0,0],dateCFvec)/60/60/24;
        poceti=[poceti,pom];
    end;
    pocet=[pocet;poceti];
end;
doxa=pocet;

```

### Příloha 4.

```

function[dirty] = dirtyx(date,CF,dateCF,YC)
% vstup: date ... matice dat (i-ty radek obsahuje datum ve tvaru rok, mesic, den)
%         CF ... matice cashflow (i-ty radek obsahuje vektor cashflow k i-temu datu)
%         dateCF ... matice dat cashflow (i-ty radek obsahuje data cashflow vyjadrena v ciselne podobe)
%         YC ... vynosove krivky (i-ty radek obsahuje denni, dvoudenni, tridenni, ... spotovou urokovou miru)
% vystup: dirty ... sloucovy vektor hrubych cen, kalendarni konvence actual/365

doxa = dobadokuponux(date,dateCF);
v = 1./(1 + YC/100) % diskontni faktory
sizev = size(v);
sizeCF = size(CF);
PV = [];
for i=1:sizeCF(1);
    PVi = 0;
    for j = 1:sizeCF(2)
        if CF(i,j)>0
            if doxa(i,j)> sizev(2)
                CFj = CF(i,j)*(v(i,sizev(2))^(doxa(i,j)/365));
                PVi = PVi + CFj;
            else
                CFj = CF(i,j)*(v(i,doxa(i,j))^(doxa(i,j)/365));
                PVi = PVi + CFj;
            end;
        end;
    end;
    PV = [PV;PVi];
end;
dirty = PV;

```

## Příloha 5.

```
function[alivkvtx] = alivkvtx(datum_dnes, datumCF, N, c, j)
% vstup: datum_dnes ... matice dat (i-ty radek obsahuje datum ve tvaru rok, mesic, den)
%        datumCF ... matice dat cashflow (i-ty radek obsahuje data cashflow vyjadrena v ciselne podobe)
%        N ... nominalni hodnota dluhopisu
%        c ... kuponova sazba
%        j ... frekvence vyplaceni kuponu (j-krat rocne)
% vystup: alivkvtx ... vektor alivkvtnich uroku, kalendarni konvence E30/360

C = N*(c/j);
T = 360/j;
dateCF = datevec(datumCF);
rozmer = size(datum_dnes);
AU = [];
for i=1:rozmer(1),
    y = datum_dnes(i,1);
    m = datum_dnes(i,2);
    d = datum_dnes(i,3);
    yCF = dateCF(i,1);
    mCF = dateCF(i,2);
    dCF = dateCF(i,3);
    if y<yCF
        if m<mCF
            mesicu = 12*(yCF-y)+ mCF - m;
        else
            mesicu =12-m + 12*(yCF-y-1)+ mCF;
        end;
    else mesicu = mCF-m;
    end;
    dni = T-(30-d+1+30*(mesicu-1)+dCF-1);
    AUi = C*dni/360;
    AU = [AU;AUi];
end;
alivkvtx = AU;
```