Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Libor Peltan

Monotonie funkcí vyjádřitelných pomocí elementárních funkcí

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce:	RNDr. Tomáš Bárta Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2011

Poděkování.

Děkuji předně RNDr. Tomáši Bártovi Ph.D. za příkladné vedení práce a cenné rady, dále děkuji Doc. RNDr. Mirko Rokytovi, CSc., že mě naučil základy matematické analýzy a získal mě pro tento obor.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Monotonie funkcí vyjádřitelných pomocí elementárních funkcí

Autor: Libor Peltan

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Tomáš Bárta Ph.D., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: U určitých typů funkcí daných vzorci (ekvivalentně: funkcí ze tříd uzavřených na aritmetické operace) jsme za uvedených předpokladů dokázali monotonii na nějakých okolích $+\infty$. Jsou to: vzorce s exp, log, sin, arctg apod. s omezením na definiční obory těchto funkcí; mocninné řady s kokonečně mnoha koeficienty kladnými; různé třídy funkcí dané vzorci s požadavkem zachování takové monotonie při sčítání, nebo při násobení, nebo monotonie plynoucí z konečného počtu nulových bodů; a nakonec vzorce s druhou odmocninou.

Klíčová slova: elementární funkce, monotónní funkce, funkce vyjádřitelná vzorcem, meromorfní funkce

Title: Monotonicity of functions which can be expressed using elementary functions

Author: Libor Peltan

Department: Department of mathematical analysis

Supervisor: RNDr. Tomáš Bárta Ph.D., Department of mathematical analysis

Abstract: For certain types of functions expressible with formula (equivalently: functions from classes closed to arithmetic operations) under stated assumptions, we prove monotonicity at some neighbourhood of $+\infty$. They are: formulas containing exp, log, sin, arctan, etc. with constrainted domain of these functions; power series with cofinite many coefficients positive; various classes of functions expressible with formulas with the requirement of preserving monotony in summation, or multiplication, or the monotony resulting from having a finite number of zero points; and finally formulas with square root.

Keywords: elementary functions, monotonic functions, functions expressible with formula, meromorphic functions

Obsah

Úvod

Příklad. Vyšetřeme konvergenci integrálu

$$\int_1^{+\infty} \frac{sinx}{\sqrt{logx} - exp(x^2)}$$

„U 1“ je integrand omezený, na celém $(1, +\infty)$ spojitý, takže jediný problém bude „u $+\infty$“. Protože integrand střídá znaménka, použijeme Dirichletovo kritérium na součin funkcí $f(x)g(x)$, kde $f(x) = sinx$ a g bude zbytek vzorce pro funkci.

- f má „omezené částečné integrály“ – to je o sinu známo – OK.
- limita g v $+\infty$ existuje nulová – OK.
- g je na okolí $+\infty$ monotónní – ???

Jakýkoli zainteresovaný čtenář by jistě briskně monotonii g dokázal, ten zkušený by to i viděl od oka, zdá se, že od tak hezkých monotónních funkcí ve vzorci pro g nemůžeme žádný podraz čekat. Ale stojí za to nahlédnout na tento problém obecněji a pokusit se dokázat o nějakých typech funkcí daných vzorcem – elementárních funkcí – že jsou „u nekonečna“ monotónní.

Doufejme, že takové poznatky využijeme nejen při ověřování předpokladů Dirichletova kritéria.

V první části práce se budeme zabývat vlastnostmi vhodně zavedených tříd funkcí, hlavně elementárních. Význam onoho přívlastku se v detailech různí, ale vždy jde o funkce, které lze vyjádřit (konečným) vzorcem, za použití některých dalších významných funkcí, jako logaritmus, sinus, atd. a případně jejich inverzí. Zde pojem elementární nebudeme obšírněji zavádět, místo toho budeme definovat jinak pojmenované třídy funkcí vyjádřitelných vzorci.

Ve druhé části už budeme vyslovovat a dokazovat užitečná tvrzení a věty, která v obecnosti hovoří o monotonii takových funkcí, a to hlavně na okolí $+\infty$. Různými metodami pak dosáhneme jistých výsledků.

1. Technické zavedení tříd funkcí

1.1 Funkce s definičním oborem

Definice. *Funkcí s definičním oborem budeme nazývat dvojici $(f, D(f))$, kde $D(f)$ je nějaká podmnožina $\mathbb{R}$ a f je funkce zobrazující $D(f)$ do $\mathbb{R}$.*

Úmluva. Součtem, rozdílem a součinem funkcí s definičním oborem budeme rozumět příslušnou operaci s funkcemi a průnik definičních oborů, podílem opět tuto operaci s funkcemi a průnik definičních oborů ještě s množinou nenulovosti dělitele, složením pak opět aritmetické složení funkcí $f \circ g$ s definičním oborem $\{x \in D(g) \mid g(x) \in D(f)\}$.

Pod pojmem funkce budeme dále myslet funkci s definičním oborem. Pokud ho explicitně neuvedeme, budeme myslet maximální možný (z hlediska aritmetiky).

Poznámka. Předchozí úmluva se jeví býti poněkud laxní, ale u elementárních funkcí by k nejasnostem docházet nemělo. Maximální definiční obory jsou:

- pro funkce $Id_{\mathbb{R}}$, exp, sin, cos to bude celé $\mathbb{R}$,
- pro logaritmus interval $(0, +\infty)$,
- pro druhou odmocninu interval $[0, +\infty)$,
- nakonec při aritmetických operacích s takovými funkcemi použijeme pravidla uvedená výše.

1.2 Aritmetický uzávěr

Definice. *Aritmeticky uzavřený systém funkcí je takový systém, který je uzavřený na operace součtu, rozdílu, součinu, podílu a skládání dvou funkcí.*

Aritmetický uzávěr množiny funkcí je nejmenší (průnik všech takových) aritmeticky uzavřený systém funkcí obsahující všechny funkce z této množiny a také všechny konstantní funkce. Aritmetický uzávěr množiny $\mathcal{M}$ budeme značit $\mathrm{Arit}(\mathcal{M})$.

Příklad.

- $\mathrm{Arit}(\emptyset)$ jsou všechny konstantní funkce.
- $\mathrm{Arit}(\{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}\})$ jsou zase všechny racionální funkce.

Úmluva. Pod pojmem *vzorec* budeme nadále uvažovat soubor konečně mnoha aritmetických operací (včetně aplikace nějaké funkce) s reálnými konstantami a proměnnou x (cokoliv se v něm samozřejmě smí opakovat). Povolené aritmetické operace budou dále specifikovány, pokud ne, půjde jen o sčítání, odčítání, násobení a dělení.

Funkce daná vzorcem je pak funkce (označme ji $(f, D(f))$), pro niž existuje vzorec, ze kterého po dosazení bodu z $D(f)$ za x a provedení příslušných aritmetických operací dostaneme reálnou hodnotu, která je rovna hodnotě funkce f v onom bodě.

Poznámka. Výše uvedená úmluva se drží intuitivního náhledu.

Lemma 1. *(Aritmetický uzávěr a vzorce)* $\mathrm{Arit}(\mathcal{M})$ *je pro* $Id_{\mathbb{R}} \in \mathcal{M}$ *přesně systém všech funkcí daných vzorci obsahujícími konstanty,* x *(v roli proměnné), funkce z* $\mathcal{M}$ *a operace sčítání, odčítání, násobení a dělení.*

Důkaz. Inkluzi $\supseteq$ dokážeme strukturální indukcí podle složitosti vzorce. Nazvemeli řádem vzorce počet všech konstant, výskytů x-u, aplikací funkcí z $\mathcal{M}$ a operátorových znamének, jsou funkce dané vzorcem řádu 1 (konstanty; x, čili identita) zřejmě v $Arit(\mathcal{M})$.

Nyní víme, že funkce všech vzorců řádu 1 až N jsou v $Arit(\mathcal{M})$ a chceme to i pro jistou funkci vzorce řádu $N+1$. Tento vzorec ale na své nejvyšší úrovni obsahuje buď aplikaci funkce z $\mathcal{M}$, nebo nějaký znaménkový operátor („$+-*/$“). V prvním případě je složením funkce z $\mathcal{M} \subset Arit(\mathcal{M})$ a funkce dané vzorcem řádu N, ve druhém případě je součtem (součinem, rozdílem, podílem) dvou funkcí daných vzorci řádu $\leq N$, takže je vždy také v $Arit(\mathcal{M})$.

Naopak třída všech funkcí vyjádřitelných vzorcem popsaným ve znění lemmatu obsahuje konstanty a funkce z $\mathcal{M}$ a je zřejmě uzavřený na operace sčítání, odčítání, násobení a dělení, ale i skládání (za všechny výskyty x-u ve vzorci vnější funkce dosadíme vzorec pro vnitřní funkci), takže musí být nadmnožinou $Arit(\mathcal{M})$. □

Poznámka. Aritmetický uzávěr je vhodný nástroj na generování různých tříd „elementárních“ funkcí. Předchozí lemma vlastně říká, že definice „přes uzavřenost na aritmetické operace“ a „přes definovatelnost vzorcem“ jsou ekvivalentní.

Dále uvedeme několik lemmat, které popisují strukturu aritmetických uzávěrů a tím zjednodušují dokazování jejich vlastností.

Lemma 2. *(Struktura* $\mathrm{Arit}(\mathcal{M})$*)* $\mathrm{Arit}(\mathcal{M})$ *je pro* $Id_{\mathbb{R}} \in \mathcal{M}$ *přesně systém funkcí obsahující konstanty a identitu, uzavřený na operace sčítání, odčítání, násobení, dělení a (levé) složení funkce s funkcí z* $\mathcal{M}$.

Důkaz. Chceme $f, g \in \mathrm{Arit}(\mathcal{M}) \Rightarrow f \circ g \in \mathrm{Arit}(\mathcal{M})$. Oběma směry použijeme lemma o aritmetickém uzávěru a vzorcích: f i g můžeme vyjádřit vzorcem, takže dosadíme-li za všechny výskyty proměnné x ve vzorci pro f vzorec pro g, dostaneme vzorec jejich složení. □

Lemma 3. *(Struktura nadtříd* $\mathrm{Arit}(\{Id_{\mathbb{R}}, \exp, \log\})$ *poprvé)*

$\mathrm{Arit}(\mathcal{M})$ *je pro* $\{Id_{\mathbb{R}}, \exp, \log\} \subset \mathcal{M}$ *podsystémem k systému funkcí obsahujícímu konstantní funkce a identitu, který je uzavřený na operace sčítání, násobení* (-1)*, aplikaci absolutní hodnoty a (levé) složení funkce s funkcí z* $\mathcal{M}$.

Důkaz. Označme $\mathcal{B}$ systém popsaný ve znění věty – chceme tedy $\mathrm{Arit}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{B}$.

Samotné funkce z $\mathcal{M}$ jsou v $\mathcal{B}$ zřejmě (jsou složením identity se sebou samými) stejně jako platí $f, g \in \mathcal{B} \Rightarrow f - g = f + (-1)g \in \mathcal{B}$.

K důkazu uzavřenosti na násobení a dělení povede několik kroků:

- z absolutní hodnoty dostaneme maximum (a minimum):

$$\max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2} \ ,$$

- z maxima zadefinujeme kladnou a zápornou část:
$$f_+ = \max(f, 0),\ \ f_- = \max(-f, 0)\ ,$$
- násobení dvou kladných funkcí převedeme na sčítání:
$$fg = \exp(\log \circ f + \log \circ g)\ ,$$
- násobení dvou nezáporných funkcí pak ošetříme trikem:
$$fg = (f+1)(g+1) - f - g - 1\ ,$$
- a násobení dvou (jakýchkoli) funkcí potom už rozložíme na nezáporné:
$$fg = f_+g_+ - f_-g_+ - f_+g_- + f_-g_-\ .$$
- Ještě to dělení (pro $g \neq 0$), nejprve pro kladné funkce:
$$\frac{f}{g} = \exp(\log \circ f - \log \circ g)\ ,$$
- a nakonec obecně:
$$\frac{f}{g} = \frac{fg}{g^2} = \frac{(fg)_+ + 1}{g^2} - \frac{(fg)_- + 1}{g^2}.$$

Tím jsme ukázali, že $\mathcal{B}$ obsahuje funkce z $\mathcal{M}$ a je uzavřený na operace sčítání, odčítání, násobení, dělení a skládání dvou funkcí, pročež je nadsystémem k $\mathrm{Arit}(\mathcal{M})$. □

Lemma 4. *(Struktura nadtříd* $\mathrm{Arit}(\{Id_\mathbb{R}, \exp, \log\})$ *podruhé)*

$\mathrm{Arit}(\mathcal{M})$ *je pro* $\{Id_\mathbb{R}, \exp, \log\} \subset \mathcal{M}$ *přesně nejmenší systém funkcí obsahující konstantní funkce a identitu, který je uzavřený na operace násobení a (levé) složení funkce s exponenciálou a logaritmem.*

Důkaz. Označme $\mathcal{A} := \mathrm{Arit}(\{Id_\mathbb{R}, \exp, \log\})$, $\mathcal{B}$ systém popsaný ve znění věty - chceme tedy $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Zřejmě platí $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$ a ověříme, že všechny funkce z $\mathcal{A}$ jsou i v $\mathcal{B}$.

Samotné funkce exp a log jsou v $\mathcal{B}$ zřejmě (jsou složením identity se sebou samými).

Sčítání, odčítání a dělení ošetříme následovně:

- $f + g = \log(\exp \circ f \times \exp \circ g)$,
- pro $g \neq 0$ pišme $\frac{f}{g} = fg\frac{1}{g^2} = fg \exp((-1)\log(g^2))$,
- a konečně $f - g = \log(\frac{\exp \circ f}{\exp \circ g})$.

□

Značení.

- $\mathbb{Q}_\mathbb{R} := \mathrm{Arit}(\{Id_\mathbb{R}\})$ (racionální funkce)
- $\mathbb{K}_\mathbb{R} := \mathrm{Arit}(\{Id_\mathbb{R}, \exp, \log\})$

Poznámka. Uvědomme si, že přes svou jednoduchou strukturu (popsanou předchozími lemmaty) obsahují tyto aritmetické uzávěry bohaté spektrum funkcí, třeba i s obecnými mocninami a to i funkcí – tedy funkce typu: $a(x)^{b(x)}$.

Za „elementární funkce“ se jinak obecně považují většinou funkce z $\mathrm{Arit}(\{Id_\mathbb{R}, \exp, \log, \sin, \cos, \arcsin, \arccos, \mathrm{arctg}\})$.

2. Věty o monotonii

Definice. *Funkci nazveme monotonickou, pokud existuje $x_0 \in \mathbb{R}$, že je funkce na $(x_0, +\infty)$ monotónní.*

Poznámka. To je tedy ona vlastnost, která nás u různých typů (třeba $\mathbb{K}_{\mathbb{R}}$) elementárních funkcí zejména zajímá.

Pokud bychom žádali monotonii f na intervalu typu $(-\infty, x_1)$, vyšetříme monotonicitu $f(-x)$.

2.1 Využití meromorfního rozšíření

Definice. *Existuje-li pro funkci $(f, D(f))$ bod $x_0 \in \mathbb{R}$ že $(x_0, +\infty) \subset D(f)$, nazveme jejím meromorfním rozšířením u nekonečna komplexní funkci meromorfní na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{S}$ (Riemannovy sféry), $+\infty \in \Omega$, která je na $\Omega \cap (x_0, +\infty)$ rovna f.*

Lemma 5. *Je-li F meromorfní rozšíření f u nekonečna, je F' meromorfní rozšíření f' tamtéž.*

Důkaz. Z komplexní analýzy víme [2, v. 10.2.6, str. 296], že F' je meromorfní všude tam kde F (tedy i na okolí Ω nekonečna), navíc z pohledu Cauchy-Riemannovy věty [1, v. 11.2, str. 258] ($\frac{\partial}{\partial Re}$ značí parciální derivaci podle reálné složky) platí

$$F'(x) = \frac{\partial ReF(x)}{\partial Re} + \frac{\partial ImF(x)}{\partial Re} \ ,$$

jenže imaginární složka F je na $\Omega \cap (x_0, +\infty)$ díky rovnosti s f nulová, takže $F'(x) = f'(x)$ na $(x_0, +\infty)$, což jsme potřebovali. $\square$

Věta 1. *Má-li funkce f u nekonečna meromorfní rozšíření F, je na okolí nekonečna monotónní.*

Důkaz. Protože je F na okolí $\mathcal{B}$ nekonečna meromorfní, má tam derivaci která je také meromorfní. (Obě budou mít pól nejvýše jen v ∞, neboť jejich póly nemají hromadné body a $\mathcal{B}$ jsme mohli vzít dost malé.)

F' je tedy na $\mathcal{B}$ buďto nulová, nebo nemá v ∞ hromadný bod nulových bodů – z výše uvedeného lemmatu toto platí i pro f' na okolí $+\infty$. V prvním případě je monotonie zřejmá (f konstantní), ve druhém použijeme, že je f' na okolí $+\infty$ spojitá, proto je na nějakém okolí buďto ryze kladná, nebo ryze záporná, z čehož plyne monotonie pro f. $\square$

Důsledek 1. *Všechny $\mathbb{Q}_{\mathbb{R}}$ (tedy racionální) funkce jsou monotónní na okolí $+\infty$.*

Poznámka. Nyní je nasnadě předchozí poměrně silný výsledek využít k dokázání monotoničnosti co největších tříd funkcí. Jaké elementární funkce jsou meromorfně rozšiřitelné?

Značení. Kromě dvojice (f, D(f)) zavedené v první kapitole ještě označíme $[f, M]$ soubor všech funkcí s definičními obory takovými, že jejich uzávěry v $\mathbb{R}^*$ (reálná osa rozšížená o $\pm\infty$) leží ve vnitřku M.

Příklad. $Arit([\log, (0, +\infty)])$ je tedy aritmetický uzávěr se všemi funkcemi $(\log, M)$, kde M je omezená množina s infimem kladným.

Lemma 6. *Mají-li funkce f, g meromorfní rozšíření u nekonečna, mají ho i funkce $f + g$, $f - g$, fg a $\frac{f}{g}$, pokud jsou na okolí $+\infty$ definovány.*

Důkaz. V případě dělení musí být podíl na okolí nekonečna definován, takže g je tam nenulová, její meromorfní rozšíření není tudíž konstantní nula. Stejnou operaci, jakou provádíme s funkcemi f, g tedy provedeme i s jejich mermorfními rozšířeními, čímž dostaneme opět funkci meromorfní na okolí nekonečna [2, strany 291-296], jejíž zúžení na $\mathbb{R}^+$ nemůže být nic jiného, než požadovaná funkce. Nalezli jsme tedy očekávané meromorfní rozšíření. □

Věta 2. *Všechny funkce z $Arit(\{(Id_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}), [\exp, \mathbb{R}], [\log, (0, +\infty)], [\sin, \mathbb{R}], [\cos, \mathbb{R}], [\mathrm{arctg}, \mathbb{R}], [\arcsin, (-1, 1)], [\arccos, (-1, 1)]\ \})$, které jsou definovány na okolí $+\infty$, jsou monotonické.*

Důkaz. Potřebujeme, aby každá taková funkce měla u $+\infty$ meromorfní rozšíření. Konstatntní funkce a identita ho zřejmě mají. Dále součet, rozdíl, součin a podíl meromorfní rozšiřitelnost zachovává podle lemmatu 6.

Složení s funkcemi uvedenými uvnitř aritmetického obalu ve znění věty meromorfní rozšiřitelnost nepokazí, neboť jsou na uzavřených nadmnožinách povolených definičních oborů meromorfní (dokonce holomorfní). Už dokázané nám díky lemmatu 2 stačí na pokrytí celého výše uvedeného aritmetického uzávěru, takže je důkaz hotov. □

Důsledek 2. *Do aritmetického uzávěru v předchozí větě můžeme ještě přidat funkci* $(\mathrm{abs}, \mathbb{R})$ *(*abs *je funkce absolutní hodnoty $x \mapsto |x|$) a závěr věty bude stále platný.*

Důkaz. Stačí ukázat, že když má meromorfní rozšíření f, má ho i $|f|$. Podle věty 1 je f monotonická, takže na okolí $+\infty$ nestřídá znaménka, BÚNO je tedy například od bodu x_0 výše nekladná. Pak stačí předepsat znaménko mínus a máme meromorfní rozšíření pro $|f|$ na $(x_0, +\infty)$. □

Poznámka. Ověřování zdánlivě komlikovaných definičních oborů není nijak složité a snadno ho provedeme například při vyšetřování definičního oboru dané funkce (jde o činnosti podobného rázu), takže se pro účel nastíněný v úvodu dobře hodí.

Příklad. Ukažme si příklady:

$$\left|\sin\left(\frac{1}{|x|}\right)\right| + \cos\left(\frac{x^2 + x + 1}{\pi x^2 + 6}\right)^{\exp\left(\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right)} \log(\sin(\cos\left(\frac{1}{1+x}\right)))$$

Ani takhle „divoký“ vzorec nevybočuje z předepsané třídy, jen poznamenejme, že mocnění je potřeba přepsat na aplikaci exp a log známým způsobem.

$$\exp(x) - x\log(x)$$

Toto je jednoduchý a očividně monotónní příklad, o němž však předchozí věta nic neříká (a ani není meromorfní u $+\infty$).

Poznámka. V tomto okamžiku máme pro velkou třídu funkcí už dokázanou monotoničnost. Co nám zejména chybí, je monotoničnost funkcí obsahujících ve vzorci funkce s definičními obory:

- exponenciálu u $\pm\infty$,
- logaritmus, a tím pádem i odmocniny u nuly i u nekonečna.

2.2 Monotoničnost podmíněná uzavřeností na operace

Lemma 7. *Je-li f funkce monotónní na intervalu I a g monotónní na $f(I)$, je i $g \circ f$ monotónní na I.*

Důkaz. Zřejmé. □

Lemma 8. *Monotonická funkce má v $+\infty$ limitu (konečnou nebo nekonečnou).*

Důkaz. Když nemá onu limitu nekonečnou, je na okolí $+\infty$ omezená a monotónní, z čehož plyne existence konečné limity. □

Definice. *Konečně zalomenou funkcí nazveme takovou funkci, jejíž definiční obor se dá rozdělit na konečně mnoho intervalů takových, že je funkce na každém z nich monotónní.*

Lemma 9. *Je-li f monotonická a g konečně zalomená, je $g \circ f$ monotonická.*

Důkaz. Je-li limita f $\pm\infty$ nebo leží-li uvnitř některého z intervalů monotonie g, jsou pro velká x hodnoty $f(x)$ už jen v tomto intervalu, takže dostáváme skládání dvou monotónních funkcí. Je-li limita f na hranici dvou takových intervalů, plyne z monotónní konvergence f, že její hodnoty na okolí $+\infty$ jsou buďto větší, nebo menší než ona limita, takže opět f na okolí nekonečna neopustí jeden interval monotonie g, pročež jde na tom okolí opět o složení monotónních funkcí. □

Lemma 10. *Funkce je monotonická, právě když je monotonická její absolutní hodnota.*

Důkaz. $\Rightarrow$: je-li funkce monotonická, je od určitého bodu buď nekladná nebo nezáporná, tedy je na okolí $+\infty$ rovna buď své absolutní hodnotě, nebo funkci k ní opačné, která je tudíž monotonická, z čehož plyne požadované. Alternativně, můžeme použít lemma 9 pro $g(x) = |x|$.

$\Leftarrow$: pomineme-li triviální případ s funkcí na okolí $+\infty$ nulovou, musí být $|f|$ od jistého bodu nenulová, takže je tam všude rovna f nebo $-f$ (a tyto případy se nestřídají), z čehož plyne dědění monotonie. □

Poznámka. Následující dvě tvrzení dávají silný výsledek (který by nám stačil), ale pouze za splnění (alespoň jednoho ze dvou) předpokladů, o nichž nic dále netvrdíme.

Věta 3. *Platí-li pro nějakou množinu $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \supset \{Id_{\mathbb{R}}, \exp, \log\}$ konenčně zalomených funkcí, že součet každých dvou monotonických funkcí z $Arit(\mathcal{M})$ je zase funkce monotonická, jsou monotonické všechny funkce z $Arit(\mathcal{M})$, které jsou definované na okolí $+\infty$.*

Důkaz. Použijeme-li lemma 3, monotoničnost konstant a identity je zřejmá, stačí nám zachovávání monotoničnosti při:

- sčítání – z předpokladu,
- násobení (-1), složení s funkcemi z $\mathcal{M}$ – z lemmatu 9,
- aplikaci absolutní hodnoty – z lemmatu 10.

$\square$

Věta 4. *Platí-li pro nějakou množinu $\mathcal{M} \supset \{Id_{\mathbb{R}}, \exp, \log\}$ konečně zalomených funkcí, že součin každých dvou monotonických funkcí z $Arit(\mathcal{M})$ je zase funkce monotonická, jsou monotonické všechny funkce z $Arit(\mathcal{M})$, které jsou definované na okolí $+\infty$.*

Důkaz. Tentokrát použijeme lemma 4, monotoničnost konstant a identity je zřejmá, stačí nám zachovávání monotoničnosti při:

- násobení – z předpokladu,
- složení s funkcemi z $\mathcal{M}$ – z lemmatu 9.

$\square$

Poznámka. Za ony konečně zalomené funkce v předchozích větách můžeme brát funkce abs (tj. $x \mapsto |x|$), arctg, arcsin, arccos a navíc i sin a cos, ale ty jen s omezenými definičními obory.

Poznámka. Nyní je načase ptát se, jaké typy monotonických funkcí si zachovávají vlastnosti při sčítání. Platí třeba, že součet dvou monotonických funkcí je zase funkce monotonická? Nikoliv, součtem $2x + \sin(x)$ s funkcí $-2x$ dostaneme nemonotonický sinus.

Můžeme ale například požadovat monotonii derivací, a to do určitého řádu (dejme tomu druhých derivací) a nebo i všech. Bude v tomto případě součet monotonický?

Příklad. ($\mathcal{C}^\infty$ ultramonotónní protipříklad) Existují funkce $f, g \in \mathcal{C}^\infty((0, +\infty))$, které jsou na tomto intervalu monotónní a nenulové i se všemi svými derivacemi, ale jejich součet není monotónní na žádném okolí $+\infty$. Definujeme

$$f(x) := e^{2x} + \sin x,\ g(x) := -e^{2x}$$

a ověříme že mají uvedené vlastnosti.

Poznámka. Sinus v předchozím příkladu můžeme považovat za „ošklivý“, a tak teď zabrousíme čistě do $\mathbb{K}_{\mathbb{R}}$. Co kdyby systém těch funkcí z $\mathbb{K}_{\mathbb{R}}$, které mají od určitého bodu všechny derivace monotónní, byl uzavřený na sčítání?

Příklad. ($\mathbb{K}_{\mathbb{R}}$ funkce a stejnoměrná monotonie derivací) Existují funkce $f, g \in \mathbb{K}_{\mathbb{R}}$, které jsou na intervalu $(0, +\infty)$ monotónní i se všemi svými derivacemi, ale pro každé $K \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ a $x_0 > K$, že $(f+g)^{(n)}$ mění znaménko v x_0 (a tedy $(f+g)^{(n-1)}$ tam mění směr monotonie).

Položme

$$f(x) := e^{-x},\ g(x) := \log x.$$

Platí

$$(f+g)^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n} + (-1)^n e^{-x} = (-1)^n (e^{-x} - \frac{(n-1)!}{x^n}) \ ,$$

a pro velká n také

$$n! \leq K\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n ; K > 1 \ ,$$

vezmeme-li za K hodnotu $\sqrt{\frac{7}{2\pi}}$ máme

$$n! \leq \sqrt{7n}\left(\frac{n}{e}\right)^n = \sqrt{\frac{7}{n}}\frac{n^{n+1}}{e^n} \leq \frac{n^{n+1}}{e^n}$$

a nakonec dosadíme-li za x číslo n, dostaneme

$$(-1)^n (f+g)^{(n)}(n) = e^{-n} - \frac{(n-1)!}{n^n} = e^{-n} - \frac{n!}{n^{n+1}} \geq e^{-n} - \frac{\frac{n^{n+1}}{e^n}}{n^{n+1}} = 0 \ ,$$

jenže pro dost velká x je zřejmě $e^{-x} \leq \frac{(n-1)!}{x^n}$, takže funkce $(-1)^n(f+g)^{(n)}$ a potažmo i $(f+g)^{(n)}$ musí změnit znaménko někde v bodě větším než n, a tedy stačí brát libovolně $n > K$.

2.3 Taylorovy řady

Věta 5. *Je-li funkce f na okolí $+\infty$ rovna mocninné řadě s koeficienty a_n, které jsou až na konečně mnoho kladné (nebo záporné), je f na okolí $+\infty$ monotónní.*

Důkaz. Při derivování mocninné řady se znaménka koeficientů nemění (přesněji, n-tý koeficient Taylorova rozvoje f' má stejné znaménko jako $(n+1)$-ní koeficient u f), takže f' má také všechny koeficienty své mocninné řady, až na konečně mnoho, (BÚNO) kladné. Nechť je tedy nejvyšší člen řady se záporným koeficientem N-tý. Pak

$$f'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-x_0)^i > \sum_{i=0}^{N+1} a_i (x-x_0)^i$$

(rovnost na okolí $+\infty$ vyplývá z věty o derivování mocninné řady). Posledním výrazem je polynom s nejvyšším koeficientem kladným, tedy pro $x \to +\infty$ jde k $+\infty$, což musí platit i pro f', kterážto je tím pádem na okolí $+\infty$ kladná což dává monotonii pro f. $\square$

Příklad. (Protipříklad na opačnou implikaci) Funkce $\exp(x^2) - \exp(x)$ je na $[1, +\infty)$ rostoucí (derivace $2x\exp(x^2) - \exp(x)$), ale tato funkce je rovna svému Taylorovu rozvoji v 0, jehož sudé koeficienty jsou evidentně kladné (k-tý je roven $\left(\frac{k}{2}\right)!^{-1} - k!^{-1}$) a liché záporné (podílí se na nich jen funkce $-\exp(x)$).

2.4 Vlastnosti derivace

Tvrzení 1. *Existuje-li nenulová (může být i $\pm\infty$)*

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) \ ,$$

je f monotonická.

Důkaz. Z existence uvedené limity plyne, že od určitého x_0 budou hodnoty derivace buďto stále kladné, nebo záporné, což implikuje monotonii pro f. □

Tvrzení 2. *Je-li f na intervalu I třídy C^∞ (stačí C^1), a označíme-li počet nulových bodů funkce g na intervalu J jako $\mathcal{N}_J(g)$, platí*

$$\mathcal{N}_I(f') \geq \mathcal{N}_I(f) - 1 \ .$$

Důkaz. Jde o jednoduchý důsledek Rolleovy věty o střední hodnotě, mezi každými dvěma nulovými body f totiž musí ležet minimálně jeden nulový bod f'. □

Poznámka. Zajímavý by byl opačný odhad pro jisté třídy funkcí. Konečný počet nulových bodů (existující spojité) derivace totiž ihned dává monotonii u $+\infty$, a ten by mohl plynout z takového odhadu u každé funkce jež má sama o sobě konečně mnoho nulových bodů (což je jinak (vyjma konstantní nuly) jen nutná podmínka takové monotonie). Přesněji o tom hovoří následující věta.

Příklad. Protipříkladem na obecnou existenci takového odhadu mohou být částečné součty Taylorova rozvoje funkce $f(x) = sin(x) + 10$ (to jsou samozřejmě polynomy), které budou mít po jednom nulovém bodě, ale neomezený počet lokálních extrémů (i když pokaždé konečný).

Další věta dává stejný závěr jako věty 3 a 4, ale klade si ještě jiný předpoklad založený na vlastnosti derivace.

Věta 6. *Platí-li pro nějakou množinu $\mathcal{M} \supset \{Id_{\mathbb{R}}, \exp, \log\}$ konečně zalomených funkcí tvrzení:*

„Má-li funkce z $Arit(\mathcal{M})$ konečný počet nulových bodů a je nekonstatntní, pak její derivace rovněž má počet nulových bodů konečný.“

pak jsou všechny funkce z $Arit(\mathcal{M})$, definované na okolí $+\infty$, monotonické.

Důkaz. Použijeme lemma 4 a ověříme (identita i konstanty jsou monotonické):

- aplikace funkce z $Arit(\mathcal{M})$ i násobení konstantou monotoničnost nezkazí podle lemmatu 9,
- nekonstantní monotonická funkce má omezený počet nulových bodů, pročež toto platí i pro součin dvou takových (množiny nulových bodů obou činitelů se sjednotí) a z předpokladu máme monotoničnost i pro součin.

□

Poznámka. Tvrzení, jehož platnost je předpokladem v předchozí větě, se dá také ekvivalentně vyjádřit takto: „Má-li funkce z $Arit(\mathcal{M})$ konečný počet nulových bodů, pak je monotonická.“

Ještě dodejme, že kdyby tedy například platilo, že počet nulových bodů derivace (nekonstantní funkce) je nejvýše k-násobkem jejich počtu u původní funkce z $Arit(\mathcal{M})$ (zvýšeného o 1), kde k je počet výskytů x-u v jejím vzorci, dostaneme monotoničnost všech takových funkcí.

2.5 Funkce s odmocninami

Definice. *Důsledková úprava rovnice je operace, která přemění tuto rovnici na novou, jejíž množina řešení je nadmnožinou řešení té původní.*

Příklad. Všechny běžně nazývané ekvivalentní úpravy zachovávají množinu kořenů, a tedy jsou i důsledkové, jako například přičtení stejného výrazu k oběma stranám. Dalšími důsledkovými úpravami jsou vynásobení obou stran rovnice libovolným výrazem, který má smysl v bodech řešení původní rovnice (nebo obecněji ale častěji, který má smysl všude tam kde mají smysl výrazy v původní rovnici), nebo umocnění obou stran rovnice na stejný (konstantní) exponent.

Lemma 11. *Každá rovnice více proměnných, ve které se využívají jen operace sčítání, odčítání, násobení a dělení, se dá převést konečným počtem důsledkových úprav na rovnici, kde na levé straně je polynom více proměnných (těch samých) a na pravé straně nula.*

Důkaz. Důkaz je konstruktivní a přímočarý.

Nejprve si uvědomíme, že se kdykoliv můžeme ve výrazech zbavit složených zlomků jejich rozšířením vhodným jmenovatelem (jenž je nenulový všude tam kde měl původní výraz smysl). Dále všechny součty uzavřené v součinech roznásobíme, a operace součinu a podílu můžeme zaměnit.

Tak dostaneme v rovnici pouze výrazy typu „součet zlomků, jejichž čitatelem a jmenovatelem jsou zase součty zlomků…“ a takové zanořování nejde samozřejmě donekonečna, takže nechť jsou do sebe zlomky nejvýše k-krát zanořené. Celou rovnici nyní vynásobíme součinem všech jmenovatelů zlomků, které nejsou zanořené v dalších zlomcích (což je zřejmě důsledková úprava) a tím se zbavíme nezanořených zlomků a ty m-krát zanořené budou nyní zanořené $(m-1)$-krát.

Tímto způsobem v konečném počtu kroků dostaneme výrazy bez zlomků, ze kterých opět roznásobením všech součtů v součinech dostaneme jen výrazy typu „součet součinů“, což jsou ale polynomy našich proměnných. Stačí od obou stran rovnice odečíst tu vpravo a máme rovnici v požadovaném tvaru. □

Poznámka. Poznamenejme, že polynom více proměnných, budeme-li se na něj dívat z pohledu jedné vybrané proměnné, je polynom této proměnné, jehož koeficienty závisejí jen na těch ostatních proměnných, a to navíc jen ve formě výrazů s operátory „$+ - \times /$“.

Lemma 12. *Rovnici jedné proměnné (x), kde se mohou vyskytovat jen operace „$+ - \times /$“ a druhá odmocnina, lze převést konečným počtem důsledkových úprav na rovnici „polynom$(x) = 0$“, kde polynom je také jedné proměnné.*

Důkaz. Důkaz je konstruktivní.

Nejprve se budeme zabývat odstraněním odmocnin, které jsou volné, tedy nejsou zahnízděné (ve vzorci) v jiných odmocninách. Tuto operaci budeme provádět iterativně a nazveme ji nadkrok. V první fázi si všechny takové odmocniny označíme $a_1 ... a_{k_1}$ jako proměnné. Je-li tam více stejných (například, kdy se ve vzorci na různých místech objeví $\sqrt{\frac{x}{x+1}}$), označíme je stejným písmenem. V takovém tvaru můžeme na rovnici použít lemma 11. Navíc si označíme odmocniny, které jsou v těchto už označených odmocninách vnořené (ale jen ty přímo vnořené, ne ty v „hloubce“ 3 a více) jako $b_1 ... b_{k_2}$. V jednotlivých krocích se budeme zbavovat proměnných $a_1 ... a_{k_1}$. Pro ujasnění dodejme, že nadále půjde o rovnici $1 + k_1 + k_2$ proměnných, přičemž na začátku bude rovnice záviset jen na $a_1 ... a_{k_1}$ a x, na koneci chceme, aby závisela jen na $b_1 ... b_{k_2}$ a x.

V každém kroku si pak vybereme jednu z proměnných, kterých se chceme zbavit (třeba a_m), a zachováme se dle poznámky pod lemmatem 11, dostaneme tedy polynom v proměnné a_m, jehož koeficienty závisejí na ostatních proměnných, pokud jsme je neeliminovali v předchozích krocích. Dále v členech polynomu, kde je mocnina a_m vyšší než 1, rozložíme tuto mocninu na součin druhých mocnin a_m a případně jedné první mocniny a_m. Druhé mocniny odmocniny pak nahradíme jejich obsahem (závislým obecně pouze na proměnných $b_1 ... b_{k_2}$ a x), čímž je eliminujeme. Uvědomíme si přitom, že toto umocnění může pouze přidat kořeny: pro vnitřek odmocniny nezáporný zůstává rovnice stejná, a pro záporný dříve neměla smysl.

Tak dostáváme vlastně jen polynom prvního stupně v a_m (pokud už a_m nebylo zeliminováno, v tom případě následující úpravu přeskočíme), kde násobek a_m napíšeme na jednu stranu rovnice a na druhé už bude výraz na a_m nezávislý, a ve finále rovnici umocníme na druhou – čímž opět můžeme kořeny jen přidat, a tím jsme odmocninu označenou a_m zeliminovali (její druhou mocninu jsme opět nahradili jejím obsahem).

Tím jsme udělali jeden krok. Po konečně mnoha krocích se tak zbavíme všech odmocnin, které nebyly zanořené v jiných odmocninách (tedy proměnných $a_1 ... a_{k_1}$) – tím uděláme jeden nadkrok, a po konečném počtu nadkroků se tak zbavíme úplně všech odmocnin ve vzorci, který pak podle výše uvedeného lemmatu aplikovaného na jednu proměnnou upravíme na požadovaný tvar. □

Věta 7. *Všechny funkce z* $Arit(\{(Id_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}), (\mathrm{sqrt}, [0, +\infty))\})$*, definované na okolí* $+\infty$*, jsou monotonické.*

Důkaz. Nejprve si ukažme, že funkce této třídy mají počet nulových bodů vždy konečný. Rovnice $f(x) = 0$ pro takové funkce jsou totiž rovnice z výše uvedeného lemmatu, které mají vždy nejvýše tolik kořenů, jako nějaká rovnice „$polynom(x) = 0$“, a to je konečně mnoho.

Projděme si dále pravidla pro derivování výrazů s operacemi sčítání, odčítání, násobení, dělení a druhé odmocniny. Pro všechny jmenovatele nenulové (což na okolí $+\infty$ jsou z předpokladu věty) a všechny vnitřky odmocnin nezáporné (opět předpoklad definovanosti) a nenulové (jsou to výrazy stejného typu mající konečný počet nulových bodů) jde o výraz stejného typu a je to spojitá funkce.

Tudíž má tato derivace na okolí $+\infty$ konečný počet nulových bodů (tedy na menším okolí žádné), a z její spojitosti obdržíme ryzí kladnost či zápornost, což implikuje monotonii původní funkce. □

Příklad. Například funkce

$$x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{\frac{5\pi}{x+10}}}$$

je monotonická.

Závěr

Nedokázali jsme monotoničnost celé třídy $\mathbb{K}_{\mathbb{R}}$, ale pro velké třídy funkcí (a to i mimo $\mathbb{K}_{\mathbb{R}}$) jsme dokázali monotoničnost buď bezpodmínečnou, a nebo za nějakých předpokladů. Shrňme nejdůležitější výsledky, u jakých funkcích máme monotoničnost dokázánu:

- funkce dané vzorci obsahujícími exp, log, sin, cos a další funkce, ovšem s omezením na jejich definiční obory,
- mocninným řadám s koeficienty všemi kladnými (až na konečně mnoho)
- aritmetických uzávěrů identity, exponenciály, logaritmu a dalších konečně zalomených funkcí, ale pouze s předpokladem platnosti jistého tvrzení (tři možnosti):
  - že se monotonicita v takové třídě zachovává při sčítání
  - to samé pro násobení
  - že v takové třídě je funkce s konečně mnoha nulovými body monotonická,

  o němž nic neříkáme,
- funkcí daných vzorci bez exp a log, ale s druhou odmocninou.

Seznam použité literatury

[1] RUDIN, Walter. *Analýza v reálném a komplexním oboru.* 2. přepracované vydání. Přeložili Ivan Netuka a Jiří Veselý. Praha : Academia, 2003.

[2] ČERNÝ, Ilja. *Analýza v komplexním oboru.* 1. vydání. Praha : Academia, 2003.