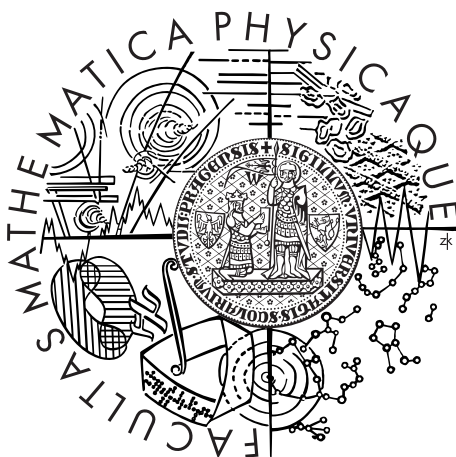


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Petra Monhartová

Numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic

Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Miloslav Feistauer, DrSc.

Studijní program: matematika

Studijní obor: obecná matematika

Praha 2011

Na tomto místě bych chtěla poděkovat především svému vedoucí bakalářské práce panu Prof. RNDr. Miloslav Feistauer, DrSc., že mi pomáhal s odstraněním všech nedostatků a radil mi při tvorbě této práce. Také bych ráda poděkovala své rodině a přátelům, že mě podporovali ve studiu.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic

Autor: Petra Monhartová

Katedra: Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Miloslav Feistauer, DrSc., Katedra numerické matematiky

Abstrakt: V předložené práci studujeme numerické metody pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic s počátečními podmínkami. Pomocí Taylorova vzorce odvodíme některé jednokrokové numerické metody. Srovnáme numerická řešení vypočítaná pomocí explicitní Eulerovy metody a implicitní Eulerovy metody. Budeme se zabývat Rungeovo-Kuttovými metodami 2. a 4. řádu. Zjistíme, jak přesně řešení získané pomocí těchto metod aproximuje přesné řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Dále studujeme odhady chyby těchto numerických řešení obyčejných diferenciálních rovnic pomocí metody polovičního kroku.

Klíčová slova: obyčejné diferenciální rovnice, jednokrokové metody, odhad chyby, numerické experimenty

Title: Numerical solution of ordinary differential equations

Author: Petra Monhartová

Department: Department of Numerical Mathematics

Supervisor: Prof. RNDr. Miloslav Feistauer, DrSc., Department of Numerical Mathematics

Abstract: In the present work we study numerical methods for the numerical solution of initial value problems for ordinary differential equations. With the aid of the Taylor formula we derive several one-step methods. We compare numerical solution computed with explicit and implicit Euler methods. Moreover, we are concerned with second-order and fourth-order Runge-Kutta methods. We find how accurately the numerical methods obtained with the aid of these methods approximate the exact solution. Further we estimate the error of these method by the half-step method.

Keywords: ordinary differential equations, one-step methods, error estimates, numerical experiments

Obsah

Úvod	2
1 Obyčejné diferenciální rovnice	3
2 Existence a jednoznačnost řešení ODR	6
3 Numerické řešení ODR jednokrokovými metodami	9
3.1 Definice jednokrokových metod	9
3.2 Metody založené na přímém použití Taylorova vzorce	10
3.2.1 Eulerovy metody	10
3.2.2 Jednokroková metoda libovolně vysokého řádu	11
3.3 Rungeovy-Kuttovy metody	12
3.3.1 Rungeova-Kuttova metoda 2. řádu	13
3.3.2 Rungeova-Kuttova metoda 3. řádu	15
3.3.3 Rungeova-Kuttova metoda 4. řádu	15
3.4 Odhad chyby jednokrokových metod	15
3.4.1 Akumulovaná diskretizační chyba	16
3.4.2 Odhad chyby metodou polovičního kroku	18
3.4.3 Zaokrouhlovací chyby u jednokrokových metod	19
4 Příklady	21
4.1 Příklad řešení jedné diferenciální rovnice	21
4.2 Příklad řešení soustavy dvou diferenciálních rovnic	25
4.3 Keplerův problém	36
Závěr	45
Literatura	46
Seznam použitých zkratk	47

Úvod

Diferenciálními rovnicemi se zabývají lidé už dlouho. Jsou tak staré jako diferenciální kalkulus. Pomocí diferenciálních rovnic lze popsat celou řadu zákonitostí, které se objevují v přírodních i společenských vědách. Základní poznatky a dovednosti z oblasti diferenciálních rovnic jsou využívány v přírodních vědách, inženýrství, ekonomii i sociologii. Bez diferenciálních rovnic by nebylo možné provádět různé výpočty související s pružností a pevností materiálu, s řízením složitých jaderných reakcí, s lety do vesmíru apod.

Řešeními diferenciálních rovnic jsou funkce, které popisují vlastnosti zkoumaných jevů. Budeme-li umět řešit diferenciální rovnice, znamená to, že budeme umět lépe rozumět okolnímu světu, řídit různé technologické i společenské procesy. V mnoha případech lze přesné řešení obyčejných diferenciálních rovnic jen těžko nalézt, budeme se tedy zabývat jejich numerickým řešením. Nalezením přibližného řešení diferenciální rovnice se zabýval již Newton ve svém pojednání o diferenciálním kalkulu.

Jeden z prvních příkladů obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu zpracovaný Newtonem byl

$$y' = 1 - 3x + y + x^2 + xy.$$

Newton diskutoval řešení této rovnice prostřednictvím nekonečné řady, jejíž podmínky získal rekurzivně.

My se budeme snažit nalézt numerické řešení diferenciální rovnice pomocí explicitní a implicitní Eulerovy metody a dále pomocí Rungeovy-Kuttovy metody 2. a 4. řádu.

1. Obyčejné diferenciální rovnice

Obyčejné diferenciální rovnice se dají definovat několika různými způsoby. Pro naše účely použijeme následující formulaci.

Definice 1. *Soustavou obyčejných diferenciálních rovnic rozumíme rovnice tvaru:*

$$y' = f(x, y), \quad (1.1)$$

kde $m \in \mathbb{N}$, $y = (y^1, \dots, y^m)$, $y' = ((y^1)', \dots, (y^m)')$ a $f = (f^1, \dots, f^m)$ jsou vektorové funkce.

Definice 2. *Řešení soustavy (1.1) definujeme jako vektorovou funkci $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je interval, která splňuje následující podmínky:*

1. Pro každé $x \in I$ je $(x, y(x))$ prvek definičního oboru (def f) funkce f .
2. Pro každé $x \in I$ existuje $y'(x)$.
3. $y'(x) = f(x, y(x)) \quad \forall x \in I$.

Rovnice (1.1) je diferenciální rovnice prvního řádu rozřešená vzhledem k derivaci.

Pokud $m = 1$ dostaneme jednu (skalární) obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu.

Definice 3. *Soustavou obyčejných diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou rozumíme soustavu (1.1) obohacenou o počáteční podmínky*

$$y(a) = \eta, \quad (1.2)$$

kde $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^m) \in \mathbb{R}^m$ je zadané.

Definice 4. *Nechť $(a, \eta) \in \text{def } f$. Řešení úlohy (1.1)-(1.2) definujeme jako funkci $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ splňující podmínky 1.-3. z definice 2 a podmínku (1.2).*

Rozepsáním po složkách z (1.1) dostaneme:

$$\begin{aligned} (y^1)' &= f^1(x, y^1, \dots, y^m), \\ (y^2)' &= f^2(x, y^1, \dots, y^m), \\ &\vdots \\ (y^m)' &= f^m(x, y^1, \dots, y^m). \end{aligned}$$

Podobně z (1.2) dostaneme:

$$\begin{aligned} y^1(a) &= \eta^1, \\ y^2(a) &= \eta^2, \\ &\vdots, \\ y^m(a) &= \eta^m. \end{aligned}$$

Příklad 1. Příkladem soustavy diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou je následující problém najít funkce y^1, \dots, y^4 splňující rovnice

$$\begin{aligned}(y^1)' &= y^3, \\(y^2)' &= y^4, \\(y^3)' &= -\frac{y^1}{((y^1)^2 + (y^2)^2)^{3/2}}, \\(y^4)' &= -\frac{y^1}{((y^1)^2 + (y^2)^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

s počátečními podmínkami

$$\begin{aligned}y^1(0) &= 1, \\y^2(0) &= 0, \\y^3(0) &= 0, \\y^4(0) &= 1.\end{aligned}$$

K tomuto příkladu se vrátíme později a ukážeme na něm aplikaci numerických metod pro řešení soustav diferenciálních rovnic.

V dalším textu budeme někdy používat zkratku ODR pro obyčejné diferenciální rovnice.

Budeme se zabývat pouze řešením diferenciálních rovnic prvního řádu, neboť každou diferenciální rovnici vyššího řádu lze jednoduše převést na soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu.

Diferenciální rovnici tvaru

$$y^{(n)} = \varphi(x, y, \dots, y^{(n-1)}) \tag{1.3}$$

můžeme převést na soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu, provedeme-li následující substituci:

$$\begin{aligned}y_1 &= y, \\y_2 &= y', \\&\vdots \\y_n &= y^{(n-1)}.\end{aligned} \tag{1.4}$$

Dosazením do rovnice (1.3) dostaneme

$$y^{(n)} = \varphi(x, y_1, \dots, y_n). \tag{1.5}$$

Dále víme, že platí:

$$\begin{aligned}(y_1)' &= (y)' = y' = y_2, \\(y_2)' &= (y')' = y'' = y_3, \\&\vdots \\(y_n)' &= (y^{(n-1)})' = y^{(n)} = \varphi(x, y_1, \dots, y_n).\end{aligned}$$

Soustava diferenciálních rovnic prvního řádu pro rovnici (1.3) má tedy tvar

$$\begin{aligned}y_1' &= y_2, \\y_2' &= y_3, \\&\vdots \\y_n' &= \varphi(x, y_1, \dots, y_n).\end{aligned}\tag{1.6}$$

Příklad 2. *Soustavu dvou diferenciálních rovnic druhého řádu*

$$\begin{aligned}y_1'' &= \frac{-\gamma M y_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{3}{2}}}, \\y_2'' &= \frac{-\gamma M y_2}{(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}\tag{1.7}$$

převédeme na soustavu čtyř diferenciálních rovnic prvního řádu. Položíme $y_3 = (y_1)'$ a $y_4 = (y_2)'$ a dostaneme

$$\begin{aligned}y_1' &= y_3, \\y_2' &= y_4, \\y_3' &= \frac{-\gamma M y_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{3}{2}}}, \\y_4' &= \frac{-\gamma M y_2}{(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}\tag{1.8}$$

2. Existence a jednoznačnost řešení ODR

V této části dokážeme, že za určitých předpokladů existuje jednoznačně definované řešení úlohy (1.1)-(1.2).

Nejprve zavedeme některé pojmy, které budeme potřebovat.

V dalším budeme symbolem $\| \cdot \|$ značit eukleidovskou normu v prostoru \mathbb{R}^m : Pro $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ klademe

$$\| Y \| = \left(\sum_{i=1}^m Y_i^2 \right)^{1/2}$$

Definice 5. Funkce $f : [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = f(x, Y)$, $x \in [a, b]$, $Y \in \mathbb{R}^m$, splňuje Lipschitzovu podmínku vzhledem k druhé proměnné, jestliže existuje konstanta L (nazýváme jí Lipschitzovskou konstantou) taková, že pro každé $x \in [a, b]$ a $Y, Z \in \mathbb{R}^m$ platí $\|f(x, Y) - f(x, Z)\| \leq L\|Y - Z\|$.

Lemma 1. Nechť M označuje úplný metrický prostor s metrikou ρ a nechť $\phi : M \rightarrow M$ označuje zobrazení, které je kontrakce (tzn. že existuje číslo k , splňující $0 \leq k < 1$ takové, že pro každé $\gamma, \zeta \in M$, $\rho(\phi(\gamma), \phi(\zeta)) \leq k\rho(\gamma, \zeta)$). Potom existuje právě jedno $\xi \in M$ takové, že $\phi(\xi) = \xi$.

Důkaz lze najít v [6].

Věta 1. Nechť máme diferenciální rovnice (1.1) s počátečními podmínkami tvaru (1.2):

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y), \\ y(a) &= \eta, \end{aligned} \tag{2.1}$$

kde $f : [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ je spojitá v první proměnné a splňuje Lipschitzovu podmínku s konstantou $L > 0$ vzhledem k druhé proměnné. Potom existuje jednoznačně určené řešení tohoto problému definované v intervalu $[a, b]$.

Důkaz. Nechť M označuje úplný metrický prostor spojitých funkcí $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ takových, že $y(a) = \eta$. Metriku na M definujeme vztahem

$$\rho(y, z) = \sup_{x \in [a, b]} \exp(-K(x-a)) \|y(x) - z(x)\|, \tag{2.2}$$

kde $K > L$.

Integrací rovnice (1.1) přes interval $[a, x]$, kde $x \in [a, b]$, postupně zjistíme, že

$$\begin{aligned} \int_a^x y'(t) dt &= \int_a^x f(t, y(t)) dt, \\ y(x) - y(a) &= \int_a^x f(t, y(t)) dt, \\ y(x) &= \eta + \int_a^x f(t, y(t)) dt. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Tudíž, úloha (2.1) je ekvivalentní s nalezením funkce $y \in M$ splňující (2.3). Abychom dokázali existenci řešení této nové úlohy, zavedeme zobrazení $y \in M \rightarrow \phi(y)$:

$$\phi(y)(x) = \eta + \int_a^x f(t, y(t)) dt. \quad (2.4)$$

Chceme využít předchozího lemmatu 1. Potřebujeme dokázat, že $\phi(y)$ je kontrakce, tzn. že

$$\exists_{k \in (0,1)} \quad \forall_{y,z \in M} \quad \rho(\phi(y), \phi(z)) \leq k\rho(y, z).$$

Z (2.2) a (2.4) plyne, že

$$\begin{aligned} \rho(\phi(y), \phi(z)) &= \sup_{x \in [a,b]} \exp(-K(x-a)) \|\phi(y)(x) - \phi(z)(x)\| \leq \\ &\leq \sup_{x \in [a,b]} \exp(-K(x-a)) \left\| \eta + \int_a^x f(t, y(t)) dt - \eta - \int_a^x f(t, z(t)) dt \right\| \leq \\ &\leq \sup_{x \in [a,b]} \exp(-K(x-a)) \left\| \int_a^x f(t, y(t)) dt - \int_a^x f(t, z(t)) dt \right\| = \\ &= \sup_{x \in [a,b]} \exp(-K(x-a)) \left\| \int_a^x (f(t, y(t)) - f(t, z(t))) dt \right\| \leq \\ &\leq \sup_{x \in [a,b]} \exp(-K(x-a)) \int_a^x \|f(t, y(t)) - f(t, z(t))\| dt. \end{aligned}$$

Z předpokladu věty víme, že funkce f splňuje lipschitzovu podmínku vzhledem k y s konstantou $L > 0$.

Použitím této vlastnosti dostaneme

$$\begin{aligned} \rho(\phi(y), \phi(z)) &\leq \sup_{x \in [a,b]} \exp(-K(x-a)) \int_a^x L \|y(t) - z(t)\| dt = \\ &= L \sup_{x \in [a,b]} \exp(-K(x-a)) \int_a^x \|y(t) - z(t)\| dt = \\ &= L \sup_{x \in [a,b]} \exp(-K(x-a)) \int_a^x \|y(t) - z(t)\| \exp(-K(t-a)) \exp(K(t-a)) dt \leq \\ &\leq L \sup_{x \in [a,b]} \exp(-K(x-a)) \sup_{t \in [a,b]} \exp(-K(t-a)) \|y(t) - z(t)\| \int_a^x \exp(K(t-a)) dt = \\ &= L\rho(y, z) \sup_{x \in [a,b]} \exp(-K(x-a)) \int_a^x \exp(K(t-a)) dt = \\ &= L\rho(y, z) \sup_{x \in [a,b]} \exp(-K(x-a)) \left[\frac{\exp(K(t-a))}{K} \right]_a^x = \\ &= L\rho(y, z) \sup_{x \in [a,b]} \exp(-K(x-a)) \left(\frac{\exp(K(x-a))}{K} - \frac{1}{K} \right) \leq \\ &\leq L\rho(y, z) \sup_{x \in [a,b]} \exp(-K(x-a)) \frac{\exp(K(x-a))}{K} = \\ &= \frac{L}{K} \rho(y, z) \end{aligned}$$

Označíme $k = \frac{L}{K}$. Víme, že $0 < L$ a zároveň $K > L$. Tudíž $0 < k < 1$. Vidíme tedy, že ϕ je kontrakce. Z lemmatu 1 okamžitě plyne existence právě jednoho y takového, že $\phi(y) = y$. Tato funkce je jediným řešením rovnice (2.3) a tudíž úlohy (2.1). \square

3. Numerické řešení ODR jednokrokovými metodami

3.1 Definice jednokrokových metod

Mějme diferenciální rovnici prvního řádu s počáteční podmínkou

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y), & x &\in [a, b] \\y(a) &= \eta\end{aligned}\tag{3.1}$$

Pro jednoduchost uvažujeme pouze jednu skalární rovnici, tzn. že $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Uvažujeme dělení intervalu $[a, b]$ tak, že $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$, $x_n = a + nh$, kde $n \in \mathbb{N}$ a $h > 0$ nazýváme krokem metody. Nechť y_i je aproximace přesného řešení $y(x_i)$ v uzlu x_i .

Definice 6. Numerická metoda pro aproximaci problému (3.1) se nazývá jednokroková, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ se hodnota y_{n+1} vypočítá pouze z předcházející hodnoty y_n (a samozřejmě z x_n a h).

Metoda se nazývá vícekroková, jestliže v rekurentním vyjádření y_{n+1} používáme více předešlých hodnot.

Dále rozlišujeme zda se jedná o metodu explicitní nebo implicitní.

Definice 7. Metoda se nazývá explicitní, jestliže představuje formuli pro přesné vyjádření hodnoty y_{n+1} pomocí předchozích hodnot $y_k, k \leq n$. Metoda se nazývá implicitní, jestliže výpočet y_{n+1} je realizován řešením (lineární nebo nelineární) rovnice.

U implicitních metod většinou nelze hodnotu y_{n+1} vypočítat jednoduchými aritmetickými úpravami, neboť hodnota y_{n+1} je obsažena ve členu $f(x_{n+1}, y_{n+1})$.

Příklad 3. Explicitní Eulerova metoda: $y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)$.

Implicitní Eulerova metoda : $y_{n+1} = y_n + f(x_{n+1}, y_{n+1})$.

Odvození Eulerovy metody provedeme v odstavci 3.2.1.

Definice 8. Každou jednokrokovou explicitní metodu pro řešení úlohy (3.1) lze formulovat rekurentním předpisem:

$$y_0 = \eta,\tag{3.2}$$

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(x_n, y_n, h).\tag{3.3}$$

Funkce ϕ (která závisí na f) se nazývá přírůstková funkce.

Příkladem vícekrokové metody je formule $y_{n+2} = 4y_{n+1} - 3y_n - 2hf(x_n, y_n)$, kde $y_0 = \eta$ a y_1 vypočítáme pomocí jednokrokové metody. Tato metoda je dvoukroková - další hodnotu počítáme pomocí dvou předcházejících.

3.2 Metody založené na přímém použití Taylorova vzorce

Nyní se budeme zabývat metodami, které jsou odvozeny pomocí Taylorova vzorce. Nechť y je řešením diferenciální rovnice (3.1) na intervalu $[a, b]$. Uvažujme dělení $x_n = a + nh$ intervalu $[a, b]$, $h > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

3.2.1 Eulerovy metody

Mezi nejjednodušší metody numerického řešení ODR patří explicitní Eulerova metoda. Nechť $y \in C^2([a, b])$ je řešením úlohy (3.1). Jestliže $x_n, x_{n+1} \in [a, b]$, pak můžeme použít Taylorův vzorec

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + O(h^2),$$

a tedy

$$y'(x_n) = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} + O(h). \quad (3.4)$$

Použijeme-li vztah $y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$, zanedbáme-li výraz $O(h)$ a nahradíme-li hodnoty $y(x_i)$ přesného řešení hodnotami y_i přibližného řešení, dostaneme z rovnice (3.4) formuli

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n, y_n).$$

Vyjádřením y_{n+1} obdržíme rekurentní vztahy pro explicitní Eulerovu metodu:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n), \\ y_0 &= \eta. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Podobně lze odvodit implicitní Eulerovu metodu ze vztahů

$$\begin{aligned} y'(x_{n+1}) &= \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} + O(h), \\ y'(x_{n+1}) &= f(x_{n+1}, y(x_{n+1})). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Zanedbáme-li výraz $O(h)$ a nahradíme-li hodnoty $y(x_{i+1})$ přesného řešení hodnotami y_{i+1} přibližného řešení dostáváme

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_{n+1}, y_{n+1}).$$

Vyjádřením y_{n+1} obdržíme rekurentní vztahy pro implicitní Eulerovu metodu:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}), \\ y_0 &= \eta. \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.2.2 Jednokroková metoda libovolně vysokého řádu

Chceme zkonstruovat jednokrokovou metodu p -tého řádu za předpokladu, že přesné řešení y je třídy $C^{p+1}([a, b])$. Nechť $x, x + h \in [a, b]$. Potom nám Taylorův vzorec dává

$$y(x + h) = y(x) + \sum_{k=0}^p \frac{y^{(k)}(x)}{k!} h^k + \frac{y^{(p+1)}(\bar{x})}{(p+1)!} h^{p+1}, \quad (3.8)$$

kde $\bar{x} \in [x, x + h]$. Převedením $y(x)$ na levou stranu a vydělením h dostaneme:

$$\frac{y(x + h) - y(x)}{h} = \sum_{k=1}^p \frac{y^{(k)}(x)}{k!} h^{k-1} + \frac{y^{(p+1)}(\bar{x})}{(p+1)!} h^p. \quad (3.9)$$

Nyní se pokusíme vypočítat několik prvních derivací funkce y :

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)), \\ y''(x) &= \frac{d}{dx} f(x, y(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + y'(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + f(x, y(x)) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)), \\ y'''(x) &= \frac{d}{dx} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right) (x, y(x)) \right\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \{ \dots \} + f \frac{\partial}{\partial y} \{ \dots \}, \\ &\vdots \\ y^{(k)}(x) &= \frac{\partial}{\partial x} \{ \dots \} + f \frac{\partial}{\partial y} \{ \dots \}. \end{aligned}$$

Pro zjednodušení zápisu definujeme diferenciální operátor D . Pro funkci $\varphi \in C^1(G)$, kde $G \subset \mathbb{R}^2$, budiž

$$D\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + f \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (3.10)$$

Mocninou operátoru D budeme rozumět skládání, tj. $D^0\varphi := \varphi$ a pro $k \geq 0$ položíme $D^{k+1}\varphi := D(D^k\varphi)$. Nyní můžeme pomocí operátoru D snadno vyjádřit derivace funkce y :

$$\begin{aligned} y'(x) &= (D^0 f)(x, y(x)), \\ y''(x) &= (D^1 f)(x, y(x)), \\ y'''(x) &= (D^2 f)(x, y(x)), \\ &\vdots \\ y^{(k)}(x) &= (D^{k-1} f)(x, y(x)). \end{aligned}$$

Dosazením do vztahu (3.9) dostaneme

$$\frac{y(x + h) - y(x)}{h} = \sum_{k=1}^p \frac{(D^{k-1} f)(x, y(x))}{k!} h^{k-1} + \frac{y^{(p+1)}(\bar{x})}{(p+1)!} h^p.$$

Použijeme-li tedy přírůstkovou funkci ve tvaru:

$$\phi(x, y(x), h) = \sum_{k=1}^p \frac{(D^{k-1}f)(x, y(x))}{k!} h^{k-1} \quad (3.11)$$

obdržíme

$$|\delta(x, h)| = \left| \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \phi(x, y(x), h) \right| \leq \left| \frac{y^{(p+1)}(\bar{x})}{(p+1)!} h^p \right| \leq N h^p,$$

kde

$$N = \max_{x \in [a, b]} \left| \frac{y^{(p+1)}}{(p+1)!} \right|.$$

Přírůstkovou funkci jsme získali zanedbáním zbytku v Taylorově vzorci řádu $O(h^p)$. Tím dostáváme metodu libovolně vysokého řádu p :

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{k=1}^p \frac{(D^{k-1}f)(x, y(x))}{k!} h^k, \quad (3.12)$$

$$y_0 = \eta.$$

Tato terminologie je v souladu s definicí 11 v odstavci (3.4.1). Metoda (3.12) je pro praxi téměř nepoužitelná, neboť počítání mocnin operátoru D vede brzy k příliš složitým výrazům. Hlavním důvodem ale je, že v definici funkce ϕ se vyskytuje nejen funkce f sama, ale i její parciální derivace. Cílem proto je odvodit metody, u kterých je přírůstková funkce definovaná pouze funkčními hodnotami funkce f . Tento požadavek splňují Rungeovy-Kuttovy metody.

3.3 Rungeovy-Kuttovy metody

Nyní pomocí Taylorova vzorce odvodíme Rungeovy-Kuttovy metody. Označme

$$\bar{\phi}(x, y, h) = \sum_{k=1}^p \frac{(D^{k-1}f)(x, y)}{k!} h^{k-1} \quad (3.13)$$

přírůstkovou funkci metody odvozené v předchozím odstavci.

Přírůstkovou funkci Rungeových-Kuttových metod budeme hledat ve tvaru:

$$\phi(x, y, h) = \sum_{k=1}^P \omega_k k_k(x, y, h), \quad (3.14)$$

kde

$$\begin{aligned} k_1(x, y, h) &= f(x, y), \\ k_2(x, y, h) &= f(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21} h k_1(x, y, h)), \\ &\vdots \\ k_i(x, y, h) &= f(x + \alpha_i, y + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} h k_j(x, y, h)), \quad i = 2, \dots, P. \end{aligned}$$

Zde P, ω_i, α_i a β_{ij} jsou vhodně zvolené konstanty (takové, aby výsledná metoda byla řádu p). Dále se budeme snažit určit hodnoty těchto konstant tak, abychom dostali odhad

$$\phi(x, y, h) - \bar{\phi}(x, y, h) = O(h^p).$$

3.3.1 Rungeova-Kuttova metoda 2. řádu

Nyní se pokusíme odvodit Rungeovu-Kuttovu metodu druhého řádu. Tedy $p = 2$. Zkusíme zvolit počet členů také $P = 2$:

$$\begin{aligned} \phi(x, y, h) &= \sum_{i=1}^2 \omega_i k_i(x, y, h) = \omega_1 k_1(x, y, h) + \omega_2 k_2(x, y, h) = \\ &= \omega_1 f(x, y) + \omega_2 f(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21} h f(x, y)). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Podle (3.13) máme

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(x, y, h) &= \sum_{k=1}^2 \frac{(D^{k-1} f)(x, y)}{k!} h^{k-1} = (D^0 f)(x, y) + \frac{(D^1 f)(x, y)}{2} h = \\ &= f(x, y) + \frac{h}{2} (Df)(x, y) = \\ &= f(x, y) + \frac{h}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + f(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Nyní pomocí Taylorova vzorce rozepíšeme funkční hodnotu

$$f(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21} h f(x, y))$$

ze vztahu (3.15).

Připomeňme Taylorův vzorec pro funkce více proměnných.

Lemma 2. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ je otevřená množina, $f \in C^k(\Omega)$ a $a, b \in \Omega$. Předpokládejme, že i celá úsečka s krajními body a, b leží v Ω . Potom*

$$f(b) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} \left[\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \right]^j f(a) + \frac{1}{k!} \left[\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \right]^k f(a + \theta(b - a))$$

pro nějaké $\theta \in [0, 1]$.

Důkaz je důsledkem věty 203 z [5].

Použitím Taylorova vzorce nyní dostaneme:

$$\begin{aligned}
& f(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21} h f(x, y)) = \\
&= \sum_{j=0}^1 \frac{1}{j!} \left[(x + \alpha_2 h - x) \frac{\partial}{\partial x} + (y + \beta_{21} h f(x, y) - y) \frac{\partial}{\partial y} \right]^j f(x, y) + \\
&+ \frac{1}{2!} \left[(x + \alpha_2 h - x) \frac{\partial}{\partial x} + (y + \beta_{21} h f(x, y) - y) \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 \\
&f\left((x, y) + \theta(\alpha_2 h, \beta_{21} h f(x, y))\right) = \\
&= f(x, y) + \left(\alpha_2 h \frac{\partial}{\partial x} + \beta_{21} h f(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) + \\
&+ \frac{1}{2} \left(\alpha_2 h \frac{\partial}{\partial x} + \beta_{21} h f(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f\left(x + \theta \alpha_2 h, y + \theta \beta_{21} h f(x, y)\right) = \\
&= f(x, y) + \alpha_2 h \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \beta_{21} h f(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \\
&+ \frac{1}{2} \left[\alpha_2^2 h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\alpha_2 \beta_{21} h^2 f(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \beta_{21}^2 h^2 f^2(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right] \\
&\left(x + \theta \alpha_2 h, y + \theta \beta_{21} h f(x, y)\right),
\end{aligned}$$

pro nějaké $\theta \in [0, 1]$. Poslední sčítanec na pravé straně je $O(h^2)$. Dosazením do rovnice (3.15) dostaneme

$$\begin{aligned}
\phi(x, y, h) &= \omega_1 f(x, y) + \omega_2 \left(f(x, y) + \alpha_2 h \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \beta_{21} h f(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) + O(h^2) = \\
&= (\omega_1 + \omega_2) f(x, y) + \omega_2 \alpha_2 h \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \omega_2 \beta_{21} h f(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + O(h^2).
\end{aligned}$$

Srovnáme nyní koeficienty u f , $\frac{\partial f}{\partial x}$, $f \frac{\partial f}{\partial y}$ ve vyjádření ϕ a $\bar{\phi}$. Budou-li stejné, bude $\phi - \bar{\phi} = O(h^2)$. Získáme vztahy

$$\begin{aligned}
f : & \quad \omega_1 + \omega_2 = 1, \\
\frac{\partial f}{\partial x} : & \quad \omega_2 \alpha_2 = \frac{1}{2}, \\
f \frac{\partial f}{\partial y} : & \quad \omega_2 \beta_{21} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Dostáváme tři rovnice pro čtyři neznámé. Jednu neznámou tedy můžeme zvolit. Zvolme např. $\omega_2 = \alpha \neq 0$ (jinak by nemohl platit vztah $\omega_2 \alpha_2 = \frac{1}{2}$). Dostaneme

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= 1 - \alpha, \\
\omega_2 &= \alpha, \\
\alpha_2 &= \beta_{21} = \frac{1}{2\alpha}.
\end{aligned}$$

Tyto hodnoty nám dávají celou třídu Rungeových-Kuttových metod druhého řádu. Dosazení do (3.14) dostaneme

$$\begin{aligned}
\phi(x, y, h) &= \omega_1 f(x, y) + \omega_2 f\left(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21} h f(x, y)\right) = \\
&= (1 - \alpha) f(x, y) + \alpha \left(f\left(x + \frac{1}{2\alpha} h, y + \frac{1}{2\alpha} h f(x, y)\right) \right).
\end{aligned}$$

Nejpoužívanější hodnota parametru je $\alpha = 1$. Výsledná hodnota pak má tvar

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(x_n, y_n, h) = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)). \quad (3.17)$$

Odvození Rungeových-Kuttových metod vyšších řádů je podstatně složitější. Můžeme je najít například v monografii [4].

3.3.2 Rungeova-Kuttova metoda 3. řádu

V tomto případě postačuje zvolit $P = 3$, takže $\phi(x, y, h) = \omega_1 k_1 + \omega_2 k_2 + \omega_3 k_3$. Dostáváme například

$$y_{n+1} = y_n + h(\frac{2}{9}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{4}{9}k_3), \quad (3.18)$$

kde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x, y), \\ k_2 &= f(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_1), \\ k_3 &= f(x + \frac{3}{4}h, y + \frac{3}{4}hk_2). \end{aligned}$$

3.3.3 Rungeova-Kuttova metoda 4. řádu

Nejčastěji jsou používány metody čtvrtého řádu. U těchto metod máme opět $P = p = 4$, takže $\phi(x, y, h) = \omega_1 k_1 + \omega_2 k_2 + \omega_3 k_3 + \omega_4 k_4$. Standartní formule má tvar

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (3.19)$$

kde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x, y), \\ k_2 &= f(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_1), \\ k_3 &= f(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_2), \\ k_4 &= f(x + h, y + hk_3). \end{aligned}$$

U metod vyššího řádu než čtvrtého (tj. $p > 4$) je třeba volit $P > p$.

3.4 Odhad chyby jednokrokových metod

V předchozích odstavcích jsme odvodili několik jednokrokových metod. Nyní chceme zjistit, zda opravdu dobře aproximují řešení diferenciálních rovnic. Potřebujeme najít odhad chyby metody v závislosti na h a ukázat, že se tato chyba blíží k 0 pro $h \rightarrow 0$.

Numerické řešení diferenciálních rovnic je samozřejmě zatíženo chybami, které dělíme na chyby diskretizační a zaokrouhlovací chyby. Předně si ale musíme uvědomit, že už zadání našeho problému nemusí být přesné.

Jako příklad můžeme uvést výpočet pohybu dvou těles (například Slunce a planety v důsledku přitažlivosti). Pro zjednodušení popisu tohoto problému používáme pojem diskretní bod. Představíme si, že Slunce i planety jsou popsány jako diskretní body. Zanedbáváme tedy úplně rozměry Slunce a planety. Tím se samozřejmě dopouštíme chyby, která je chybou použitého modelu. Těmito chybami se ale nebudeme zabývat.

3.4.1 Akumulovaná diskretizační chyba

Již jsme dokázali, že za jistých předpokladů existuje jednoznačné řešení úlohy (2.1). Potom výslednou chybu, které se dopustíme, když přesné řešení nahradíme v každém uzlu x_n přibližným řešením, nazýváme akumulovanou diskretizační chybou.

Definice 9. *Akumulovanou diskretizační chybou metody (krátce chybou metody) v bodě x_n rozumíme rozdíl*

$$e_n = y_n - y(x_n), \quad (3.20)$$

kde $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je řešením úlohy (2.1) a y_n je přibližné řešení v uzlu x_n .

Definice 10. *O jednokrokové metodě řekneme, že je konvergentní, jestliže*

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} e(h) = 0,$$

kde $e(h) = \max_{x_n \in [a, b]} |e_n|$ nazýváme *maximální chybou*.

Zajímá nás odhad chyby metody e_n . Postupujeme následujícím způsobem:

1. Dosadíme přesné řešení do uvažované metody, tj. do vztahu (3.2). Dostaneme vztah

$$y(x_n + h) - y(x_n) - h\phi(x_n, y(x_n), h) = h\delta_n, \quad x_n, x_n + h \in [a, b], h \in (0, h_0),$$

2. Odhadneme δ_n a z tohoto odhadu odvodíme odhad chyby e_n .

Veličinu δ_n nazýváme lokální relativní diskretizační chybou v uzlu x_n . Obecně lokální relativní diskretizační chybu (krátce chybu diskretizace) v bodě x definujeme jako výraz

$$\delta_n = \Delta(x, y(x), h) - \phi(x, y(x), h),$$

kde

$$\Delta(x, y(x), h) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h}, \quad x, x+h \in [a, b], h \in (0, h_0),$$

je tzv. přesný relativní přírůstek.

Dále budeme potřebovat následující lemma:

Lemma 3. *Nechť $A, B \geq 0, N \in \mathbb{N}$ a necht' je splněna podmínka*

$$|\xi_{n+1}| \leq A|\xi_n| + B, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Potom pro $n = 0, \dots, N$ platí odhad

$$|\xi_n| \leq A^n |\xi_0| + \begin{cases} \frac{A^n - 1}{A - 1} B & \text{pro } A \neq 1, \\ Bn & \text{pro } A = 1. \end{cases}$$

Důkaz lze nalézt v [2].

Nechť $A = 1 + \delta$, kde $\delta > 0$. Použijeme-li nerovnost $1 + \delta < e^\delta$, pak z lemmatu 3 plyne

$$|\xi_n| \leq e^{n\delta} |\xi_0| + \frac{e^{n\delta} - 1}{\delta} B, \quad n = 0, \dots, N.$$

Pro $L > 0$ a $x \in \mathbb{R}$ označme

$$E_L(x) = \frac{e^{Lx} - 1}{L}.$$

(E_L je tzv. Lipschitzova funkce.)

Věta 2. *Nechť $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je přesné řešení úlohy (3.1), y_n jsou hodnoty přibližného řešení pro $x_n \in [a, b]$ vypočtené pomocí jednokrokové metody (3.2) s přírůstkovou funkcí ϕ splňující následující předpoklady:*

1. $\phi : [a, b] \times \mathbb{R} \times [0, h_0] \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi = \phi(x, y, h)$ je spojitá
2. ϕ splňuje Lipschitzovu podmínku vzhledem k y s konstantou $L > 0$:
 $|\phi(x, y, h) - \phi(x, y^*, h)| \leq L|y - y^*|, \quad x \in [a, b], y, y^* \in \mathbb{R}, h \in [0, h_0].$

Nechť navíc existují konstanty $N, p > 0$ takové, že

$$|\Delta(x, y(x), h) - \phi(x, y(x), h)| \leq Nh^p, \quad (3.21)$$

pokud $x, x + h \in [a, b], h \in (0, h_0)$. Potom pro chybu metody (tj. akumulovanou diskretizační chybu) e_n platí odhad

$$|e_n| \leq Nh^p E_L(x_n - a), \quad x_n \in [a, b], h \in (0, h_0). \quad (3.22)$$

Důkaz. Zřejmě $e_0 = y_0 - y(x_0) = 0$. Dále máme vztahy

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\phi(x_n, y_n, h), \\ y(x_{n+1}) &= y(x_n) + h\phi(x_n, y(x_n), h) + h\delta_n, \end{aligned}$$

kde $\delta_n = \Delta(x_n, y(x_n), h) - \phi(x_n, y(x_n), h)$ pro $x_n, x_{n+1} \in [a, b], h \in (0, h_0)$. Odtud vyplývá odečtením druhé rovnice od první

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= y_{n+1} - y(x_{n+1}) = \\ &= y_n + h\phi(x_n, y_n, h) - \left(y(x_n) + h\phi(x_n, y(x_n), h) + h\delta_n \right) = \\ &= e_n + h \left(\phi(x_n, y_n, h) - \phi(x_n, y(x_n), h) \right) - h \left(\Delta(x_n, y(x_n), h) - \phi(x_n, y(x_n), h) \right). \end{aligned}$$

Použijeme-li předpoklad 2 a podmínku (3.21), dostaneme postupně nerovnosti

$$\begin{aligned}
|e_{n+1}| &\leq \left| e_n + h \left(\phi(x_n, y_n, h) - \phi(x_n, y(x_n), h) \right) - \right. \\
&\quad \left. - h \left(\Delta(x_n, y(x_n), h) - \phi(x_n, y(x_n), h) \right) \right| \leq \\
&\leq |e_n| + h |\phi(x_n, y_n, h) - \phi(x_n, y(x_n), h) - | \\
&\quad - h |\Delta(x_n, y(x_n), h) - \phi(x_n, y(x_n), h)| \leq \\
&\leq |e_n| + h |y_n - y(x_n)| + hNh^p \leq \\
&\leq (1 + hL)|e_n| + Nh^{p+1}, \quad x_n \in [a, b], h \in (0, h_0).
\end{aligned}$$

Aplikace lemmatu 3 pro $A = 1 + hL$ a $B = Nh^{p+1}$ dává odhad

$$\begin{aligned}
|e_n| &\leq \frac{(1 + hL)^n - 1}{hL} Nh^{p+1} \leq \\
&\leq \frac{e^{nhL} - 1}{L} Nh^p = Nh^p E_L(x_n - a), \quad x_n \in [a, b], h \in (0, h_0),
\end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat. □

Definice 11. *Jestliže platí (3.21), pak řekneme, že metoda (3.2) je řádu p .*

Podívejme se nyní na efektivnost odhadu, který jsem získali. Uvažujem například Euleru metodu. Ukázali jsme, že pokud je přesné řešení třídy C^2 , je

$$|e_n| \leq NhE_L(x_n - a),$$

kde $N = \frac{1}{2} \max_{[a,b]} |y''|$. Tento odhad se dá o něco zlepšit, uvědomíme-li si, že pro odhad chyby v bodě x_n stačí řešit rovnici na $[a, x_n]$ (interval $(x_n, b]$ nemá žádný vliv). Můžeme tedy položit $b = x_n$, $N(x_n) = \frac{1}{2} \max_{[a, x_n]} |y''|$ a dostaneme zlepšený odhad

$$|e_n| \leq N(x_n)E_L(x_n - a)h.$$

Bohužel oba uvedené odhady chyby metody mohou být silně nadsazené vzhledem k tomu, že funkce $E_L(x_n - a)$ roste exponenciálně s rostoucím n . Navíc je třeba vzít v úvahu, že konstanta N (nebo funkce $N(x)$) závisí na přesném řešení, které obvykle neznáme. Proto odhad z věty 2 nám dává pouze představu o chování chyby v závislosti na kroku metody a není prakticky použitelný. Z tohoto důvodu hledáme odhady jiného typu, které můžeme získat na základě vypočteného přibližného řešení a dat úlohy. To jsou tzv. aposteriorní odhady. Aposteriorním odhadem je např. odhad chyby metodou polovičního kroku.

3.4.2 Odhad chyby metodou polovičního kroku

Víme, že pokud přírůstková funkce ϕ splňuje Lipschitzovu podmínku vzhledem k y a pokud

$$\left| \frac{1}{h} (y(x+h) - y(x)) - \phi(x, y(x), h) \right| \leq Nh^p,$$

potom platí

$$|y_n - y(x_n)| \leq NE_L(x_n - a)h^p.$$

Pokud jsou funkce f a ϕ dostatečně hladké, existuje funkce $e : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že

$$e_n = h^p e(x_n) + O(h^{p+1}). \quad (3.23)$$

(Důkaz lze najít v [2], věta 1.6.4)

Tento vztah chybu neodhaduje, ale aproximuje. Funkce e opět závisí na vlastnostech přesného řešení y .

Na výpočet přibližného řešení použijeme postupně metodu s krokem $2h$ a h . Dostaneme uzly a odpovídající hodnoty přibližného řešení:

$$\begin{aligned} x_n^{2h} = a + n(2h) &\mapsto y_n^{(2h)} \\ x_n^h = a + nh &\mapsto y_n^{(h)} \end{aligned}$$

Vidíme, že $x_n^{2h} = x_{2n}^h$. V těchto bodech budeme porovnat hodnoty přibližných řešení. Ze vztahu (3.23) dostaneme

$$\begin{aligned} e_n^{(2h)} &= y_n^{(2h)} - y(x_n^{(2h)}) = (2h)^p e(x_n^{(2h)}) + O(h^{p+1}), \\ e_{2n}^{(h)} &= y_{2n}^{(h)} - y(x_{2n}^{(h)}) = h^p e(x_n^{(2h)}) + O(h^{p+1}). \end{aligned}$$

Odečtením získáme vztah

$$\begin{aligned} y_n^{(2h)} - y_{2n}^{(h)} &= (2^p - 1)h^p e(x_n^{(2h)}) + O(h^{p+1}), \\ h^p e(x_n^{(2h)}) &= \frac{y_n^{(2h)} - y_{2n}^{(h)}}{(2^p - 1)} + O(h^{p+1}), \\ e_{2n}^{(h)} &= \frac{y_n^{(2h)} - y_{2n}^{(h)}}{(2^p - 1)} + O(h^{p+1}) \approx \frac{y_n^{(2h)} - y_{2n}^{(h)}}{(2^p - 1)}. \end{aligned}$$

Aproximaci

$$e_{2n}^{(h)} \approx \frac{y_n^{(2h)} - y_{2n}^{(h)}}{(2^p - 1)} \quad (3.24)$$

nazýváme odhadem chyby metodou polovičního kroku. Jedná se o tzv. aposteriorní odhad chyby, který získáme na základě přibližného řešení (a případně dat úlohy). Tento odhad dává v řadě praktických aplikací spolehlivé výsledky.

3.4.3 Zaokrouhlovací chyby u jednokrokových metod

Dosud jsme předpokládali, že při výpočtu přibližného řešení všechny operace probíhají přesně. Zaokrouhlování provádíme tak, že každému $\alpha \in \mathbb{R}$ přiřadíme jeho zaokrouhlenou hodnotu α^* . Předpokládejme, že vstupní data jsou už zaokrouhlená, tzn. $a = a^*$, $h = h^*$, $\eta = \eta^*$. Přibližné řešení v uzlu x_n vypočtené se zaokrouhlováním označme \bar{y}_n . Můžeme psát

$$\begin{aligned} \bar{y}_0 &= \eta = y_0, \\ \bar{y}_{n+1} &= \bar{y}_n + h\phi(x_n, \bar{y}_n, h) + \varepsilon_{n+1}, \end{aligned}$$

kde ε_{n+1} se nazývá lokální zaokrouhlovací chyba. Ještě zavedeme akumulovanou zaokrouhlovací chybu v uzlu x_n jako $r_n = \bar{y}_n - y_n$.

Věta 3. *Nechť $\phi : [a, b] \times \mathbb{R} \times [0, h_0] \rightarrow \mathbb{R}$ splňuje Lipschitzovu podmínku vzhledem k y s konstantou $L > 0$ a nechť platí $|\varepsilon_k| \leq \varepsilon$ pro $x_k, x_{k+1} \in [a, b]$. Potom*

$$|r_n| \leq \frac{\varepsilon}{h} E_L(x_n - a), \quad x_n \in [a, b], h \in (0, h_0).$$

Důkaz. Máme $r_0 = 0$ a

$$\begin{aligned} \bar{y}_{n+1} &= \bar{y}_n + h\phi(x_n, \bar{y}_n, h) + \varepsilon_{n+1}, \\ y_{n+1} &= y_n + h\phi(x_n, y_n, h). \end{aligned}$$

Odečtením dostaneme

$$|r_{n+1}| \leq |r_n + hLr_n| + |\varepsilon_{n+1}| \leq |r_n|(1 + hL) + \varepsilon.$$

Použijeme-li lemma 3 získáme

$$|r_n| \leq \frac{(1 + hL)^n - 1}{hL} \varepsilon \leq \frac{e^{nL} - 1}{L} \frac{\varepsilon}{h} = E_L(x_n - a) \frac{\varepsilon}{h}.$$

□

Poznámka 1. *Všechny výše uvedené metody lze aplikovat i na řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic (1.1) s počáteční podmínkou (1.2). V tomto případě pracujeme s vektorovými m -rozměrnými funkcemi y, f, ϕ, k_i .*

4. Příklady

V této kapitole budeme ilustrovat použití jednokrokových metod na několika příkladech. K výpočtu numerických řešení pomocí uvedených metod jsme použili program Mathematica 7.

4.1 Příklad řešení jedné diferenciální rovnice

Uvažujme diferenciální rovnici prvního řádu

$$y' = \frac{y+x}{y-x} \quad (4.1)$$

s počáteční podmínkou

$$y(0) = 1. \quad (4.2)$$

Přesné řešení tohoto příkladu je vyjádřeno funkcí

$$y(x) = x + \sqrt{1 + 2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zavedeme označení: $f(x, y) = \frac{y+x}{y-x}$. Tento příklad řešíme v intervalu $x \in [0, 0.5]$ pomocí explicitní Eulerovy metody

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad y_0 = 1,$$

Rungeovy-kuttovy metody 2. řádu

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)), \quad y_0 = 1,$$

Rungeovy-kuttovy metody 4. řádu

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad y_0 = 1 \\ k_1 &= f(x, y), \\ k_2 &= f(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_1), \\ k_3 &= f(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_2), \\ k_4 &= f(x + h, y + hk_3) \end{aligned}$$

a implicitní Eulerovy metody

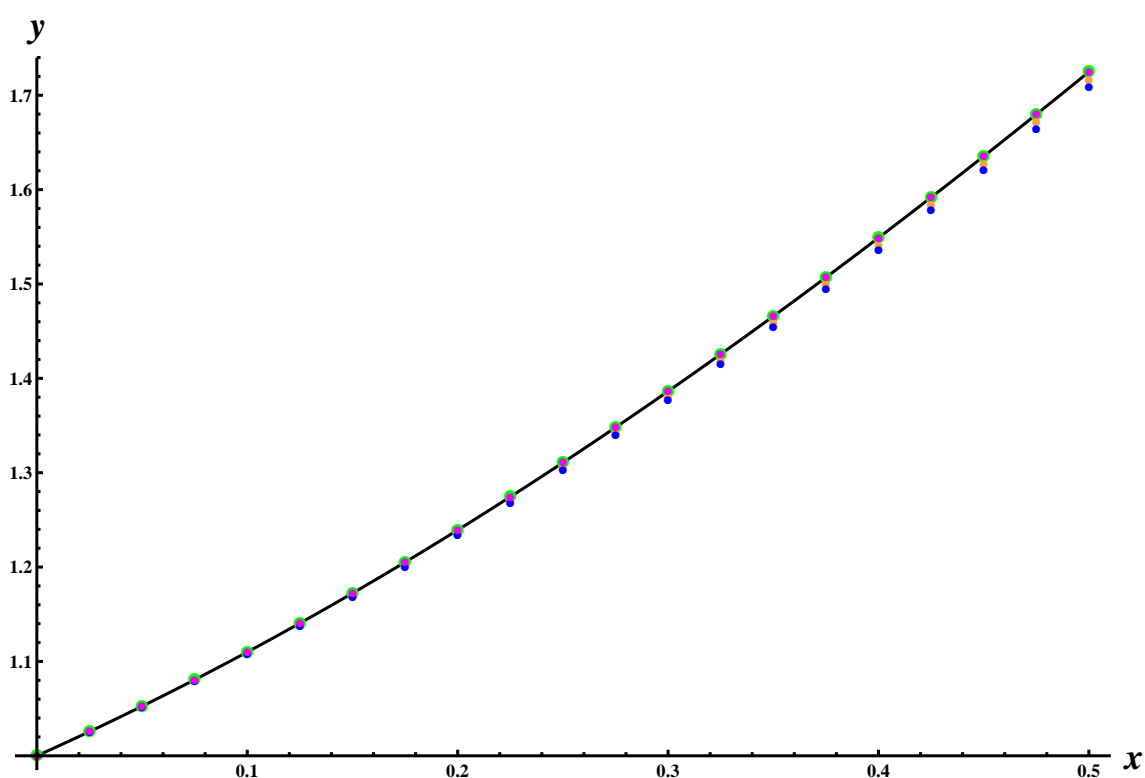
$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}), \quad y_0 = 1.$$

U všech těchto metod zvolíme krok metody $h = 0.025$. Nejprve porovnejme explicitní a implicitní Eulerovu metodu. Nevýhodou implicitní Eulerovy metody je, že při výpočtu dostáváme obecně nelineární rovnici pro výpočet y_{n+1} . K jeho výpočtu je zapotřebí znát numerickou metodu pro řešení nelineárních rovnic (my jsme v tomto příkladě použili metodu tečen).

Ve všech následujících obrázcích jsou přesná a přibližná řešení označena různými barvami následujícím způsobem:

●	přesné řešení
●	explicitní Eulerova metoda
●	implicitní Eulerova metoda
●	Rungeova-Kuttova metoda 2. řádu
●	Rungeova-Kuttova metoda 4. řádu

Tabulka 4.1: Numerická řešení rovnice



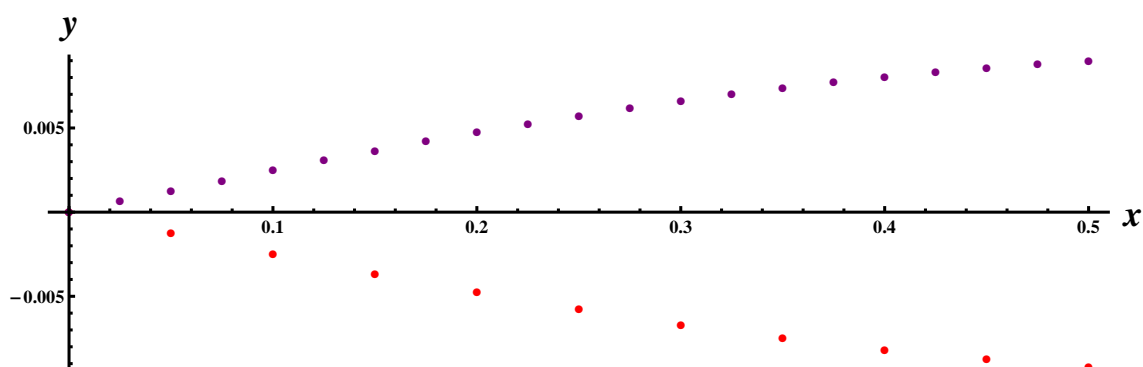
Obrázek 4.1: Numerická řešení rovnice (4.1)

Na obrázku 4.1 pozorujeme, že řešení vypočítaná pomocí Rungeovy-Kuttovy metody 2. a 4. řádu jsou velmi přesná. Body leží skoro na grafu přesného řešení. Body jsou si natolik blízké, že při jejich vykreslování dochází dokonce k překrytí.

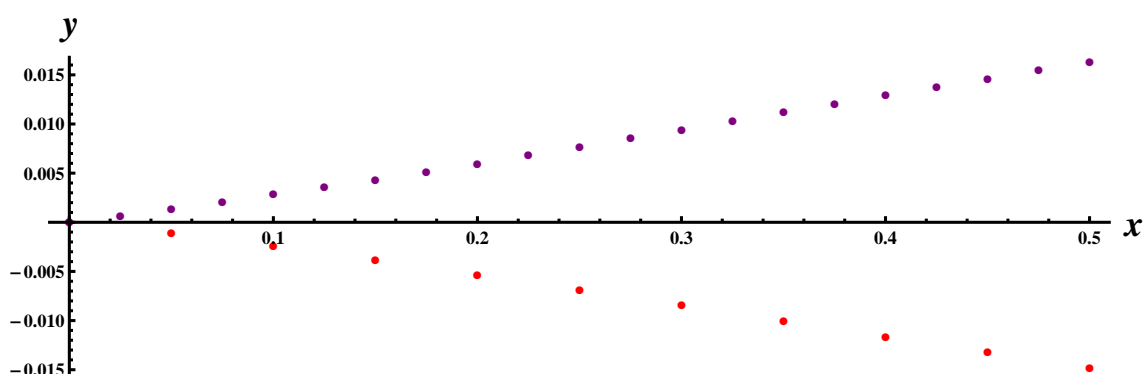
Ve všech následujících obrázcích jsou chyby vypočítané metodou polovičního kroku a akumulovaná diskretizační chyba označeny následujícími barvami:

●	chyba vypočítaná metodou polovičního kroku
●	akumulovaná diskretizační chyba

Tabulka 4.2: Chyby řešení rovnice



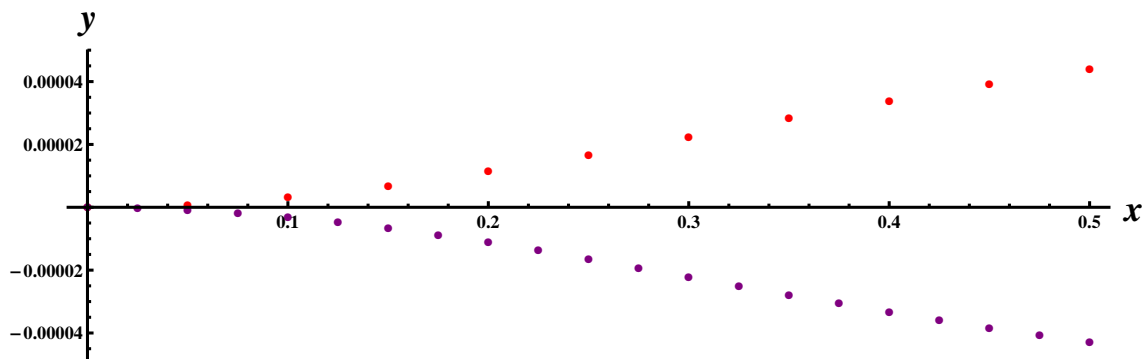
Obrázek 4.2: Srovnání akumulované diskretizační chyby a chyby vypočítané metodou polovičního kroku explicitní Eulerovy metody



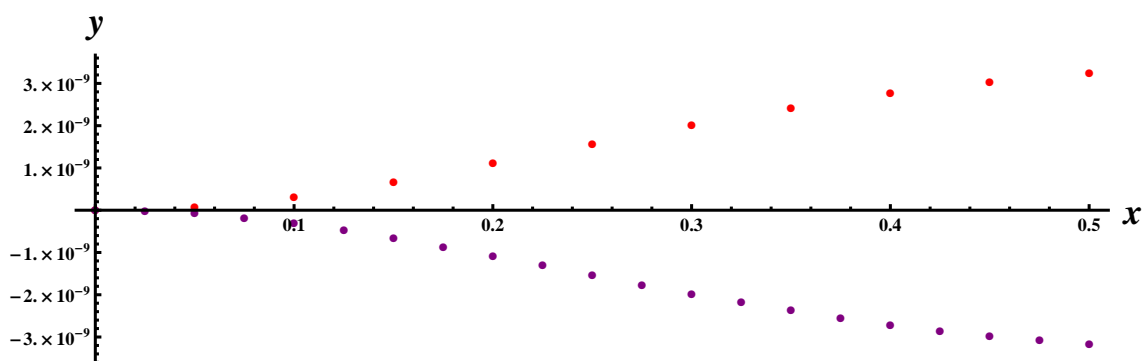
Obrázek 4.3: Srovnání akumulované diskretizační chyby a chyby vypočítané metodou polovičního kroku implicitní Eulerovy metody

Na obrázku 4.2 a 4.3 je vyobrazen odhad chyb explicitní a implicitní Eulerovy metody vypočítaný pomocí metody 1/2 kroku. Chyby jsou vypočteny pomocí vzorce (3.24) pro $h = 0.025$. Dále je zde vyobrazena akumulovaná diskretizační chyba explicitní a implicitní Eulerovy metody, kterou dostáváme pomocí vzorce (3.20). Srovnáním obrázků 4.2 a 4.3 je vidět, že řešení vypočítané pomocí explicitní Eulerovy metody je přesnější než řešení, které jsme dostali pomocí implicitní Eulerovy metody. Velikosti chyb obou metod (daných numerických metod) jsou přibližně stejného řádu, jenom mají opačná znaménka.

Na obrázku 4.4 jsou vykresleny chyby Rungeovy-Kuttovy metody 2. řádu. I zde jsou velikosti obou chyb stejného řádu. Na obrázku 4.5 vidíme, že nejmenší chyby se dopouštíme při výpočtu řešení pomocí Rungeovy-Kuttovy metody 4. řádu. Velikost chyby je 10^{-9} .



Obrázek 4.4: Srovnání akumulované diskretizační chyby a chyby vypočítané metodou polovičního kroku Rungeovy-Kuttovy metody 2. řádu



Obrázek 4.5: Srovnání akumulované diskretizační chyby a chyby vypočítané metodou polovičního kroku Rungeovy-Kuttovy metody 4. řádu

4.2 Příklad řešení soustavy dvou diferenciálních rovnic

Uvedeme dva příklady soustavy dvou diferenciálních rovnic, na které aplikujeme naše metody. Oba následující příklady řešíme pomocí explicitní Eulerovy metody

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + hf^1(x_n, y_n, z_n), & y_0 &= \eta_1, \\z_{n+1} &= z_n + hf^2(x_n, y_n, z_n), & z_0 &= \eta_2,\end{aligned}$$

Rungeovy-Kuttovy metody 2. řádu

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + hf^1\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f^1(x_n, y_n, z_n), z_n + \frac{h}{2}f^2(x_n, y_n, z_n)\right), & y_0 &= \eta_1, \\z_{n+1} &= z_n + hf^2\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f^1(x_n, y_n, z_n), z_n + \frac{h}{2}f^2(x_n, y_n, z_n)\right), & z_0 &= \eta_2,\end{aligned}$$

Rungeovy-Kuttovy metody 4. řádu

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), & y_0 &= \eta_1, \\z_{n+1} &= z_n + \frac{1}{6}h(k_{11} + 2k_{22} + 2k_{33} + k_{44}), & z_0 &= \eta_2, \\k_1 &= f^1(x, y, z), \\k_{11} &= f^2(x, y, z), \\k_2 &= f^1\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_1, z + \frac{h}{2}k_{11}\right), \\k_{22} &= f^2\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_1, z + \frac{h}{2}k_{11}\right), \\k_3 &= f^1\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_2, z + \frac{h}{2}k_{22}\right), \\k_{33} &= f^2\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_2, z + \frac{h}{2}k_{22}\right), \\k_4 &= f^1(x + h, y + hk_3, z + hk_{33}), \\k_{44} &= f^2(x + h, y + hk_3, z + hk_{33})\end{aligned}$$

a implicitní Eulerovy metody

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + hf^1(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}), & y_0 &= \eta_1, \\z_{n+1} &= z_n + hf^2(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}), & z_0 &= \eta_2.\end{aligned}$$

Příklad 1.

Uvažujeme soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned}y' &= -16y + 12z + 16 \cos x - 13 \sin x, \\z' &= 12y - 9z - 11 \cos x + 9 \sin x\end{aligned}$$

s počátečními podmínkami

$$y(0) = 1, \quad z(0) = 0.$$

Přesným řešením této soustavy diferenciálních rovnic je

$$y(x) = \cos x, \quad z(x) = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

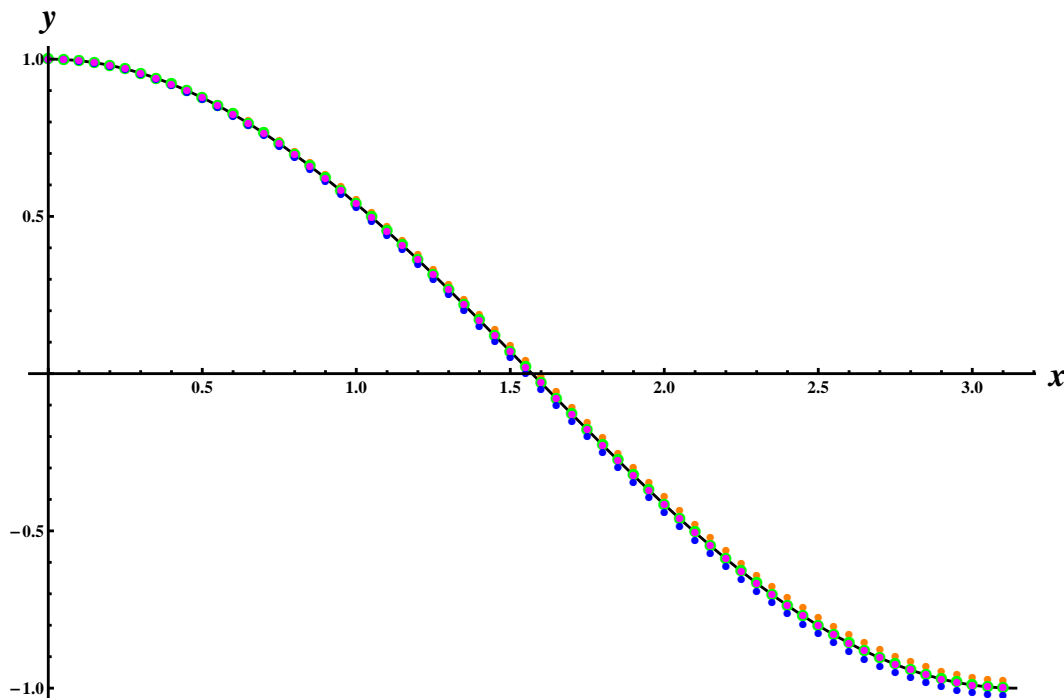
Zavedeme označení:

$$\begin{aligned} f^1(x, y, z) &= -16y + 12z + 16 \cos x - 13 \sin x, \\ f^2(x, y, z) &= 12y - 9z - 11 \cos x + 9 \sin x. \end{aligned}$$

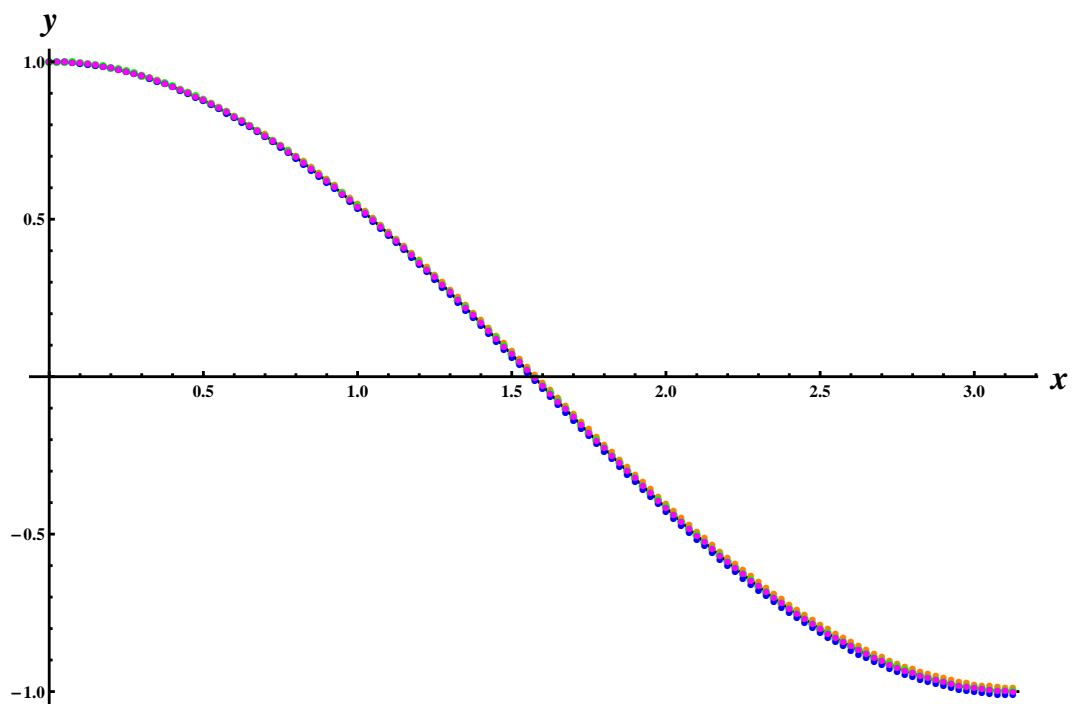
Na obrázku 4.6 a 4.7 je vyobrazeno numerické řešení funkce y vypočítané s krokem $h = 0.05$ a $h = 0.025$ na intervalu $[0, \Pi]$. Barvy mají stejný význam jako v tabulce 4.1. Z obrázků je vidět, že při zjemňování dělení intervalu, se numerické řešení blíží přesnému řešení.

Při programování implicitní Eulerovy metody bylo nutné vyřešit soustavu dvou lineárních rovnic, k tomu jsme užili již v Mathematice předprogramované funkce NSolve.

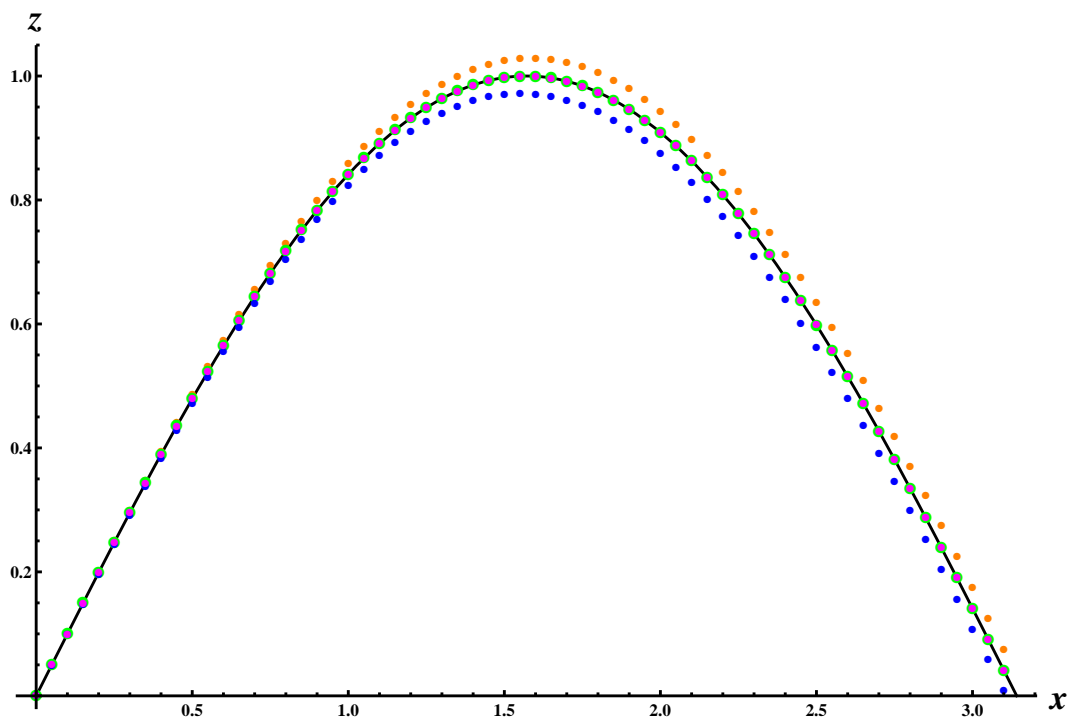
Na obrázku 4.8 a 4.9 je vyobrazeno numerické řešení funkce z vypočítané s krokem $h = 0.05$ a $h = 0.025$. I zde se při zjemňování dělení intervalu numerické řešení blíží přesnému řešení.



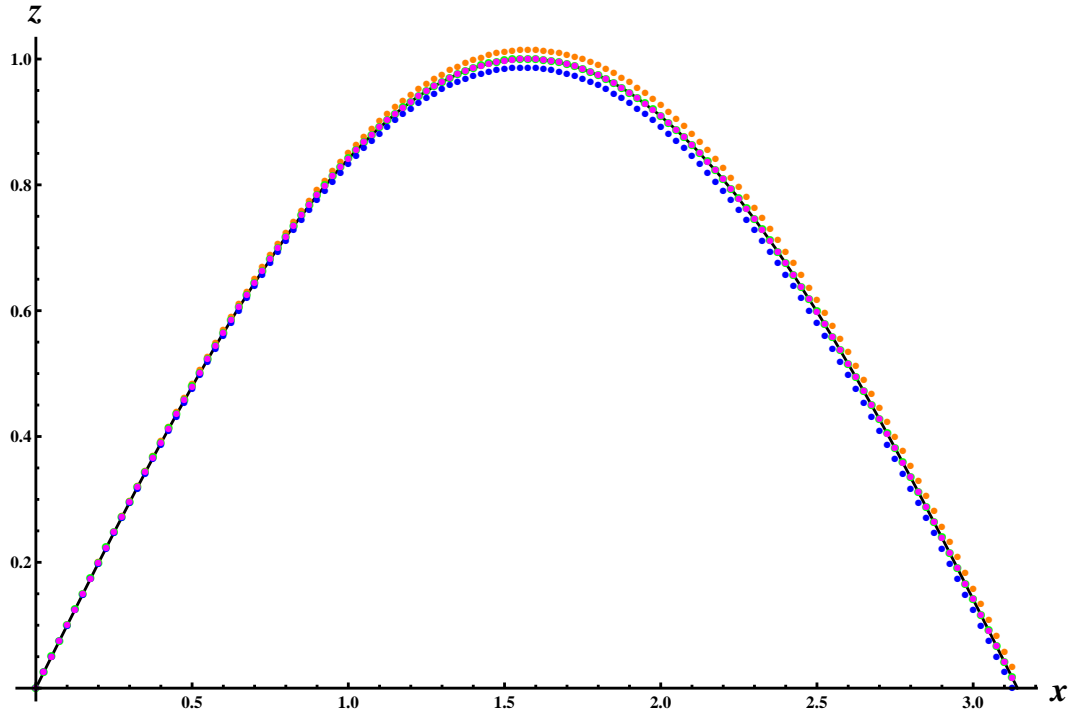
Obrázek 4.6: Přibližné řešení s krokem $h = 0.05$: funkce y



Obrázek 4.7: Přibližné řešení s krokem $h = 0.025$: funkce y

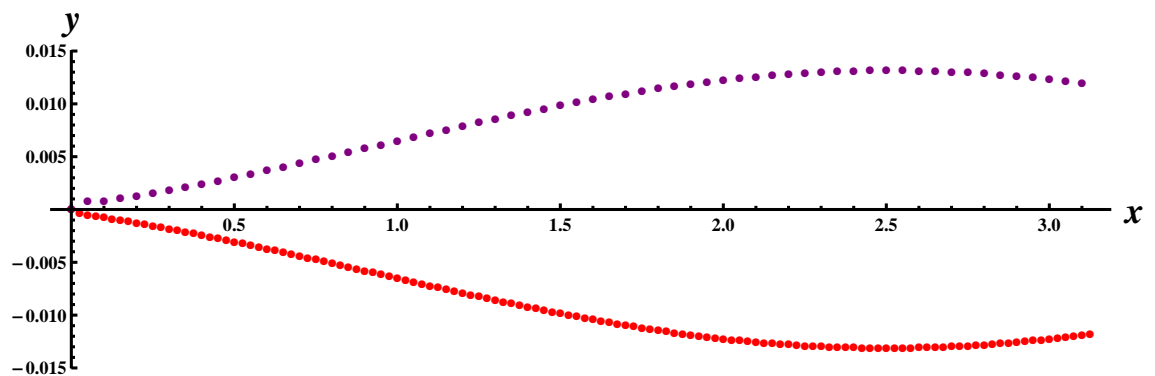


Obrázek 4.8: Přibližné řešení s krokem $h = 0.05$: funkce z

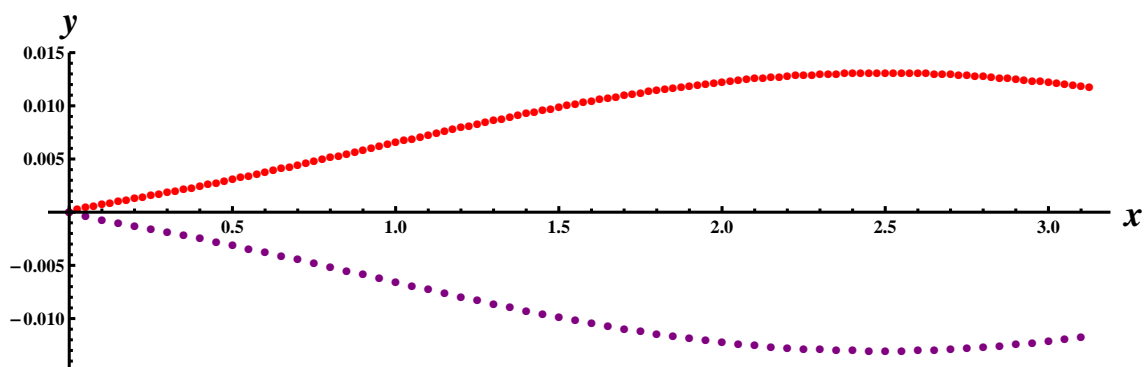


Obrázek 4.9: Přibližné řešení s krokem $h = 0.025$: funkce z

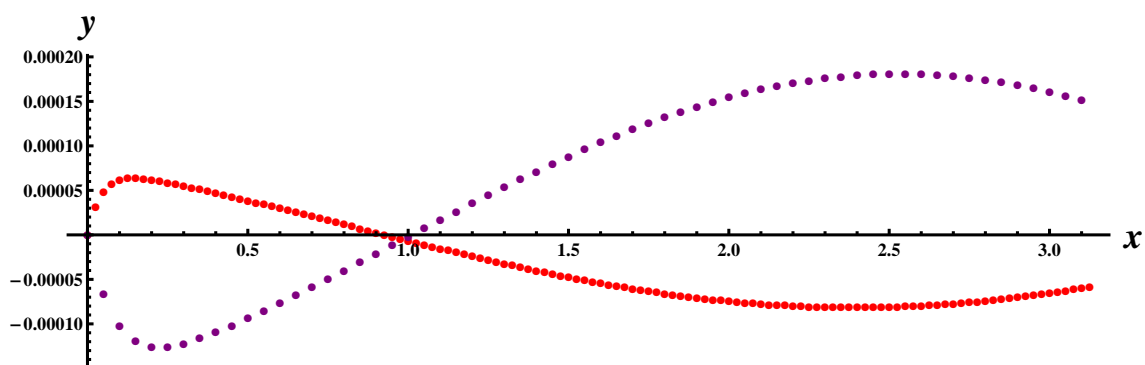
Opět jsme počítali chybu pomocí metody polovičního kroku pro $h = 0.025$ všech metod a akumulovanou diskretizační chybu těchto metod, také s krokem $h = 0.025$. Chyby jsou vykresleny na obrázcích 4.10-4.17. Barvy mají stejný význam jako v tabulce 4.2. V obou případech se nejmenší chyby dopouštíme při počítání řešení pomocí Rungeovy-Kuttovy metody 4. řádu. Tato metoda je tedy nejpřesnější a dává nám nejlepší aproximaci.



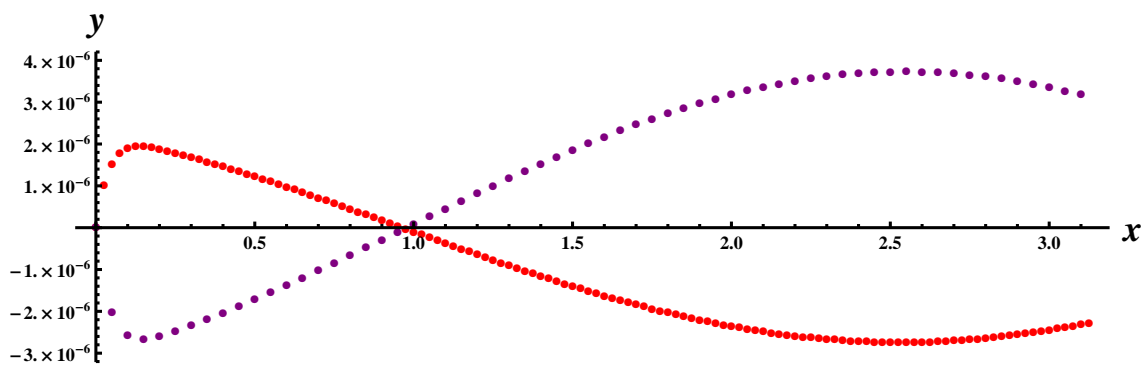
Obrázek 4.10: Chyby přibližného řešení pro explicitní Eulerovu metodu: funkce y



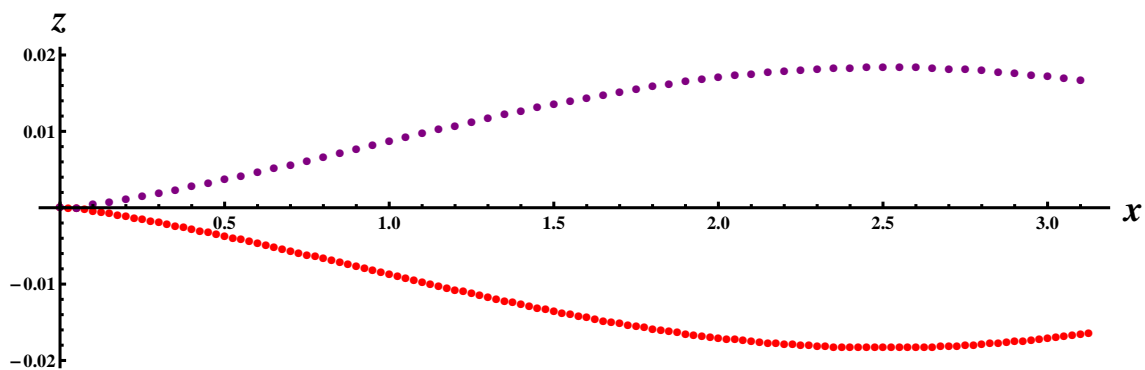
Obrázek 4.11: Chyby přibližného řešení pro implicitní Eulerovu metodu: funkce y



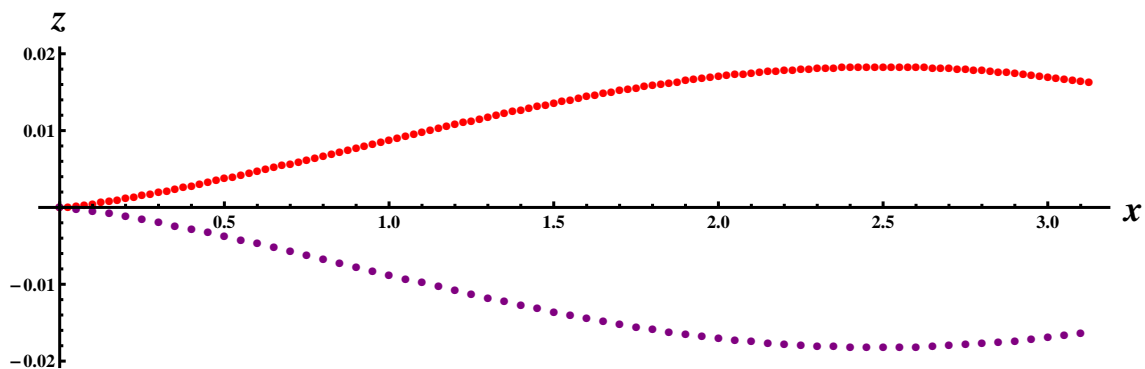
Obrázek 4.12: Chyby přibližného řešení pro Rungeovu-Kuttovu metodu 2. řádu: funkce y



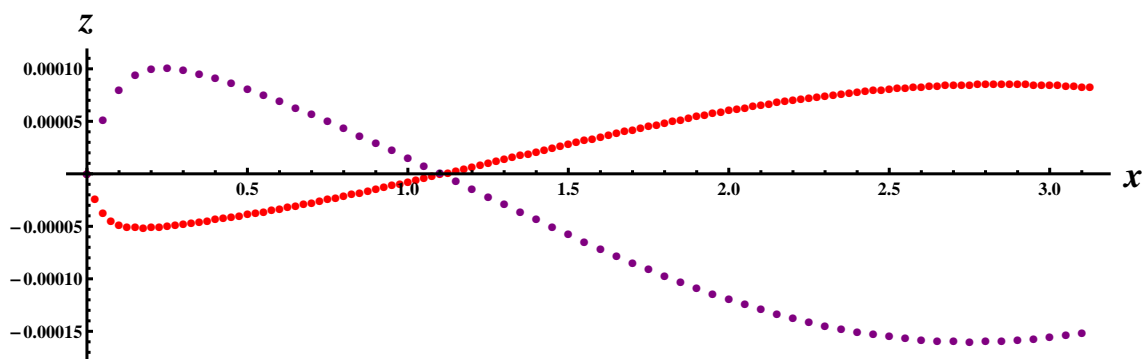
Obrázek 4.13: Chyby přibližného řešení pro Rungeovu-Kuttovu metodu 4. řádu: funkce y



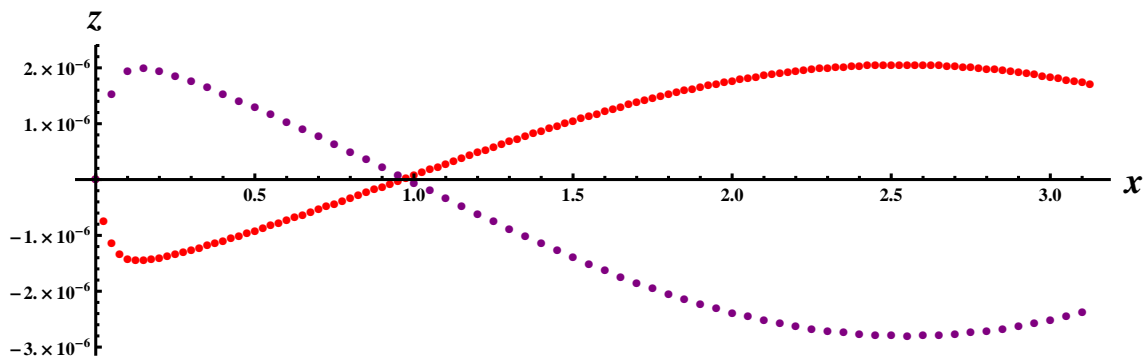
Obrázek 4.14: Chyby přibližného řešení pro explicitní Eulerovu metodu: funkce z



Obrázek 4.15: Chyby přibližného řešení pro implicitní Eulerovu metodu: funkce z



Obrázek 4.16: Chyby přibližného řešení pro Rungeovu-Kuttovu metodu 2. řádu: funkce z



Obrázek 4.17: Chyby přibližného řešení pro Rungeovu-Kuttovu metodu 4. řádu: funkce z

Příklad 2.

Mějme soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} y' &= 1 + y \\ z' &= z - 2yz^2 \end{aligned}$$

s počátečními podmínkami

$$y(0) = 0 \quad z(0) = 0.5$$

Přesným řešením této soustavy diferenciálních rovnic je

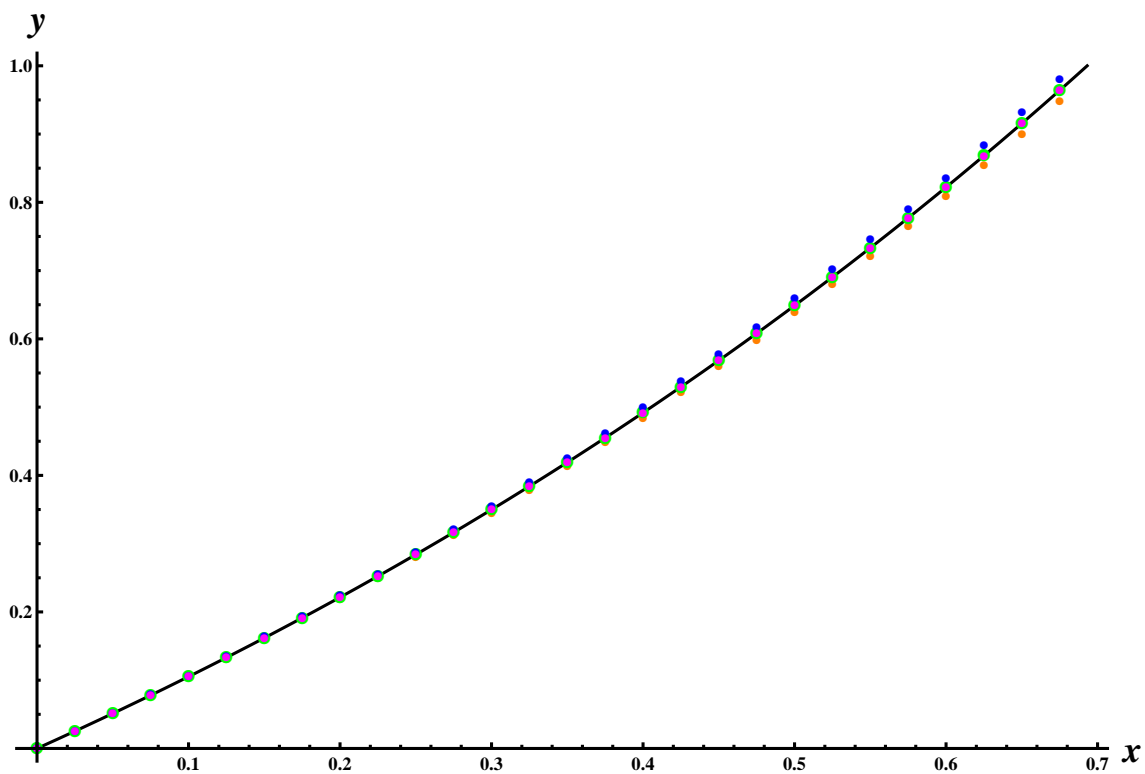
$$y(x) = -1 + e^x, \quad z(x) = \frac{e^x}{-2e^x + e^{2x} + 3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zavedeme označení: $f^1(x, y, z) = 1 + y$, $f^2(x, y, z) = z - 2yz^2$.

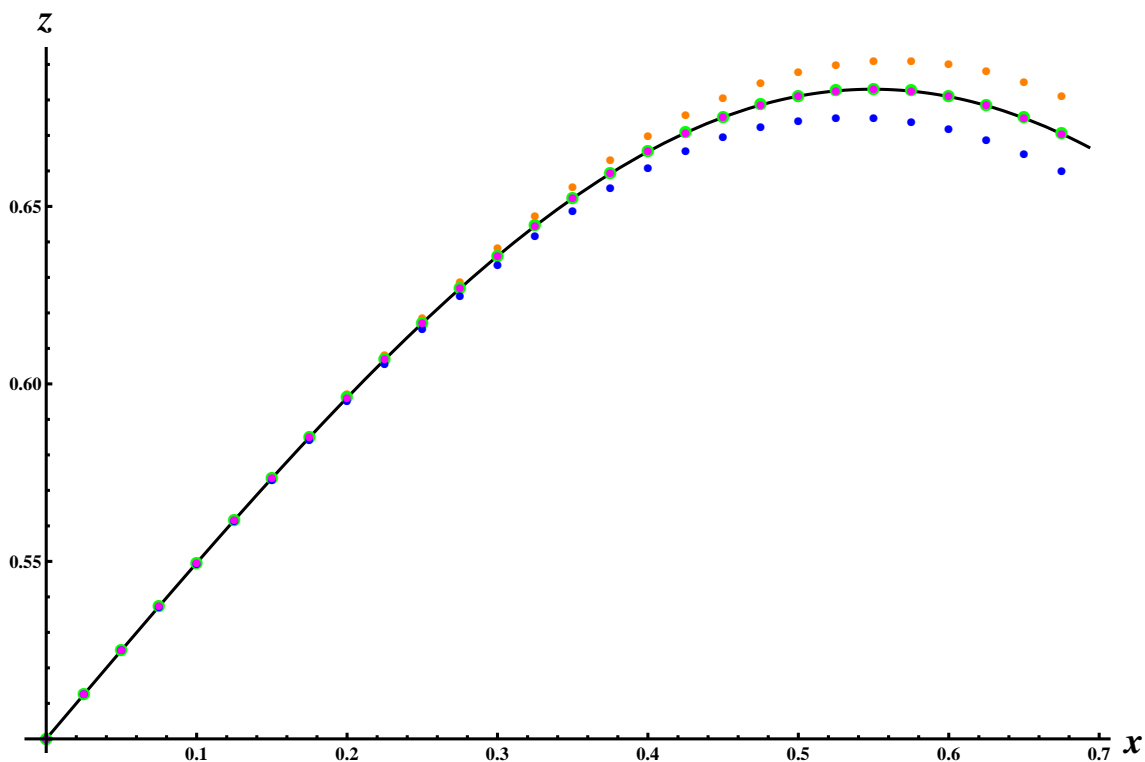
Na obrázku 4.18 a 4.19 jsou vyobrazena numerická řešení vypočítaná s krokem $h = 0.025$ na intervalu $[0, \ln 2]$ pomocí všech výše uvedených metod. Barvy mají stejný význam jako v tabulce 4.1.

Při programování implicitní Eulerovy metody bylo nutné vyřešit soustavu dvou nelineárních rovnic, k tomu jsme užili již v Mathematice předprogramované funkce NSolve.

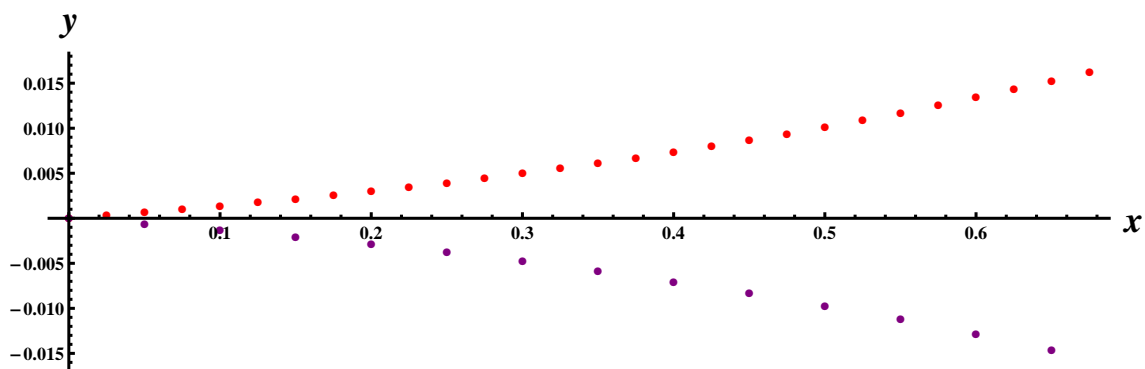
Na obrázcích 4.20 - 4.27 jsou vyobrazeny chyby vypočítané pomocí metody polovičního kroku a akumulovaná diskretizační chyba všech metod s krokem $h = 0.025$. Barvy mají stejný význam jako v tabulce 4.2. V obou případech obdržíme největší chybu při počítání řešení pomocí implicitní Eulerovy metody a nejpřesnější řešení získáme pomocí Rungeovy-Kuttovy metody 4. řádu.



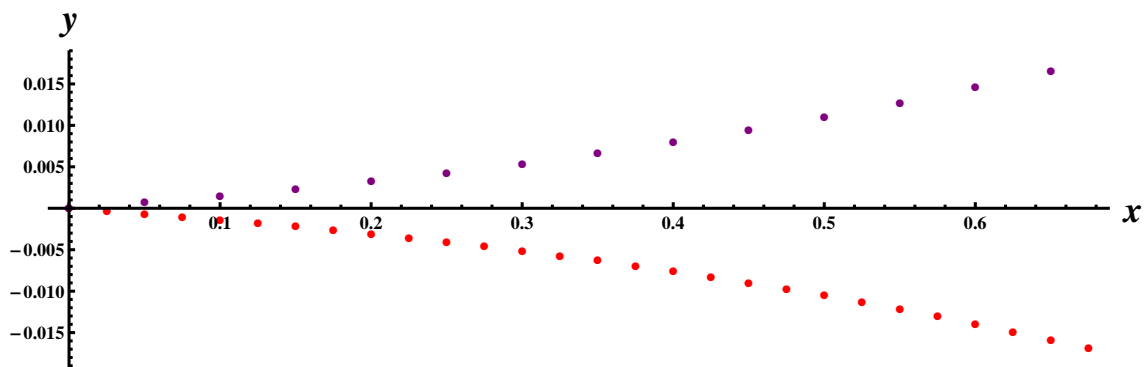
Obrázek 4.18: Přibližná řešení: funkce y



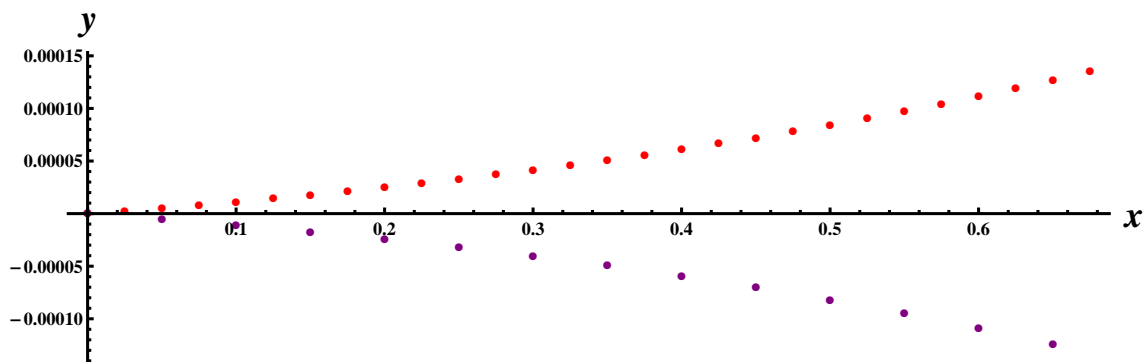
Obrázek 4.19: Přibližná řešení: funkce z



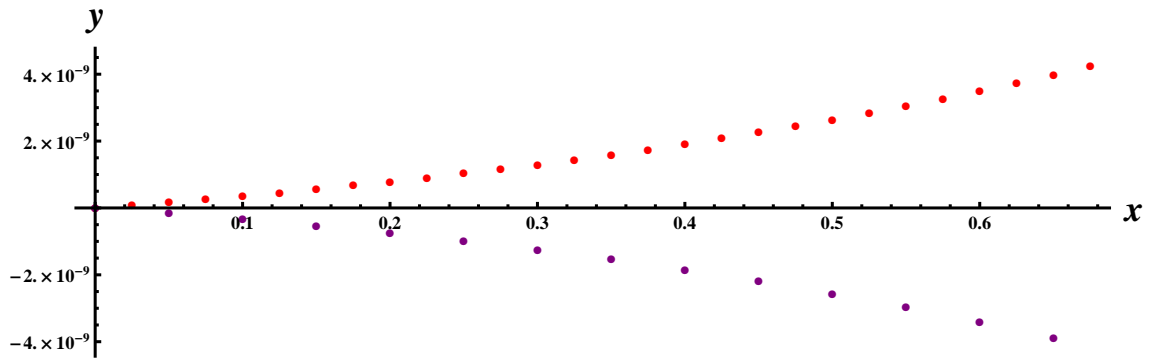
Obrázek 4.20: Chyby přibližného řešení pro explicitní Eulerovu metodu: funkce y



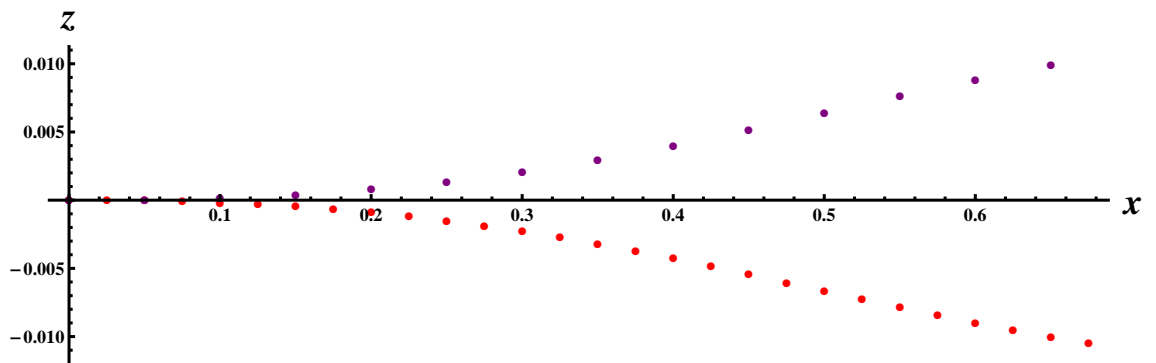
Obrázek 4.21: Chyby přibližného řešení pro implicitní Eulerovu metodu: funkce y



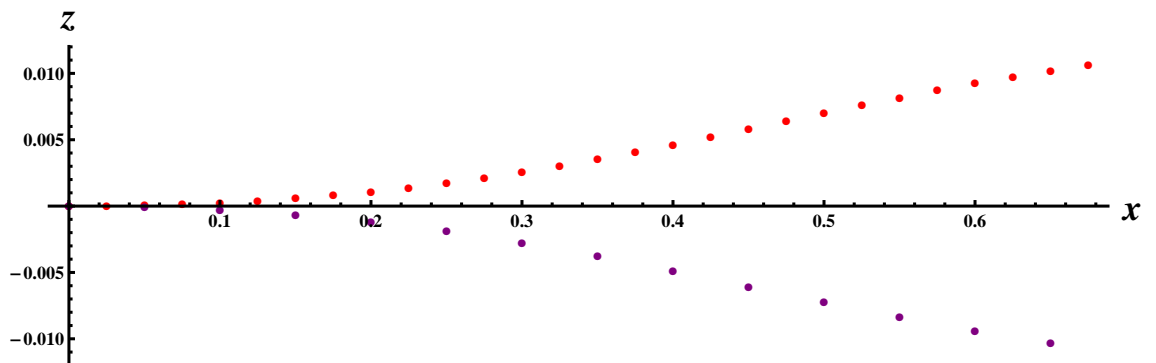
Obrázek 4.22: Chyby přibližného řešení pro Rungeovu-Kuttovu metodu 2. řádu: funkce y



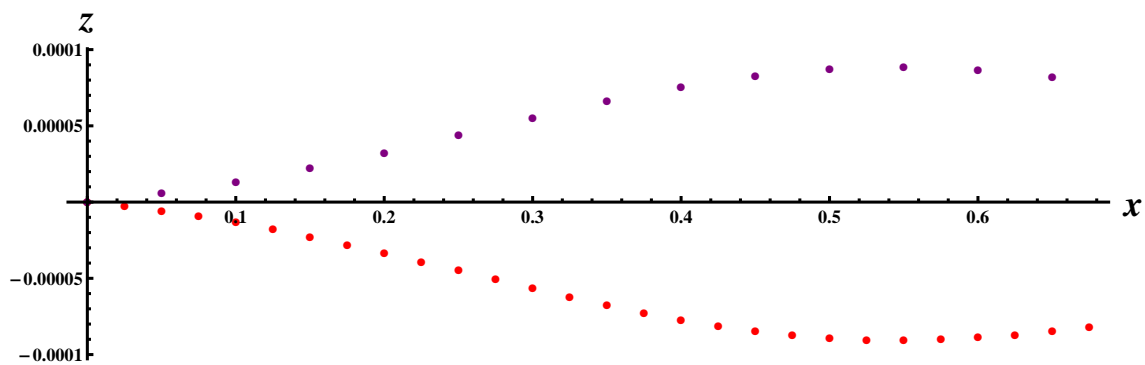
Obrázek 4.23: Chyby přibližného řešení pro Rungeovu-Kuttovu metodu 4. řádu: funkce y



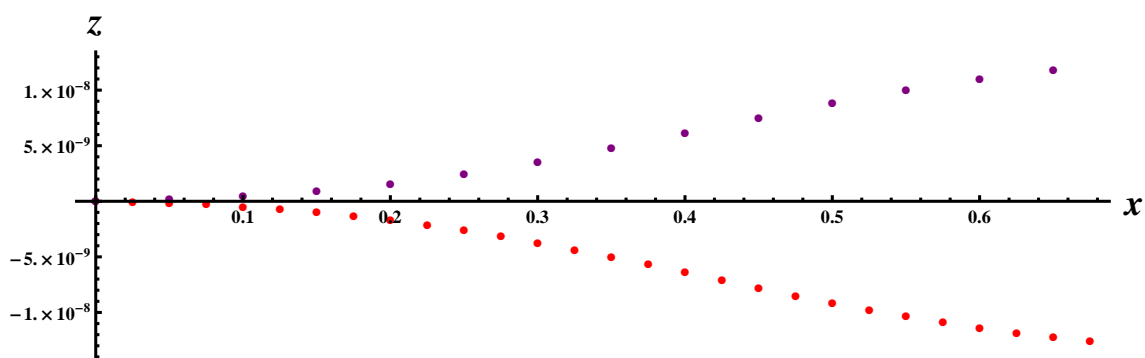
Obrázek 4.24: Chyby přibližného řešení pro explicitní Eulerovu metodu: funkce z



Obrázek 4.25: Chyby přibližného řešení pro implicitní Eulerovu metodu: funkce z



Obrázek 4.26: Chyby přibližného řešení pro Rungeovu-Kuttovu metodu 2. řádu: funkce z



Obrázek 4.27: Chyby přibližného řešení pro Rungeovu-Kuttovu metodu 4. řádu: funkce z

4.3 Keplerův problém

Jako poslední příklad uvedeme Keplerův problém.

Cílem je určit dráhu planety v důsledku přitažlivé síly mezi planetou obíhající kolem těžkého Slunce. Sílu, kterou působí planeta na Slunce, zanedbáme a Slunce budeme považovat za stacionární těleso.

Nechť $y_1(x)$ a $y_2(x)$ značí souřadnice polohy planety v čase x v kartézském souřadném systému s počátkem ve středu Slunce. Nechť $y_3(x)$ a $y_4(x)$ označuje komponenty rychlosti planety. Jestliže M označuje hmotnost Slunce, γ je gravitační konstanta a m je hmotnost planety, potom přitažlivá síla $F = (F_1, F_2)$ působící na planetu bude mít složky

$$F_i = \frac{-\gamma M m y_i}{y_1^2 + y_2^2}, \quad i = 1, 2$$

Navíc, podle Newtonova pohybového zákona

$$F = m y'',$$

kde $y'' = (y_1'', y_2'')$, dostáváme

$$y_1'' = \frac{-\gamma M y_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}}, \quad y_2'' = \frac{-\gamma M y_2}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}}.$$

Tuto soustavu můžeme přepsat jako soustavu rovnic 1. řádu (viz. příklad 2.) ve tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= y_3, \\ y_2' &= y_4, \\ y_3' &= \frac{-\gamma M y_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}}, \\ y_4' &= \frac{-\gamma M y_2}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Použitím substituce:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{1}{\sqrt{\gamma M}}, \\ u(\tilde{x}) &= y_1(x), \\ v(\tilde{x}) &= y_2(x), \\ y(\tilde{x}) &= \frac{1}{\sqrt{\gamma M}} y_3(x), \\ z(\tilde{x}) &= \frac{1}{\sqrt{\gamma M}} y_4(x) \end{aligned}$$

dostaneme

$$\begin{aligned} u' &= f^1(x, u, v, y, z) = y, \\ v' &= f^2(x, u, v, y, z) = z, \\ y' &= f^3(x, u, v, y, z) = \frac{-u}{(u^2 + v^2)^{3/2}}, \\ z' &= f^4(x, u, v, y, z) = \frac{-v}{(u^2 + v^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Přesným řešením této soustavy diferenciálních rovnic je:

$$u(x) = \cos(x), \quad v(x) = \sin(x), \quad y(x) = -\sin(x), \quad z(x) = \cos(x),$$

pro $x \in \mathbb{R}$.

K řešení této soustavy použijeme následující metody:

Explicitní Eulerova metoda:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + hf^1(x_n, u_n, v_n, y_n, z_n), & u_0 &= \eta_1, \\ v_{n+1} &= v_n + hf^2(x_n, u_n, v_n, y_n, z_n), & v_0 &= \eta_2, \\ y_{n+1} &= y_n + hf^3(x_n, u_n, v_n, y_n, z_n), & y_0 &= \eta_3, \\ z_{n+1} &= z_n + hf^4(x_n, u_n, v_n, y_n, z_n), & z_0 &= \eta_4, \end{aligned}$$

Rungeova-Kuttova metoda 2. řádu:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + hf^1\left(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}f^1(x_n, u_n, v_n, y_n, z_n), v_n + \frac{h}{2}f^2(x_n, u_n, v_n, y_n, z_n), \right. \\ &\quad \left. y_n + \frac{h}{2}f^3(x_n, u_n, v_n, y_n, z_n), z_n + \frac{h}{2}f^4(x_n, u_n, v_n, y_n, z_n)\right), & u_0 &= \eta_1, \\ v_{n+1} &= v_n + hf^2\left(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}f^1(x_n, u_n, v_n, y_n, z_n), v_n + \frac{h}{2}f^2(x_n, u_n, v_n, y_n, z_n), \right. \\ &\quad \left. y_n + \frac{h}{2}f^3(x_n, u_n, v_n, y_n, z_n), z_n + \frac{h}{2}f^4(x_n, u_n, v_n, y_n, z_n)\right), & v_0 &= \eta_2, \\ y_{n+1} &= y_n + hf^3\left(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}f^1(x_n, u_n, v_n, y_n, z_n), v_n + \frac{h}{2}f^2(x_n, u_n, v_n, y_n, z_n), \right. \\ &\quad \left. y_n + \frac{h}{2}f^3(x_n, u_n, v_n, y_n, z_n), z_n + \frac{h}{2}f^4(x_n, u_n, v_n, y_n, z_n)\right), & y_0 &= \eta_3, \\ z_{n+1} &= z_n + hf^4\left(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}f^1(x_n, u_n, v_n, y_n, z_n), v_n + \frac{h}{2}f^2(x_n, u_n, v_n, y_n, z_n), \right. \\ &\quad \left. y_n + \frac{h}{2}f^3(x_n, u_n, v_n, y_n, z_n), z_n + \frac{h}{2}f^4(x_n, u_n, v_n, y_n, z_n)\right), & z_0 &= \eta_4, \end{aligned}$$

Rungeova-Kuttova metoda 4. řádu:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), & u_0 &= \eta_1, \\ v_{n+1} &= v_n + \frac{1}{6}h(k_{11} + 2k_{22} + 2k_{33} + k_{44}), & v_0 &= \eta_2, \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}h(k_{111} + 2k_{222} + 2k_{333} + k_{444}), & y_0 &= \eta_3, \\ z_{n+1} &= z_n + \frac{1}{6}h(k_{1111} + 2k_{2222} + 2k_{3333} + k_{4444}), & z_0 &= \eta_4, \end{aligned}$$

kde

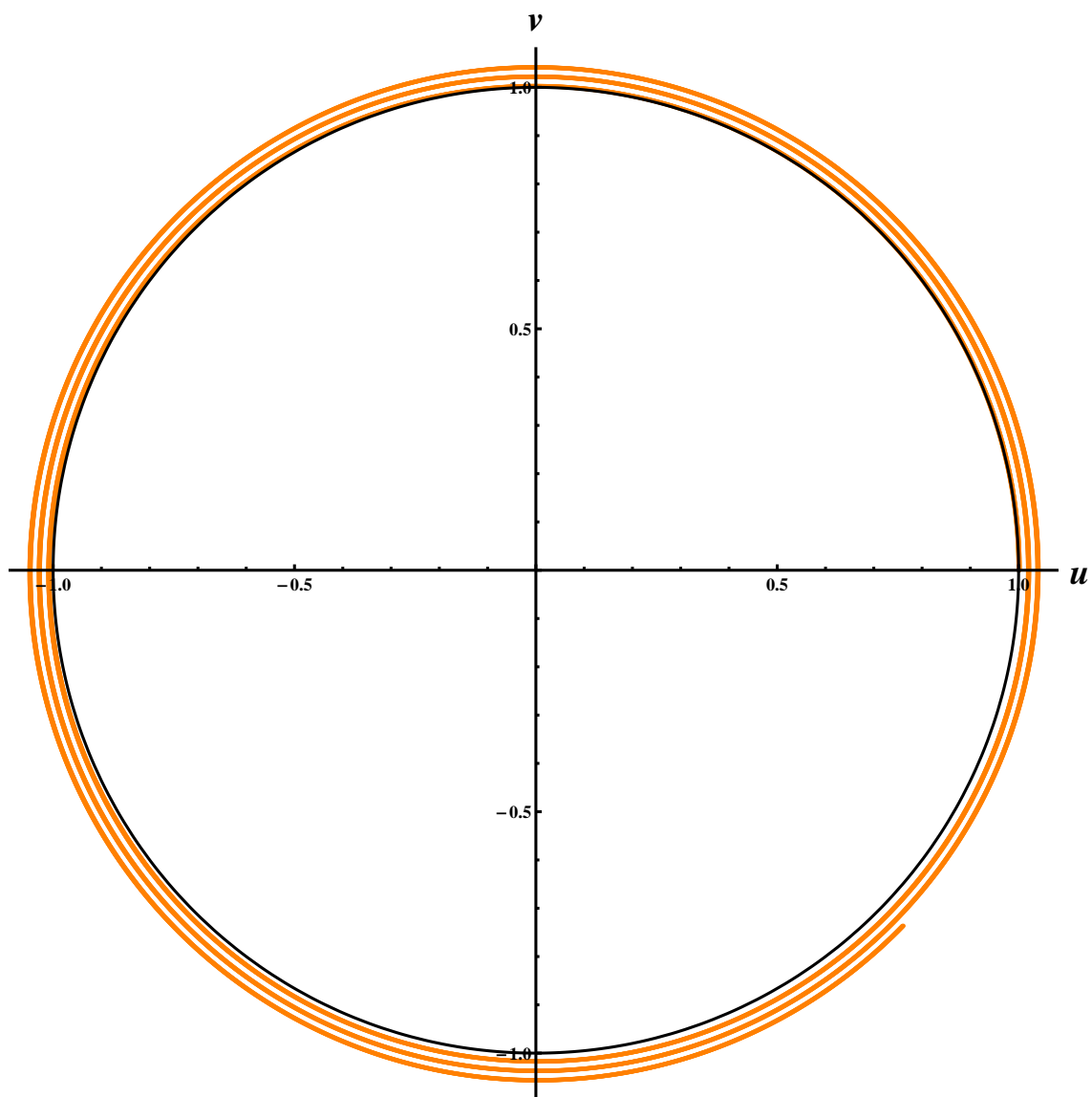
$$\begin{aligned}
k_1 &= f^1(x_n, u_n, v_n, y_n, z_n), \\
k_{11} &= f^2(x_n, u_n, v_n, y_n, z_n), \\
k_{111} &= f^3(x_n, u_n, v_n, y_n, z_n), \\
k_{1111} &= f^4(x_n, u_n, v_n, y_n, z_n), \\
k_2 &= f^1(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}k_1, v_n + \frac{h}{2}k_{11}, y_n + \frac{h}{2}k_{111}, z_n + \frac{h}{2}k_{1111}), \\
k_{22} &= f^2(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}k_1, v_n + \frac{h}{2}k_{11}, y_n + \frac{h}{2}k_{111}, z_n + \frac{h}{2}k_{1111}), \\
k_{222} &= f^3(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}k_1, v_n + \frac{h}{2}k_{11}, y_n + \frac{h}{2}k_{111}, z_n + \frac{h}{2}k_{1111}), \\
k_{2222} &= f^4(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}k_1, v_n + \frac{h}{2}k_{11}, y_n + \frac{h}{2}k_{111}, z_n + \frac{h}{2}k_{1111}), \\
k_3 &= f^1(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}k_2, v_n + \frac{h}{2}k_{22}, y_n + \frac{h}{2}k_{222}, z_n + \frac{h}{2}k_{2222}), \\
k_{33} &= f^2(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}k_2, v_n + \frac{h}{2}k_{22}, y_n + \frac{h}{2}k_{222}, z_n + \frac{h}{2}k_{2222}), \\
k_{333} &= f^3(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}k_2, v_n + \frac{h}{2}k_{22}, y_n + \frac{h}{2}k_{222}, z_n + \frac{h}{2}k_{2222}), \\
k_{3333} &= f^4(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}k_2, v_n + \frac{h}{2}k_{22}, y_n + \frac{h}{2}k_{222}, z_n + \frac{h}{2}k_{2222}), \\
k_4 &= f^1(x_n + h, u_n + hk_3, v_n + hk_{33}, y_n + hk_{333}, z_n + hk_{3333}), \\
k_{44} &= f^2(x_n + h, u_n + hk_3, v_n + hk_{33}, y_n + hk_{333}, z_n + hk_{3333}), \\
k_{444} &= f^3(x_n + h, u_n + hk_3, v_n + hk_{33}, y_n + hk_{333}, z_n + hk_{3333}), \\
k_{4444} &= f^4(x_n + h, u_n + hk_3, v_n + hk_{33}, y_n + hk_{333}, z_n + hk_{3333}).
\end{aligned}$$

Implicitní Eulerova metoda:

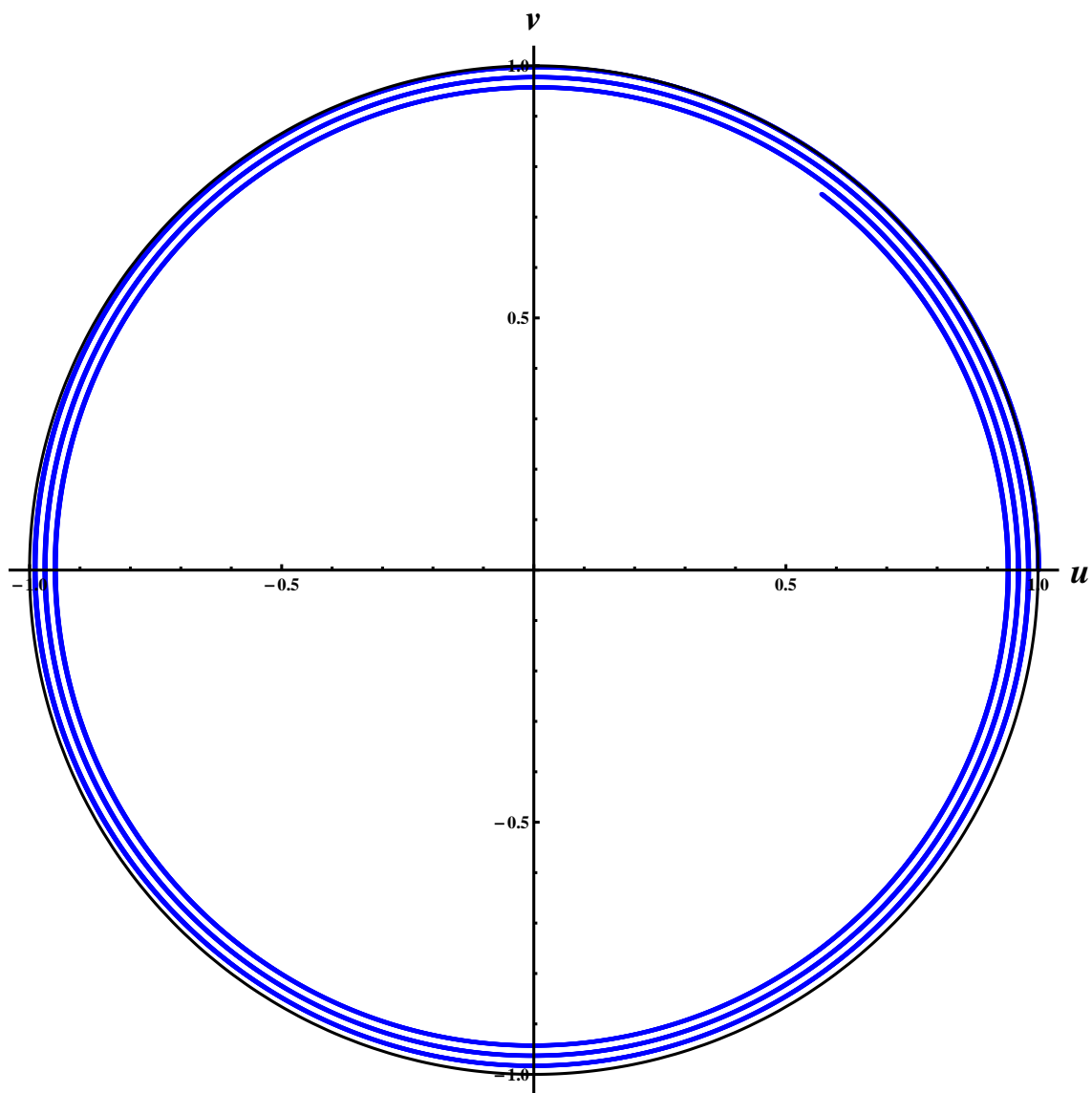
$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n + hf^1(x_{n+1}, u_{n+1}, v_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}), & u_0 &= \eta_1, \\
v_{n+1} &= v_n + hf^2(x_{n+1}, u_{n+1}, v_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}), & v_0 &= \eta_2, \\
y_{n+1} &= y_n + hf^3(x_{n+1}, u_{n+1}, v_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}), & y_0 &= \eta_3, \\
z_{n+1} &= z_n + hf^4(x_{n+1}, u_{n+1}, v_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}). & z_0 &= \eta_4.
\end{aligned}$$

Při programování implicitní Eulerovy metody bylo nutné vyřešit soustavu čtyř nelineárních rovnic, k tomu jsme užili již v Mathematice předprogramované funkce FindRoot.

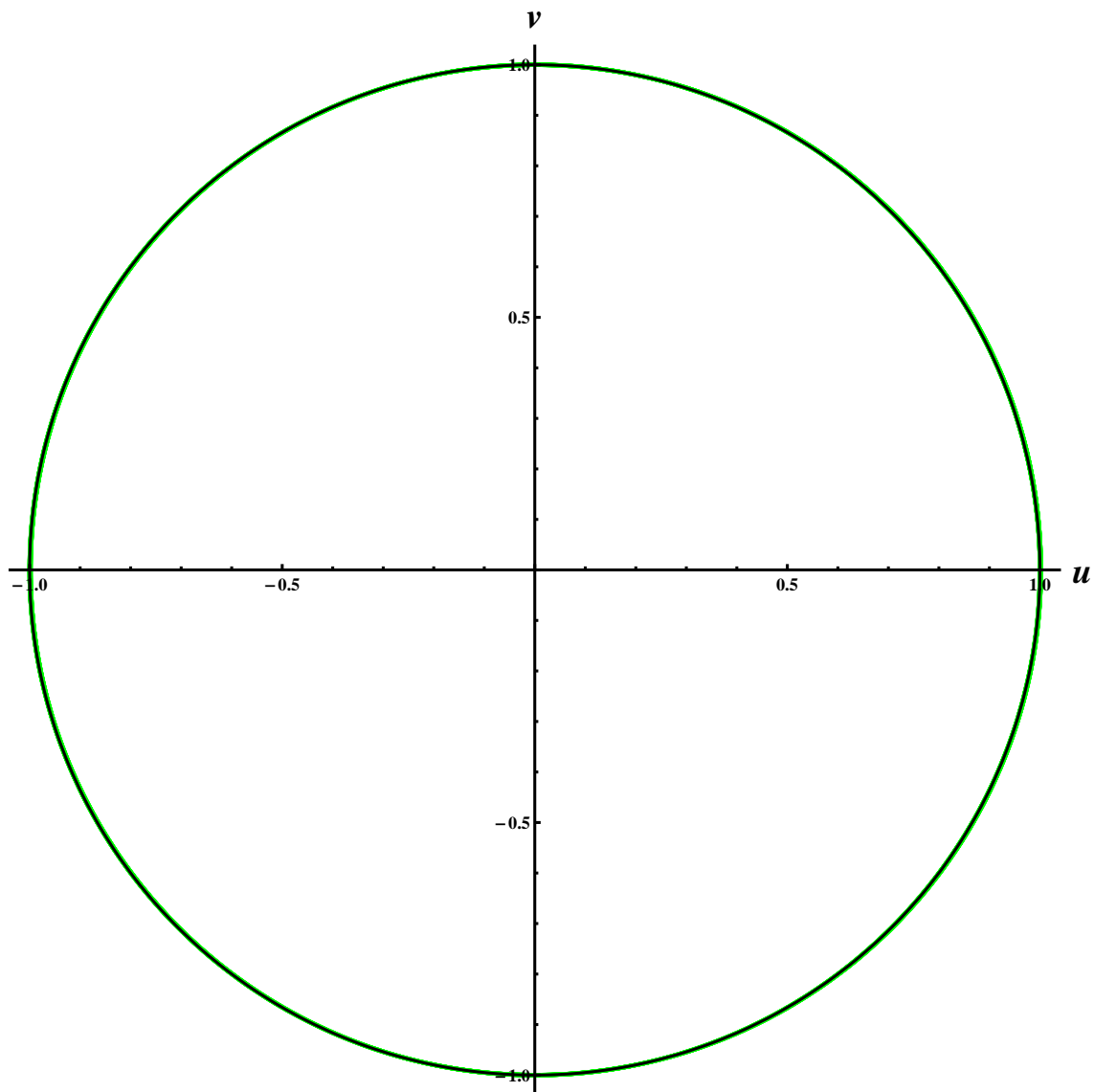
Na obrázcích 4.28-4.31 jsou vykreslené polohy planety vypočítané pomocí daných metod s krokem $\frac{\Pi}{2000}$ na intervalu $[0, 6\Pi]$, kde Slunce leží vždy v bodě $\{0, 0\}$. Barvy mají stejný význam jako v tabulce 4.1. Zjistili jsme, že se planeta pohybuje kolem Slunce po kruhové dráze. Vidíme, že u explicitní Eulerovy metody dochází ke vzdalování planety od Slunce, naopak a u implicitní Eulerovy metody dochází k přibližování planety ke Slunci. Rungeovy-Kuttovy metody popisují řešení mnohem přesněji než Eulerovy metody.



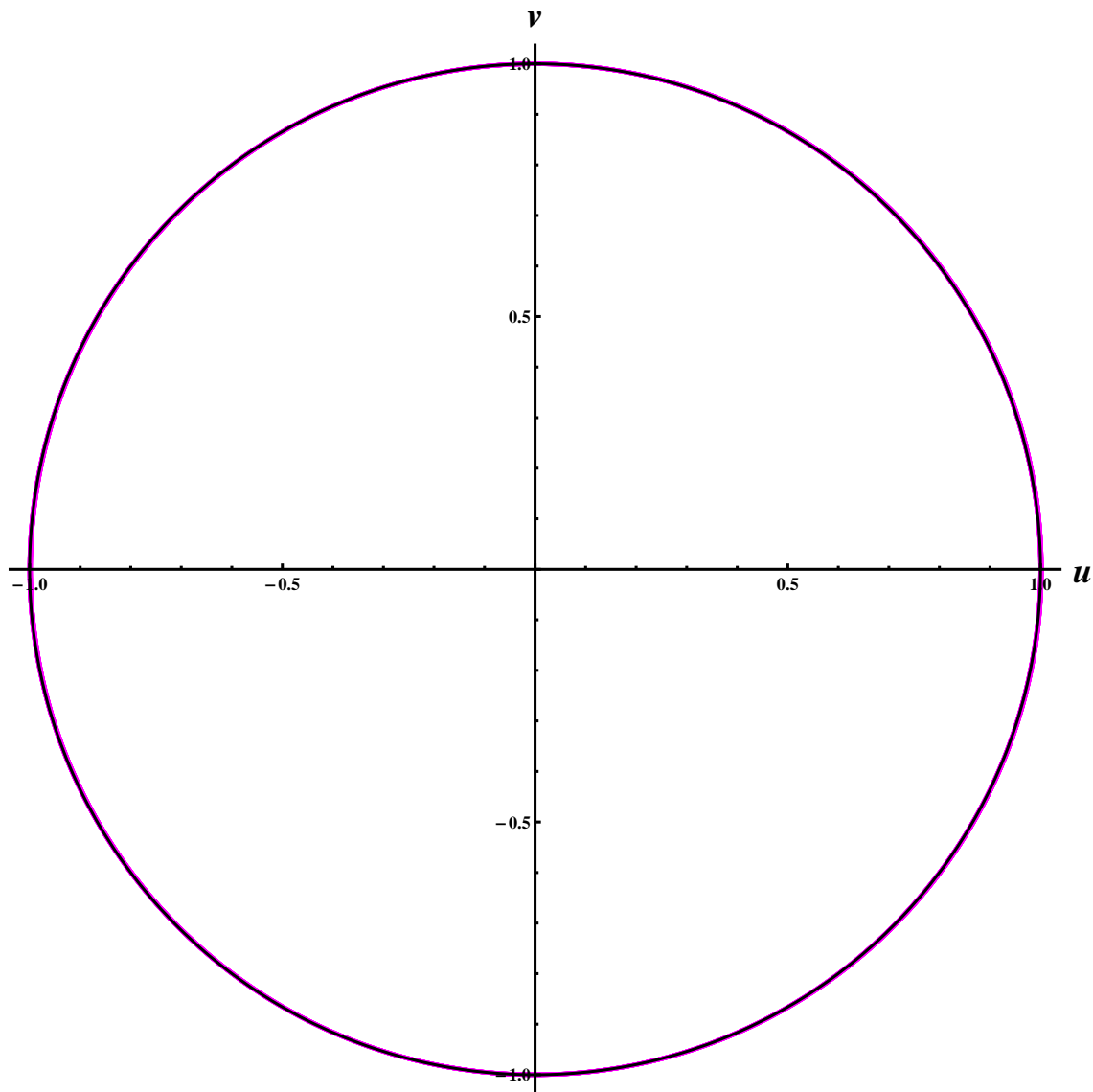
Obrázek 4.28: Poloha planety vypočítaná pomocí explicitní Eulerovy metody



Obrázek 4.29: Poloha planety vypočítaná pomocí implicitní Eulerovy metody



Obrázek 4.30: Poloha planety vypočítaná pomocí Rungeovy-Kuttovy metody 2. řádu



Obrázek 4.31: Poloha planety vypočítaná pomocí Rungeovy-Kuttovy metody 4. řádu

Na obrázcích 4.32-4.35 je vyobrazen odhad chyby polohy planety vypočítaný pomocí metody polovičního kroku a akumulovaná diskretizační chyba metody na intervalu $[0, 6\Pi]$ s krokem $h = \frac{\Pi}{2000}$. Barvy mají stejný význam jako v tabulce 4.2. U těchto chyb jsme nejprve spočítali chyby souřadnic pomocí vzorů (3.24) a (3.20). Potom jsme pomocí Pythagorovy věty

$$\text{chyba} = \sqrt{e1^2 + e2^2},$$

kde

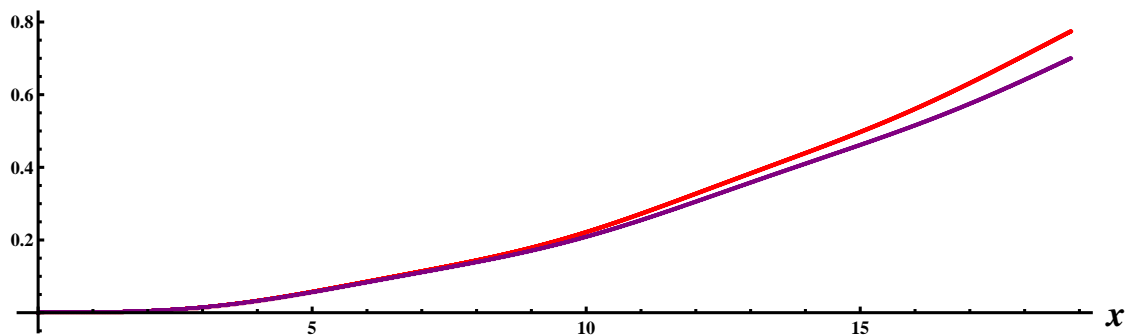
$$e1 = \frac{u_n^{(2h)} - u_{2n}^{(h)}}{(2^p - 1)} \quad \text{nebo} \quad e1 = \cos(x_n) - u_n,$$

$$e2 = \frac{v_n^{(2h)} - v_{2n}^{(h)}}{(2^p - 1)} \quad \text{nebo} \quad e2 = \sin(x_n) - v_n,$$

vypočítali nejhorší možnou chybu.

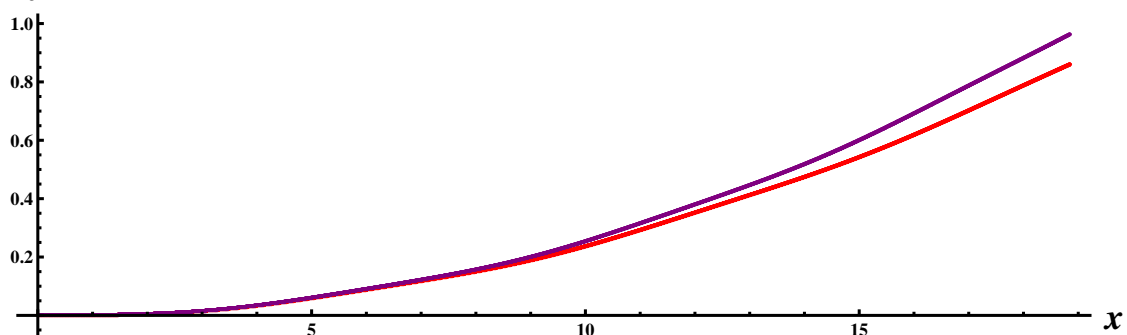
Zjistili jsme, že v obou případech se největší chyby dopouštíme v implicitní Eulerově metodě. I při takto jemném dělení dostáváme pomocí explicitní a implicitní Eulerovy metody po chvíli dost nepřesné řešení. Naopak pomocí Rungeových-Kuttových metod dostáváme řešení, které popisuje skutečné řešení docela přesně. Chyba sice roste, ale její hodnoty jsou u Rungeovy-Kuttovy metody 2. řádu velikosti 10^{-5} a u Rungeovy-Kuttovy metody 4. řádu dokonce velikosti 10^{-12} .

chyba

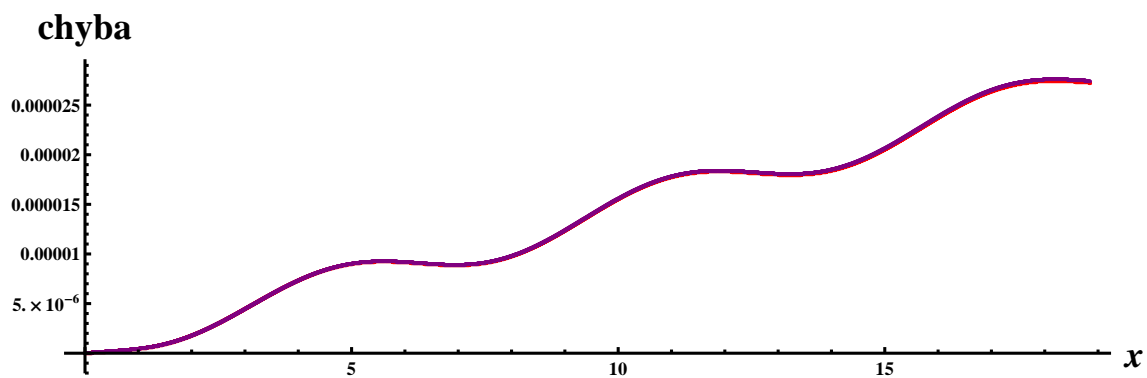


Obrázek 4.32: Chyby přibližného řešení pro explicitní Eulerovu metodu

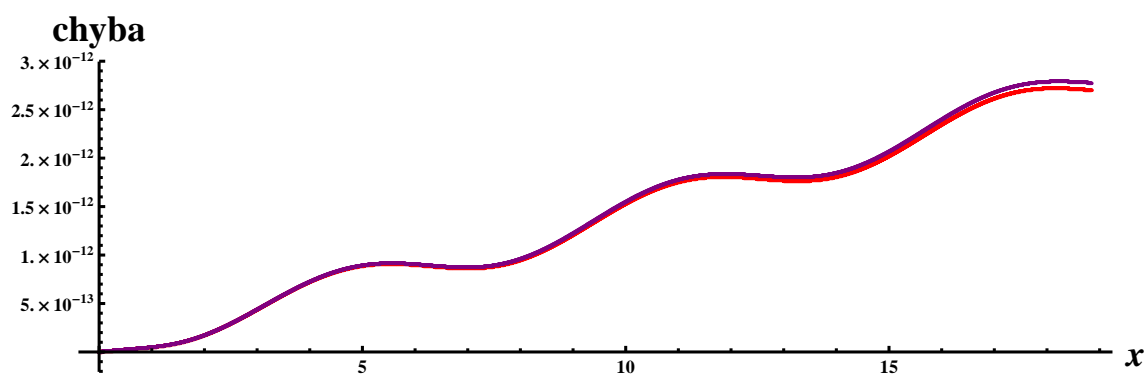
chyba



Obrázek 4.33: Chyby přibližného řešení pro implicitní Eulerovu metodu



Obrázek 4.34: Chyby přibližného řešení pro Rungeovu-Kuttovu metodu 2. řádu



Obrázek 4.35: Chyby přibližného řešení pro Rungeovu-Kuttovu metodu 4. řádu

Závěr

Účelem této práce bylo seznámit se s jednokrokovými numerickými metodami řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Naprogramovat program pro řešení daných příkladů pomocí těchto metod a srovnat numerická řešení s přesnými řešeními těchto příkladů.

První část této práce byla věnována seznámení se s obyčejnými diferenciálními rovnicemi, v další části jsme se zabývali tím, zda existuje řešení obyčejných diferenciálních rovnic a zda ho lze jednoznačně určit. V následující části jsme se zabývali samotným odvozením jednokrokových numerických metod pro řešení ODR. Zjišťovali jsme také odhad chyby těchto metod. Některé metody jsme potom aplikovali na vybrané příklady.

Zjistili jsme, že přesnost numerického řešení závisí na velikosti kroku metody. Čím je krok menší, tím je řešení přesnější. Dále velikost chyby závisí na délce intervalu. Pokud je interval, na kterém hledáme řešení dlouhý, pak se chyba numerického řešení zvětšuje směrem k horní hranici intervalu. Pomocí Rungeových-Kuttových metod získáváme přesnější numerické řešení, než pomocí Eulerových metod. Dále jsme srovnávali skutečnou chybu řešení a chybu vypočítanou pomocí metody polovičního kroku. Velikosti těchto chyb byly u daných metod stejného řádu.

Literatura

- [1] Butcher J.C.: *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, Wiley, Chichester, 2003.
- [2] Feistauer M.: *Diskrétní metody řešení diferenciálních rovnic*, SPN, Praha, 1981.
- [3] Quarteroni A., Sacco R., Saleri F.: *Numerical Mathematics*, Springer, New York, 2000.
- [4] Ralston A.: *Základy numerické matematiky*, Academia, Praha, 1973.
- [5] Jarník V.: *Diferenciální počet II*, ČSAV, Praha , 1956.
- [6] http://cs.wikipedia.org/wiki/Banachova_věta_o_pevném_bodě
- [7] <http://mathonline.fme.vutbr.cz/Zaklady-teorie-ODR/sc-48-sr-1-a-17/default.aspx>

Seznam použitých zkratek

def f - definiční obor funkce f

ODR - obyčejné diferenciální rovnice