UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Kombinatorické úlohy v matematických soutěžích

Combinatorics in mathematics competitions

Autor: Václav Kadeřábek

Vedoucí práce: RNDr. Antonín Jančařík, Ph.D.

Praha 2011

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením RNDr. Antonína Jančaříka, Ph.D. a uvedl v seznamu všechnu použitou literaturu.

V Praze dne 22.června 2011 ________________________

Kadeřábek Václav

Poděkování:

Rád bych poděkoval RNDr. Antonínu Jančaříkovi, Ph.D. za trpělivost, hodnotné rady a odborné vedení při tvorbě mojí bakalářské práce.

Obsah

Abstrakt

Práce pojednává o možnostech rozdělení kombinatorických úloh, které se vyskytují v matematických soutěžích. Obsahuje představení kombinatoriky vyučované na středních školách. Poukazuje na rozdíly mezi řešením úloh ve školách a na matematických soutěžích. Pomocí grafů a tabulek znázorňuje nerovnoměrné rozdělení kombinatorických úloh. Na závěr nabízí typy příkladů, které v soutěžích chybí, nebo jsou tam v nedostatečném počtu.

Klíčová slova

Kombinatorika, variace, permutace, kombinace, matematická soutěž

Abstract

This work analyzes the possibilities of division of combinatorial problems that occur in mathematical competitions. It contains presentation of Combinatorics taught at secondary schools. It shows the differences between solving problems in schools and math competitions. Using graphs and tables, it demonstrates an unbalanced distribution of combinatorial problems. In conclusion, it offers some types of examples that are missing in competitions, or are there in insufficient numbers.

Keywords

Combinatorics, variations, permutations, combinations, mathematical competition

Úvod

Již na základní škole jsem se účastnil matematických soutěží. Ať už to byl Matematický klokan, Pythagoriáda, matematická olympiáda nebo třeba soutěž Dejte hlavy dohromady. Vždy jsem se velmi rád zapojil a snažil se dobře reprezentovat sebe i svoji školu.

Nejvíce se mi líbilo, že v matematických soutěžích nalézám úlohy, které jsou něčím netypické. Řešení soutěžních úloh bylo většinou odlišné od těch, se kterými jsem se setkával ve škole. Vždy bylo potřeba správně pochopit zadání úlohy. Matematické soutěže jsou pro mě místem, kde i ve škole vítězí selský rozum nad formalismem, reprezentovaným spoustou vzorečků. Tím neříkám, že vyučující ve škole potlačují selský rozum. Spíš se domnívám, že na vymýšlení vlastních způsobů řešení úloh není ve škole tolik času.

Tuto myšlenku přesně vystihuje citát Prof. Milana Hejného: *Když se vás někdo zeptá, kolik máte doma na stěně obrazů, odpovíte správně, ale až po chvíli. Ve své paměti máte uloženo schéma vašeho bytu, a proto můžete obrazy spočítat. Ve škole je ale taková odpověď hodnocena slovy: Jde to z tebe jako z chlupaté deky. Nabiflovaný žák, který odpoví hbitě, dostane jedničku. Navzdory tomu, že o obrazech nemá představu.* (Šteflová 2010)

Na střední škole můj zájem o matematické soutěže bohužel zeslábl. Účastnil jsem se pouze Matematických klokanů. Děním v ostatních matematických soutěžích jsem byl nedotčen.

Na vysoké škole můj zájem o matematiku znovu vzrostl. Zejména protože jsem měl větší prostor na individuální řešení úloh. V tomto ohledu mě zaujala kombinatorika, kde existuje mnoho správných řešení. Přitom pouze jediné je univerzální. Vypsání všech možností. Každý asi cítí, že toto řešení nebude vždy ideální, protože možností může být opravdu mnoho.

Ve své práci se budu zabývat kombinatorikou. Podle autora první kombinatorické učebnice E. Netta je kombinatorika *část matematiky zabývající se rozdělováním, uspořádáváním nebo výběrem prvků nějaké množiny*.

Prací, které se snaží zachytit úskalí a krásy kombinatoriky, existuje řada. Mnohé z nich mi byly inspirací při tvorbě této práce. Nenašel jsem však práci, která by se zabývala kombinatorikou ve spojení s matematickými soutěžemi. To je cílem mé bakalářské práce.

Bakalářská práce je celkem rozdělena na čtyři části. V první části poukazuji na způsob a rozsah výuky kombinatoriky na školách. Nedávám si za cíl vytvořit učebnici kombinatoriky ani nic podobného. Teorie je vysvětlena stručně, ale nemohl jsem ji vynechat, protože se na ni budu odkazovat v dalším textu. Každý pojem, který je vysvětlen, je také předveden na příkladu. Ve druhé části bakalářské práce představím možnosti, jak charakterizovat kombinatorické úlohy v matematických soutěžích. Ke každé možnosti přidám příklad z matematické soutěže. V další části rozdělím vybrané úlohy podle předchozích kritérií. Na grafech a tabulkách ukážu, které kombinatorické úlohy nám v matematických soutěžích nejvíce chybí. V části poslední se pokusím vytvořit několik úloh, které by mohly být inspirací pro tvůrce úloh v matematických soutěžích. U těchto úloh je vysvětleno možné řešení.

Kombinatorika ve školách

S kombinatorickými úlohami se studenti setkávají již na základních školách, kde se je snaží řešit především intuitivně. Způsob řešení kombinatorických úloh je většinou logickou úvahou nebo vzhledem k jednoduchosti výčtem možností.

Na gymnáziích a středních školách se kombinatorika vyučuje většinou na konci druhého ročníku. K zvládnutí tohoto učiva žáci nepotřebují téměř žádné předchozí vědomosti. Postačí jim základní algebraické znalosti, dobré logické myšlení a často také zdravý rozum. Přesto (nebo možná právě proto) patří kombinatorika k obtížnějším částem matematiky, se kterou mívají problém i jinak dobří studenti. (Voglová 2006) Důvodem, proč je kombinatorika pro většinu studentů obtížná, je to, že k řešení kombinatorických úloh můžeme zaujmout dva naprosto rozdílné přístupy. První přístup je ten, že se snažíme získat vhled do problému a postupně tento problém dělíme na různé celky, se kterými jsme pak schopni snadno pracovat. Druhý přístup je zcela odlišný. Snaží se pochopit kombinatorické vzorce a ty potom uplatnit na jednotlivé úlohy.

Na školách se většinou setkáváme s druhým přístupem k úloze, kterým je pochopení a využívání kombinatorických vzorců. Osobně si myslím, že je to škoda, že by pro studenty bylo vhodnější nezahrnovat kombinatoriku do několika vzorců, ale spíš přednášet jako disciplínu, která si říká o pochopení. Také tvůrci učebnic se přiklánějí k tradičnímu způsobu výuky kombinatoriky, což je pochopitelné – proč vytvářet učebnice podle kterých by se neučilo.

Na obhajobu učitelů je důležité zmínit, že výuka kombinatoriky založená na hlubším pochopení úloh, by byla takřka nemožná. Když se podíváme na počty žáků ve třídách na středních školách, tak podle České školní inspekce je minimální počet studentů ve třídě na střední škole 17. Maximální počet je potom stanoven na 30 žáků ve třídě. Představa, že vyučující by s každým žákem konzultoval rozbor úlohy individuálně, je úsměvná. Vybrat sešity od studentů a do každého nahlédnout je otázka chvíle, ale rozebírat s každým studentem jeho způsob řešení úlohy je při délce vyučovací hodiny nezvládnutelné. Představíme-li si, že by se zvýšila hodinová dotace matematiky a takovýto systém výuky kombinatoriky by se dal praktikovat, tak narazíme na náročnost výuky pro vyučujícího. Nejen že by musel sám vědět jak úlohu vyřešit, ale také by musel pochopit způsob řešení studentů, který může být od jeho, řekněme ideálního, řešení naprosto odlišný, ale také správný. Navíc pokud by při rozboru řešení přišel na nějakou chybu, tak by měl studentovi ukázat, v čem jsou jeho úvahy mylné a proč. Měl by mu samozřejmě navrhnout nějaký jiný způsob řešení, ale to takový, který je student schopen pochopit a nejen zopakovat. Také by to mělo být řešení, které by byl sám schopen vymyslet. Toto by ale mohl být vcelku problém, pokud se nezmění příprava budoucích učitelů v oboru kombinatoriky.

Studenti, nastupující v roce 2008 na dvouoborové studium matematiky a druhého předmětu na PedF UK, neměli kombinatoriku jako povinný předmět. Byl to předmět povinně volitelný. Pro studenty dvouoborového studia matematiky a druhého předmětu, kteří nastoupili roku 2010, stále není kombinatorika povinným předmětem. Pouze studenti, kteří studují jednooborovou matematiku, mají povinný předmět s názvem Kombinatorika, který si zapisují ve druhém semestru. Myslím si, že znalost kombinatoriky ze střední školy není taková, aby se neobešla bez prohloubení vědomostí na vysoké škole.

Z výše uvedených informací lze vyvodit, že v blízké době nás nečekají převratné změny ve výuce kombinatoriky. Pojďme se tedy podívat na oblasti kombinatoriky, se kterými se na středních školách a gymnáziích setkáváme. Obsahem učiva by podle Rámcově vzdělávacího programu měly být elementární kombinatorické úlohy, variace, permutace a kombinace (bez opakování), které jsou doplněny binomickou větou a Pascalovým trojúhelníkem.

Základní kombinatorická pravidla

Různé způsoby řešení kombinatorických úloh jsou odvozené ze dvou základních pravidel. Jedná se o pravidlo součtu a pravidlo součinu. S těmito pravidly se setkal téměř každý, jen o tom nemusel vědět. Na příkladu lze ukázat, že tomu tak opravdu je.

Př.: Na turnaji ve volejbale hraje 5 družstev každé družstvo s každým. Na jak dlouho si organizátor musí pronajmout hřiště, jestliže jeden zápas trvá 20 minut? (proluky mezi zápasy neuvažujte)

Řešení: Je třeba dát pozor na to, že i když každý hraje stejný počet zápasů, tak při prostém vynásobení počtu družstev počtem zápasů nám vyjde výsledek chybný, protože každý zápas tam je započítán dvakrát. Univerzálním způsobem je vypsat si různé možnosti zápasů a ty potom sečíst. V tomto příkladu je pro nás zápas týmu A proti týmu B stejný jako zápas týmu B proti týmu A, takže ho započítáme pouze jednou. Tím zjistíme, že počet zápasů v turnaji je $4 + 3 + 2 + 1 = 10$. Proto si organizátor musí pronajmout hřiště na 200 minut (3hodiny 20minut).

Kombinatorické pravidlo součtu

Jsou-li $A_1, A_2, \ldots, A_n$ konečné množiny, které mají po řadě $p_1, p_2, \ldots, p_n$ prvků, a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ je roven $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$.

Toto je matematický popis pravidla součtu. Je možné, že většina studentů této formulaci nebude rozumět. Proto uvedu příklad, který názorně ukáže, co nám toto pravidlo říká.

Př.: *Urči počet všech přirozených dvojciferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou.* (Farská 2011)

Řešení: Všechna dvojciferná čísla můžeme rozložit do dvou disjunktních množin tak, že v první jsou dvojciferná čísla s různými číslicemi a ve druhé dvojciferná čísla se stejnými číslicemi. Je zřejmé, že všech dvojciferných čísel je 90, dvojciferných čísel s číslicemi stejnými je 9 (11,22, ... ,99). Bude-li p počet všech dvojciferných čísel s různými číslicemi, pak platí:

$$9 + p = 90$$
$$p = 81$$

Kombinatorické pravidlo součinu

Počet všech uspořádaných k-tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby atd., až k-tý člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

I k tomuto pravidlu se hodí výše uvedený příklad, který snad udělá tento popis přehlednější a pochopitelnější. Jako kontrola nám může sloužit fakt, že oba postupy musí vést ke stejnému výsledku.

Př.: *Urči počet všech přirozených dvojciferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou.* (Farská 2011)

Řešení: Na místě desítek může stát libovolná z devíti číslic 1,2,...,9 (na tomto místě nesmí být 0, protože by nebylo dvojciferné). Na místě jednotek může stát 0 nebo jakákoli číslice, která již nebyla umístěna na místo desítek. Máme tedy znovu 9 možností.

$$p = 9 * 9 = 81$$

Kombinatorické pravidlo součinu můžeme použít také v případě, kdy několikrát opakujeme výběr z určitých prvků, a zajímá nás, kolik různých pořadí může vzniknout.

Př.: *Kolik různých uspořádaných dvojic čísel můžeme dostat, když hodíme dvakrát kostkou s jedním až šesti oky na jednotlivých stěnách?* (Farská 2011)

Řešení: V prvním hodu může padnout jedno ze šesti čísel. Ke každému z nich může ve druhém hodu opět padnout jedno ze šesti čísel. Počet různých dvojic je tedy $6 \cdot 6 = \mathbf{36}$.

Variace bez opakování

Variace je vybraná uspořádaná k-tice prvků z konečné množiny, přičemž záleží na pořadí těchto prvků. Podle toho, jestli lze vybírat i prvky, které byly již jednou do výběru vybrány, rozlišujeme variace s opakováním a variace bez opakování. Variace s opakováním, stejně jako permutace a kombinace s opakováním, nejsou zahrnuty do rámcově vzdělávacího programu pro střední školy ani gymnázia.

k-členná variace z *n* prvků je uspořádaná *k*-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý prvek se v ní vyskytuje nejvýše jednou. Počet všech k-členných variací označujeme V_k(n).Tento počet se určí jako: $V_k(n) = n * (n-1) * (n-2) * \dots * (n-k+1)$ nebo $V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Jak ukazuje definice, variace je jedno konkrétní využití dříve zmiňovaného kombinatorického pravidla součinu. Na příkladu přiblížím, jak využít znalosti o variacích.

Př.: *V košíku je jablko, hruška, broskev a pomeranč. Kolika způsoby můžeme vybrat jedno ovoce k snídani, jedno ke svačině a jedno k obědu?* (Farská 2011)

Řešení 1: *K snídani můžeme vybrat libovolné ovoce, máme tedy 4 možnosti. Ke svačině už můžeme vybírat jen ze zbývajících tří druhů ovoce. Při výběru ovoce k obědu už budeme mít jen dvě možnosti. Podle kombinatorického pravidla součinu je tedy*

$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ *způsobů, jak vybrat ze čtyř kusů ovoce jedno k snídani, jedno ke svačině a jedno k obědu.* (Farská 2011)

<u>Řešení 2</u>: Hledáme tříčlennou variaci ze 4 prvků. Dosazením do vzorce dostaneme:

$$V_3(4) = \frac{4!}{1!} = 4 * 3 * 2 * 1 = 24 \text{ způsobů.}$$

Permutace bez opakování

Permutace je zvláštní případ variace, kde $k = n$. To znamená, že ze zadaných prvků postupně vybereme všechny. Každá permutace bez opakování tedy odpovídá nějakému pořadí zadaných prvků: každý prvek se v pořadí musí objevit, ale žádný tam nemůže být dvakrát.

Počet permutací z *n* prvků tedy odvodíme ze vzorce pro počet n-členných variací z *n* prvků:

$$V_k(n) = n * (n-1) * (n-2) * \dots * (n-k+1)$$

$$\text{Pro } k = n\text{: } V_n(n) = n * (n-1) * (n-2) * \dots * (n-n+1) =$$

$$= n * (n-1) * (n-2) * \dots * 1$$

Počet P(n) všech permutací z n prvků je $P(n) = n * (n-1) * (n-2) * \dots * 1$

Pro zjednodušení úprav při řešení permutací byl vytvořen symbol *n!*, který nazýváme *n* faktoriál. Při výuce se na středních školách nejčastěji setkáme s definicí typu:

$$n! = n * (n-1) * (n-2) * \dots * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 \quad n \in \mathbb{N}, n > 0$$

$$0! = 1$$

Snadno upravitelné do rekurentní podoby:

$$n! = n * (n-1)! \quad n \in \mathbb{N}, n > 0$$

$$0! = 1$$

Problematickou hodnotu 0! je možné ukázat i na jiných definicích faktoriálu. Většina těchto definic je bohužel nad rámec znalostí studentů při probírání kombinatoriky.

Se znalostí faktoriálů se vrátíme k permutacím, kde si nyní již můžeme dovolit napsat:

> Počet P(n) všech permutací z n prvků je $P(n) = n * (n-1) * (n-2) * \dots * 1$
>
> $$P(n) = n!$$

Př.: *Určete, kolika způsoby může 10 táborníků při nástupu na ranní rozcvičku nastoupit* ***a)*** *do řady* ***b)*** *do řady, v níž je táborník Aleš na kraji* ***c)*** *do řady, v níž táborníci Aleš a Zdeněk nestojí vedle sebe.*

Řešení:

a) *Jde o počet permutací z 10 prvků, takže počet způsobů, jak 10 táborníků může nastoupit do řady, je* $P(10) = \mathbf{10}!$

b) *Nejprve postavíme Aleše stranou a necháme nastoupit ostatních 9 táborníků. Podobně jako v případě* ***a)*** *jde o počet permutací z 9 prvků. Počet způsobů seřazení je tedy* $P(9) = 9!$*. Aleš se potom může zařadit buď na levý nebo na pravý kraj. Celkem je tedy* $\mathbf{2 * 9}!$ *způsobů seřazení 10 táborníků tak, aby byl Aleš na kraji.*

c) *Nejprve si uvědomíme, že platí následující rovnost: počet všech seřazení = počet takových seřazení, že Aleš a Zdeněk stojí vedle sebe + počet takových seřazení, že Aleš a Zdeněk vedle sebe nestojí. Počet všech seřazení jsme vypočítali v případě* ***a)*** *Víme tedy, že jejich počet je 10!. Počet způsobů, jak seřadit 10 táborníků tak, aby Aleš a Zdeněk stáli vedle sebe, určíme snadno. Spojíme je do dvojice a počítáme, kolika způsoby lze seřadit 9 prvků (8 táborníků + 1 dvojice). To lze 9! způsoby. Musíme si ale uvědomit, že Aleš a Zdeněk mohou být ve dvojici dvěma způsoby (Aleš vlevo a Zdeněk vpravo, nebo naopak). Celkem je tedy počet způsobů, jak seřadit 8 táborníků a jednu dvojici,* $2 * 9!$*. Teď už snadno zjistíme, kolik je způsobů seřazení deseti táborníků tak, aby Aleš a Zdeněk vedle sebe nestáli. Stačí od počtu všech možných seřazení odečíst počet takových, kde Aleš a Zdeněk stojí vedle sebe.*

$$10! - 2 * 9! = 10 * 9! - 2 * 9! = 8 * 9!.$$

(Farská 2011)

Kombinace bez opakování

Posledním ze způsobů řešení kombinatorických úloh, který se vyučuje na středních školách a gymnáziích, jsou kombinace bez opakování. Kombinace se od variací liší pouze tím, že nezáleží na pořadí vybraných prvků.

Počet K(k,n) všech k-členných kombinací z n prvků je $K(k,n) = \frac{n!}{k!*(n-k)!}$

Stejně jako pro usnadnění práce s permutacemi jsme zaváděli faktoriály, tak pro řešení kombinací zavádíme další symbol, který nazýváme Kombinační číslo $\binom{n}{k}$. Tento symbol čteme jako "n nad k" a vyjadřuje počet možností, jak z n prvků můžeme vybrat k prvků.

Kombinační číslo je definováno jako:

$$\binom{n}{k} = \frac{\mathrm{n!}}{\mathrm{k!} * (\mathrm{n} - \mathrm{k})!}\ \text{, pro } 0 \le k \le n$$

Kombinační čísla mají několik vlastností, které vyplývají z dosazení krajních hodnot za n a k. Tyto hodnoty je snadné odvodit a většina z nich je určená spíše pro počítání s kombinačními čísly, proto bych je přeskočil. Zastavil bych se pouze u vlastnosti, která se v kombinatorice s oblibou využívá při zjednodušování úloh.

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

Tato vlastnost říká, že pokud vybíráme k prvků z n prvkové množiny, tak vždy zbude n-k nevybraných prvků. Proto je možné hledat nevybrané prvky místo hledání prvků, které do podmnožiny k zařadíme. Důkaz této skutečnosti je vcelku jednoduchý.

$$\binom{n}{n-k} = \frac{\mathrm{n!}}{(\mathrm{n}-\mathrm{k})! * [\mathrm{n} - (\mathrm{n}-\mathrm{k})]!} = \frac{\mathrm{n!}}{(\mathrm{n}-\mathrm{k})! * \mathrm{k!}} = \binom{n}{k}$$

Díky znalosti kombinačních čísel můžeme doplnit výklad kombinací na:

Počet K(k,n) všech k-členných kombinací z n prvků je $K(k,n) = \frac{n!}{k!*(n-k)!} = \binom{n}{k}$

<u>Př.</u>: *Ve třídě je 26 žáků. Kolika způsoby z nich lze vybrat dva zástupce třídy?* (Farská 2011)

<u>Řešení</u>: *Protože nezáleží na pořadí vybraných studentů, jde o dvoučlenné kombinace z 26 prvků. Jejich počet je*

$$K(2,26) = \frac{26!}{2! * 24!} = 325.$$

Pascalův trojúhelník

Pascalův trojúhelník je schéma, které dobře znázorňuje některé vlastnosti kombinačních čísel, které byly zmíněny při řešení kombinací. Můžeme se s ním setkat ve dvou tvarech. (Farská 2011)

$$
\begin{array}{cc}
\binom{0}{0} & 1 \\
\binom{1}{0}\ \binom{1}{1} & 1\ \ 1 \\
\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2} & 1\ \ 2\ \ 1 \\
\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3} & 1\ \ 3\ \ 3\ \ 1 \\
\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4} & 1\ \ 4\ \ 6\ \ 4\ \ 1 \\
\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5} & 1\ \ 5\ \ 10\ \ 10\ \ 5\ \ 1 \\
\cdots\cdots\cdots & \\
\binom{n}{0}\ \binom{n}{1}\ \binom{n}{2}\ \binom{n}{3}\ \cdots\ \binom{n}{n-2}\ \binom{n}{n-1}\ \binom{n}{n} &
\end{array}
$$

Obrázek 1: Pascalův trojúhelník

Schéma vlevo zobrazuje základní vztah Pascalova trojúhelníku s kombinačními čísly. Ve schématu vpravo jsou kombinační čísla vyčíslena a dají se v něm lépe vypozorovat některé jejich vlastnosti. (Jana Farská - Kombinatorika) Jednou z nich je možnost vypočítat ze známého řádku řádek následující. To je možné díky vztahu mezi jednotlivými řádky.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Binomická věta

Občas při řešení algebraických úloh potřebujeme umocnit dvojčlen $a + b$ na přirozené číslo *n*. Je možné dvojčlen $a + b$ několikrát násobit mezi sebou, ale je to zdlouhavé a zbytečně pracné. K umocnění používáme Binomickou větu, která říká:

Pro všechna $a,b \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots \binom{n}{n}b^n$$

Při bližším pozorování si lze všimnout, že hodnoty koeficientů ve výsledném mnohočlenu odpovídají koeficientům v jednom řádku Pascalova trojúhelníku, což se mi jeví jako vhodná pomůcka pro snadnější zapamatování.

Př.: Vypočítej $(x^2+y)^5$

Řešení:

$$(x^2+y)^5 =$$
$$= \binom{5}{0}(x^2)^5 + \binom{5}{1}(x^2)^4y + \binom{5}{2}(x^2)^3y^2 + \binom{5}{3}(x^2)^2y^3 + \binom{5}{4}x^2y^4 + \binom{5}{5}y^5 =$$
$$= x^{10} + 5x^8y + 10x^6y^2 + 10x^4y^3 + 5x^2y^4 + y^5$$

Rozdělení kombinatorických úloh

Při vyučování kombinatoriky na středních školách a gymnáziích se setkáváme se studenty, kteří nemají do kombinatorických úloh vhled. Tito žáci od nás očekávají, že jim usnadníme řešení tím, že jim úlohy rozdělíme na určité skupiny, které mají něco společného. Ve škole jsou pro dělení většinou využívána slova typu seřaďte, vyberte a další. Již takováto pomůcka studentům usnadňuje určovat, jaký vzorec pro vyřešení úlohy mají použít. Ačkoli se úlohy v matematických soutěžích většinou velmi liší od běžných, ve škole řešených úloh, tak i tyto můžeme rozdělit do skupin.

Ve své práci použiji dělení podle čtyř kritérií. První rozdělení určuje, kde se s danou úlohou můžeme setkat. Druhé rozdělení ukazuje, zda prvky vybíráme, řadíme nebo rozdělujeme do skupin. Třetí rozdělení poukazuje na způsob řešení úlohy. Poslední rozdělení jsem přejal z již zaběhlého způsobu na středních školách – kombinace, variace, permutace.

Před samotným představením skupin rozdělení je třeba upozornit, že některé kombinatorické úlohy by bylo možné umístit i do jiné skupiny, popřípadě do více skupin. Snažil jsem se rozdělit úlohy do takových skupin, kam patří primárně a nejideálněji. Toto dělení může být v některých případech subjektivní.

Obor výskytu

V tomto rozdělení umístíme úlohy do skupin, které poukazují na to, v jaké souvislosti se může student s danou úlohou setkat. Nejprve jsem se snažil rozdělit úlohy do třech skupin. Později jsem však narážel na úlohy, které se daly zařadit do těchto skupin jen velmi obtížně, což byl důvod přidání dalších dvou skupin.

Reálná situace

Do této skupiny jsem dával úlohy, se kterými se opravdu můžeme setkat v reálném životě. Patří sem různé rozdělování hráčů do jednotlivých týmů, vybírání zástupců, vybírání oblečení na ples a spousta podobných úloh, se kterými se každý běžně setká. Úlohy v této skupině bychom měli využívat co nejvíce, protože jsou pro studenty známé a nemělo by jim dělat problém představit si, co po nich vlastně chceme. Další důvod, proč se snažit co nejvíce zapojovat úlohy ze skupiny reálná situace, je ten, že žáci uvidí, že s matematikou se mohou setkat v běžném životě. Tím předejdeme nepříjemným otázkám typu: „K čemu je to dobré?“

Př.: *Ve stánku se zmrzlinou mají 9 různých druhů zmrzliny. Skupina dětí přichází ke stánku a každé dítě si kupuje dva kopečky různých druhů zmrzliny do kornoutu. Jaký největší počet dětí může nakupovat u stánku zmrzlinu, aby žádné dvě děti neměly stejnou kombinaci druhů zmrzliny?* (Hodaňová 2007)

Číselná úloha

Do této skupiny patří úlohy, které jsou zadány v podobě čísel. Také většinou vyžadují číselné řešení. U některých z nich by bylo možné je interpretovat i jiným způsobem než číselně, ale většinou jsou to úlohy, při kterých se stejně bez číselného řešení neobejdeme. Velmi často se v nich opíráme o znalosti z aritmetiky.

Př.: *Test obsahuje celkově 20 otázek. Za správnou odpověď je sedm bodů, za špatnou se dva body odečtou. Za nezodpovězenou otázku se žádný bod nezíská ani neztratí. Milanův výsledek testu byl 87 bodů. Kolik otázek ponechal bez vyplnění?* (Horenský 2007)

Geometrická úloha

Poslední skupina, se kterou jsem chtěl pracovat, je skupina geometrických úloh. Úlohy zařazené do této skupiny se vyznačují tím, že v nich pracujeme s geometrickými objekty. Geometrické úlohy jsou zcela odlišné od předchozích dvou skupin především tím, že je stejně jako při řešení planimetrických a stereometrických problémů potřeba porce představivosti a samozřejmě základní znalost geometrie. Bez představivosti se geometrické úlohy řeší těžko. Velmi dobře poslouží náčrtek situace, který může geometrickou úlohu značně zjednodušit.

Př.: *Kryštof narýsoval dvě různé kružnice a tři různé přímky a pak barevně zvýraznil všechny body, v nichž se protínají alespoň dva z narýsovaných geometrických útvarů. Jaký maximální počet bodů Kryštof zvýraznil?* (Hodaňová 2007)

Pseudoreálná situace

První skupina, kterou jsem přidal během rozřazování úloh, dostala pojmenování Pseudoreálná situace. Jedná se o úlohy, které se tváří jako reálné situace, ale mají specifická pravidla. Nejčastěji se setkáváme s úlohami, které se pojí k šachovnici. Nazvat skupinu jako „Situace na šachovnici“ mi nepřišlo vhodné vzhledem k tomu, že zde nechci seskupovat jen úlohy týkající se šachu, ale i úlohy, které se týkají jiných činností, ale vzhledem ke svému charakteru se nehodí do skupiny Reálných situací. Samozřejmě by bylo možné tuto skupinu rozdělit na „Situace v šachu“ a „Ostatní“, ale to by bylo asi zbytečné a nepřinášelo by to žádné další zásadní informace o úlohách v matematických soutěžích.

<u>Př.</u>: *Šachovnice se skládá z 8 × 8 polí vytvářejících čtverec. Věž je jedna z figur, jimiž se hraje šach. Řekneme, že věž je neohrožena, jestliže v řádku a sloupci, ve kterém se nalézá, už není jiná věž.*

a) *Určete počet takových rozmístění 8 věží na šachovnici, při nichž je každá z nich neohrožena.*

b) *Určete počet takových rozmístění 8 věží na šachovnici, při nichž je aspoň jedna z nich neohrožena.*

c) *Určete počet takových rozmístění 8 věží na šachovnici, při nichž je jedna z nich neohrožena a žádné dvě nejsou v témže řádku.* (Zítek 1989)

Úlohy v teorii grafů

Tuto skupinu jsem přidal jako poslední. Jak název napovídá, jedná se o skupinu úloh, které vedou k řešení pomocí teorie grafů. Mohlo by se zdát, že tato skupina není tak obecná jako ty předchozí, což je pravda, ale tyto úlohy jsem nechtěl řadit do ostatních skupin, protože si myslím, že tam nepatří a zaslouží si svou vlastní skupinu. Jako ukázka toho, že je to populární a rozšířená skupina, postačí zmínit matematický problém známý jako „Sedm mostů města Královce“.

Město Královec (Kaliningrad) se rozprostírá na březích a ostrovech řeky Pregely. Mezi jednotlivými břehy a ostrovy vede sedm mostů. Obyvatele města zajímalo, zda-li mohou při svých promenádách projít všechny mosty takovým způsobem, že se dostanou opět do původního místa, aniž by jednu spojnici přešli dvakrát. (algoritmy.net 2010)

Tento problém je již vyřešený. Řešení přednesl v roce 1736 známý švýcarský matematik a fyzik Leonhard Euler, čímž položil základ teorie grafů. Kdo neznal tento problém, tak jistě zná dětské hry typu nakreslit domeček jedním tahem a podobně. Otázkou řešitelnosti takovýchto problémů se zabývá právě teorie grafů. Teorie grafů se zabývá i dalšími problémy, které by se daly zařadit i mezi kombinatorické úlohy. Jednou z nich je například hledání minimální kostry grafu.

<u>Př.</u>: *V rovině je dáno 7 bodů, z nichž některé jsou spojeny úsečkou. Přitom jsou splněny následující podmínky:*

a) *z každé trojice bodů jsou aspoň dva spojeny úsečkou*

***b)** počet úseček je minimální*

Kolik úseček obsahuje útvar, který splňuje tyto podmínky? (Boček 1993)

Práce s prvky

Druhé hledisko, podle kterého jsem dělil kombinatorické úlohy, jsem nazval „Práce s prvky". Toto rozdělení jsem přejal z příspěvku Daši Palenčárové ve sborníku Teaching Matematics II (Palenčárová 2010). Úlohy jsem rozděloval podle toho, zda prvky vybírám, tahám, umísťuji, rozděluji a podobně. Doslovně model selection, model distribution a model patrition.

Model selection

Jak název napovídá, do této skupiny budeme zařazovat úlohy, v nichž prvky vybíráme. Také je možné tuto skupinu popsat jako množinu úloh, ve které vybíráme z n prvků nějakou k-tici, kde $k < n$. Typicky se v takovýchto úlohách objevují slova jako vzít, vybrat, tahat, zvolit a další.

Př.: *Na tenisovém dvorci se střetli Adam, Boris, Cyril s Dášou a Evou. Dohodli se, že budou hrát smíšenou čtyřhru, tedy jeden muž a jedna žena proti jednomu muži a jedné ženě. Zbývající pátý hráč bude rozhodčí. Aby si však každý zahrál, bude se po každém setu měnit rozhodčí. Hrát budou, dokud se nevystřídají všechny možné dvojice soupeřů. Ve chvíli, kdy by měli na kurt nastoupit dvojice, které již proti sobě hráli, zápas končí. Kolik setů odehráli?* (Koman 1992)

Model distribution

Do skupiny distribucí zařazujeme úlohy, kde je třeba prvky rozdělit. Slovo rozdělit je v tomto případě trošku nešťastné, protože ve skupině distribucí spíše umísťujeme nebo přiřazujeme. Slovo rozdělit bylo použito jen jako překlad slova distribution, ale když něco rozdělujeme, tak většinou do předem daných množin, a na to nám bude sloužit až další skupina.

Př.: *Dva bílí a osm šedých racků létá nad řekou. Najednou všichni usedli na zábradlí mostu. Jaká je pravděpodobnost, že oba bílí racci sedí vedle sebe?* (Cabálek 2007)

Model partition

Poslední skupina rozdělení podle práce s prvky je založena na rozdělování prvků do množin. V úlohách na rozdělení do množin se často setkáváme se slovesy separovat, oddělit nebo rozdělit.

Př.: *V táboře se deset chlapců rozhodlo hrát nohejbal. Kolika způsoby je možno je rozdělit do dvou družstev po pěti hráčích, jestliže Matěj chce hrát s Kubou a Jožka nechce hrát s Ondřejem. (Všichni chlapci mají různá jména)* (Koman 1993)

Způsob řešení

Při dělení úloh podle způsobu řešení jsem se nezabýval tím, jak je úloha napsána nebo podávána, ale zaměřil jsem se přímo na to, jaká je ideální cesta pro vyřešení úlohy. Hledal jsem ideální cestu k vyřešení problémů, protože většinou se ke správnému výsledku můžeme dobrat více cestami. V kombinatorice to platí dvojnásob. Téměř každou úlohu můžeme řešit metodou výčtu možností. U několika úloh je toto řešení ideální, ale u úloh jiných je tento způsob nevhodný. Nevhodnost tohoto řešení spočívá v rychlosti růstu funkce faktoriál, kterou v kombinatorice často používáme. Na jednoduchém příkladu názorně předvedu, kdy už výčet možností nemusí být tou nejvhodnější volbou.

Př.: Při hodině tělocviku se má 5 chlapců postavit k nástupu. Určete počet možností, jak se mohou rozestavit.

Řešení: Již takhle jednoduchý příklad by vypisováním jednotlivých možností trval vcelku dlouho. My naštěstí víme, že se jedná o 5! = 120 možností. Pokud bychom ale měli seřadit stejným způsobem 10 chlapců, výsledek by byl 10! = 3 628 800. V tomto případě bychom již s vypisováním možností neměli šanci uspět.

Úlohy v matematických soutěžích jsou často tvořeny tak, že pro řešení je třeba kombinovat různé způsoby. Ve své práci jsem se snažil úlohy rozdělit podle toho, co je pro řešení dané úlohy klíčové.

Výčet možností

Výčet možností je univerzální způsob pro řešení valné většiny kombinatorických úloh. Ne vždy je však toto řešení vhodnou volbou. Při řešení složitějších úloh je vypisování všech možností nad rámec lidských možností. Také se můžeme v kombinatorice setkat například s úlohou na nekonečné šachovnici, kde nám výčet možností stačit nebude. Pro řešení jednoduchých úloh je to vhodná volba. Ve škole se setkáváme se způsobem výčtu možností již na základní škole, kdy žáci ještě nemají žádné znalosti v oboru kombinatoriky. To jim ovšem nebrání tyto jednoduché úlohy řešit logickou úvahou.

<u>Př.</u>: *Petr a Marie házejí kostkou. Kdo hodí větší číslo, vyhrál (pokud oba hodí stejné číslo, házejí znova). Kdo první vyhraje 10krát, vyhraje 40 bonbonů. Když Petr vyhrál sedmkrát a Marie devětkrát, rozdělili si bonbony úměrně tomu, jakou měli šanci na celkové vítězství. Kolik bonbonů získá Marie?* (Horenský 2007)

Použití vzorce

S tímto řešením se setkáváme nejčastěji při řešení kombinatorických úloh na středních školách a gymnáziích. V matematických soutěžích se s nimi setkáváme v jiné podobě, než jsme zvyklí ze školy, protože úlohy v matematických soutěžích jsou sestavovány odlišným způsobem. Od řešitelů se očekává více než u běžných studentů. Velmi málo se zde setkáme s úlohou, kterou je možné vyřešit přímým dosazením do vzorce. Častěji se setkáme s úlohou, které musíme vzorec přizpůsobit nebo onu úlohu přizpůsobit vzorci, jenž známe.

<u>Př.</u>: *Ve třídě je 10 chlapců. V sobotu se hraje ve městě důležité fotbalové utkání. Kolika různými způsoby mohou chlapci utvořit skupinu návštěvníků tohoto utkání, jestliže víme, že pokud půjde na utkání Martin, vezme s sebou i Pavla?* (Hodaňová 2007)

Logická úvaha

Logická úvaha je základním kamenem pro řešení kombinatorických úloh v matematických soutěžích. Na začátku je třeba vhled do problému, který chceme řešit. Vymyslet rozumný postup, jak se dobrat ke správnému výsledku. Díky tomuto vhledu pak můžeme použít i jiný způsob řešení. Kombinace více způsobů je velmi často nejlepší a nejrychlejší cestou, jak úlohu vyřešit. Některé úlohy jdou samozřejmě řešit čistě logicky.

<u>Př.</u>: *V sáčku s kuličkami je celkem třicet kuliček. Vytáhneme-li náhodně 12 kuliček, vždy mezi nimi bude alespoň jedna bílá. Vytáhneme-li náhodně 20 kuliček, vždy mezi nimi bude alespoň jedna kulička, která není bílá. Kolik bílých kuliček je v sáčku.* (Horenský 2007)

Středoškolské rozdělení

Rozdělení, které je přejato ze středoškolské kombinatoriky, jsem zařadil pro porovnání kombinatoriky na středních školách a gymnáziích s kombinatorikou v matematických soutěžích. Ponechal jsem tři základní skupiny, ke kterým jsem přidal ještě skupinu „Jiné“, protože úlohy v soutěžích se většinou nedají zaškatulkovat do typů úloh, které jsem představil v kapitole Kombinatorika na školách. Skupinami, které tvoří toto rozdělení, se více zabývat nebudu, protože již byly představeny dříve včetně příkladů. Jen se zmíním o mnou přidané skupině ***Jiné***, do které jsem zařadil příklady, které se nedají přidat do skupin permutace, variace nebo kombinace.

Předpokládám, že četnost úloh typu ***Jiné*** nebude úplně zanedbatelná. Vzhledem k charakteru matematických soutěží si dovoluji tvrdit, že nebude svou četností zaostávat za variacemi, kombinacemi nebo permutaci. Naopak se domnívám, že tato skupina bude početnější než zbylé možnosti tohoto rozdělení.

Rozdělení – výzkum

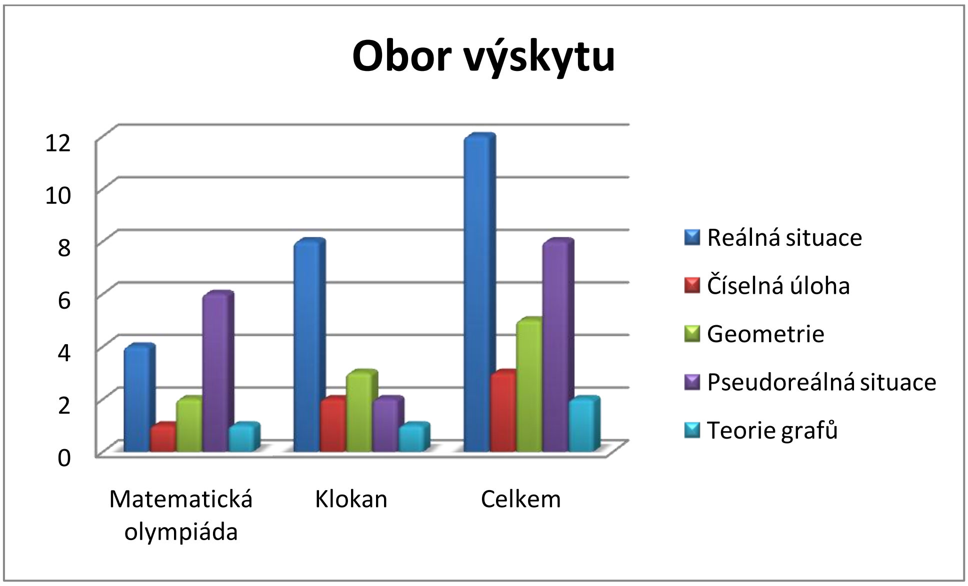
Pro rozřazení úloh do skupin podle výše uvedených systémů, jsem se rozhodl využít úlohy z matematických soutěží. Jedná se konkrétně o Matematické olympiády a soutěže Matematický klokan. Matematické olympiády jsem procházel od 36. ročníku (školní rok 1986/1987) do 40. ročníku (školní rok 1990/1991). Vybral jsem si tyto olympiády z prostého důvodu. Chtěl jsem pokrýt pět po sobě jdoucích ročníků, jejichž zadání budu schopen sehnat. Takových olympiád bylo více, a tak jsem si vybral nejnovějších pět let, které byly na Katedře matematiky a didaktiky matematiky Univerzity Karlovy volně k dispozici ve vázaném provedení. Úlohy z Matematických klokanů jsem také vybral z pěti po sobě jdoucích ročníků, které nabízela Ústřední knihovna Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy. Jedná se o ročníky od roku 2000 do roku 2004. Úlohy z Matematických klokanů jsem vybíral ze tří obtížností. Z obtížnosti „Kadet“, která je určena pro studenty 8. a 9. ročníků základních škol, druhá zkoumaná obtížnost je „Junior“, která je určena pro studenty 1. a 2. ročníků středních škol. Poslední obtížnost byla „Student“, kterou řeší žáci 3. a 4. ročníku středních škol. Dohromady jsem z těchto soutěží vybral 30 úloh, které se nějakým způsobem dotýkají kombinatoriky. Těchto 30 úloh jsem rozdělil podle všech rozdělení, které jsem popsal v kapitole „Rozdělení kombinatorických úloh“. Nyní postupně rozebereme tabulky a grafy rozdělení.

Při rozdělování úloh nezůstaneme pouze u jednoho kritéria. Zajímavé výsledky by nám mohly nabídnout tabulky a grafy četnosti úloh v různých kombinacích kritérií rozdělení. Tam již nebudu rozlišovat, zda úloha pochází z Matematického klokana nebo z Matematické olympiády. Zaměřím se pouze na kritéria rozdělení.

Obor výskytu

Tabulka 1: Obor výskytu

	Reálná situace	Číselná úloha	Geometrie	Pseudoreálná situace	Teorie grafů
Matematická olympiáda	4	1	2	6	1
Klokan	8	2	3	2	1
Celkem	12	3	5	8	2



Graf 1: Obor výskytu

Při pohledu na výše uvedený graf je jasně vidět, že ve 30ti úlohách vybraných pro tuto bakalářskou práci převažují úlohy z reálných situací s dvanácti úlohami. Druhá nejčetnější skupina byly úlohy z pseudoreálného světa čítající osm úloh. Třetí nejčastější úlohy byly z oblasti geometrie. Takových úloh bylo pět. Předposlední skupinou byly úlohy číselné, které byly zastoupeny třemi úlohami. Nejméně častou skupinou úloh byly úlohy týkající se teorie grafů, které byly pouze dvě.

Pokud se podíváme na výskyty úloh v každé soutěži, tak se dostaneme přibližně ke stejnému pořadí. Jediný větší rozdíl je pouze v četnosti reálných a pseudoreálných situací. Zatímco v Matematickém klokanovi jasně převažují úlohy reálných situací, v úlohách z Matematických olympiád jsou na prvním místě v četnosti úlohy pseudoreálné. Rozdíl v četnostech pseudoreálných úloh mezi Matematickými olympiádami a Matematickými klokany je značný, což je podle mého názoru dáno odlišným charakterem obou soutěží. Matematická olympiáda je soutěž pro opravdu nadané studenty matematiky. Matematický klokan je soutěž, která je určena pro širší skupinu studentů. Tvůrci úloh do Matematického klokana se snaží vytvářet úlohy lehce pochopitelné pro každého studenta. Což je podle mého názoru důvod, proč zde převládají úlohy reálného světa.

Také je třeba vzít v potaz dobu, kterou má student na vyřešení daného problému. Pokud by v Matematickém klokanovi převažovaly pseudoreálné úlohy, musel by dostat více času na jejich pochopení, případně ostatní úlohy by musely být vytvořeny tak, aby student měl šanci ušetřit čas i na úlohu těžší na pochopení. Poslední možností je vytvářet klidně i pseudoreálné úlohy, ale zjednodušené tak, aby se daly v krátkém čase pochopit i vyřešit. Vzhledem k těmto důvodům si myslím, že je lepší do Matematického klokana vymýšlet úlohy z reálného světa.

Dále si můžeme všimnout, že u obou soutěží se jen velmi zřídka vyskytují úlohy číselné. Důvod, proč tomu tak je, by mohl být v problému uchopení úlohy. Na dvou příkladech se pokusím ukázat, rozdíl mezi zadáním stejné úlohy různým způsobem.

Př.: Ve třídě je deset chlapců a deset dívek. Kolika různými způsoby se mohou rozdělit do párů, chtějí-li jít všichni na ples?

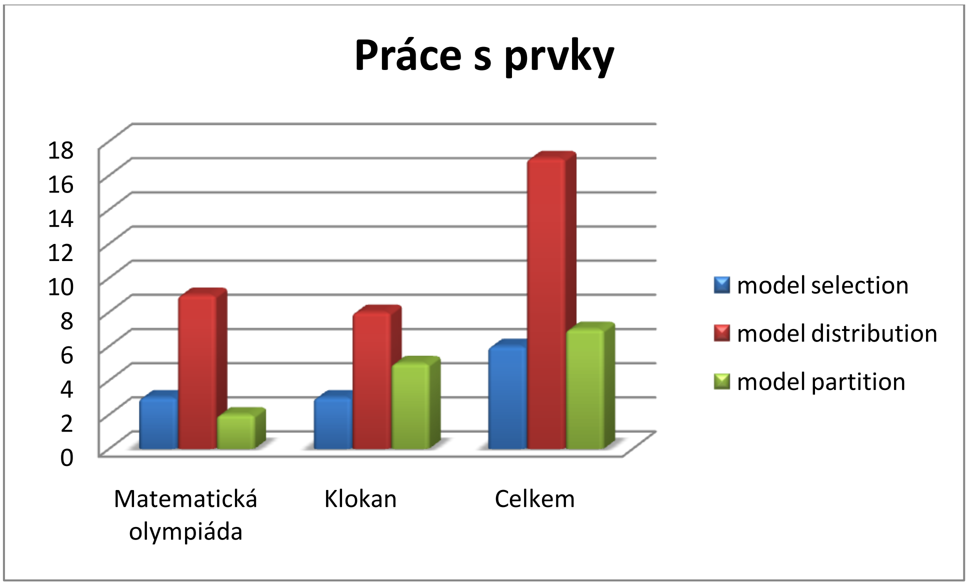
Př.: Mějme dvě množiny přirozených čísel. V každé množině je deset prvků. Kolika způsoby můžeme přiřadit prvky jedné množiny prvkům množiny druhé?

Je vidět, že tyto dvě úlohy jsou totožné. Tudíž i řešení obou úloh musí být stejné. Z matematického hlediska to tak je. Rozdíl je v pochopení úlohy. První příklad je ze života. S takovouto situací se každý jistě setkal. Příklad druhý je zadán čistě číselně a student si nejdříve při řešení musí uvědomit, co se po něm v zadání vlastně chce.

Práce s prvky

Tabulka 2: Práce s prvky

	model selection	model distribution	model partition
Matematická olympiáda	3	9	2
Klokan	3	8	5
Celkem	6	17	7



Graf 2: Práce s prvky

Výsledky druhého rozdělení nám ukazují jako jasně nejčastější úlohy ty, které vedou na přiřazování nebo také umisťování prvků, tedy model distribution. Četnosti zbylých dvou modelů – selection, partition – jsou přibližně srovnatelné. Nadvláda modelu distribution je na první pohled zřejmá, ale důvod, proč tomu tak je, mi uniká. Možná je to dáno mým pohledem na kombinatorické úlohy. Na výše zmíněném příkladu na úlohy z teorie grafů ukážu možnou neshodu s rozdělením modelů.

Př.: *V rovině je dáno 7 bodů, z nichž některé jsou spojeny úsečkou. Přitom jsou splněny následující podmínky:*

a) *z každé trojice bodů jsou aspoň dva spojeny úsečkou*

b) *počet úseček je minimální*

Kolik úseček obsahuje útvar, který splňuje tyto podmínky? (Boček 1993)

Já jsem tuto úlohu zařadil do modelu distribution, protože umisťuji úsečky mezi body. Někdo jiný, kdo by se snažil rozřazovat úlohy stejným způsobem, by ale mohl říci, že neumisťuje úsečky mezi body, ale že si rozdělí graf na množiny bodů, které spolu již může spojit do podmnožin, které budou splňovat zadaná kritéria. Tudíž by stejnou úlohu mohl zařadit mezi úlohy model partition. Nakonec by mohl přijít ještě student s jinou vizí a ten by si řekl, že vybírá body, které spolu spojí. Tímto by mohl zařadit tuto úlohu i do model selection.

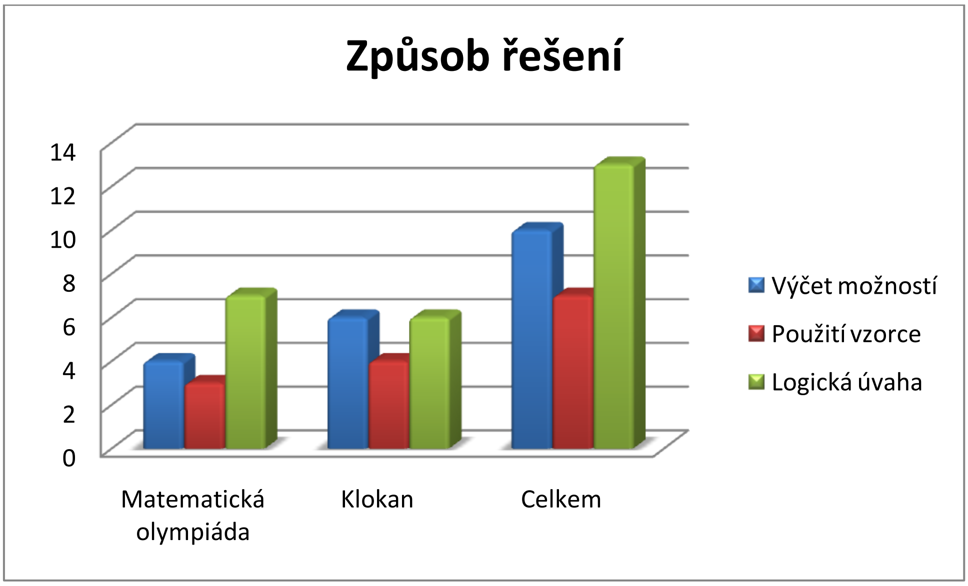
V tomto přichází další kámen úrazu v kombinatorice. Při výkladu by se určitě některý student zcela oprávněně zeptal „Jaká odpověď je tedy správná“. V tu chvíli by měl vyučující poukázat na to, že všechno se nedá rozdělit na věci správné a chybné. Že záleží na úhlu pohledu a na tom, jakému způsobu řešení kdo dává přednost.

Tím chci poukázat na to, že kdyby úlohy rozřazoval někdo jiný, tak by výsledky zapsané do tabulky a grafu mohly vypadat úplně jinak, než ty, jak je prezentuji já ve své práci. Samozřejmě jsou úlohy, které jasně říkají, do které skupiny patří, ale také jsou úlohy, kde pohledů na řešený problém může být více.

Způsob řešení

Tabulka 3: Způsob řešení

	Výčet možností	Použití vzorce	Logická úvaha
Matematická olympiáda	4	3	7
Klokan	6	4	6
Celkem	10	7	13



Graf 3: Způsob řešení

Po rozdělení úloh podle způsobu řešení jsem dospěl k závěru, že nejčastěji je kombinatorická úloha v matematických soutěžích řešena logickou úvahou. Druhý nejčastější způsob řešení byl výčet možností. Použití vzorce bylo u obou soutěžích označeno jako nejméně častý způsob řešení.

Očekával jsem větší odstup řešení logickou úvahou od výčtu možností. Jak bylo zmíněno při rozboru dělení úloh podle práce s prvky, tak i toto rozdělení je velmi individuální. Někdo by označil úlohu jako ideálně řešitelnou logickou úvahou, jiný by ji označil jako úlohu, která je z větší části řešena výčtem možností. Já jsem do logických úloh řadil ty, které takřka celé vyřeším logickou cestou. Pokud by logická úvaha vedla k využití vzorce, tak bych ji označil spíš jako úlohu řešenou vzorcem. V matematických soutěžích se úlohy čistě na využití vzorců nevyskytují, protože cílem těchto soutěží není zjistit, zda řešitel umí využít tabulky jako spíš, zda umí vymyslet postup, kterým se ke správnému výsledku dostane. Proto nelze brát rozestupy mezi jednotlivými způsoby řešení jako něco pevného a neměnného.

Pořadí jednotlivých způsobů jsou přesně takové, jaké jsem je očekával. Zvláště u Matematických olympiád je vidět odstup úloh řešených logickou úvahou. V Matematických klokanech jsou četnosti řešení logickou úvahou a výčtem možností vyrovnané. Podle mého názoru je to dáno krátkým časem na vyřešení jednotlivých úloh. Proto řešitel stejně nemá čas na vypisování všech možností. Pokud by byl na řešení větší časový limit, tak by zřejmě i zde převládly úlohy řešené logickou úvahou.

Středoškolské rozdělení

Tabulka 4: Středoškolské řešení

	Variace	Permutace	Kombinace	Jiné
Matematická olympiáda	0	1	3	10
Klokan	1	1	7	7
Celkem	1	3	9	17

Graf 4: Středoškolské rozdělení

Nyní se podívejme, jaké výsledky nám přineslo tradiční rozdělení, které se využívá na středních školách a gymnáziích. Z výsledků je jasně vidět, že zavedení možnosti „Jiné“, bylo velmi užitečné. Tato možnost zcela suverénně obsadila pomyslnou první příčku v četnostech jednotlivých možností. Druhá nejčastější možnost byla kombinace. Za těmito dvěma možnostmi zbylé dvě znatelně zaostaly.

Z tabulky a grafu středoškolského rozdělení bychom neměli být překvapeni. Dalo se očekávat, že možnost „Jiná“ bude nejčetnější. Důvod mého očekávání byl ten, že do matematických soutěží se tvoří úlohy, se kterými se student během svého studia moc často nesetkává. Jsou to příklady, které nelze vyřešit jednoduchým vzorcem, ale při jejich řešení je třeba zapojit i logické uvažování. Vítěz matematické soutěže by neměl být ten, kdo umí nejlépe hledat v tabulkách, ale ten kdo umí vymyslet postup řešení úloh složitějších.

Bohužel si nejsem jist, zda se při opravování matematických olympiád hledí i na eleganci řešení a nejen na správný výsledek – případně mezivýsledky. Matematický klokan toto určitě nenabízí, protože jsou výsledky vybírány z možností a hodnotí se pouze výsledky. To mi přijde škoda, protože velmi často student vyřeší úlohu zcela odlišným způsobem, než je běžné a tento způsob může být třeba lepší nebo elegantnější, ale nikdo se ho nedozví. Pokud bychom chtěli hodnotit i eleganci řešení, zjistili bychom, že každý vidí elegantní řešení jinak. Někomu přijde elegantní vyřešit úlohu čistě logicky, jinému zase upravením vzorce do podoby, kdy by se dal využít ke spočítání daného problému. Další problém, se kterým bychom se setkali při hodnocení elegance, je čas. V letošním ročníku (2011) se totiž účastnilo v kategoriích Student, Junior a Kadet dohromady 85 451 řešitelů. Kontrolovat postupy u jednotlivých úloh je pro takovýto počet soutěžících nereálné.

Jediné, co mě zaráží na výše znázorněném grafu, je odstup kombinací od variací a permutací. Očekával jsem, že za možností „Jiné“ budou ostatní možnosti zaostávat, ale přibližně stejně. Je to možná způsobeno omezenou množinou úloh, které jsem zkoumal. Protože rozdíl například mezi variacemi a kombinacemi není obrovský.

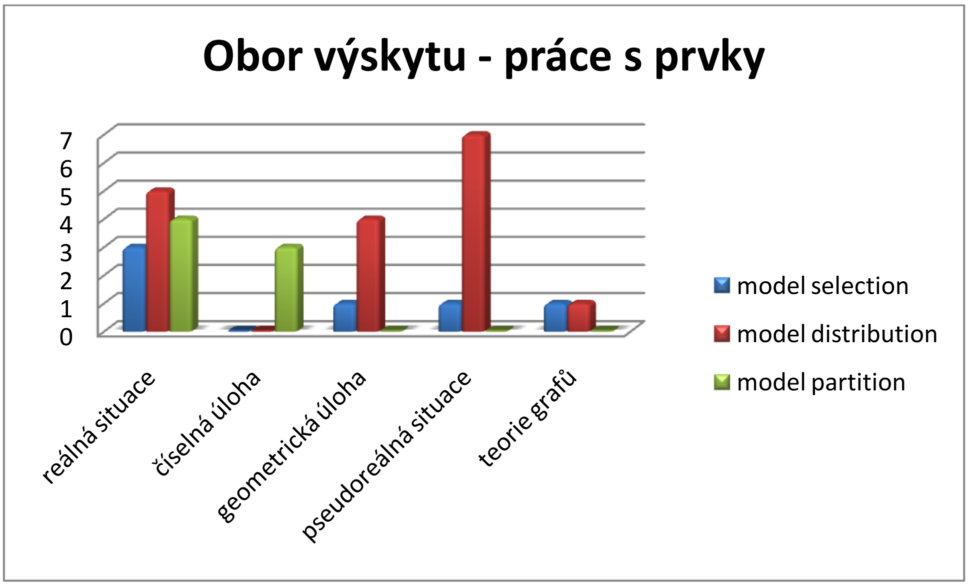
Př.: *Ve stánku se zmrzlinou mají 9 různých druhů zmrzliny. Skupina dětí přichází ke stánku a každé dítě si kupuje dva kopečky různých druhů zmrzliny do kornoutu. Jaký největší počet dětí může nakupovat u stánku zmrzlinu, aby žádné dvě děti neměli stejnou kombinaci druhů zmrzliny?* (Hodaňová 2007)

Tato úloha je jasně zaměřena na kombinace. Pokud bychom ji doplnili o větu, že záleží na pořadí kopečků, získali bychom úlohu na variace. Proto mě udivuje, že je spousta úloh zaměřena na kombinace a na variace se zapomíná.

Obor výskytu – práce s prvky

Tabulka 5: Obor výskytu - práce s prvky

	reálná situace	číselná úloha	geometrická úloha	pseudoreálná situace	teorie grafů
model selection	3	0	1	1	1
model distribution	5	0	4	7	1
model partition	4	3	0	0	0



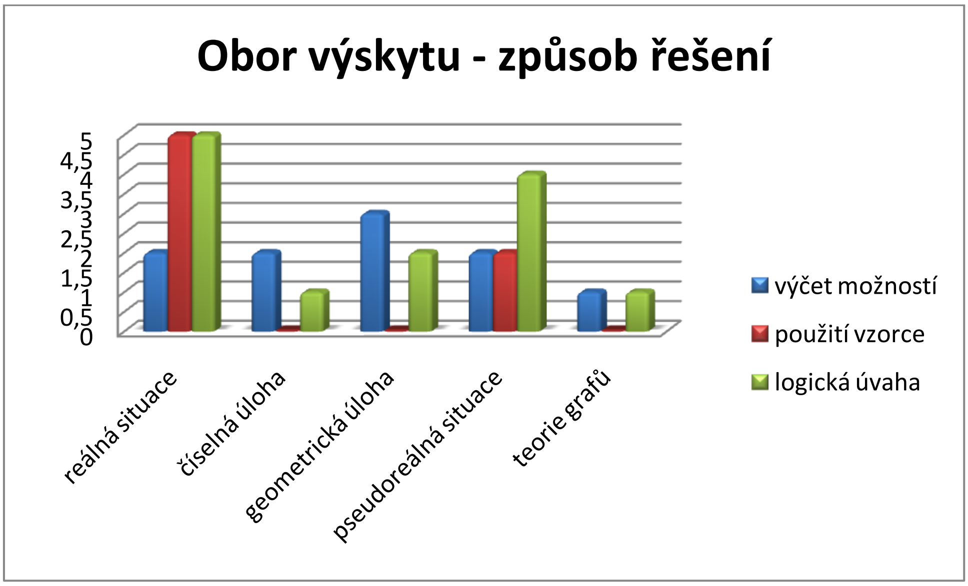
Graf 5: Obor výskytu - práce s prvky

První tabulka a graf v rozdělení pomocí dvou kritérií nám znázorňuje některé nedostatky. Pokud bych měl vypíchnout pouze ty, které jsou opravdu závažné, tak by to byl nedostatečný počet geometrických a pseudoreálných situací, při jejichž řešení využíváme model selection a model partition. To, že chybí úloha na teorii grafů, kde bychom pracovali s prvky metodou model partition, také není zcela v pořádku, ale vzhledem k nízkému počtu úloh z teorie grafů je jasné, že kombinace některého modelu s tímto oborem musela zůstat bez úlohy. Je zajímavé, že model partition je jako metoda pro práci s prvky využita pouze v reálných a číselných úlohách. U číselných úloh je dokonce používána jako jediná. V ostatních typech úloh se tento přístup k prvkům nepoužívá.

Obor výskytu – způsob řešení

Tabulka 6: Obor výskytu - způsob řešení

	reálná situace	číselná úloha	geometrická úloha	pseudoreálná situace	teorie grafů
výčet možností	2	2	3	2	1
použití vzorce	5	0	0	2	0
logická úvaha	5	1	2	4	1



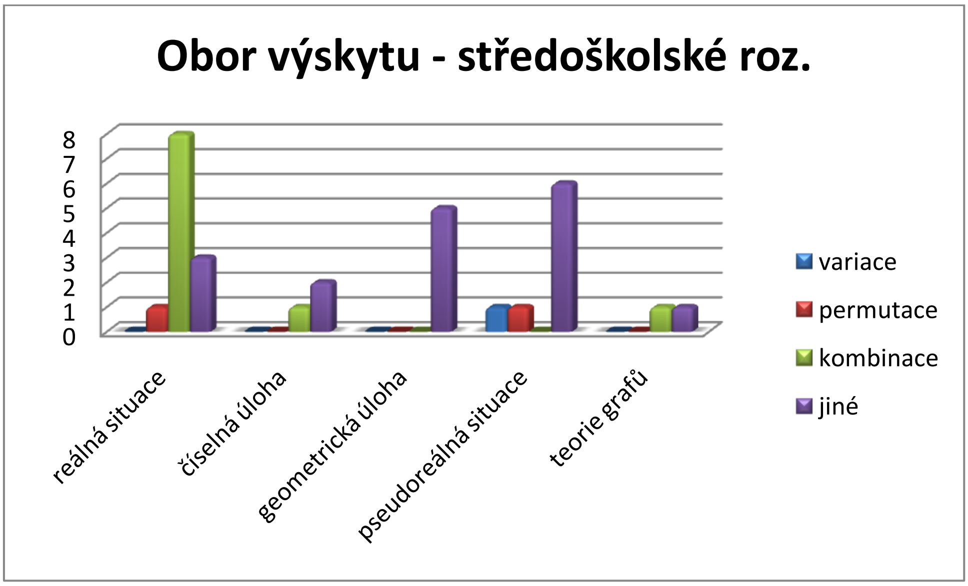
Graf 6: Obor výskytu - způsob řešení

Při analýze tabulky a grafu rozdělení podle kritérií obor výskytu a způsobu řešení dojdeme k výsledku, že v číselných a geometrických úlohách chybí příklady na řešení použitím vzorce. Také v úlohách zaměřených na teorii grafů nejsou žádné, které by se řešily pomocí vzorců. Tomu se nemůžeme divit, když se podíváme na charakter soutěže. Jediná část grafu, která se liší od ostatních, je část reálných situací, kdy spolu s logickou úvahou tvoří řešení použitím vzorce pomyslnou první příčku. Jedinou útěchou nám může být fakt, že z pěti úloh z reálného světa, které jsou řešeny pomocí vzorce, jsou tři z Matematického klokana, při kterém studenti nesmí používat matematické tabulky.

Obor výskytu – středoškolské rozdělení

Tabulka 7: Obor výskytu - středoškolské rozdělení

	reálná situace	číselná úloha	geometrická úloha	pseudoreálná situace	teorie grafů
variace	0	0	0	1	0
permutace	1	0	0	1	0
kombinace	8	1	0	0	1
jiné	3	2	5	6	1



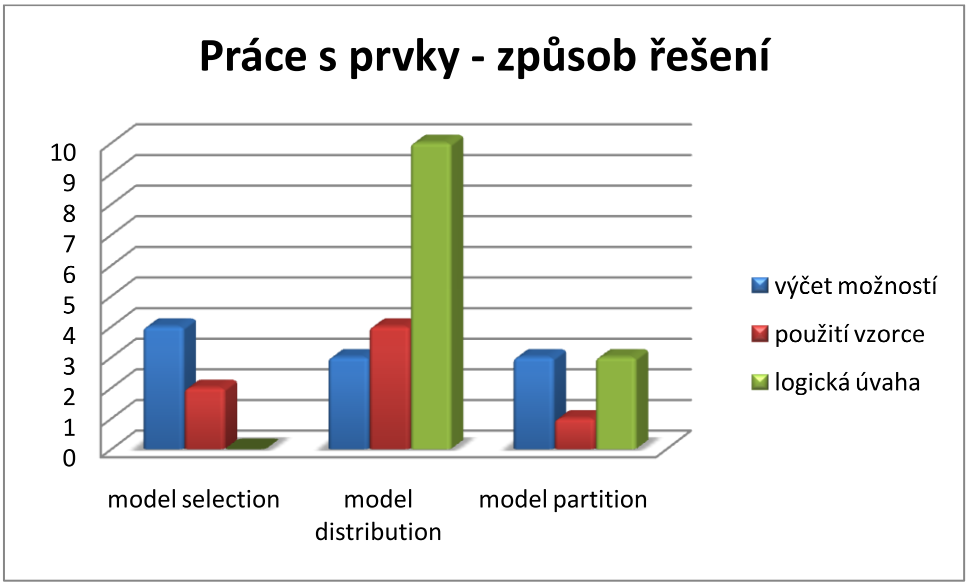
Graf 7: Obor výskytu - středoškolské rozdělení

Ačkoli se to nemusí na první pohled zdát, tak tento graf úzce souvisí s tím předchozím – obor výskytu – způsob řešení. Jde hlavně o to, že by se někomu mohlo zdát zvláštní, že v reálných situacích není na prvním místě možnost ***Jiné***. Důvod hledejme v předchozím grafu. V něm bylo v reálných situacích často používáno řešení použitím vzorce. Pokud lze řešit úloha podle vzorce, tak musí být zahrnutelná do kombinací, variací nebo permutací. Protože to je ten vzorec, kterým danou úlohu řeším. To, proč jsou tyto úlohy převážně na kombinace, je dáno množstvím úloh určených vytvořením pro jednotlivé možnosti, což znázorňuje graf středoškolského rozdělení. V ostatních oborech výskytu je podle očekávání nejpočetnější skupinou možnost ***Jiné***, což by nás nemělo překvapit.

Práce s prvky – způsob řešení

Tabulka 8: Práce s prvky - způsob řešení

	model selection	model distribution	model partition
výčet možností	4	3	3
použití vzorce	2	4	1
logická úvaha	0	10	3



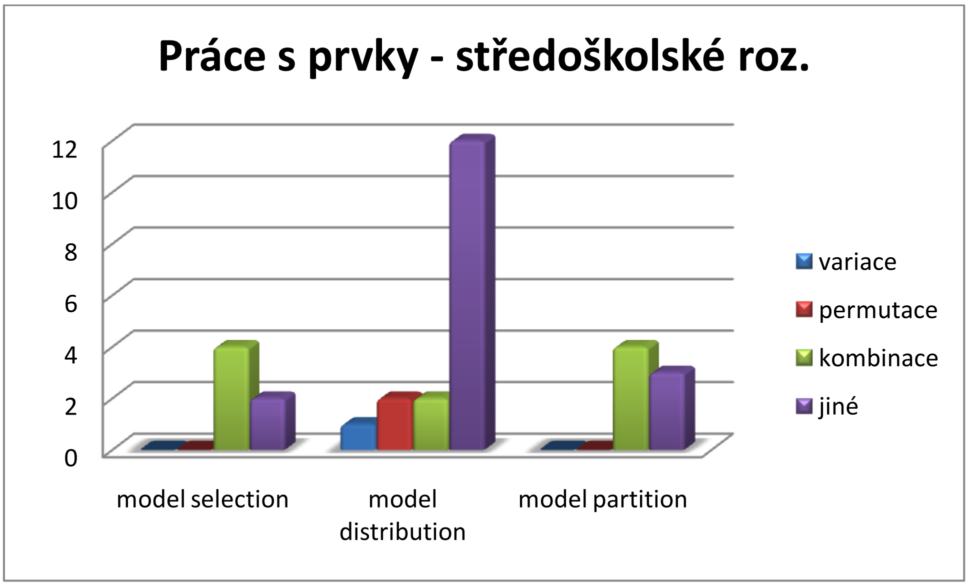
Graf 8: Práce s prvky - způsob řešení

Při pohledu na graf rozdělení podle práce s prvky a způsobu řešení nás nejspíš zarazí nerovnoměrnost rozdělení úloh řešených logickou úvahou. Ze třinácti úloh řešených logicky je deset na model distribution a tři na model partition. Model selection je bez účasti úloh řešených logickou úvahou. Je zvláštní, že se to týká pouze úloh řešených logickou úvahou. Ostatní dva způsoby jsou zastoupeny ve všech modelech alespoň jedním zástupcem. Dokonce úlohy na výčet možností jsou v každém modelu zastoupeny vcelku vyváženě. Důvod této nerovnoměrnosti není zřejmý. Možná tuto nerovnoměrnost pomůže vysvětlit některý z následujících grafů.

Práce s prvky – středoškolské rozdělení

Tabulka 9: Práce s prvky - středoškolské rozdělení

	model selection	model distribution	model partition
variace	0	1	0
permutace	0	2	0
kombinace	4	2	4
jiné	2	12	3



Graf 9: Práce s prvky - středoškolské rozdělení

Je třeba si uvědomit, že některé kombinace možností lze jen těžko dosáhnout. Toho je příkladem výše uvedený graf s tabulkou. Když se podíváme do tabulky do sloupce model selection, tak nás zřejmě napadne, jak je možné, že nemá žádný výskyt úloh, které jsou zároveň na permutace nebo variace. Důvod, proč to u permutací není nic zvláštního, se pokusím objasnit. Permutace samy o sobě jsou řazením. Nejedná se tedy o žádný výběr nebo tak něco, co naznačuje model selection. Totéž platí pro model partition. Rozdělovat množinu na podmnožiny a využívat při tom řazení je velmi obtížně představitelné. Důvod, proč se však nevyskytují úlohy z variací na model selection, je nejasný. Ve škole jsou využívány docela hojně. Velmi často se tam setkáváme s úlohami, ve kterých je třeba řešit výběr zástupce a pokladníka třídy. Také je zajímavé, proč nejsou úlohy z variací zaměřené na model partition.

<u>**Př.**</u>: Na školním výletě se šest studentů rozhodlo, že si zahrají nohejbal. Urči, kolika způsoby se mohou rozdělit do dvou družstev po třech.

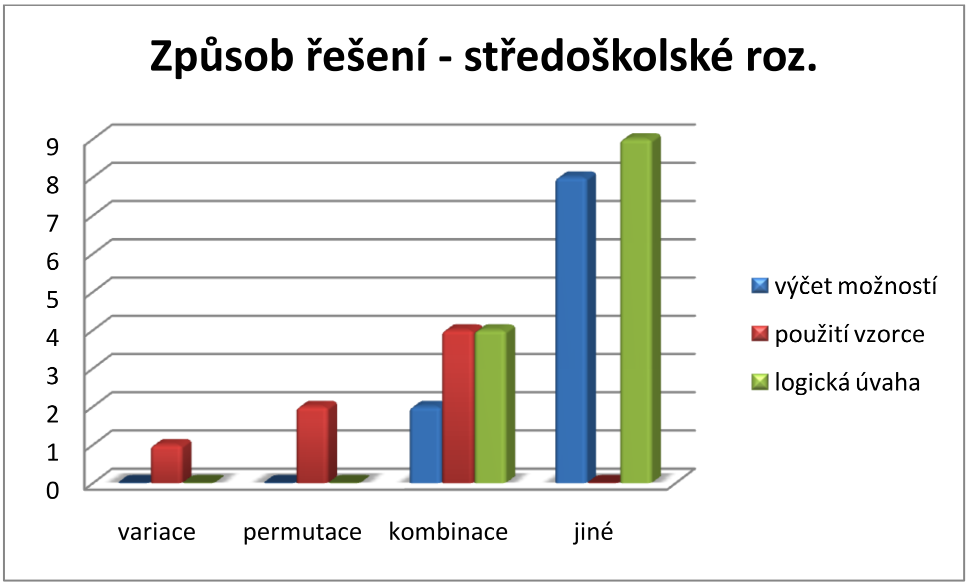
Pokud bychom nechali úlohu takto, tak je to kombinační úloha zaměřená na model partition. Tato úloha by ale mohla být zaměřena i na variace, pokud bychom dodali, že nohejbalové družstvo se pro naše účely skládá ze smečaře, polaře a nahrávače.

Při pohledu na graf práce s prvky – středoškolské rozdělení mě napadá možný důvod nerovnoměrného rozdělení, které bylo na grafu práce s prvky – způsob řešení. V modelu distribution jednoznačně převládají úlohy, které se nedají zařadit mezi variace, permutace ani kombinace. Odpadá tedy možnost je vyřešit pomocí vzorce. Zbývá tedy logická úvaha a výčet možností. V matematických soutěžích se však setkáváme s úlohami, které jsou složitější, než aby šly vyřešit vypsáním několika možností. Samozřejmě je možné, že se složitá úloha dá vyřešit výčtem možností. Většinou jsou to ale jednodušší příklady. Z výše uvedeného tedy vyplývá, že úlohy zařazené do možnosti jiné, budou většinou řešitelné logickou úvahou.

Způsob řešení – středoškolské rozdělení

Tabulka 10: Způsob řešení - středoškolské rozdělení

	výčet možností	použití vzorce	logická úvaha
variace	0	1	0
permutace	0	2	0
kombinace	2	4	4
jiné	8	0	9



Graf 10: Způsob řešení - středoškolské rozdělení

Tabulka a graf rozdělení podle těchto dvou kritérií vypadá přibližně tak, jak jsem očekával. Úlohy zaměřené na variace a permutace jsou řešeny pouze použitím vzorce. To šlo očekávat, protože když už mohu zařadit příklad do těchto typů, tak vím, že existuje vzorec, který mohu využít k jeho vyřešení. Někdy je však snazší použít jinou metodu. Toho jsou příkladem hodnoty kombinací pro jednotlivé způsoby řešení. Pokud je úloha natolik jednoduchá, že ji lze během několika chvil vyřešit výčtem možností nebo logickou úvahou, tak je to jednodušší, než upravovat vzorec tak, abych ho mohl pro daný příklad využít. Z grafu dále vyplývá, že pokud nedokážu zařadit úlohu mezi variace, permutace nebo kombinace, tak je nejsnazší ji vyřešit logickou úvahou případně výčtem možností. I toto se dalo očekávat.

Více kritérií

Zajímavé výsledky bychom také mohli získat, pokud bychom vytvořili tabulky a grafy, které znázorňují četnosti úloh rozdělených podle více než dvou kritérií. Tyto tabulky však do své práce zahrnovat nebudu, vzhledem k jejich množství a k množství úloh. Myslím si, že k vytvoření takto rozsáhlého výzkumu je počet mnou vybraných úloh nedostatečný.

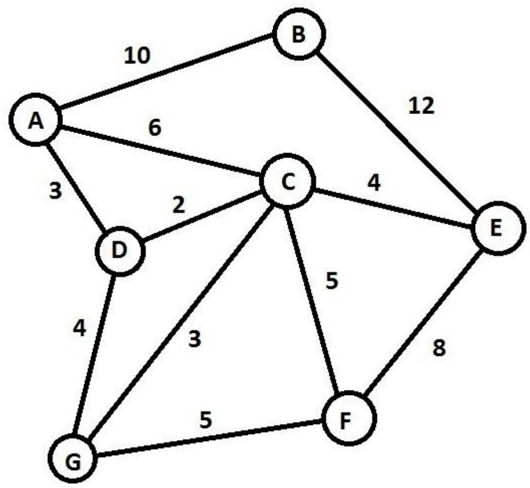
Chybějící úlohy

V předchozí kapitole jsme zjistili, jaké úlohy v matematických soutěžích nejvíce chybí. V této kapitole ukážu několik příkladů, kterými by se daly chybějící úlohy doplnit nebo by se těmito příklady mohli tvůrci inspirovat a vytvořit úlohy podobného ražení. Netvrdím, že jsou tyto úlohy originální – je možné, že se někde již vyskytly v podobné formě. V těch ročnících, které jsem zkoumal, mi však takovéto úlohy chyběly.

Tvorba úloh

Tvorba úloh do matematických soutěží není úplně jednoduchá záležitost. Je třeba sledovat, zda to není typický příklad v některé oblasti matematiky.

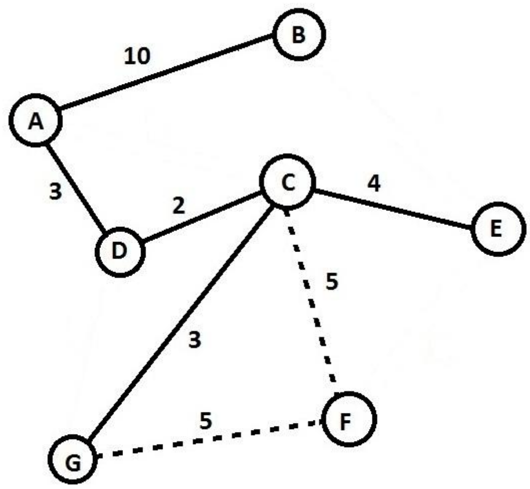
Př.: V zimě napadla přes noc spousta sněhu, s čímž silničáři nepočítali. Neměli dost soli na udržování všech silnic. Rozhodli se tedy, že budou udržovat pouze takové množství a délky silnic, aby se bylo možné dostat autem z každého města do měst ostatních. Poraďte silničářům, které silnice musí udržovat průjezdné, aby ušetřili co nejvíce soli. (Na grafu jsou města označeny kružnicí)



Obrázek 2: Kostra grafu

Úlohy tohoto typu jsou běžným objektem zkoumání teorie grafů. Proto se nemohou vyskytovat v matematických soutěžích, protože by byly zvýhodněni studenti, kteří se s tímto příkladem již setkali při výkladu. Je několik možností, jak uvést tuto úlohu. Může to být udržování silnic, elektrifikace měst, zavádění železniční dopravy mezi městy a podobně. Všechny tyto úlohy vedou na hledání kostry grafu. K vyřešení těchto úloh jsou již vytvořeny algoritmy, které by nejspíš použili studenti, kteří prošli nějakým kurzem teorie grafů. Ostatní studenti by se to snažili asi vyřešit intuitivně. Tento postup se pokusím nastínit.

Řešení: Vyjdeme z toho, že silničáři budou udržovat ty nejkratší silnice. Pokud bychom narazili na cestu, která by tvořila kružnici (z jednoho města do jiného by vedlo více různých cest), potom tuto cestu nebudeme přes zimu udržovat. Najdeme nejkratší cestu. Ta vede z města C do města D. Tu budou určitě silničáři udržovat. Další cesty mají hodnotu tři a jsou to cesty vedoucí z C do G a z A do D. Tyto cesty silničáři také nebudou moci zanedbávat. Další cesty mají hodnotu čtyři. Cesta mezi C a E je nepostradatelná. Totéž se však nedá říci o cestě mezi D a G. Pro ušetření soli je možné tuto silnici nechat zasněženou. Tímto způsobem bychom pokračovali, až bychom měli možnost se dostat do všech měst, a tím by byla úloha vyřešena. Jediná potíž při řešení by mohlo být rozhodování, zda prohrnout silnici mezi C a F nebo mezi F a G. Toto je již na každém řešiteli, kterou silnici bude chtít udržovat. Ze zadání to nelze rozhodnout. Na grafu vidíme výsledek tohoto příkladu. Čárkovaně jsou zachyceny cesty, kde není jasně určeno, kterou cestu udržovat. Pokud by studenti dospěli k tomuto postupu, použili by algoritmus, který je v teorii grafů znám jako Kruskalův. K získání maximálního počtu bodů je však nutné ještě dokázat správnost svého výpočtu. V tomhle případě je to vlastně důkaz, že výsledkem tohohle algoritmu je kostra grafu (výběr cest takový, že je možné se dostat do každého města). Druhá věc, kterou je nutno dokázat, je to, že je kostra grafu minimální. Jelikož už víme, že se jedná o konkrétní algoritmus, tyto důkazy nebudu provádět, protože jsou k nalezení například na wikipedia.org.



Obrázek 3: Kostra grafu - řešení

S tímto příkladem se v matematických soutěžích bohužel setkat nemůžeme. Dal by se samozřejmě modifikovat. Stále by ale měli výhodu studenti znalí teorie grafů. Modifikací tohoto příkladu by mohlo být solení silnic ve městech, kde jsou i jednosměrné ulice. Taková úloha by byla jistě zajímavá, ale stále by zvýhodňovala některé řešitele.

Dále bychom při vytváření kombinatorických úloh měli dávat pozor, aby studenti měli znalosti, které jsou třeba pro vyřešení úlohy. Pokud tyto znalosti nemají, mohou mít velké problémy s pochopením úlohy. Snažit se řešit úlohu, které nerozumí je vcelku zbytečné. Neměly by to ale být úlohy, se kterými se řešitel může setkat při hodinách.

Dále bychom se měli vyvarovat příkladům, u nichž stačí pouze dosadit do matematického vzorce. Takové úlohy neříkají nic jiného o řešiteli než to, že umí používat tabulky případně kalkulačku. Pokud už vytváříme úlohu, v jejímž řešení je možné využít vzorec, tak by neměl být využitelný hned. Měli bychom spíš vytvořit úlohu, kterou musí řešitel upravit do takové podoby, kdy je možné vzorec využít. Případně vhodně zkombinovat vzorce tak, aby se daly použít k řešení úlohy.

Při vytváření úloh bychom si měli říci, kde chceme úlohu uplatnit. Úloha v Matematickém klokanovi musí být snáze pochopitelná než úloha v matematické olympiádě, kde mají řešitelé mnohem více času na vyřešení jednotlivých úloh. Sice tu píšu o matematických soutěžích, ale i vyučující ve škole může studentům připravit svou vlastní úlohu. Dále bychom si měli říci, jak bychom chtěli, aby studenti danou úlohu řešili. Pokud bychom chtěli, aby úlohu řešili výčtem možností, tak by to měla být úloha, která bude mít méně řešení než úloha, kterou je možné řešit úpravou známých vzorců.

Úlohy k vytvoření

Nyní se již podíváme, jaké typy úloh by bylo třeba vytvořit. Budeme vycházet z jednotlivých grafů a tabulek o rozložení četností. Budu tvořit pouze úlohy zaměřené na jedno konkrétní rozdělení.

Z tabulky o rozdělení podle oboru výskytu jsme se dozvěděli, že nám chybí úlohy z teorie grafů, číselné úlohy a úlohy geometrické. Menší počet číselných úloh řešit nebudu – důvod jsem popisoval i s příkladem u příslušného grafu. Budu tedy tvořit příklady na teorii grafů a geometrické úlohy.

Z grafu Práce s prvky lze vyčíst, že metoda řešení model distribution jasně převládá nad ostatními. Proto se také pokusím vytvořit úlohy na model selection a partition.

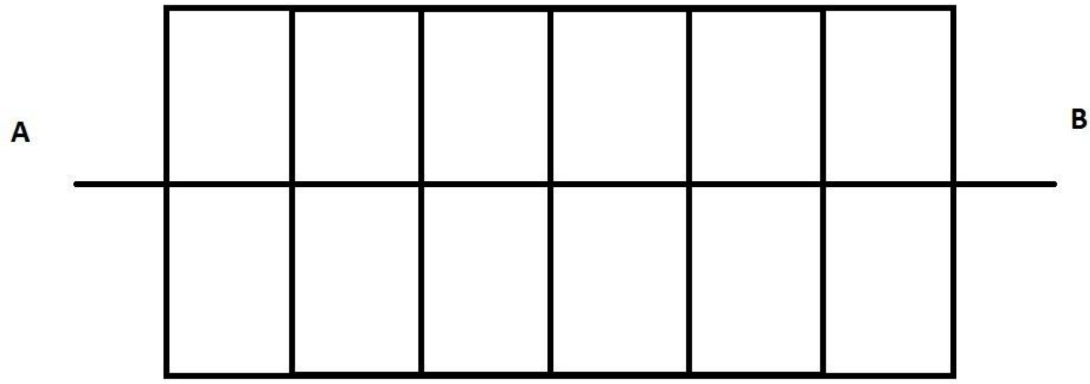
Co se týče rozdělení úloh podle způsobu řešení, tak nevidím žádný, který by byl třeba doplnit o nějakou úlohu. Lehce zaostává výpočet pomocí vzorce. Důvod tohoto jevu jsem vysvětlil pod příslušným grafem. Proto si nedávám za úkol vytvořit úlohu, která bude řešitelná jedním konkrétním způsobem. Samozřejmě vytvořený příklad do některé této skupiny přiřadím, ale nebude to hlavní zájem při tvorbě.

Po rozdělení vybraných úloh podle středoškolského rozdělení se jeví množství úloh na variace a permutace nedostatečným. I těmto dvěma skupinám úloh se pokusím nějaké vytvořit.

Úloha – teorie grafů

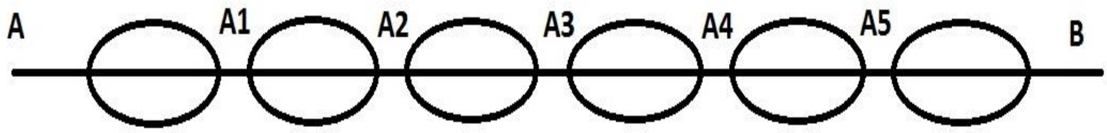
Př.: Kolika způsoby se lze dostat z bodu A do bodu B aniž bychom se vraceli?

(teorie grafů, model partition, logická úvaha, jiné)



Obrázek 4: Průchod grafu

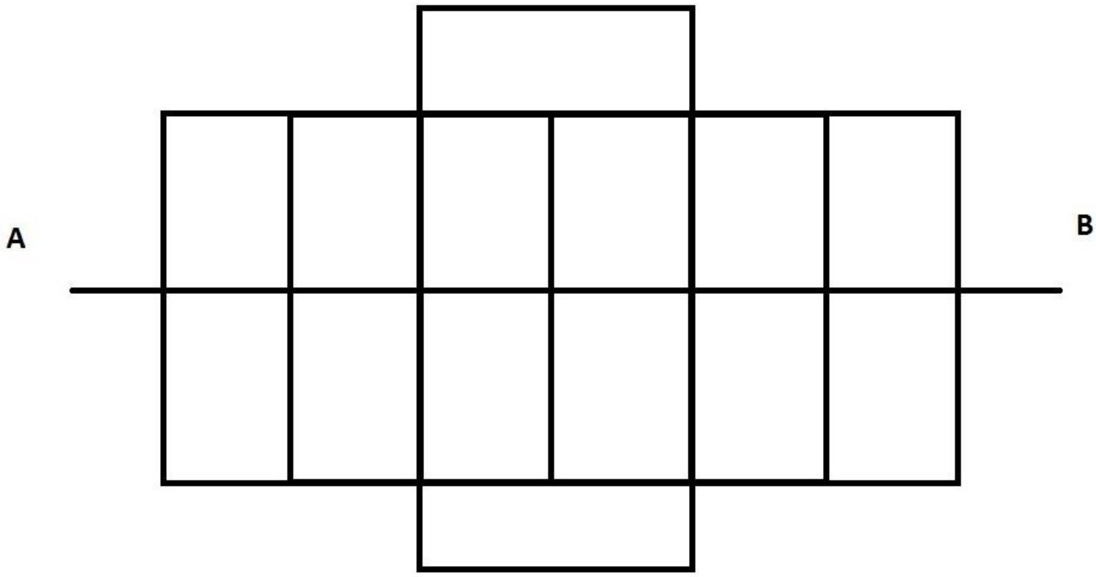
Řešení: Tato úloha je velmi snadno řešitelná, pokud si dokážeme představit, jak vlastně takový průchod vypadá. Vlastně nás nezajímají ty svislé cesty. Ty jen ukazují, že pokud projdeme po první vodorovné části grafu, tak že lze pokračovat znovu třemi cestami. Velmi dobře může posloužit překreslení do snáze pochopitelné podoby.



Obrázek 5: Průchod grafu - zjednodušení

Nyní je již vidět, že z bodu A do bodu A1 se mohu dostat třemi cestami. Stejně tak i z bodu A1 do bodu A2 existují tři cesty. Nyní již je vidět, že počet cest z bodu A do bodu B je $3^6 = 729$ možností.

Z tohoto snadného příkladu lze vyvodit i další příklady, které jsou podobné, ale třeba o trochu složitější. Jeden takový by mohlo být znovu hledání počtu cest z bodu A do bodu B. Tentokrát by ale graf vypadal třeba takto.



Obrázek 6: Průchod grafu - modifikace

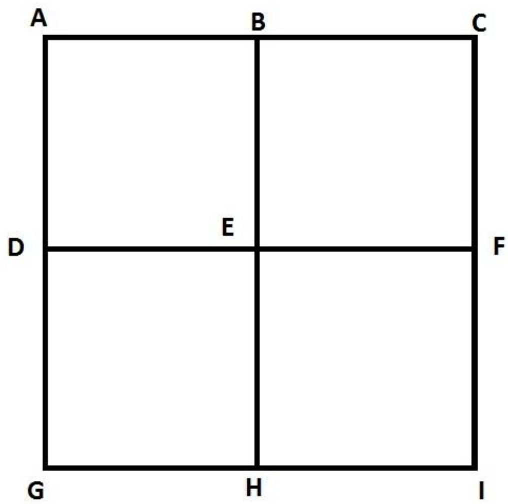
Tento příklad je rozšířením příkladu předchozího. Proto se dá očekávat, že i řešení si budou podobná. Jediný rozdíl mezi těmito úlohami je ten, že v této modifikaci musím vzít v potaz dvě cesty, které by ve zjednodušeném modelu byly navíc mezi body A2 a A4. Výsledný počet cest by tedy byl $11 * 3^4 = 891$.

Úloha – geometrie

<u>Př.</u>: V rovině jsou dány body A, B, C, D, E, F, G, H, I. Určete kolik trojúhelníků lze vytvořit z těchto bodů.

(geometrie, model selection, použití vzorce, kombinace)

<u>Řešení 1</u>: Postupně budu brát dvojice bodů a budu počítat v kolika trojúhelnících, které jsme zatím nezapočítali, se vyskytují. Tato metoda není elegantní, ale rozhodně povede ke správnému výsledku. Postupným vypisováním bychom dospěli k výsledku 76 trojúhelníků.



Obrázek 7: Body v rovině

<u>Řešení 2</u>: V pořadí druhé řešení je mnohem elegantnější než to první. Jde především o to, uvědomit si, kdy nelze trojúhelník vytvořit. Ze všech trojic bodů z těchto devíti nelze sestrojit trojúhelník pouze z těchto: ABC, DEF, GHI, ADG, BEH, CFI, AEI a CEG. Vypočítáme tedy počet $\mathrm{K}(3{,}9) = 84$. Odečteme ještě ty trojice, ze kterých trojúhelník nelze složit. Výsledek je tedy 76 trojúhelníků.

Lze vytvořit i další úlohy podobné této. Velmi snadno si dokážeme představit modifikaci této úlohy jiným rozestavěním bodů, tvoření jiných objektů než je trojúhelník a podobně. Také můžeme vytvořit podobné úlohy, které jsou přesunuté do trojrozměrného prostoru.

Úloha – model selection

Př.: Ve městě je 100 restaurací, 50 barů, 10 pivnic, 15 vináren a 20 kaváren. Kolika způsoby si může vybrat pracovník České obchodní inspekce 20 podniků, které navštíví? Kolika možnostmi si může vybrat 20 podniků, které navštíví, pokud musí navštívit 4 zařízení každého typu.

(reálná situace, model selection, použití vzorce, kombinace)

Řešení: Jedná se o obyčejné kombinace. První část úlohy je nalezení kombinace 20ti prvků z množiny 195ti prvků. $\mathrm{K}(20{,}195) = \binom{195}{20}$. Tento výsledek nám bude stačit. Vyčíslení tohoto kombinačního čísla by bylo možné, ale vcelku zbytečné. Druhou část vypočítáme stejně jako část první, jen ji rozdělíme na jednotlivé typy zařízení. Výsledný počet možností je tedy

$$\mathrm{K}(4{,}100) * \mathrm{K}(4{,}50) * \mathrm{K}(4{,}10) * \mathrm{K}(4{,}15) * \mathrm{K}(4{,}20) = \binom{100}{4} * \binom{50}{4} * \binom{10}{4} * \binom{15}{4} * \binom{20}{4}$$

Tuto úlohu by bylo možné také modifikovat. Například by pracovník České obchodní inspekce měl za úkol navštívit 20 zařízení a z každého typu by bylo třeba navštívit alespoň tři zařízení. Taková úloha by se dala řešit například rozepsáním všech možných rozdělení těchto 20 zařízení. Pro každý případ by pak bylo třeba najít počet možností a tyto počty na závěr sečíst podle kombinatorického pravidla součtu.

Úloha – model partition

Př.: Parta přátel se rozhodla přivydělat si provozováním hazardní hry. Dohodli se, že v jejich podniku se budou hrát kostky následujícím způsobem. Hází se čtyřmi šestistěnnými kostkami. Pokud padne na všech kostkách stejný počet ok, tak vyhrává návštěvník podniku druhou mocninu vkladu. V opačném případě zákazník přichází o vsazenou částku. Určete maximální hodnotu vkladu takovou, aby vydělali provozovatelé podniku. (Při dodržení pravděpodobnosti získají více peněz než vydají) (reálná situace, model partition, logická úvaha, variace)

<u>Řešení</u>: Počet všech možností, které mohou padnout na kostkách je $6^4 = 1\,296$. Z těchto možností je jen šest takových, kdy vyhraje návštěvník podniku. To znamená, že je šance 1:216, že vyhraje parta provozovatelů.

$$1 * x^2 < 216 * x$$

Jelikož je *x* kladné, mohu bez změny nerovnosti vydělit nerovnici *x*

$$1 * x < 216$$

Největší možný vklad takový, aby vydělávali provozovatelé, je 215 Kč

Tato úloha je poněkud odlišná od těch ostatních. Zasahuje do pravděpodobnosti. Jistě se zde ale využívá kombinatorických znalostí, proto může být i takováto úloha zařazena mezi kombinatorické. Právě zájem o tyto úlohy – hazardní hry – byl v 16. století důvodem hlubšího studia kombinatoriky. *Matematici se začali zabývat otázkami, jaká možná seskupení mohou nastat při házení určitého počtu hracích kostek a jaké jsou pravděpodobnosti výher*. (Farská 2011)

Úloha – variace

<u>Př.</u>: Kolik různých slov, délky nejvíce pěti znaků, lze sestavit z písmen abecedy? Ve slově se nesmí opakovat žádné písmeno vícekrát. Písmena uvažujte jen bez diakritických znamének. CH je složeno ze dvou písmen.

(pseudoreálná situace, model selection, použití vzorce, variace)

<u>Řešení</u>: Nejdříve spočítáme, kolik písmen čítá abeceda bez diakritických znamének. Dojdeme k číslu 26. Nyní budeme počítat, kolik slov má daný počet znaků. Jedná se vlastně o variace. Takže nejdříve budeme počítat kolik je slov tvořených jedním písmenem. To je $V_1(26) = \frac{26!}{25!} = 26$. Pro slova se dvěma písmeny je to $V_2(26) = \frac{26!}{24!}$. Takto bychom pokračovali až do slov složené z pěti písmen. Nakonec bychom dospěli k výsledku $26 + 26 * 25 + 26 * 25 * 24 + 26 * 25 * 24 * 23 + 26 * 25 * 24 * 23 * 22$ což lze zjednodušit vytýkáním na tvar $26 * \Big(1 + 25 * \big(1 + 24 * (1 + 23 * (1 + 22))\big)\Big)$

Úloha – permutace

<u>Př.</u>: Hokejového turnaje se účastní pět týmů z různých zemí. Organizátoři chtějí být na tuto událost připraveni. Proto se rozhodli vypsat všechny možnosti, jak mohou hokejisté nastupovat ke slavnostnímu zahájení. Slavnostní nástup proběhne tak, že za každý stát nastoupí jako první brankář nesoucí vlajku. Za ním dvacet hráčů. Každý tým zakončuje trenér, před kterým jde asistent trenéra. Kolik možností musí vypsat, aby mohli říci, že jsou na slavnostní zahájení připraveni?

(pseudoreálná situace, model partition, použití vzorce, permutace)

Řešení: Tuto úlohu vyřešíme postupně. Nejdříve si spočítáme, v kolika pořadích mohou nastoupit brankáři, jakožto vlajkonoši – brankáře v tuto chvíli chápeme podobně jako zástupce státu. Brankáře tedy můžeme rozestavit 5! způsoby. Nyní se podíváme na možné rozestavení hráčů. V každém týmu je dvacet hráčů, jejichž rozestavení musíme řešit. Každý tým tedy může nastoupit 20! způsoby. Podle kombinatorického pravidla součinu můžeme hráče rozdělit $(20!)^5$ způsoby. To ale ještě nemáme započítáno pořadí jednotlivých týmů. Teď je na čase využít dřívější výpočet rozestavení brankářů. Znovu použijeme kombinatorické pravidlo součinu. Tím dostáváme $(20!)^5 * 5!$ možných způsobů nastoupení při slavnostním zahájení.

Závěr

Cílem mé bakalářské práce bylo zjistit, jaké typy kombinatorických úloh jsou zadávány v matematických soutěžích. Dále jsem chtěl poukázat na rozdíly mezi řešením úloh v matematických soutěžích oproti řešení na středních školách a gymnáziích.

Před začátkem práce jsem předpokládal, že rozdělení kombinatorických úloh není vyrovnané. Tato hypotéza se mi po analýze získaných příkladů potvrdila. Tyto příklady jsou uvedeny v příloze včetně jejich rozdělení. K rozdělení lze mít výhrady. Velmi často jsem se setkával s úlohami, které jsem nebyl schopen jednoznačně rozhodnout. Musel jsem se však přiklonit k některé možnosti. Proto by rozdělení úloh někým jiným mohlo vypadat odlišně. Nic to však nemění na faktu, že například geometrické úlohy jsou mnohem méně obsažené v matematických soutěžích než úlohy pseudoreálné.

Dále nebyla vyvrácena hypotéza, že některé kombinace typů úloh se v matematických soutěžích nevyskytují vůbec. Toto jsem předpokládal z důvodu možnosti nevhodných kombinací typů pro úlohu. Je přeci logické, že úlohy, které lze zařadit mezi variace, kombinace nebo permutace, bude možno většinou vyřešit vzorcem pro ně určeným. Proto pokud není příklad tak jednoduchý, aby šel vyřešit vypsáním několika možností, hodí se pro něj spíše řešení použitím vzorce. Výsledky analýzy vybraných úloh tuto hypotézu potvrzují.

Téma této bakalářské práce se mi zdá velmi zajímavé. Prostudoval jsem si spoustu úloh, jen abych vybral ty, které se nějakým způsobem dotýkají kombinatoriky. Některé úlohy se zpočátku jeví tak, že do kombinatoriky rozhodně nepatří. Při bližším zkoumání však zjistíme, že je možné na nich uplatnit znalosti tohoto oboru.

Při tvorbě této práce jsem narazil na problémy, které jsem nebyl schopen vyřešit. Chybí mi zde znázornění úspěšnosti kombinatorických úloh oproti ostatním. Bylo by zajímavé tento výzkum provést, ale data pro vytvoření něčeho podobného se sbírají jen velmi těžko. Dále by byl zajímavý názor řešitelů úloh na obtížnost kombinatoriky. Zda se jim jeví obtížnější, nebo naopak snazší než ostatní okruhy matematiky, se kterými se v matematických soutěžích setkávají. Toto by mohl být cíl další práce, kdy bych navštívil několik škol a tam tento výzkum provedl. Samozřejmě by se jednalo o řešitele Matematického klokana. Při této příležitosti by se dala zkoumat oblíbenost kombinatoriky u vyučujících matematiky. To by byla pěkná praktická ukázka toho, jak se učí kombinatorika na školách a zda by ji vyučující chtěli učit jinak.

Při psaní této práce jsem si oprášil znalosti ze střední školy. K těmto znalostem jsem získal vhled do výuky kombinatoriky na středních školách. Tato práce by mohla být využitelná pro přípravu studentů na matematické soutěže. Dále by mohla být impulsem pro učitele matematiky, kteří chtějí kombinatoriku učit jiným způsobem než ostatní.

Výběr a zpracování tohoto tématu mě poučilo především v oblasti didaktiky. Při psaní této práce jsem přišel na to, že je důležité zadávat studentům různorodé úlohy tak, abych zjistil, zda probíranému tématu opravdu rozumí. Tím je myšleno, zda si dokáže spojit novou látku s látkou dříve probranou, nebo látkou z jiného okruhu matematiky. Dále mě tato práce přivedla k předsevzetí, že při budoucí práci pedagoga budu sledovat více myšlenkové procesy než výsledek na papíře.

Seznam literatury

ZÍTEK, František, et al. *36. ročník matematické olympiády na středních školách : Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1986/87*. 1. vydání. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1989. 216 s. ISBN 80-04-23727-4.

KOMAN, Milan; REPÁŠ, Vladimír. *36. ročník matematické olympiády na základních školách : Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1986/87*. 1. vydání. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1989. 148 s. ISBN 80-04-23726-6.

KOMAN, Milan; REPÁŠ, Vladimír. *37. ročník matematické olympiády na základních školách : Zpráva o matematické olympiádě na základních školách pořádané ve školním roce 1987/88*. 1. vydání. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1990. 148 s. ISBN 80-04-24244-8.

BOČEK, Leo, et al. *37. ročník matematické olympiády na středních školách : Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1987/88*. 1. vydání. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1990. 164 s. ISBN 80-04-24245-6.

KOMAN, Milan; REPÁŠ, Vladimír. *38. ročník matematické olympiády na základních školách : Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1988/89*. 1. vydání. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1991. 159 s. ISBN 80-04-25645-7.

BOČEK, Leo, et al. *38. ročník matematické olympiády na středních školách : Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1988/89*. 1. vydání. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1991. 200 s. ISBN 80-04-25644-9.

KOMAN, Milan; REPÁŠ, Vladimír. *39. ročník matematické olympiády na základních školách : Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1989/90*. 1. vydání. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1992. 139 s. ISBN 80-04-26037-3.

BOČEK, Leo, et al. *40. ročník matematické olympiády na středních školách : Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1990/91*. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1993. 224 s. ISBN 80-04-26407-7.

KOMAN, Milan; BINDER, Ji59; REPÁŠ, Vladimír. *40. ročník matematické olympiády na základních školách : Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1990/91*. 1. vydání. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1993. 138 s. ISBN 80-04-26406-9.

HODAŇOVÁ, Jitka; VANĚK, Vkadimír; HORENSKÝ, Radek. *Počítejte s Klokanem : Sbírka úloh s řešením pro 8. a 9. ročník ZŠ z mezinárodní soutěže Matematický klokan 2000-2004 kategorie "Kadet"* . Olomouc : Pedagogické nakladatelství Prodos spol. s r. o., 2007. 62 s. ISBN 978-80-7230-179-2.

HORENSKÝ, Radek, et al. *Počítejte s Klokanem : Sbírka úloh s řešením pro 8. a 9. ročník ZŠ z mezinárodní soutěže Matematický klokan 2000-2004 kategorie "Junior"*. Olomouc : Pedagogické nakladatelství Prodos spol. s r. o., 2007. 63 s. ISBN 978-80-7230-179-9.

CALÁBEK, Pavel; ŠVRČEK, Jaroslav. *Počítejte s Klokanem : Sbírka úloh s řešením pro 8. a 9. ročník ZŠ z mezinárodní soutěže Matematický klokan 2000-2004 kategorie "Student"*. Olomouc : Pedagogické nakladatelství Prodos spol. s r. o., 2007. 62 s. ISBN 978-80-7230-180-5.

ŠŤASTNÝ, MICHAL. *Kombinatorika*: *diplomová práce*. Brno: Masarykova univerzita, Fakulta pedagogická, Katedra matematiky, 2007. Vedoucí diplomové práce doc. Mgr. Pavel Řehák, Ph.D.

CALDA E. , DUPAČ V. , *Matematika pro gymnázia – Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika,* Prometheus, Praha 2000.

VOGLOVÁ, ZUZANA. *Kombinatorika na střední škole*: *rigorózní práce*. Brno: Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, 2006.

Seminární práce z matematiky - *Kombinatorika* [online]. [cit. 2011-06-05]. Dostupné z WWW: <http://absolventi.gymcheb.cz/2010/virotb/kombinatorika/>.

FARSKÁ, Jana. Kombinatorika [online]. [cit. 2011-06-05]. Dostupné z WWW: <http://carolina.mff.cuni.cz/~jana/kombinatorika/>.

Algoritmy.net [online]. 2010 [cit. 2011-06-05]. Dostupné z WWW: <http://www.algoritmy.net/article/91/Problem-sedmi-mostu>.

Česká školní inspekce [online]. 20.04.2010 [cit. 2011-06-05]. Dostupné z WWW: <http://www.csicr.cz/cz/85122-je-stanoven-pocet-deti-ve-tridach-v-jednotlivych-typech-skol>.

MŠMT : Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy [online]. 2006 [cit. 2011-06-05]. Dostupné z WWW: <http://www.msmt.cz/vzdelavani/skolskareforma/ramcove-vzdelavaci-programy>.

PALENČÁROVÁ, Daša. Vplyv implicitných kombinatorických modelov na kombinatorické myslenie. In BILLICH, Martin. *Teaching mathematics II : Innovation, new trends, research*. Rožumberok : Verbum, 2010. s. 206. ISBN 978-80-8084-645-9.

PALENČÁROVÁ, Daša. *Kombinatorické úlohy vo vyučování matematiky na základnej škole* [online]. Košice : 2009. 96 s. Diplomová práca. Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta.

ŠTEFFLOVÁ, Jaroslava. Aby matematika nestrašila. *Učitelské noviny* [online]. 16.2.2010, [cit. 2011-06-07]. Dostupný z WWW: <http://www.fraus.cz/rozsireni/aby-matematika-nestrasila/>.

Kruskalův algoritmus [online], poslední aktualizace 18.10.2010 18:46 [cit. 16.6.2011], Wikipedie. Dostupné z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Kruskal%C5%AFv_algoritmus>

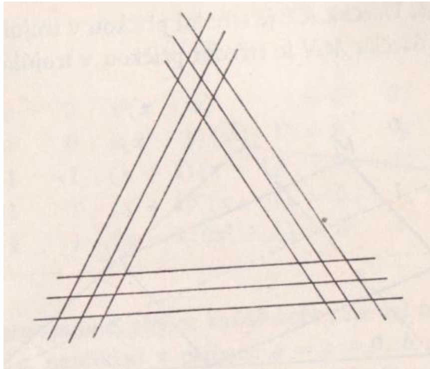
Seznam

Tabulky

Grafy

Obrázky

Přílohy



1. *Jakým nejmenším počtem barev je možno obarvit průsečíky přímek na obr tak, aby na žádné této přímce neležely dva body téže barvy.* (Zítek 1989) (geometrická úloha, model distribution, logická úvaha, jiné)

2. *Šachovnice se skládá z 8 × 8 polí vytvářejících čtverec. Věž je jedna z figur, jimiž se hraje šach. Řekneme, že daná věž je neohrožena, jestliže v řádku a sloupci, ve kterém se nalézá, už není jiná věž.* (Zítek 1989) (pseudoreálná situace, model distribution, použití vzorce, permutace)

   a) Určete počet takových rozmístění 8 věží na šachovnici, při nichž je každá z nich neohrožena.

   b) Určete počet takových rozmístění 8 věží na šachovnici, při nichž je aspoň jedna z nich

   neohrožena.

   c) Určete počet takových rozmístění 8 věží na šachovnici, při nichž je aspoň jedna z neohrožena a žádné dvě nejsou v témže řádku.

3. *Každé pole čtvercové tabulky 12 × 12 je obarveno jednou z třech barev. Dokažte, že v tabulce existují čtyři pole stejné barvy, jež jsou rohovými poli některého pravoúhelníku.* (Zítek 1989) (pseudoreálná situace, model distribution, logická úvaha, jiné)

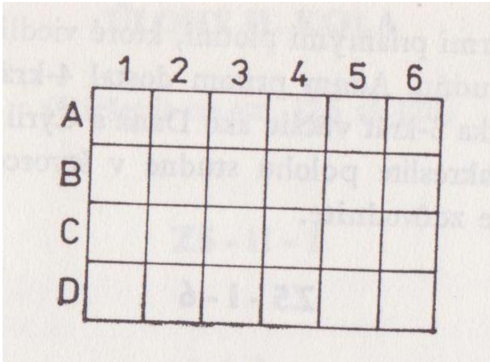
4. *Všechna čísla 1, 2, 3, …, 9 rozdělte do dvou množin A, B (bez společných prvků). Vypočítejte součin a všech čísel z množiny A a součin b všech čísel z množiny B. Vypočítejte podíl a/b. Kolik různých celých čísel můžeme takto získat?* (Koman 1990) (číselná úloha, model partition, výčet možností, jiné)

5. *Jaký největší počet figurek lze na šachovnici n × n rozmístit tak, aby žádné dvě nesousedily? (Za sousední považujeme ta políčka, která mají společný alespoň jeden vrchol.)* (Boček 1990) (pseudoreálná situace, model distribution, logická úvaha, jiné)

6. *Devět judistů se rozhodlo uspořádat vylučovací turnaj následujícím způsobem: V každém kole se z doposud neporažených judistů určí losem dvojice zápasníků, která se utká. Vítěz posledního (osmého) zápasu se stává vítězem turnaje. Zjistěte počet všech možných průběhů takového turnaje.* (Boček 1991) (reálná situace, model distribution, použití vzorce, kombinace)

7. *Z šachovnice n × n, kde n není dělitelné třemi, odstřihneme jedno rohové pole. Dokažte, že zbytek je možné pokrýt deskami tvaru L složenými ze tří čtverců shodných s polem šachovnice tak, že se desky nepřekrývají.* (Boček 1991) (pseudoreálná situace, model distribution, logická úvaha, jiné)

8. *Kolik pravoúhelníků je na obrázku? Kolik z nich obsahuje pole C2? Kterých je víc, těch co obsahují pole C2 nebo těch, co obsahují pole B3?* (Koman 1991) (geometrická úloha, model selection, výčet možností, jiné)



9. *Na tenisovém dvorci se střetli Adam, Boris a Cyril s Dášou a Evou. Dohodli se, že budou hrát smíšenou čtyřhru, tedy jeden muž a jedna žena proti jednomu muži a jedné žene. Zbývající pátý hráč bude rozhodčí. Aby si však každý zahrál, bude se po každém setu měnit rozhodčí. Hrát budou dokud se nevystřídají všechny možné dvojice soupeřů. Ve chvíli kdy by měli na kurt nastoupit dvojice, které již proti sobě hráli, zápas končí. Kolik setů odehráli?* (Koman 1992) (reálná situace, model selection, výčet možností, kombinace)

10. *Tři fotbalová družstva hrají turnaj systémem, v němž každé družstvo hraje s každým k zápasů. Po skončení turnaje se zjistilo, že družstva získala různý počet bodů. Vítězem turnaje se nestalo družstvo, které získalo nejvíce výher, ani družstvo, které mělo nejméně proher. Určete nejmenší číslo k, pro které mohla uvedená situace nastat.* (Boček 1993) (reálná situace, model distribution, logická úvaha, jiné)

11. *V rovině je dáno 7 bodů, z nichž některé jsou spojeny úsečkou. Přitom jsou splněny podmínky:*

    a) z každé trojice bodů jsou aspoň dva spojeny úsečkou, *b) počet úseček je minimální*

Kolik úseček obsahuje útvar, který splňuje tyto podmínky? Nakreslete příklad takového útvaru. (Boček 1993) (teorie grafů, model distribution, logická úvaha, jiné)

12. *V táboře se deset chlapců rozhodlo hrát nohejbal. Kolika způsoby je možno rozdělit do dvou družstev po pěti hráčích, jestliže Matěj chce hrát s Kubou a Jožka nechce hrát s Ondřejem. (Všichni chlapci mají různá jména).* (Koman 1993) (reálná situace, model partition, použití vzorce, kombinace)

13. *Je možno obarvit políčka tabulky 1990 × 1990 černou a bílou barvou tak, aby políčka souměrně sdružená podle středu tabulky měla opačnou barvu a v libovolném sloupci a v libovolném řádku bylo stejně černých a bílých polí?* (Boček 1993) (pseudoreálná situace, model distribution, logická úvaha, jiné)

14. *Prváčka Danka bola vždy zvedavá a netrpezlivo očakávala deň kedy dostane svoje prvé vysvedčenie. Sodružka učitelka jej povedala: „Při školskej bránie máme 8 schodov. Dohodníme sa, že od zajtra každý deň prejdeš po schodech do školy iným spůsobom. Musíš všaj didežať dve podmínky.*

    1. *Každýkrát musíš stúpiť na prvý schod.*
    2. *Z každého schodu můžeš stúpiť hneď na ten další, alebo jeden môžeš přeskočit a stúpiť hneď na ten ďalší*

    V ten deň, keď vyčerpáš už aj poslednú možnosť, budeme rozdávat vysvedčenie.“

    Koĺkokrát musela Danka prejsť po schodoch, aby dostala vysvedčenie? (Koman 1989) (pseudoreálná situace, model selection, výčet možností, jiné)

15. *Petr ma 9 stejně velkých čtverečků (3 bílé, 3 modré, 3 červené). Kolika různými způsoby je může uspořádat do tabulky 3 × 3, aby v každém řádku i sloupci byly obsaženy všechny 3 barvy?* (Horenský 2007) (pseudoreálná situace, model distribution, použití vzorce, variace)

16. *Petr a Marie házejí kostkou. Kdo hodí větší číslo, vyhrál (pokud oba hodí stejné číslo, házejí znova). Kdo první vyhraje 10krát, vyhraje 40 bonbonů. Když Petr vyhrál sedmkrát a Marie devětkrát, rozdělili si bonbony úměrně tomu, jakou*

měli šanci na celkové vítězství. Kolik bonbónů získá Marie? (Horenský 2007) (reálná situace, model partition, výčet možností, jiné)

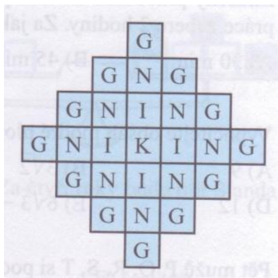
17. *Kolika různými způsoby lze zcela pokrýt obdélník 2 × 8 pomocí dominových kostek 1 × 2, aniž by se překrývaly?* (Horenský 2007) (pseudoreálná situace, model distribution, výčet možností, jiné)

18. *Kolika různými způsoby lze rozdělit číslo 30 na součet tří kladných celých čísel? Pokud se součty liší pouze v pořadí sčítanců, tak je považujeme za stejné.* (Horenský 2007) (číselná úloha, model partition, výčet možností, jiné)

19. *V sáčku s kuličkami je celkem třicet kuliček. Vytáhneme-li náhodně 12 kuliček, vždy mezi nimi bude alespoň jedna bílá. Vytáhneme-li náhodně 20 kuliček, vždy mezi nimi bude alespoň jedna kulička, která není bílá. Kolik bílých kuliček je v sáčku?* (Horenský 2007) (reálná situace, model partition, logická úvaha, kombinace)

20. *Test obsahuje celkově 20 otázek, za správnou odpověď je sedm bodů, za špatnou se dva body odečtou, za nezodpovězenou otázku se žádný bod nezíská ani neztratí. Milanův výsledek testu byl 87 bodů. Kolik otázek ponechal bez vyplnění?* (Horenský 2007) (číselná úloha, model partition, logická úvaha, kombinace)

21. *Kolikrát můžeš přečíst slovo KING, jestliže se ve znázorněném obrazci smíš pohybovat z každého čtverečku na libovolný sousední čtvereček se společnou stranou?* (Hodaňová 2007) (teorie grafů, model selection, výčet možností, kombinace)



22. *Ve třídě je 10 chlapců. V sobotu se hraje ve městě důležité fotbalové utkání. Kolika různými způsoby mohou chlapci utvořit skupinu návštěvníků tohoto utkání, jestliže víme, že pokud půjde na utkání Martin, vezme s sebou i Pavla?* (Hodaňová 2007) (reálná situace, model selection, použití vzorce, kombinace)

23. *Kryštof narýsoval dvě různé kružnice a tři různé přímky a pak barevně zvýraznil všechny body, v nichž se protínají alespoň dva z narýsovaných geometrických útvarů. Jaký je maximální počet bodů, které Kryštof zvýraznil?* (Hodaňová 2007) (geometrická úloha, model distribution, výčet možností, jiné)

24. *Zmenšená šachovnice o rozměru 4 × 4 je protnuta přímkou. Jaký nejvyšší počet políček šachovnice může být touto přímkou rozdělen na dvě části?* (Hodaňová 2007) (geometrická úloha, model distribution, výčet možností, jiné)

25. *Ve stánku se zmrzlinou mají 9 různých druhů zmrzliny. Skupina dětí přichází ke stánku a každé dítě si kupuje dva kopečky různých druhů zmrzliny do kornoutu. Jaký je největší počet dětí může nakupovat u stánku zmrzlinu, aby žádné dvě děti neměly stejnou kombinaci druhů zmrzliny?* (Hodaňová 2007) (reálná situace, model selection, použití vzorce, kombinace)

26. *Josef má 100 myší, každá z nich je buď bílá, nebo šedá. Alespoň jedna Josefova myš je šedá a z libovolných sedmi myší jsou alespoň čtyři bílé. Kolik šedých myší může Josef nejvýše mít?* (Cabálek 2007) (reálná situace, model partition, logická úvaha, kombinace)

27. *Ve skupině fotbalového turnaje hrálo každé mužstvo s každým jiným právě jednou. V závěrečné tabulce celek A získal 7 bodů, celek B 4 body, celek C 3 body a celek D 3 body. (Ve fotbalu získá tým 3 body za výhru, 1 bod za remízu a 0 bodů za prohru.) Jak skončil zápas mezi mužstvy A a D?* (Cabálek 2007) (*reálná situace, model distribution, logická úvaha, jiné)*

28. *Deset družstev se zúčastnilo turnaje ve stolním tenisu, ve kterém hrálo každé družstvo s každým jiným družstvem právě jednou. Za výhru získalo družstvo 3 body, za remízu 1 bod, za prohru 0 bodů. Všechna družstva získala dohromady 130 bodů. Kolik zápasů skončilo remízou?* (Cabálek 2007) (reálná situace, model distribution, logická úvaha, kombinace)

29. *Dva bílí a osm šedých racků létá nad řekou. Najednou všichni usedli na zábradlí mostu. Jaká je pravděpodobnost, že oba bílí racci sedí vedle sebe?* (Cabálek 2007) (reálná situace, model distribution, použití vzorce, permutace)

30. *Uvažujme všechny možné úsečky spojující vrcholy pravidelného mnohoúhelníku. Nemají-li dvě takové úsečky žádný společný bod, nazveme cizí. Kolik dvojic cizích úseček existuje v pravidelném šestiúhelníku?* (Cabálek 2007) (geometrická úloha, model distribution, logická úvaha, jiné)