Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Jakub Mikulka

Stochastická dominance vyšších řádů

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce:	RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie

Praha 2011

Na tomto místě bych chtěl poděkovat vedoucímu své diplomové práce RNDr. Ing. Miloši Kopovi, Ph.D. za trpělivost, ochotu a cenné rady při vzájemné spolupráci.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Jakub Mikulka

Název práce: Stochastická dominance vyšších řádů
Autor: Bc. Jakub Mikulka
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí diplomové práce: RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.
e-mail vedoucího: kopa@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Tato práce se věnuje stochastické dominanci vyšších řádů náhodných veličin a portfolií. Je prezentován souhrn poznatků o stochastické dominanci vyšších řádů a eficienci portfolií. Hlavní částí práce je důkaz, že za předpokladu normálně i gamma rozdělených náhodných veličin je ekvivalentní stochastická dominance nekonečného řádu se stochastickou dominancí druhého řádu. Na základě těchto výsledků je formulována nutná a postačující podmínka eficience portfolia vzhledem k nekonečnému řádu stochastické dominance za předpokladu normality. Tato podmínka je použita v praktické části, kde je srovnáván přístup k eficienci portfolií odvozený v této práci za předpokladu normálního rozdělení s neparametrickým scénářovým přístupem. Protože odvozená nutná a postačující podmínka eficience je založena na předpokladu normality, jsou použita jak data, u kterých je možné považovat předpoklad normality za splněný, tak data u kterých byla normalita jednoznačně zamítnuta. Z výsledků metody na obou sadách dat je odhadnut vliv nesplnění předpokladu normality na odvozenou nutnou a postačující podmínku eficience portfolia.

Klíčová slova: eficience portfolií, stochastická dominance nekonečného řádu, normální rozdělení, gamma rozdělení

Title: High-order stochastic dominance
Author: Bc. Jakub Mikulka
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: kopa@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: The thesis deals with high-order stochastic dominance of random variables and portfolios. The summary of findings about high-order stochastic dominance and portfolio efficiency is presented. As a main part of the thesis it is proven that under assumption of both normal and gamma distribution the infinite-order stochastic dominance is equivalent to the second-order stochastic dominance. The necessary and sufficient condition for the infinite-order stochastic dominance portfolio efficiency is derived under the assumption of normality. The condition is used in the empirical part of the thesis where parametrical approach to the portfolio efficiency is compared to the nonparametric scenario approach. The derived necessary and sufficient condition is based on the assumption of normality; therefore we use two sets of data, one with fulfilled assumption of normality and the other for which the assumption of normality was unambigously rejected. Consequently, the influence of fulfillment of the normality assumption on the results of the necessary and sufficient condition for portfolio efficiency is estimated.

Keywords: portfolio efficiency, infinite-order stochastic dominance, normal distribution, gamma distribution

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Existuje celá řada přístupů k základní otázce, jak vyhodnotit výhodnost či nevýhodnost investic, jejichž výnos je z části založen na náhodě. Jako příklad lze uvést investice do nákupu jednotlivých akcií nebo do nákupu celých vhodně vybraných balíčků akcií tedy portfolií.

Základy teorie portfolia položil v roce 1952 Markowitz [15]. Jeho modely poměřují investice z pohledu výnosnosti neboli očekávaného zisku a z pohledu rizikovosti, která je reprezentována rozptylem. Tyto modely předpokládají, že všichni investoři jsou stejní, z čehož vyplývá, že pokud nalezneme jedno optimální portfolio, toto portfolio budou chtít všichni investoři.

Předpoklad, že mají všichni investoři stejné preference, opouští modely stochastické dominance, kterými se v této práci budeme zabývat. Tyto modely předpokládají, že každý investor má vlastní unikátní preference reprezentované užitkovou funkcí. Každý investor tedy může preferovat jiné portfolio. Většinu investorů ovšem spojují některé charakteristiky jejich užitkových funkcí, například to, že preferují větší výnos před menším, jistou investici před nejistou apod. Podle takových charakteristik se vytváří jednotlivé třídy užitkových funkcí, které odpovídají řádům stochastické dominance. Možností sestavení portfolií je velice mnoho a investor není schopen je všechna mezi sebou porovnat. Proto se snažíme nalézt takové množiny portfolií, o kterých víme, že jsou mezi nimi všechna taková portfolia, která by mohla být pro některého investora z dané třídy optimální, portfoliím z takové množiny pak říkáme eficientní portfolia vzhledem k příslušnému řádu stochastické dominance. Když je množina eficientních portfolií nalezena, investor si mezi nimi může podle svých preferencí vybrat optimální portfolio. Čím toho o investorovi a jeho užitkové funkci více víme (nebo předpokládáme), tím menší eficientní množiny portfolií můžeme nalézt a tím více mu tak zjednodušíme výběr. Vyšší stupeň znalostí odpovídá vyšším stupňům stochastické dominance.

Základní výhodou stochastické dominance je její obecnost, což z ní dělá užitečný nástroj použitelný v celé řadě oblastí ekonomie a statistiky. Za určitých okolností je vztah mezi Markowitzovým modelem a stochastickou dominancí velice úzký. Jak ukážeme v kapitole 5, za předpokladu normality výnosů portfolií je Markowitzův přístup ekvivalentní se stochastickou dominancí vyššího než prvního řádu.

K významnému rozvoji modelů stochastické dominance nižšího řádu dochází na konci 60. let 20. století, kdy jsou nezávisle na sobě publikovány práce Hadar a Russel [4], Hanoch a Levy [5], Rothschild and Stiglitz [23] a Whitmore [26], které vedly k používání modelů stochastické dominance ve financích i ekonomii. V pozdějších pracech Whitmore [27] a Levy [13] se podařilo získat výsledky i pro vyšší řády stochastické dominance včetně řádu nejvyššího a to nekonečného. Další vlna zájmu byla vzbuzena okolo přelomu tisíciletí články Rockafellar, Uryasev [22] a Ogryczak, Ruszczynski [18], kde se podařilo ukázat vztah mezi mírou rizika CVaR a stochastickou dominancí druhého řádu.

Nyní se věnuje největší pozornost využití stochastické dominance při testování eficience portfolií. Nejprve Levy [12] odvodil kritéria pro párové srovnání portfolií. Nepoměrně těžší úlohu testovat eficienci portfolia vzhledem k druhému řádu stochastické dominance vůči nekonečné množině všech ostatních portfolií vyřešil jako první Post [20]. Další kritéria pro eficienci portfolií pro druhý řád stochastické dominance odvodili Kuosmanen [10] a Kopa [7].

Prvním a druhým řádem stochastické dominance mezi náhodnými veličinami se budeme zabývat v druhé kapitole, ve třetí kapitole shrneme poznatky o třetím, n-tém a nekonečném řádu stochastické dominance. Ve čtvrté kapitole se budeme zabývat obecnějším scénářovým přístupem k stochastické dominanci včetně testů eficience vzhledem k druhému řádu stochastické dominance.

V páté kapitole uvedeme přístup ke stochastické dominanci za předpokladu specifického rozdělení výnosů. Budeme uvažovat jednak normálně rozdělené a poté i gamma rozdělené náhodné veličiny. Nutné a postačující podmínky pro první a druhý řád stochastické dominance jsou známé pro obě rozdělení. My v podkapitolách 5.2 a 5.4 odvodíme pro obě rozdělení nutné a postačující podmínky pro nekonečný řád stochastické dominance. V podkapitole 5.2.2 využijeme výsledků pro normálně rozdělené náhodné veličiny a odvodíme kritérium eficience portfolií pro nekonečný řád stochastické dominance za předpokladu normality.

V šesté kapitole na reálných datech srovnáme výsledky v této práci odvozeného kritéria pro eficienci vzhledem k nekonečnému řádu stochastické dominance za předpokladu normálního rozdělení výnosů s obecnějším scénářovým přístupem, který nevyužívá znalosti specifického typu rozdělení.

Kapitola 2

Stochastická dominance prvního a druhého řádu

V první kapitole představíme koncept rozhodování za rizika a uvedeme základní pravidla stochastické dominance (SD) prvního a druhého řádu.

2.1 Rozhodování investora za rizika

Uvažujme investora, který volí investice z množiny přípustných investičních příležitostí. Výnosy investic budeme v této práci reprezentovat náhodnými veličinami, které zavádíme podobně jako Lachout [11].

Definice 2.1 *Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor a $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1)$ je měřitelný prostor. Zobrazení $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1)$ je náhodná veličina s hustotou $f(t)$ a zprava spojitou distribuční funkcí $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Množinu všech uvažovaných náhodných veličin označme jako $\mathbb{X}$.*

Při investičním rozhodování za rizika předpokládáme, že distribuční funkce všech náhodných veličin (výnosů investic) jsou považovány za známé. I když tento předpoklad samozřejmě ve skutečnosti není téměř nikdy splněn, je rozumné v souladu s Levy [14] předpokládat alespoň to, že je investor schopen provést kvalifikovaný odhad této distribuční funkce. Existuje řada metod, jak investice porovnávat mezi sebou. Asi nejznámější je metoda maximalizace očekávaného užitku zavedená J. von Neumanem a O. Morgensternem [17]. Tato metoda je založená na předpokladu, že preference investorů lze reprezentovat užitkovou funkcí.

Pokud máme úplnou informaci o preferencích investora, tzn. známe přesně jeho užitkovou funkci, potom lze přímo spočítat očekávaný užitek každé z uvažovaných investic X, $\mathbb{E}u(X)$, a podle něj tyto investice snadno seřadit. Když však známe pouze částečnou informaci o preferencích investora, např. víme pouze to, že preferuje větší výnos než menší, potom lze investice seřadit pouze částečně.

Pravidla stochastické dominance (ostatně stejně jako jiná pravidla investičního rozhodování) pracují pouze s částečnými informacemi investorských preferencí, a proto je výsledkem jejich aplikace pouze částečné uspořádání investic. Podle naší znalosti o preferencích investora, neboli o jeho užitkové funkci, rozdělujeme jednotlivé řády stochastické dominance, přičemž vyšší řády znamenají lepší znalost o užitkové funkci. Upřesněme si nejprve pojmy užitkové funkce a averze k riziku ve shodě s Pratt [21].

Definice 2.2 *Nechť $u : I \to R$ je užitková funkce, tedy spojitá, neklesající funkce definovaná na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a W je současný majetek investora. Uvažujme přípustnou investiční příležitost reprezentovanou náhodnou veličinou $X \in \mathbb{X}$ s rozdělením P, pro kterou jsou střední hodnoty $\mathbb{E}u(W+X)$ a $\mathbb{E}X$ konečné. Pokud pro každou hladinu investorova bohatství W a pro každou přípustnou náhodnou investiční příležitost X platí:*

$\mathbb{E}u(W+X) < u(W+\mathbb{E}X)$ *řekneme, že je investor averzní k riziku,*

$\mathbb{E}u(W+X) = u(W+\mathbb{E}X)$ *řekneme, že je investor neutrální k riziku,*

$\mathbb{E}u(W+X) > u(W+\mathbb{E}X)$ *řekneme, že jde o investora vyhledávajícího riziko.*

Pro jednoduchost jsme zavedli averzi vůči riziku pro investory bez ohledu na hladinu jejich bohatství, i když je samozřejmě možné ji definovat pro investory pouze lokálně. Je totiž možné, že investor averzní k riziku se může stát po nárůstu majetku neutrální k riziku nebo dokonce riziko vyhledávající. Platí, že investor averzní k riziku by nikdy nehrál tzv. spravedlivou hru, přičemž spravedlivá je taková hra, jejíž cena za hru se rovná očekávané výhře.

2.2 Stochastická dominance

Zavedeme nejprve dvě základní množiny užitkových funkcí podle množství informací, které o nich máme. Označme množinu všech neklesajících spojitých diferencovatelných užitkových funkcí jako U_1, tedy $u' \geq 0, \forall u \in U_1$. Pro zjednodušení budeme i nadále vždy uvažovat pouze užitkové funkce diferencovatelné do potřebného řádu. Jako $U_2 \subset U_1$ potom označíme množinu všech neklesajících konkávních užitkových funkcí (diferencovatelných do druhého řádu), což lze zapsat také následovně $u' \geq 0$ a $u'' \leq 0, \forall u \in U_2$). Konkávní užitková funkce odpovídá investorům, kteří jsou averzní k riziku nebo rizikově neutrální. V této podkapitole si ukážeme některá kritéria investičního rozhodování založená na těchto částečných informacích.

Následující definice jsou uvedeny v souladu s Levy [14].

Definice 2.3 *(Slabá stochastická dominance prvního a druhého řádu) Uvažujme náhodné veličiny X_1 a X_2 s distribučními funkcemi $F_1(x)$ a $F_2(x)$.*

(i) Řekneme, že X_1 slabě dominuje X_2 vzhledem k stochastické dominanci prvního řádu (FSD-First Degree Stochastic Dominance), což označíme jako $X_1 \succeq_{FSD} X_2$, pokud

$$\mathbb{E}_{F_1}u(x) - \mathbb{E}_{F_2}u(x) \geq 0,$$

pro každou užitkovou funkci $u \in U_1$, pro kterou střední hodnoty $\mathbb{E}_{F_1}u(x)$ a $\mathbb{E}_{F_2}u(x)$ existují.

(ii) Řekneme, že X_1 slabě dominuje X_2 vzhledem k stochastické dominanci druhého řádu (SSD-Second Degree Stochastic Dominance), což označíme jako $X_1 \succeq_{SSD} X_2$, pokud

$$\mathbb{E}_{F_1}u(x) - \mathbb{E}_{F_2}u(x) \geq 0,$$

pro každou užitkovou funkci $u \in U_2$, pro kterou střední hodnoty $\mathbb{E}_{F_1}u(x)$ a $\mathbb{E}_{F_2}u(x)$ existují.

Kromě výše uvedené definice slabé stochastické dominance, kterou nebudeme v této práci příliš využívat, se dále definuje striktní stochastická dominance, kterou budeme označovat pouze jako stochastická dominance.

Definice 2.4 *(Stochastická dominance) Nechť X_1 a X_2 jsou dvě náhodné veličiny.*

(i) X_1 dominuje X_2 vzhledem k stochastické dominanci prvního řádu, neboli $X_1 \succ_{FSD} X_2$, pokud

$$\mathbb{E}_{F_1}u(x) - \mathbb{E}_{F_2}u(x) \geq 0,$$

pro každou užitkovou funkci $u \in U_1$, pro kterou střední hodnoty $\mathbb{E}_{F_1}u(x)$ a $\mathbb{E}_{F_2}u(x)$ existují, a pro alespoň jednu $u \in U_1$ je nerovnost splněna jako ostrá.

(ii) X_1 dominuje X_2 vzhledem k stochastické dominanci druhého řádu, neboli $X_1 \succ_{SSD} X_2$, pokud

$$\mathbb{E}_{F_1}u(x) - \mathbb{E}_{F_2}u(x) \geq 0,$$

pro každou užitkovou funkci $u \in U_2$, pro kterou střední hodnoty $\mathbb{E}_{F_1}u(x)$ a $\mathbb{E}_{F_2}u(x)$ existují, a pro alespoň jednu $u \in U_2$ je nerovnost splněna jako ostrá.

Na základě jednotlivých řádů SD lze definovat *eficientní množinu* náhodných veličin.

Definice 2.5 *(Eficience náhodných veličin) Nechť $\mathbb{X}$ je uvažovaná množina náhodných veličin.*

(i) Náhodná veličina $X_2 \in \mathbb{X}$ je FSD neeficientní vzhledem k $\mathbb{X}$, pokud existuje náhodná veličina $X_1 \in \mathbb{X}$ taková, že $X_1 \succ_{FSD} X_2$. V opačném případě řekneme, že X_2 je FSD eficientní vzhledem k $\mathbb{X}$.

(ii) Náhodná veličina $X_2 \in \mathbb{X}$ je SSD neeficientní vzhledem k $\mathbb{X}$, pokud existuje náhodná veličina $X_1 \in \mathbb{X}$ taková, že $X_1 \succ_{SSD} X_2$. V opačném případě řekneme, že X_2 je SSD eficientní vzhledem k $\mathbb{X}$.

Pokud si vezmeme jako příklad náhodné veličiny výnos investice, pak investici zahrneme do eficientní množiny, pokud neexistuje jiná investice, která by ji dominovala v příslušném řádu SD. Eficientní množinu tedy tvoří takové investice, které nejsou dominovány žádnou jinou investicí. Naopak *neeficientní množina* vzhledem k U_1 nebo U_2 zahrnuje investice, pro které existuje alespoň jedna další investice z eficientní množiny, která je dominuje. Dochází tak k rozdělení množiny všech investic na dvě navzájem disjunktní množiny, přičemž platí, že každá investice je buď eficientní nebo neeficientní.

Jak potom probíhá rozhodování o realizaci investice na základě SD? V první fázi se využije částečná informace a přípustná množina investic se rozdělí na eficientní a neeficientní. Toto rozdělení je naprosto objektivní, a proto by ho mohl provést např. najatý konzultant. Druhou fázi výběru by pak musel provést přímo investor tím, že by z eficientní množiny vybral tu nejlepší investici na základě svého subjektivního rozhodnutí, protože jen on zná úplnou informaci o svých preferencích. Výhoda takovéhoto postupu pro investora spočívá zejména v tom, že nemusí vybírat optimální investici z celé množiny všech investic, ale pouze z omezené množiny eficientních investic. Čím je eficientní množina menší, tím větší výhodu tento postup pro investora přináší. Zároveň platí, jak ukážeme dále, že čím vyšší stupeň stochastické dominance využíváme, tím menší eficientní množiny vycházejí. Konkrétně je tedy např. SSD eficientní množina investic podmnožinou FSD eficientní množiny.
Kromě koncepce eficience vzhledem k stochastické dominanci existují ještě další koncepty eficience. Asi nejznámějším je koncept Markowitzova modelu, poprvé publikovaný v Markowitz [15]. Někdy se také označuje jako mean-variance kritérium. Vztahem mezi Markowitzovým konceptem eficience a SD konceptem eficience se budeme zabývat v kapitole 5.

Definice 2.6 *(Eficience podle Markowitzova modelu) Náhodná veličina X_2 je eficientní podle Markowitzova modelu vzhledem ke střední hodnotě a rozptylu, pokud neexistuje jiná náhodná veličina X_1 taková, že*

$$\mathbb{E}X_2 \geq \mathbb{E}X_1 \quad \textit{a zároveň} \quad \mathsf{var}(X_2) \leq \mathsf{var}(X_1), \tag{2.1}$$

a alespoň jedna z nerovností je splněna jako ostrá.

Může být velice složité ukázat přítomnost relace SD mezi dvěma náhodnými veličinami podle definice, proto si dále ukážeme některé podmínky, které nám ověřování SD zjednoduší. Nejlepším kritériem je taková podmínka, které je pro dominanci nutná a zároveň postačující.

Označme vícekrát kumulované distribuční funkce, které zjednoduší zápis nutných a postačujících podmínek, následovně.

(i) Nechť $f(t)$ je hustota náhodné veličiny X a $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ je její distribuční funkce, potom označme

$$F^{(2)}(x) = \int_{-\infty}^{x} F(t)dt$$

(ii) dále pak

$$F^{(n)}(x) = \int_{-\infty}^{x} F^{(n-1)}(t)dt \quad \forall n = 3, 4 \ldots, \infty.$$

Věta 2.7 *Nechť $F_1(x)$ a $F_2(x)$ jsou distribučními funkcemi náhodných veličin X_1 a X_2, potom*

(i) $X_1 \succeq_{FSD} X_2$ *právě tehdy, když* $F_1(x) - F_2(x) \leq 0$ *pro každé* $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $X_1 \succeq_{SSD} X_2$ *právě tehdy, když* $F_1^{(2)}(t) - F_2^{(2)}(t) \leq 0$ *pro každé* $t \in \mathbb{R}$.

(iii) $X_1 \succ_{FSD} X_2$ *právě tehdy, když* $F_1(x) - F_2(x) \leq 0$ *pro každé* $x \in \mathbb{R}$ *a pro alespoň jedno* x *je nerovnost splněna jako ostrá.*

(iv) $X_1 \succ_{SSD} X_2$ *právě tehdy, když* $F_1^{(2)}(t) - F_2^{(2)}(t) \leq 0$ *pro každé* $t \in \mathbb{R}$ *a pro alespoň jedno* t *je nerovnost splněna jako ostrá.*

Důkaz. Důkaz této věty lze nalézt v Hanoch a Levy [5].

Dále uveďme některé nutné podmínky pro dominanci.

Věta 2.8 *(Nutné podmínky pro FSD a SSD):*
Nechť $F_1(x)$ a $F_2(x)$ jsou distribučními funkcemi náhodných veličin X_1 a X_2.

(i) $X_1 \succ_{FSD} X_2 \Rightarrow \mathbb{E}_{F_1}(x) \geq \mathbb{E}_{F_2}(x)$.

(ii) $X_1 \succ_{SSD} X_2 \Rightarrow \mathbb{E}_{F_1}(x) \geq \mathbb{E}_{F_2}(x)$.

(iii) $X_1 \succ_{FSD} X_2 \Rightarrow X_1 \succ_{SSD} X_2$.

Důkaz. Důkaz je uveden v Levy [14].

Dále uvedeme nutné a postačující podmínky pro FSD a SSD vyjádřené pomocí kvantilů. Uvažujme reálnou náhodnou veličinu X s distribuční funkcí $F_X(u)$. Kvantilovou funkcí F_X^{-1} rozumíme funkci inverzní k F_X:

$$F_X^{-1}(v) = \min\{u : F_X(u) \geq v\}.$$

Kvantilovou funkcí druhého řádu F_X^{-2} definujeme pro všechny náhodné veličiny X splňující podmínku $\mathbb{E}|X| < \infty$ následovně

$$F_X^{-2}(p) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{p} F_X^{-1}(t)dt & \text{pro} \quad 0 < p \leq 1 \\ 0 & \text{pro} \quad p = 0 \\ +\infty & \text{jinak.} \end{cases}$$

Věta 2.9 *Nechť $F_1(x)$ a $F_2(x)$ jsou distribučními funkcemi náhodných veličin X_1 a X_2.*

(i) $X_1 \succeq_{FSD} X_2$ *pro každou* $u \in U_1$ *právě tehdy, když* $F_{X_1}^{-1}(p) - F_{X_2}^{-1}(p) \geq 0, \forall p \in [0,1]$

(ii) $X_1 \succeq_{SSD} X_2$ *právě tehdy, když* $F_{X_1}^{-2}(p) - F_{X_2}^{-2}(p) \geq 0, \forall p \in [0,1]$

Důkaz. Důkaz je uveden v Ogryczak, Ruszczynski [18].

Kapitola 3

Stochastická dominance vyšších řádů

V této kapitole zobecníme závěry předchozí kapitoly pro stochastickou dominanci vyšších řádů, konkrétně pro SD třetího, n-tého a nekonečného řádu, který je limitním případem SD n-tého řádu pro n jdoucí k nekonečnu.

3.1 Stochastická dominance třetího řádu

Zesilme dále předpoklad o účelové funkci investora. Řekneme, že účelová funkce $u \in U_3$, pokud $u' \geq 0$, $u'' \leq 0$ a $u''' \geq 0$. Podobně jako v předchozím případě platí $U_3 \subseteq U_2$. Interpretace faktu, že $u \in U_2$ a $u \in U_1$, je poměrně jednoduchá, vyjadřovali jsme ji tezí, že investor dává přednost více penězům než méně, respektive, že je averzní vůči riziku. Jak uvidíme dále, třetí derivace užitkové funkce souvisí se šikmostí distribuce.
Šikmost distribuce neboli třetí centrální moment je pro spojité distribuce definována jako

$$\mu_3 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,(x - \mathbb{E}x)^3 \,.$$

Příklad 3.1 *Pro lepší představu uveďme příklad publikovaný v Levy [14]. Ukázkou positivní šikmosti rozdělení může být rozdělení výhry v loterii, protože je malá pravděpodobnost velmi velké výhry a přitom velmi velká pravděpodobnost malé (obvykle nulové) výhry, ukázku takové situace můžeme vidět v následující tabulce, kde X reprezentuje výhru a $p(x)$ pravděpodobnost, že k výhře X dojde. Opačným příkladem negativní šikmosti rozdělení je rozdělení hodnoty nepojištěného domu(v tabulce reprezentovaná náhodnou veličinou X), která má negativní šikmost kvůli malé pravděpodobnosti $p(x)$ velmi velké ztráty způsobené např. požárem. Předpokládejme, že hodnota domu je poté nulová. Konečně symetrická rozdělení mají šikmost nulovou.*

rozdělení výhry v loterii		**rozdělení hodnoty nepojištěného domu**	
x	$p(x)$	x	$p(x)$
\$0	*0,99*	*\$0*	*0,01*
\$1 000	*0,01*	*\$1 000 000*	*0,99*

V případě loterie je střední hodnota výhry:

$$\mathbb{E}(x) = 0,99 \cdot 0 + 0,01 \cdot 1000 = 10$$

a šikmost je:

$$\mu_3(x) = 0,99(0 - 10)^3 + 0,01(1\ 000 - 10)^3 = 9\ 702\ 000.$$

Šikmost je tedy positivní a v absolutní hodnotě velká. Jak si později ukážeme, velká positivní šikmost této hry může přitahovat hráče, jejichž třetí derivace užitkové funkce je kladná, tedy $u''' \geq 0$*. Rozdělení hodnoty nepojištěného domu má následující charakteristiky:*

$$\mathbb{E}(x) = 0,01 \cdot 0 + 0,99 \cdot 1\ 000\ 000 = 99\ 000$$

$$\mu_3(x) = 0,01(0 - 99\ 000)^3 + 0,99(100\ 000 - 99\ 000)^3 = -9,702 \cdot 10^{12}.$$

Šikmost tohoto rozdělení je tedy opět v absolutní hodnotě velká, ale tentokrát záporná.

Podívejme se nyní na souvislost mezi u''' a šikmostí. Rozvineme-li užitkovou funkci do Taylorova polynomu v bodě $w + \mathbb{E}x$, kde w označuje počáteční hodnotu bohatství a x je náhodná veličina představující výnos:

$$u(w + x) = u(w + \mathbb{E}x) + u'(w + \mathbb{E}x)(x - \mathbb{E}x) + \frac{u''(w + \mathbb{E}x)}{2!}(x - \mathbb{E}x)^2 +$$

$$+ \frac{u'''(w + \mathbb{E}x)}{3!}(x - \mathbb{E}x)^3 + \dots .$$

Dále uvažujme střední hodnotu obou stran a užitím faktu $\mathbb{E}(x - \mathbb{E}x) = 0$ dostaneme:

$$\mathbb{E}u(w + x) = u(w + \mathbb{E}x) + \frac{u''(w + \mathbb{E}x)}{2!}\sigma_x^2 + \frac{u'''(w + \mathbb{E}x)}{3!}\mu_3 + \dots .$$

Z tohoto vztahu vidíme, že pokud zůstávají ostatní faktory konstantní, pak s rostoucím σ_x^2 klesá očekávaný užitek investora averzního vůči riziku, protože $u'' < 0$. Podobně pokud pro investora platí $u''' > 0$, tak s rostoucí šikmostí roste jeho očekávaný užitek. Proto investor s $u'' < 0$ nemá rád variabilitu a investor s $u''' > 0$ preferuje positivní šikmost.

Dále uveďme formální definici TSD (Third Degree Stochastic Dominance) spolu s nutnou a postačující podmínkou podle Levy [14], kde je uveden i její důkaz.

Definice 3.2 *(Stochastická dominance třetího řádu)*
Nechť X_1 a X_2 jsou dvě náhodné veličiny. $X_1 \succ_{TSD} X_2$, pokud

$$\mathbb{E}_{F_1}u(x) - \mathbb{E}_{F_2}u(x) \geq 0,$$

pro každou užitkovou funkci $u \in U_3$, pro kterou střední hodnoty $\mathbb{E}_{F_1}u(x)$ a $\mathbb{E}_{F_2}u(x)$ existují, a pro alespoň jedno x je nerovnost splněna jako ostrá.

Věta 3.3 *Nechť X_1 a X_2 jsou náhodné veličiny s distribučními funkcemi $F_1(x)$ a $F_2(x)$. Potom $X_1 \succ_{TSD} X_2$ právě tehdy, když $F_1^{(3)}(x) - F_2^{(3)}(x) \leq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ a zároveň $\mathbb{E}X_1 \geq \mathbb{E}X_2$, alespoň jedna nerovnost musí být splněna jako ostrá.*

3.2 Vyšší řády stochastické dominance

Shrneme-li naše dosavadní úvahy o SD, již jsme diskutovali první, druhý a třetí stupeň stochastické dominance. Shrňme si, jak třídy užitkových funkcí korespondují s jednotlivými řády stochastické dominance:

FSD: $U_1 = \{u : u' \geq 0\}$
SSD: $U_2 = \{u : u \in U_1, u'' \leq 0\}$
TSD: $U_3 = \{u : u \in U_2, u''' \geq 0\}$.

Pokud tuto posloupnost zobecníme, dostáváme stochastickou dominanci n-tého řádu:

nSD: $U_n = \left\{u : u \in U_{n-1}, (-1)^{n-1}u^{(n)} \geq 0\right\}$,

kde U_n je množina užitkových funkcí, jejichž liché derivace jsou nezáporné a sudé nekladné až do řádu n.

Dále lze přirozeně rozšířit n-tý řád SD na nekonečný řád neboli ISD (Infinite Degree Stochastic Dominance), který dostáváme z nSD pro n jdoucí k nekonečnu podobně jako Whitmore [27]. ISD souvisí s třídou užitkových funkcí s derivacemi všech řádů, které alternují ve znaménku. Tuto třídu užitkových funkcí budeme označovat U_∞, ale v literatuře je také označována jako třída CMUF (completely monotonic utility functions):

ISD: $U_\infty = \left\{u : (-1)^{n-1}u^{(n)} \geq 0, n = 1, 2, \ldots\right\}$.

Platí, že $U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_\infty$. Třída užitkových funkcí U_n a tím méně i třída užitkových funkcí U_∞ nemají na rozdíl od prvních třech řádů stochastické dominance příliš přesvědčivou ekonomickou interpretaci. Přesto jsou některé důležité a často v ekonomické teorii používané užitkové funkce z třídy U_∞, uveďme například užitkové funkce $u(x) = log(x)$, $u(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$, kde $\alpha < 1$, a také $u(x) = 1 - e^{-\alpha x}$ pro $\alpha > 0$. Lze také argumentovat, že racionálně uvažující jedinec by měl mít preference, které při změně bohatství podléhají pouze hladkým a systematickým změnám. Definujme nyní formálně nSD a ISD pro náhodné veličiny v souladu s Levy [14] a Whitmore [27].

Definice 3.4 *(Stochastická dominance vyšších řádů)*
Nechť X_1 a X_2 jsou dvě náhodné veličiny.

(i) $X_1 \succ_{nSD} X_2$*, pokud*

$$\mathbb{E}_{F_1}u(x) - \mathbb{E}_{F_2}u(x) \geq 0,$$

pro každou užitkovou funkci $u \in U_n$, pro kterou střední hodnoty $\mathbb{E}_{F_1}u(x)$ a $\mathbb{E}_{F_2}u(x)$ existují, a pro alespoň jednu $u \in U_n$ je nerovnost splněna jako ostrá.

(ii) $X_1 \succ_{ISD} X_2$*, pokud*

$$\mathbb{E}_{F_1}u(x) - \mathbb{E}_{F_2}u(x) \geq 0,$$

pro každou užitkovou funkci $u \in U_\infty$, pro kterou střední hodnoty $\mathbb{E}_{F_1}u(x)$ a $\mathbb{E}_{F_2}u(x)$ existují, a pro alespoň jednu $u \in U_\infty$ je nerovnost splněna jako ostrá.

Na základě výše uvedených definic lze jednoduše rozšířit koncept eficience náhodných veličin i pro vyšší řády.

Definice 3.5 *(nSD a ISD eficience) Nechť $\mathbb{X}$ je uvažovaná množina náhodných veličin.*

(i) Náhodná veličina $X_2 \in \mathbb{X}$ je nSD neeficientní vzhledem k $\mathbb{X}$, pokud existuje náhodná veličina $X_1 \in \mathbb{X}$ taková, že $X_1 \succ_{nSD} X_2$. V opačném případě řekneme, že X_2 je nSD eficientní vzhledem k $\mathbb{X}$, $n = 1, 2, \ldots$.

(ii) Náhodná veličina $X_2 \in \mathbb{X}$ je ISD neeficientní vzhledem k $\mathbb{X}$, pokud existuje náhodná veličina $X_1 \in \mathbb{X}$ taková, že $X_1 \succ_{ISD} X_2$. V opačném případě řekneme, že X_2 je ISD eficientní vzhledem k $\mathbb{X}$.

Nutné a postačující podmínky pro nSD a ISD vypadají následovně.

Věta 3.6 *Nechť X_1 a X_2 jsou náhodné veličiny s distribučními funkcemi $F_1(x)$ a $F_2(x)$. Bez újmy na obecnosti dále předpokládejme $x \in (x_\star, x^\star)$, kde $x_\star$ i $x^\star$ mohou být konečná čísla nebo $\pm\infty$. Potom $X_1 \succ_{nSD} X_2$ právě tehdy, když*

$$F_1^{(n)}(x) - F_2^{(n)}(x) \leq 0 \quad \textit{pro každé} \quad x \in (x_\star, x^\star) \tag{3.1}$$

a zároveň

$$F_1^{(k)}(x^\star) - F_2^{(k)}(x^\star) \leq 0, \quad \textit{pro} \quad k = 1, 2, ..., n-1$$

a alespoň jedna nerovnost je splněna jako ostrá.

Důkaz. Důkaz je uveden v Thistle [25] pro $x_\star \geq 0$. Rozšíření na $x_\star \in \mathbb{R}$ nebo $-\infty$ je triviální, protože pro každou distribuční funkci platí $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ a nerovnost (3.1) je v tomto případě vždy splněna jako rovnost.

Věta 3.7 *Nechť X_1 a X_2 jsou náhodné veličiny s distribučními funkcemi $F_1(x)$ a $F_2(x)$. Potom $X_1 \succ_{ISD} X_2$ právě tehdy, když pro každé $a > 0$ platí*

$$\mathbb{E}_{F_1} e^{-ax} - \mathbb{E}_{F_2} e^{-ax} \geq 0, \tag{3.2}$$

a pro alespoň jedno a je nerovnost splněna jako ostrá.

Důkaz. Whitmore [27] dokázal, že pro každou užitkovou funkci $u \in U_\infty$ platí

$$\mathbb{E}_{F_1} u(x) - \mathbb{E}_{F_2} u(x) \geq 0, \tag{3.3}$$

právě tehdy, když pro každé $a > 0$

$$\mathbb{E}_{F_1} e^{-ax} - \mathbb{E}_{F_2} e^{-ax} \geq 0.$$

Každé a z předchozí rovnice odpovídá jedné užitkové funkci, což je ukázáno v Whitmore [27]. Pokud je tedy nerovnice (3.2) splněna jako ostrá pro nějaké $a > 0$, je také (3.3) splněna pro nějakou $u \in U_\infty$ a $X_1 \succ_{ISD} X_2$.

Na závěr kapitoly shrňme některé vlastnosti SD vyšších řádů. Platí, že SD nižších řádů jsou postačující podmínkou pro SD vyšších řádů. Protože platí $U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_\infty$, tak v případě, že $X_1 \succ_{nSD} X_2$, potom také $X_1 \succ_{mSD} X_2, \quad \forall m = n+1, n+2, \ldots$. Naopak ovšem z existence vyšších řádů SD nemůžeme usuzovat nic o řádech nižších. Pro ISD však platí, jak ukázal Thistle [25], že pokud $X_1 \succ_{ISD} X_2$, tak existuje konečné n tak, že $X_1 \succ_{nSD} X_2$.

Kapitola 4

Eficience portfolií: scénářový přístup

V této kapitole přejdeme od zkoumání náhodných veličin k analýze jejich lineárních kombinací tedy portfolií. V literatuře existují dva základní přístupy k této problematice, obecnější scénářový přístup, který představíme v této kapitole, a přístup méně obecný, který využívá předpokladu znalosti pravděpodobnostního rozdělení náhodných veličin a jejich lineárních kombinací, tedy např. výnosů aktiv a výnosů jejich portfolií. Druhý přístup využijeme později v další kapitole.

Nyní se budeme zabývat eficiencí portfolií vzhledem k jednotlivým řádům stochastické dominance. V této kapitole se ale nebudeme blíže zabývat testováním FSD eficience, protože předmětem našeho zájmu jsou zejména vyšší řády SD. Navíc je případ FSD eficience nejkomplikovanější, protože existuje na rozdíl od vyšších řádů více různých konceptů eficience, které nejsou vzájemně ekvivalentní. Zájemce o testování FSD eficience portfolií můžeme odkázat na články Kopa, Post [9] nebo Kuosmanen [10].

4.1 Eficience portfolia

Předpokládejme, že známe náhodný vektor $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_N)'$ výnosů N dostupných aktiv, který nabývá T stejně pravděpodobných vektorů hodnot neboli scénářů. Míry výnosnosti investic za platnosti různých scénářů jsou dány následující maticí:

$$X = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \ldots & x_N^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_N^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^T & x_2^T & \ldots & x_N^T \end{pmatrix},$$

kde t-tý řádek $\boldsymbol{x}^t = (x_1^t, x_2^t, \ldots, x_N^t)$ představuje výnos portfolia při t-tém scénáři a n-tý sloupec $\boldsymbol{x}_n = \left(x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^T\right)'$ představuje výnosy n-tého aktiva při jednotlivých scénářích. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že sloupce matice X jsou lineárně nezávislé. Sestavením různých kombinací aktiv může investor vytvořit portfolio. Vektor vah jednotlivých aktiv v takovém portfoliu označíme jako $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)'$. Množina všech přípustných portfolií je potom dána následovně

$$\Lambda = \left\{ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^N \mid \mathbf{1}'\boldsymbol{\lambda} = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, N \right\},$$

kde omezení $\mathbf{1}'\boldsymbol{\lambda} = 1$ znamená, že byl investován celý majetek investora a $\lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, N$ zákaz tzv. prodejů na krátko. Výnos portfolia $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$ lze vyjádřit jako

$$\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\lambda} = \sum_{i=1}^{N} r_i \lambda_i.$$

Uspořádejme výnosy portfolií podle velikosti od nejmenšího po největší, $(X\boldsymbol{\lambda})^{[i]}$ označme i-tý nejmenší výnos portfolia $\boldsymbol{\lambda}$, takže platí

$$(X\boldsymbol{\lambda})^{[1]} \leq (X\boldsymbol{\lambda})^{[2]} \leq \ldots \leq (X\boldsymbol{\lambda})^{[T]}.$$

Pro dané portfolio $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$ nyní můžeme zavést s využitím indikátoru $\boldsymbol{I}$ empirickou distribuční funkci

$$F_{\boldsymbol{\lambda}}(y) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{I}\left(y \geq (X\boldsymbol{\lambda})^{[t]}\right)$$

i vícekrát kumulované funkce

$$\begin{aligned} F_{\boldsymbol{\lambda}}^{(2)}(z) = & \quad \textstyle\int_{-\infty}^{z} F_{\boldsymbol{\lambda}}(y)dy \\ F_{\boldsymbol{\lambda}}^{(n)}(t) = & \quad \textstyle\int_{-\infty}^{t} F_{\boldsymbol{\lambda}}^{(n-1)}(x)dx \qquad \forall n = 3, 4, \ldots, \infty. \end{aligned}$$

Dále označme

$$m(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) = \min\left\{(X\boldsymbol{\lambda})^{[1]}, (X\boldsymbol{\tau})^{[1]}\right\},$$

$$M(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) = \max\left\{(X\boldsymbol{\lambda})^{[T]}, (X\boldsymbol{\tau})^{[T]}\right\}.$$

S využitím tohoto označení přepišme nutné a postačující podmínky z vět 2.7, 3.6 a 3.7.

Věta 4.1 *Nechť $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau} \in \Lambda$. Potom*

(i) $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\lambda} \succ_{FSD} \boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau}$ *právě tehdy, když* $F_{\boldsymbol{\lambda}}(x) - F_{\boldsymbol{\tau}}(x) \leq 0$ *pro každé* $x \in [m(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}), M(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau})]$ *a pro alespoň jedno x je nerovnost splněna jako ostrá.*

(ii) $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\lambda} \succ_{SSD} \boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau}$ *právě tehdy, když* $F_{\boldsymbol{\lambda}}^{(2)}(x) - F_{\boldsymbol{\tau}}^{(2)}(x) \leq 0$ *pro každé* $x \in [m(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}), M(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau})]$ *a pro alespoň jedno x je nerovnost splněna jako ostrá.*

(iii) $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\lambda} \succ_{nSD} \boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau}$ *právě tehdy, když* $F_{\boldsymbol{\lambda}}^{(n)}(x) - F_{\boldsymbol{\tau}}^{(n)}(x) \leq 0$, $F_{\boldsymbol{\lambda}}^{(k)}(M(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau})) - F_{\boldsymbol{\tau}}^{(k)}(M(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau})) \leq 0$ *pro* $k = 1, 2, ..., n-1$ *pro každé* $x \in [m(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}), M(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau})]$ *a alespoň jedna nerovnost je splněna jako ostrá.*

Věta 4.2 *Nechť $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau} \in \Lambda$. Potom $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\lambda} \succ_{ISD} \boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau}$ právě tehdy, když pro každé $a > 0$ platí*

$$\sum_{t=1}^{T} \left(e^{-a\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{\tau}} - e^{-a\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{\lambda}} \right) \geq 0$$

a pro alespoň jedno a je nerovnost splněna jako ostrá.

Nyní přejďeme k vlastní definici eficience portfolia.

Definice 4.3 *Uvažujme $n = 1, 2, \ldots$. Dané portfolio $\boldsymbol{\tau} \in \Lambda$ je nSD neeficientní, pokud existuje portfolio $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$ takové, že $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\lambda} \succ_{nSD} \boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau}$. V opačném případě řekneme, že portfolio $\boldsymbol{\tau}$ je nSD eficientní.*

Např. pro $n = 2$ je tedy dané portfolio SSD eficientní právě tehdy, když není striktně SSD dominováno žádným jiným portfoliem, což znamená, že žádné jiné portfolio není lepší pro libovolného rizikově averzního investora. Rozšiřme definici eficience i pro případ ISD.

Definice 4.4 *Portfolio $\boldsymbol{\tau} \in \Lambda$ je ISD neeficientní, pokud existuje portfolio $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$ takové, že $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\lambda} \succ_{ISD} \boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau}$. V opačném případě řekneme, že portfolio $\boldsymbol{\tau}$ je ISD eficientní.*

4.2 Algoritmy pro stochastickou dominanci portfolií

Zde si ukážeme, jak lze stochastickou dominanci testovat v praxi. Uvedeme dvě jednoduchá kritéria pro dominanci prvního a druhého řádu portfolií odvozená v práci Levy [12], která se dají bez jakýchkoli dodatečných předpokladů využít při srovnávání portfolií. Poté uvedeme i kritérium pro ISD ve formě optimalizační úlohy. První věta ukazuje algoritmus k testování FSD.

Věta 4.5 *Nechť $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau} \in \Lambda$. Potom $\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda} \succ_{FSD} \mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}$ právě tehdy, když $(X\boldsymbol{\lambda})^{[i]} \geq (X\boldsymbol{\tau})^{[i]} \quad \forall i = 1, \ldots, T$, kde alespoň jedna nerovnost je splněna jako ostrá.*

Důkaz. Důkaz lze nalézt v Levy, Hanoch [12].

Další věta poskytuje algoritmus pro SSD.

Věta 4.6 *Nechť $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau} \in \Lambda$. Potom $\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda} \succ_{SSD} \mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}$ právě tehdy, když $\sum_{t=1}^{i} (X\boldsymbol{\lambda})^{[t]} \geq \sum_{t=1}^{i} (X\boldsymbol{\tau})^{[t]} \quad \forall i = 1, \ldots, T$, kde alespoň jedna nerovnost je splněna jako ostrá.*

Důkaz. Důkaz lze nalézt v v Levy, Hanoch [12].

Dále uveďme o něco složitější kritérium ISD dominance pro portfolia, které již nabývá formu optimalizační úlohy.

Věta 4.7 *Nechť* $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau} \in \Lambda$, *potom* $\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda} \succ_{ISD} \mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}$ *právě tehdy, když*

$$\min_{a \geq 0} \sum_{i=t}^{T} \left(e^{-a\boldsymbol{x}^t \boldsymbol{\tau}} - e^{-a\boldsymbol{x}^t \boldsymbol{\lambda}} \right) \geq 0 \tag{4.1}$$

$$\max_{a \geq 0} \sum_{i=1}^{T} \left(e^{-a\boldsymbol{x}^t \boldsymbol{\tau}} - e^{-a\boldsymbol{x}^t \boldsymbol{\lambda}} \right) > 0 \tag{4.2}$$

Důkaz. Tato věta vyplývá z věty 4.2, která vychází z práce Whitmore [27].

Poslední kritérium pro ISD je znatelně složitější než dvě předchozí pro FSD a SSD. Pokud nás zajímá relace ISD mezi portfolii $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau} \in \Lambda$, jako výhodné se jeví využití vztahu mezi jednotlivými řády stochastické dominance. Postup může být následující, nejprve použití kritérií pro FSD a SSD. Pokud bude alespoň jeden vztah prokázán, tj. $\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda} \succ_{FSD} \mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}$ nebo $\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda} \succ_{SSD} \mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}$, vyplývá z toho i $\mathbf{r}'\boldsymbol{\lambda} \succ_{ISD} \mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}$. Když ani relace FSD ani SSD nebude nalezena, bude již nutné využít přímo kritérium pro ISD.

Uvědomme si, že tyto algoritmy mohou sloužit vždy pouze k párovému srovnávání jednotlivých portfolií, ale nikoli již přímo k hledání eficientní množiny, protože bychom museli provést nekonečně mnoho párových srovnání, abychom mohli s jistotou tvrdit, že je dané portfolio eficientní a žádné jiné ho nedominuje. V následující kapitole si představíme hned několik postupů, jak lze eficienci portfolia vzhledem k SSD zjistit pomocí optimalizačních úloh.

4.3 Testy eficience portfolia vzhledem k SSD

Nejvíce úsilí se do této doby soustředilo na zkoumání SSD eficienci portfolií a výsledkem je několik testů eficience vzhledem k SSD. V této části si představíme tři z nich, a to Postovo kritérium [20], Kuosmanenovo kritérium [10] a Kopovo kritérium [7]. Srovnání jednotlivých kritérií jak z teoretického pohledu, tak jejich výsledků na reálných datech lze najít v Jakubcová [6].

4.3.1 Postovo kritérium

První kritérium eficience portfolia pro SSD navrhl Post [20], který ovšem vycházel z poněkud jiné definice SSD eficience, než jsme zatím představili.

Definice 4.8 *Portfolio* $\boldsymbol{\tau} \in \Lambda$ *je striktně SSD neeficientní, pokud existuje portfolio* $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$ *takové, že* $\mathbb{E}u(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\lambda}) > \mathbb{E}u(\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau})$ *pro každou užitkovou funkci* $u \in U_2^S$, *kde* $U_2^S \subset U_2$ *je množina ryze konkávních užitkových funkcí. V opačném případě řekneme, že portfolio* $\boldsymbol{\tau}$ *je striktně SSD eficientní.*

Uvažujme vektor výnosů portfolia $X\boldsymbol{\tau}$, uspořádejme tento vektor vzestupně a ve stejném pořadí uspořádejme také řádky matice X tak, aby platilo $\boldsymbol{x}^i\boldsymbol{\lambda} = (X\boldsymbol{\lambda})^{[i]}, i = 1, 2, \ldots, T$, kde $\boldsymbol{x}^i$ označují řádky takto uspořádané matice a $x_n^t, n = 1, 2, \ldots, N, t = 1, 2, \ldots, T$ označují její prvky. Nyní již můžeme uvést nutnou a postačující podmínku striktní SSD eficience portfolia, která využívá následující úlohu lineárního programování.

$$\xi(\boldsymbol{\lambda}) = \min_{\theta,\beta} \theta$$

za podmínek

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{T} \beta_t(\boldsymbol{x}^i\boldsymbol{\lambda} - x_n^t)/T + \theta \geq 0, &\quad n = 1, 2, \ldots, N \\ \beta_t - \beta_{t+1} \geq 0, &\quad t = 1, 2, \ldots, T-1 \\ \beta_t \geq 0, &\quad t = 1, 2, \ldots, T-1 \\ \beta_T = 1 & \end{aligned}$$

V případě, že $\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{x}^{t+1}\boldsymbol{\lambda}$ pro některé $t \in \{1, 2, \ldots, T-2\}$, pak se omezení $\beta_t - \beta_{t+1} \geq 0$ vymění za dvojici omezení $\beta_t - \beta_{t+2} \geq 0$ a $\beta_{t-1} - \beta_{t+1} \geq 0$. Podobně pokud $\boldsymbol{x}^{T-1}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{\lambda}$, potom se omezení $\beta_{T-1} - \beta_T \geq 0$ a $\beta_T = 1$ nahradí dvojicí $\beta_{T-1} \geq 1$ a $\beta_T \geq 1$.

Věta 4.9 *Portfolio $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$ je striktně SSD eficientní právě tehdy, když $\xi(\boldsymbol{\lambda}) = 0$.*

Důkaz. Důkaz této věty lze nalézt v práci Post [20].

4.3.2 Kuosmanenovo kritérium

Nyní uvedeme Kuosmanenovo kritérium SSD eficience. Kuosmanen [10] již pracuje se standardní definicí SSD eficience ve smyslu definice 4.3. Nutná i nutná a postačující podmínka SSD eficience uvedené ve dvou následujících větách jsou dokázány tamtéž a jsou založeny na následujících dvou úlohách lineárního programování.

$$\theta^N(\boldsymbol{\tau}) = \min_{W,\boldsymbol{\lambda}} \left(\sum_{t=1}^{T} (\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{x}^t\boldsymbol{\tau}) \right) / T$$

za podmínek

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^i\boldsymbol{\lambda} \geq \sum_{t=1}^{T} w_{ij}\boldsymbol{x}^j\boldsymbol{\tau} &\quad i = 1, 2, \ldots, T \\ W \in \Xi & \\ \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda, & \end{aligned}$$

kde

$$\Xi = \left\{ [w_{ij}]_{T\times T} : 0 \leq w_{ij} \leq 1, \sum_{i=1}^{T} w_{ij} = \sum_{j=1}^{T} w_{ij} = 1, \forall i, j = 1, 2, \ldots, T \right\}$$

značí množinu dvojitě stochastických matic. Přejděme nyní k druhé úloze lineárního programování.

$$\theta^S(\boldsymbol{\tau}) = \min_{W,\boldsymbol{\lambda},S^+,S^-} \sum_{j=1}^{T}\sum_{i=1}^{T}(s_{ij}^+ + s_{ij}^-)$$

za podmínek

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^i\boldsymbol{\lambda} = \sum_{t=1}^{T} w_{ij}\boldsymbol{x}^j\boldsymbol{\tau} & \quad i = 1,2,\dots,T \\ s_{ij}^+ - s_{ij}^- = w_{ij} - \frac{1}{2}, & \quad i,j = 1,2,\dots,T \\ s_{ij}^+, s_{ij}^- \geq 0, & \quad i,j = 1,2,\dots,T \\ W \in \Xi & \\ \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda, & \end{aligned}$$

kde $S^+ = \{s_{ij}^+\}_{i,j=1}^T$,$S^- = \{s_{ij}^-\}_{i,j=1}^T$ a $W = \{w_{ij}\}_{i,j=1}^T$. Hodnoty ve vektoru výnosů $X\boldsymbol{\tau}$ se mohou opakovat, označme veličinou ϵ_k počet hodnot, které se ve vektoru $X\boldsymbol{\tau}$ opakují právě k-krát. Testová statistika $\theta^S(\boldsymbol{\tau})$ může teoreticky nabývat hodnot z intervalu $\left[\frac{1}{2}T^2 - T, \frac{1}{2}T^2 - \sum_{k=1}^T k\epsilon_k\right]$, minimum lze získat volbou $W_{ij} = \frac{1}{T}$ pro každé $i,j = 1,2,\dots,T$ a maximum již závisí na počtu opakujících se hodnot ve vektoru $X\boldsymbol{\tau}$.

Věta 4.10 *(Kuosmanenovo kritérium)*

(i) $\theta^N(\boldsymbol{\tau}) = 0$ *je nutná podmínka SSD eficience portfolia* $\boldsymbol{\tau} \in \Lambda$.

(ii) Nutná a postačující podmínka SSD eficience portfolia $\boldsymbol{\tau} \in \Lambda$ *je*

$$\theta^N(\boldsymbol{\tau}) = 0 \quad \wedge \quad \theta^S(\boldsymbol{\tau}) = \frac{T^2}{2} - \sum_{k=1}^{T} k\epsilon_k.$$

Důkaz. Důkaz je uveden v článku Kuosmanen [10].

4.3.3 Kopovo kritérium

Nejprve využijeme vztahu SSD s mírou rizika CVaR, neboli podmíněným Value at Risk. Nechť Y je náhodná veličina popisující velikost ztráty z investice, která odpovídá náhodnému výnosu investice X, tj. $Y = -X$. Označme F_Y distribuční funkci Y a předpokládejme, že $\mathbb{E}Y < \infty$. Pro pevnou hladinu $\alpha \in [0,1]$ definujeme nejprve Value at Risk jako $VaR_\alpha(Y) = F_Y^{-1}(\alpha)$. Podmíněný Value at Risk definujeme ve shodě s prací Pflug [19] následovně.

Definice 4.11 *Podmíněný Value at Risk na konfidenční hladině* α *definujeme jako řešení optimalizační úlohy následovně:*

$$CVaR_\alpha(Y) = \min_{\alpha\in\mathbb{R}} \left\{ a + \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}\left[Y - a\right]^+ \right\},$$

kde $[x]^+$ *značí kladnou část* x*, takže* $[x]^+ = \max(x,0)$.

Vztah mezi CVaR a SSD je ukázán v následujícím lemmatu dokázaném v práci Ogryczak, Ruszczynski [18].

Lemma 4.12 *Nechť* $Y_i = -X_i$ *a* $\mathbb{E}|Y_i| < \infty$ *pro* $i = 1, 2$. *Potom*

$$X_1 \succ_{SSD} X_2 \Longleftrightarrow CVaR_\alpha(Y_1) \leq CVaR_\alpha(Y_2), \forall \alpha \in [0, 1].$$

Dále uvedeme test SSD eficience portfolia, který byl navržen v článku Kopa, Chovanec [8]. Tento test využívá vztahu mezi SSD a CVaR a uvedeme si ho ve tvaru nejprve nutné a poté nutné i postačující podmínky.

Věta 4.13 *Nechť* $\alpha_k = \frac{k}{T}, k = 0, 1, \dots, T-1$. *Dále nechť*

$$d^* = \max_{\lambda_n} \sum_{k=0}^{T-1} \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \left[CVaR_{\alpha_k}\left(-\mathbf{r}'\boldsymbol{\tau}\right) - CVaR_{\alpha_k}\left(-r_n\right)\right] \tag{4.3}$$

za podmínek

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \left[CVaR_{\alpha_k}\left(-\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau}\right) - CVaR_{\alpha_k}\left(-r_n\right)\right] \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots, T-1$$
$$\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$$

Pokud $d^* > 0$, *pak je portfolio* $\boldsymbol{\tau}$ *SSD neeficientní. Optimální řešení* $\boldsymbol{\lambda}^*$ *úlohy 4.3 je SSD eficientní portfolio a platí, že* $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\lambda} \succ_{SSD} \boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau}$.

Důkaz. Důkaz je uveden v článku Kopa, Chovanec [8].

Předchozí věta uvádí nutnou podmínku pro SSD. Portfolio $\boldsymbol{\tau}$ však může být neeficientní, i když úloha 4.3 nemá žádné přípustné řešení nebo pokud $d^* = 0$. V případě $d^* = 0$ mohou nastat dvě situace. Když má úloha 4.3 jediné řešení $\boldsymbol{\lambda}^* = \boldsymbol{\tau}$, potom je $\boldsymbol{\tau}$ SSD eficientní portfolio. Pokud má 4.3 jediné řešení $\boldsymbol{\lambda}^* \neq \boldsymbol{\tau}$, pak je $\boldsymbol{\tau}$ SSD neeficientní portfolio a platí $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\lambda} \succ_{SSD} \boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau}$, protože jinak by došlo ke sporu s lineární nezávislostí matice X.

Pokud úloha 4.3 nemá přípustné řešení, lze použít následující nutnou a zároveň postačující podmínku SSD eficience portfolia.

Věta 4.14 *Nechť* $\alpha_k = \frac{k}{T}, k = 0, 1, \dots, T-1$. *Dále nechť*

$$D^*(\boldsymbol{\tau}) = \max_{D_k, \lambda_n, b_k} \sum_{k=0}^{T-1} D_k \tag{4.4}$$

za podmínek

$$\begin{aligned} CVaR_{\alpha_k}\left(-\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau}\right) - b_k - \frac{1}{1-\alpha_k}\mathbb{E}\max\left[-\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\lambda} - b_k\right]^+ &\geq D_k, \quad k = 0, 1, \dots, T-1 \\ D_k &\geq 0, \quad k = 0, 1, \dots, T-1 \\ \boldsymbol{\lambda} &\in \Lambda \end{aligned}$$

Pokud $D^*(\boldsymbol{\tau}) > 0$, pak je portfolio $\boldsymbol{\tau}$ SSD neeficientní. Optimální řešení $\boldsymbol{\lambda}^*$ úlohy 4.4 je SSD eficientní portfolio a platí, že $r'\boldsymbol{\lambda} \succ_{SSD} r'\boldsymbol{\tau}$. V případě, že $D^*(\boldsymbol{\tau}) = 0$, je $\boldsymbol{\tau}$ SSD eficientní.

Důkaz. Důkaz je uveden v článku Kopa, Chovanec [8].

Úloha 4.4 má již vždy přípustné řešení a lze ji přepsat jako úlohu lineárního programování následovně:

$$D^*(\boldsymbol{\tau}) = \max_{D_k, \lambda_n, b_k, \omega_k^t} \sum_{k=0}^{T-1} D_k$$

za podmínek

$$\begin{aligned} CVaR_{\frac{k-1}{T}}(-\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau}) - b_k - \frac{1}{\left(1 - \frac{k-1}{T}\right)T} \sum_{t=1}^{T} \omega_k^t \geq D_k, &\quad k = 1, \dots, T \\ \omega_k^t \geq -\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{\lambda} - b_k, &\quad t, k = 1, \dots, T \\ \omega_k^t \geq 0, &\quad t, k = 1, \dots, T \\ D_k \geq 0, &\quad k = 1, \dots, T \\ \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda. & \end{aligned}$$

Kapitola 5

Eficience za předpokladu normálního a gamma rozdělení

V této kapitole zesílíme předpoklady ohledně znalosti pravděpodobnostního rozdělení náhodných veličin a opustíme tak scénářový přístup. Nejprve uvedeme známá fakta o dominanci prvního a druhého řádu, které se následně pokusíme rozšířit i na dominanci nekonečného řádu. V první části se budeme zabývat normálním rozdělením, které je vhodné i k práci s portfolii, protože lineární kombinace normálně rozdělených náhodných veličin je také normálně rozdělena.

V druhé části budeme tentokrát pro gamma rozdělení opět rozšiřovat kritéria pro dominanci prvního a druhého řádu odvozením kritéria pro nekonečný řád stochastické dominance. Zde je však nutné si uvědomit, že lineární kombinace gamma rozdělených náhodných veličin již není gamma rozdělena, a proto není možno využít toto rozdělení pro modelování portfolií. Použitelnost výsledků tak zůstává omezena na samostatné náhodné veličiny.

5.1 FSD a SSD za předpokladu normality

Podívejme se nejprve, jakého tvaru nabývají FSD a SSD kritéria pro stochastickou dominanci za předpokladu normálního rozdělení náhodných veličin. Předpokládejme konkrétně, že zkoumané náhodné veličiny mají normální rozdělení s parametry $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma^2 > 0$, jehož hustota se dá zapsat jako

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Věta 5.1 *Uvažujme normálně rozdělené náhodné veličiny* $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ *a* $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$

(i) Potom $X_1 \succ_{FSD} X_2$ *právě tehdy, když* $\mu_1 > \mu_2$ *a zároveň* $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

(ii) Potom $X_1 \succ_{SSD} X_2$ *právě tehdy, když* $\mu_1 \geq \mu_2$ *a* $\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ *a alespoň jedna z nerovností je splněna jako ostrá.*

Důkaz. Důkaz této věty lze nalézt v Levy [14].

Podmínka (ii) je v tomto případě totožná s Markowitzovým *mean-variance* kritériem (2.1) publikovaným v Markowitz [15].

5.2 ISD za předpokladu normality

V první části této podkapitoly odvodíme nutnou a postačující podmínku pro dominanci normálně rozdělených náhodných veličin, v druhé části potom na základě výsledků první části odvodíme kritérium eficience pro portfolia vzhledem k ISD.

5.2.1 ISD náhodných veličin za předpokladu normality

Předpokládejme $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Přepišme větu 4.2 do vhodného tvaru analogicky k přepisu do věty 4.7.

Věta 5.2 *Nechť X_1 a X_2 jsou náhodné veličiny s distribučními funkcemi $F_1(x)$ a $F_2(x)$ $X_1 \succ_{ISD} X_2$ právě tehdy, když*

$$\min_{a \geq 0} \mathbb{E}(e^{-aX_2} - e^{-aX_1}) \geq 0 \tag{5.1}$$

a zároveň

$$\max_{a \geq 0} \mathbb{E}(e^{-aX_2} - e^{-aX_1}) > 0. \tag{5.2}$$

Nejprve vyřešíme pro tyto dvě veličiny podmínku (5.1) z předchozí věty, tedy

$$\min_{a \geq 0} \left(\mathbb{E}e^{-aX_2} - \mathbb{E}e^{-aX_1} \right) \geq 0.$$

Po rozepsání dostáváme

$$\min_{a \geq 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{(x_2-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} dx_2 - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} dx_1 \geq 0$$

a po několika algebraických úpravách převedeme do vhodného tvaru, který povede k podstatnému zjednodušení výrazu.

$$\min_{a \geq 0} e^{\frac{1}{2}\sigma_2^2 a^2 - \mu_2 a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{(x_2+\sigma_2^2 a-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} dx_2 -$$

$$- e^{\frac{1}{2}\sigma_1^2 a^2 - \mu_1 a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{(x_1+\sigma_1^2 a-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} dx_1 \geq 0.$$

Obě integrované funkce nyní představují hustoty normálních rozdělení, takže oba integrály jsou rovny jedné. To nám umožňuje zjednodušit úlohu na

$$\min_{a \geq 0} e^{\frac{1}{2}\sigma_2^2 a^2 - \mu_2 a} - e^{\frac{1}{2}\sigma_1^2 a^2 - \mu_1 a} \geq 0,$$

což je ekvivalentní s úlohou

$$\min_{a\geq 0} \frac{e^{\frac{1}{2}\sigma_2^2 a^2 - \mu_2 a}}{e^{\frac{1}{2}\sigma_1^2 a^2 - \mu_1 a}} \geq 1,$$

vzhledem k tomu, že logaritmus je monotónní funkce, zlogaritmováním obou stran dostáváme zápis další ekvivalentní úlohy

$$\min_{a\geq 0} \log \frac{e^{\frac{1}{2}\sigma_2^2 a^2 - \mu_2 a}}{e^{\frac{1}{2}\sigma_1^2 a^2 - \mu_1 a}} \geq 0.$$

Po úpravě vychází

$$\min_{a\geq 0} \frac{1}{2} a^2(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) + a(\mu_2 - \mu_1) \geq 0. \tag{5.3}$$

Označme funkci $f(a)$ definovanou na intervalu $[0, \infty)$

$$f(a) = \frac{1}{2} a^2(\sigma_2^2 - \sigma_1^2) + a(\mu_1 - \mu_2).$$

Jedná se o kvadratickou funkci bez absolutního členu a zřejmě platí,že $f(0) = 0$ pro všechny kombinace parametrů obou normálních veličin. Budeme hledat globální minimum funkce $f(a)$. Položme první derivaci funkce $f(a)$ rovnu nule

$$a(\sigma_2^2 - \sigma_1^2) + (\mu_1 - \mu_2) = 0,$$

odkud za předpokladu, že se rozptyly nerovnají, dostáváme stacionární bod

$$a^\star = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}.$$

Po dosazení bodu $a^\star$ do definice funkce a několika algebraických úpravách dostáváme funkční hodnotu f v tomto bodě

$$f(a^\star) = -\frac{1(\mu_2 - \mu_1)^2}{2(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)}. \tag{5.4}$$

Výše uvedené odvození je platné jak v případě minimalizace funkce $f(a)$, tak i v případě její maximalizace. Dále proto budeme na základě průběhu funkce $f(a)$ hodnotit zároveň splnění podmínek (5.1) i (5.2).

Jsou právě tři možné situace, které mohou nastat. Funkce $f(a)$ může na intervalu $[0, \infty)$ dosahovat minima v bodě $a = 0$, nebo minima nemusí nabývat v případě, že s rostoucím a klesá k $-\infty$, anebo může nabývat minima v bodě $a^\star$. Která situace nastane, závisí na parametrech obou normálních rozdělení.

V případě, že $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$, potom je funkce $f(a)$ konkávní, klesá s rostoucím a k $-\infty$ a minima nedosahuje, z čehož vyplývá, že podmínka (5.1) není splněna a $X_1 \not\succcurlyeq_{ISD} X_2$.

Pokud $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$, potom je $f(a)$ konvexní neomezeně rostoucí. V případě, že $a^\star > 0$, tak $f(a)$ nabývá na intervalu $[0, \infty)$ minima $f(a^\star) < 0$, jak je vidět z (5.4), podmínka (5.1) není splněna a $X_1 \not\succcurlyeq_{ISD} X_2$. Pokud naopak $a^\star \leq 0$, tak na intervalu $[0, \infty)$ dosahuje $f(a)$ minima vždy v bodě 0, a protože již víme, že $f(0) = 0$, je podmínka (5.1) splněna. Protože je $f(a)$ rostoucí, tak je její maximum ostře větší než 0, podmínka (5.2) je také splněna a $X_1 \succ_{ISD} X_2$. Platí, že $a^\star = \frac{\mu_2-\mu_1}{\sigma_2^2-\sigma_1^2} \leq 0$ právě tehdy, když $\mu_1 \geq \mu_2$.

Při shodných rozptylech $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ je eliminován kvadratický člen a $f(a)$ přechází v přímku procházející počátkem. Pokud $\mu_1 > \mu_2$, je $f(a)$ rostoucí, minimem funkce je 0 a $X_1 \succ_{ISD} X_2$. Naopak pro $\mu_1 < \mu_2$, je $f(a)$ klesající k $-\infty$, minima funkce nenabývá a $X_1 \not\succ_{ISD} X_2$. Když $\mu_1 = \mu_2$, tak jde o stejně rozdělené náhodné veličiny, $f(a)$ je nulovou funkcí a z důvodu nesplnění podmínky (5.2) $X_1 \not\succ_{ISD} X_2$.

Shrneme-li výše uvedenou diskusi, $X_1 \succ_{ISD} X_2$ pouze v případě, že minimum funkce $f(a)$ je rovno 0 a nejde o stejně rozdělené náhodné veličiny, v ostatních případech tato relace nenastává.

Vyřešme pro kontrolu úlohu (5.3) ještě jednou, tentokrát jako úlohu nelineárního programování pomocí lokálních podmínek optimality. Napišme Lagrangeovu funkci

$$\mathcal{L}(a, \lambda) = \frac{1}{2}a^2(\sigma_2^2 - \sigma_1^2) + a(\mu_1 - \mu_2) + \lambda(-a).$$

Z podmínky přípustnosti dostáváme

$$-a^\star \leq 0.$$

Z podmínky komplementarity dostáváme pro $\lambda^\star \geq 0$

$$\lambda^\star(-a^\star) = 0,$$

odkud vyplývá, že buď $\lambda^\star = 0$ nebo $a^\star = 0$. Na závěr z podmínky optimality vychází

$$\frac{\partial \mathcal{L}(a^\star, \lambda^\star)}{\partial x} = a^\star(\sigma_2^2 - \sigma_1^2) + (\mu_1 - \mu_2) - \lambda^\star = 0.$$

Pokud $a^\star \neq 0$, pak platí $\lambda^\star = 0$ a

$$a^\star = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}.$$

Je vidět, že naše výpočty byly správné, protože jsme došli ke stejnému výsledku. Přehledně lze situaci popsat rozhodovacím stromem na obrázku 5.1. Výsledek je shrnut i v následující větě.

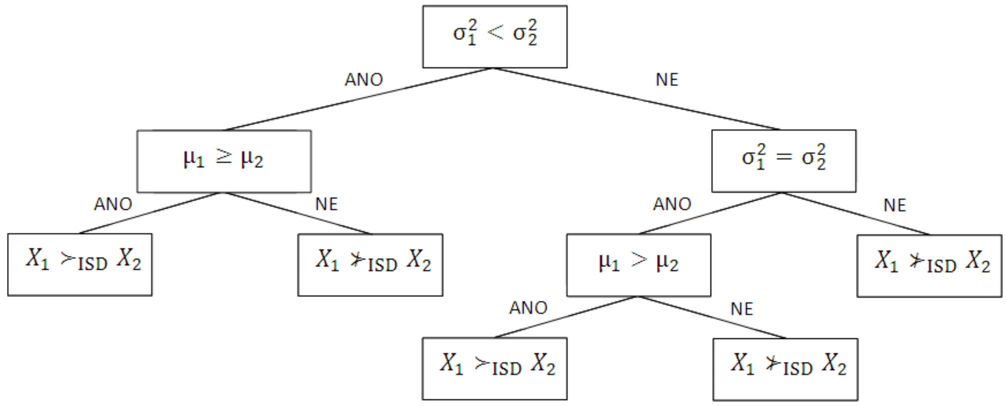
Věta 5.3 *Uvažujme $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Potom $X_1 \succ_{ISD} X_2$ právě tehdy, když platí buď*

$$\sigma_1^2 < \sigma_2^2 \wedge \mu_1 \geq \mu_2 \quad \textit{nebo} \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \wedge \mu_1 > \mu_2.$$

Důkaz. Důkaz této věty vyplývá z výše uvedené diskuze.

Lze si povšimnout, že uvedená nutná a postačující podmínka pro ISD dominanci za předpokladu normality je ekvivalentní s mean-variance kritériem

(2.1) a tedy i s nutnou a postačující podmínkou pro SSD za předpokladu normality z věty 5.1. Pokud si uvědomíme, že ze stochastické dominance vyššího řádu vyplývá dominance všech nižších řádů, vyplývá z toho, že mean-variance kritérium je za předpokladu normality nutnou a postačující podmínkou pro všechny vyšší řády stochastické dominance počínaje druhým řádem.



Obrázek 5.1: Relace ISD v závislosti na parametrech normálně rozdělených náhodných veličin $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$.

5.2.2 ISD eficience portfolií za předpokladu normality

V této kapitole se pokusíme zobecnit předchozí výsledky pro normálně rozdělené náhodné veličiny i na portfolia s normálně rozdělenými výnosy a formulovat kritérium ISD eficience.

Předpokládejme, že známe rozdělení náhodného vektoru $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_N)'$ výnosů z investic do N různých aktiv:

$$\boldsymbol{r} \sim \mathcal{N}_N \left(\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_N \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \cdots & \sigma_{NN} \end{pmatrix} \right),$$

kde $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$ a $\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$.

Vektor vah jednotlivých aktiv v portfoliu označíme jako $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)'$. Výnos portfolia $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$, kde $\Lambda = \left\{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^N \mid \mathbf{1}'\boldsymbol{\lambda} = 1, \lambda_n \geq 0, n = 1, 2, \ldots, N\right\}$, lze potom vyjádřit jako $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\lambda} = \sum_{i=1}^N r_i\lambda_i$. Potom

$$\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\lambda} \sim \mathcal{N}\left(\mu_\lambda = \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{\mu}, \sigma_\lambda^2 = \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\lambda}\right)$$

Zaveďme dále testovací portfolio $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N)'$, pro které podobně platí: $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau} \sim \mathcal{N}\left(\mu_\tau, \sigma_\tau^2\right)$.

Z předchozích výsledků vyplývá, že $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\lambda} \succ_{ISD} \boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau}$ právě tehdy, když jsou splněny obě následující podmínky

$$\min_{a\geq 0} \frac{1}{2}a^2(\sigma_\tau^2 - \sigma_\lambda^2) + a(\mu_\lambda - \mu_\tau) = 0$$
$$\max_{a\geq 0} \frac{1}{2}a^2(\sigma_\tau^2 - \sigma_\lambda^2) + a(\mu_\lambda - \mu_\tau) > 0.$$

V následující maximalizační úloze se budeme snažit najít takové portfolio $\boldsymbol{\lambda}$, které dominuje testované portfolio $\boldsymbol{\tau}$ a zároveň od něj bude mít maximální vzdálenost $d(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau})$. Na konkrétní definici vzdálenosti příliš nezáleží, důležité je pouze, aby byla nulová pro identická portfolia a nenulová pro ostatní. Pokud tato vzdálenost bude ostře větší než nula, našli jsme portfolio, které dominuje $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\tau}$ tedy není ISD eficientní. V případě, že úloha nemá řešení, neexistuje žádné takové portfolio $\boldsymbol{\lambda}$, které by $\boldsymbol{\tau}$ dominovalo a $\boldsymbol{\tau}$ je tedy ISD eficientní. Optimalizační úlohu můžeme napsat následujícím způsobem.

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda} \quad & d(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) \\ & \min_{a\geq 0} \frac{1}{2}a^2(\sigma_\tau^2 - \sigma_\lambda^2) + a(\mu_\lambda - \mu_\tau) = 0 \\ & \max_{a\geq 0} \frac{1}{2}a^2(\sigma_\tau^2 - \sigma_\lambda^2) + a(\mu_\lambda - \mu_\tau) > 0 \end{aligned}$$

Což je, jak vyplývá z diskuse, ekvivalentní s následující úlohou.

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda} \quad & d(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) \\ & \big((\sigma_\lambda^2 < \sigma_\tau^2 \wedge \mu_\lambda \geq \mu_\tau) \vee (\sigma_\lambda^2 = \sigma_\tau^2 \wedge \mu_\lambda > \mu_\tau)\big) \end{aligned}$$

Zde využijeme možnosti vyřešit úlohu pro obě podmínky spojené disjunkcí odděleně a pak vzít větší z obou maxim a dospíváme tak k úloze

$$d^\star = \max\left(\max_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda, \sigma_\lambda^2<\sigma_\tau^2, \mu_\lambda\geq\mu_\tau} d(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}), \max_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda, \sigma_\lambda^2=\sigma_\tau^2, \mu_\lambda>\mu_\tau} d(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}) \right).$$

Pokud má tato úloha řešení, tak platí $d^\star > 0$, $\boldsymbol{\tau}$ je ISD neeficientní a pro optimální řešení $\boldsymbol{\lambda}^\star$ platí $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\lambda}^\star \succ_{ISD} \boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau}$. Když řešení úlohy neexistuje, potom je $\boldsymbol{\tau}$ ISD eficientní. Problémem úlohy jsou však ostré hranice v omezujících podmínkách, které výrazně komplikují výpočet optima, proto je nutné přepsat úlohu do tvaru, ve kterém budou podmínky zadány pouze neostrými nerovnostmi.

Jednou z možností je zahrnutí proměnných z podmínek s ostrými nerovnostmi do účelové funkce namísto vzdálenosti portfolií. V takové úloze lze potom $D^\star$ interpretovat jako míru odlišnosti portfolií. Přestože různá portfolia mohou mít stejné střední hodnoty i rozptyly, v takovém případě se vzájemně striktně nedominují, a proto nezáleží, zda je testované portfolio v případě jeho eficience samotné, nebo zda je takových eficientních portfolií se stejnými středními hodnotami a rozptyly více.

Řešíme tedy úlohu

$$D^\star = \max\left(\max_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda,\mu_\lambda\geq\mu_\tau} \sigma_\tau^2 - \sigma_\lambda^2, \max_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda,\sigma_\tau^2=\sigma_\lambda^2} \mu_\lambda - \mu_\tau\right). \tag{5.5}$$

Úloha má vždy řešení a zároveň odchylka portfolií $D^\star \geq 0$, protože vždy je přípustné alespoň řešení $\boldsymbol{\lambda}^\star = \boldsymbol{\tau}$. Pokud $D^\star > 0$, potom $\boldsymbol{\tau}$ je ISD neeficientní a pro optimální řešení $\boldsymbol{\lambda}^\star$ platí $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\lambda}^\star \succ_{ISD} \boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau}$. V případě, že $D^\star = 0$, je buď $\boldsymbol{\lambda}^\star = \boldsymbol{\tau}$, nebo je $\boldsymbol{\lambda}^\star$ pouze portfolio se stejným rozptylem a střední hodnotou jako $\boldsymbol{\tau}$. V obou těchto případech platí pro všechna portfolia $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$, že $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\lambda} \not\succ_{ISD} \boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau}$ a tedy je portfolio $\boldsymbol{\tau}$ ISD eficientní. Shrňme tento výsledek ještě jednou v následující větě.

Věta 5.4 *Nechť pro výnos každého portfolia $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$ platí $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\lambda} \sim \mathcal{N}(\mu_\lambda, \sigma_\lambda^2)$. Potom pro portfolio $\boldsymbol{\tau} \in \Lambda$ s výnosy $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau} \sim \mathcal{N}(\mu_\tau, \sigma_\tau^2)$ platí, že $\boldsymbol{\tau}$ je ISD eficientní právě tehdy, když $D^\star = 0$. Pokud $D^\star > 0$, potom pro optimální řešení (5.5) $\boldsymbol{\lambda}^\star$ platí $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\lambda}^\star \succ_{ISD} \boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau}$.*

Důkaz. Důkaz této věty vyplývá z výše uvedené diskuze.

Protože nutná a postačující podmínka ISD normálně rozdělených náhodných veličin z věty 5.3 je ekvivalentní s mean-variance kritériem (viz 2.1), je výše uvedená nutná a postačující podmínka ISD eficience normálně rozdělených portfolií totožná s obdobnou podmínkou založenou na mean-variance kritériu.

5.3 FSD a SSD za předpokladu gamma rozdělení

Nyní se podívejme na dosavadní výsledky týkající se stochastické dominance, které vycházejí ze článků Ali [1] a Bawa [2]. V následující kapitole se pak budeme snažit tyto výsledky rozšířit i pro ISD. V této kapitole budeme tentokrát předpokládat náhodně rozdělené veličiny s gamma rozdělením s parametry $k > 0$ a $\theta > 0$. Hustota gamma rozdělení pro náhodnou veličinu $X \sim \Gamma(k, \theta)$ má tvar

$$f(x) = \frac{1}{\theta^k \Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x > 0.$$

Pro $X \sim \Gamma(k, \theta)$ platí, že $\mathbb{E}X = k\theta$ a $\mathsf{var}(X) = k\theta^2$.

Věta 5.5 *Nechť $X_1 \sim \Gamma(k_1, \theta_1)$ a $X_2 \sim \Gamma(k_2, \theta_2)$, potom*

(i) $X_1 \succ_{FSD} X_2$ právě tehdy, když $\theta_1 \geq \theta_2$ a zároveň $k_1 \geq k_2$ a alespoň jedna z nerovností je splněna jako ostrá.

(ii) $X_1 \succ_{SSD} X_2$ právě tehdy, když

$$\frac{k_1}{k_2} \geq \max\left(1, \frac{\theta_2}{\theta_1}\right), \tag{5.6}$$

dále je nutné, aby nerovnost byla splněna jako ostrá alespoň v případě, když $\frac{\theta_2}{\theta_1} = 1$.

Důkaz. Důkaz této věty provedl Ali [1]. Druhou část věty pro SSD dokázal již dříve Bawa [2], ale pouze pro třídu užitkových funkcí s klesající absolutní averzí k riziku, které představují podmnožinu U_2.

5.4 ISD za předpokladu gamma rozdělení

Předpokládejme $X_1 \sim \Gamma(k_1, \theta_1)$ a $X_2 \sim \Gamma(k_2, \theta_2)$. Nejprve vyřešíme pro tyto dvě veličiny podmínku (5.1), tedy

$$\min_{a \geq 0} \left(\mathbb{E} e^{-aX_2} - \mathbb{E} e^{-aX_1} \right) \geq 0. \tag{5.7}$$

Po rozepsání dostáváme

$$\min_{a \geq 0} \int_0^\infty \frac{1}{\theta_2^{k_2} \Gamma(k_2)} x^{k_2 - 1} e^{-\frac{x_2}{\theta_2} - a x_2} dx_2 - \int_0^\infty \frac{1}{\theta_1^{k_1} \Gamma(k_1)} x^{k_1 - 1} e^{-\frac{x_1}{\theta_1} - a x_1} dx_1,$$

což lze upravit na

$$\min_{a \geq 0} \frac{\left(\frac{\theta_2}{1 + a\theta_2} \right)^{k_2}}{\theta_2^{k_2}} \int_0^\infty \frac{1}{(\frac{\theta_2}{1 + a\theta_2})^{k_2} \Gamma(k_2)} x_2^{k_2 - 1} e^{-\left(\frac{x_2}{\frac{\theta_2}{1 + a\theta_2}} \right)} dx_2 -$$

$$- \frac{\left(\frac{\theta_1}{1 + a\theta_1} \right)^{k_1}}{\theta_1^{k_1}} \int_0^\infty \frac{1}{(\frac{\theta_1}{1 + a\theta_1})^{k_1} \Gamma(k_1)} x_1^{k_1 - 1} e^{-\left(\frac{x_1}{\frac{\theta_1}{1 + a\theta_1}} \right)} dx_1.$$

Obě integrované funkce představují hustoty gamma rozdělení a oba integrály se tedy rovnají jedné, což nám umožňuje zjednodušit úlohu na

$$\min_{a \geq 0} \left(\frac{1}{1 + a\theta_2} \right)^{k_2} - \left(\frac{1}{1 + a\theta_1} \right)^{k_1} \geq 0,$$

což je ekvivalentní s úlohou

$$\min_{a \geq 0} \frac{(1 + a\theta_1)^{k_1}}{(1 + a\theta_2)^{k_2}} \geq 1,$$

vzhledem k tomu, že logaritmus je monotónní funkce, zlogaritmováním obou stran dostáváme zápis další ekvivalentní úlohy

$$\min_{a \geq 0} k_1 \log(1 + a\theta_1) - k_2 \log(1 + a\theta_2) \geq 0.$$

Označme funkci $f(a)$ definovanou na intervalu $[0, \infty)$, která prochází počátkem pro všechny kombinace parametrů obou veličin

$$f(a) = k_1 \log(1 + a\theta_1) - k_2 \log(1 + a\theta_2).$$

Budeme hledat minimum funkce $f(a)$ na intervalu $[0, \infty)$. Položme první derivaci $f(a)$ rovnu nule

$$\frac{k_1\theta_1}{1+a\theta_1} - \frac{k_2\theta_2}{1+a\theta_2} = 0,$$

odkud za předpokladu $k_1 \neq k_2$ dostáváme právě jeden stacionární bod

$$a^\star = \frac{k_2\theta_2 - k_1\theta_1}{\theta_1\theta_2(k_1-k_2)}. \tag{5.8}$$

Funkční hodnota f v bodě $a^\star$ je

$$f(a^\star) = k_1 \log\left(1 + \frac{k_2\theta_2 - k_1\theta_1}{\theta_2(k_1-k_2)}\right) - k_2 \log\left(1 + \frac{k_2\theta_2 - k_1\theta_1}{\theta_1(k_1-k_2)}\right).$$

Pokud $k_1 = k_2$ a $\theta_1 \neq \theta_2$, $f(a)$ nemá na intervalu $(0, \infty)$ žádný stacionární bod. Víme, že $f(0) = 0$. Podívejme se, jak se funkce $f(a)$ chová pro a jdoucí k nekonečnu pro různé hodnoty parametrů. Funkci $f(a)$ můžeme zapsat také v následujícím tvaru

$$f(a) = \log\left(\frac{(1+a\theta_2)^{k_2}}{(1+a\theta_1)^{k_1}}\right).$$

Z výše uvedeného rozepsání funkce $f(a)$ je vidět, že chování funkce v nekonečnu závisí především na velikosti parametrů k_1 a k_2. Pokud $k_1 < k_2$, platí $\lim_{a\to\infty} f(a) = -\infty$, podmínka (5.1) není splněna a $X_1 \not\succ_{ISD} X_2$.

Pokud $k_1 > k_2$, platí $\lim_{a\to\infty} f(a) = \infty$. V tomto případě záleží na tom, kde se nachází bod $a^\star$. V případě, že $a^\star \leq 0$, což nastává právě tehdy, když $\theta_1 k_1 \geq \theta_2 k_2$ (jak je vidět z (5.8)), tak na intervalu $(0, \infty)$ $f(a)$ nemá lokální extrém, nejnižší hodnoty dosahuje v bodě 0 a je rostoucí. Jsou tedy splněny obě podmínky (5.1) i (5.2) a $X_1 \succ_{ISD} X_2$.

Když platí $k_1 > k_2$ a zároveň $a^\star > 0$, což nastává právě tehdy, když $\theta_1 k_1 < \theta_2 k_2$ (viz(5.8)), tak se v bodě $a^\star$ nachází lokální minimum. Nahlédnout to lze z toho, že $f(a)$ až do bodu $a^\star$ klesá a poté roste, protože platí $f'(a^\star) = 0$, $f'(a) > 0$ právě, když $a > a^\star$ a $f'(a) < 0$ právě, když $a < a^\star$. Víme, že $f(0) = 0$, $\lim_{a\to\infty} f(a) = \infty$ a na intervalu $(0, \infty)$ má $f(a)$ právě jedno lokální minimum, jedinou možností v tomto případě je, že $a^\star$ je minimem funkce na intervalu $(0, \infty)$ se zápornou funkční hodnotou $f(a^\star) < 0$, z čehož vyplývá, že není splněna podmínka (5.1) a $X_1 \not\succ_{ISD} X_2$.

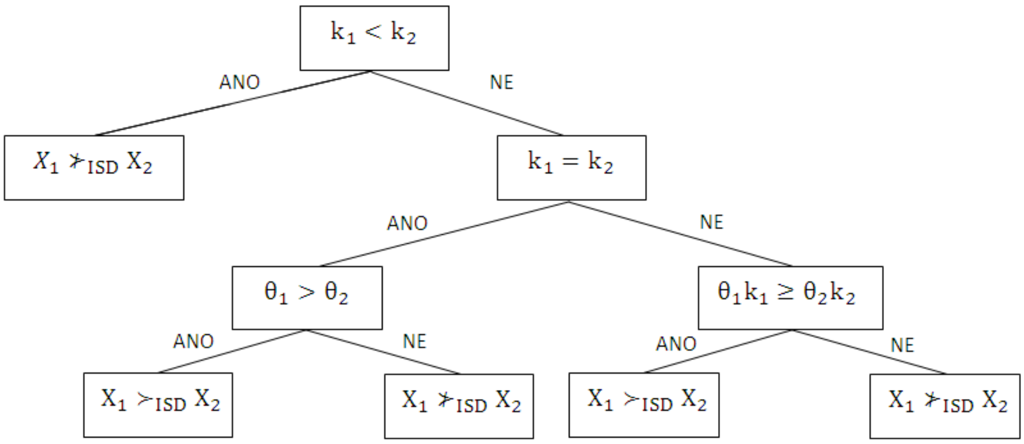
Nyní zbývá již jen diskutovat případ $k_1 = k_2 = k$. Pokud platí i $\theta_1 = \theta_2$, $f(a)$ je nulovou funkcí, není splněna podmínka (5.2) a $X_1 \not\succ_{ISD} X_2$. Dále tedy předpokládejme $\theta_1 \neq \theta_2$, potom $f(a)$ má v nekonečnu vlastní limitu $\lim_{a\to\infty} f(a) = \log\left(\frac{\theta_1^k}{\theta_2^k}\right) = k\log\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)$. Pro $\theta_1 < \theta_2$ je tato limita záporná, takže $X_1 \not\succ_{ISD} X_2$. Naopak pro $\theta_1 > \theta_2$ je limita kladná. Protože na intervalu $(0, \infty)$ nemá $f(a)$ stacionární body, jde o rostoucí funkci procházející počátkem. Jsou tedy splněny podmínky (5.1) i (5.2) a $X_1 \succ_{ISD} X_2$.

Přehledně jsou všechny situace zobrazeny v rozhodovacím stromu na obrázku 5.2 a shrnuty v následující větě.

Věta 5.6 *Nechť* $X_1 \sim \Gamma(k_1, \theta_1)$ *a* $X_2 \sim \Gamma(k_2, \theta_2)$*. Potom* $X_1 \succ_{ISD} X_2$ *právě tehdy, když platí buď*

$$k_1 > k_2 \wedge \theta_1 k_1 \geq \theta_2 k_2 \quad \textit{nebo} \quad k_1 = k_2 \wedge \theta_1 > \theta_2. \tag{5.9}$$

Důkaz. Důkaz této věty vyplývá z výše uvedené diskuze.



Obrázek 5.2: Relace ISD v závislosti na parametrech náhodných veličin s rozdělením gamma $X_1 \sim \Gamma(k_1, \theta_1)$ a $X_2 \sim \Gamma(k_2, \theta_2)$.

Výše odvozená nutná a postačující podmínka (5.9) pro ISD dominanci gamma rozdělených náhodných veličin je podobně jako v případě normálního rozdělení ekvivalentní s nutnou a postačující podmínkou pro SSD dominanci (5.6) z věty 5.5 za předpokladu gamma rozdělení, což lze nahlédnout následovně.

Když vyjdeme z kritéria (5.6), tak musíme rozlišit 3 případy. Za prvé pokud $\frac{\theta_2}{\theta_1} < 1$, pak je maximum v nerovnici (5.6) rovno 1 a ta tak přechází v podmínku $k_1 \geq k_2$. V druhém případě předpokládáme $\frac{\theta_2}{\theta_1} = 1$ a z (5.6) dostáváme podmínku $k_1 > k_2$, zároveň platí i $\theta_1 k_1 \geq \theta_2 k_2$. Za třetí vyjdeme z $\frac{\theta_2}{\theta_1} > 1$, z (5.6) dostáváme $\theta_1 k_1 \geq \theta_2 k_2$ a z toho vyplývá i $k_1 > k_2$. Shrneme-li všechny tři případy, je vidět, že podmínka (5.6) je ekvivalentní s (5.9).

Dále opět při využití faktu, že ze stochastické dominance vyššího řádu vyplývá dominance všech nižších řádů, dospíváme k závěru, že v případě gamma rozdělených náhodných veličin jsou nutné a postačující podmínky pro všechny vyšší řády stochastické dominance počínaje druhým řádem ekvivalentní.

Výše odvozená nutná a postačující podmínka již nelze rozšířit na kritérium pro srovnání portfolií nebo kritérium ISD eficience portfolia za předpokladu gamma rozdělených výnosů, protože lineární kombinace gamma rozdělených náhodných veličin obecně nemusí mít gamma rozdělení.

Kapitola 6

Aplikace: eficientní množiny portfolií

V této kapitole bude naším cílem nalézt na reálných datech ISD eficientní množinu portfolií za předpokladu normality. Dále vezmeme ke zjištěné eficientní množině portfolií doplňkovou množinu neeficientních portfolií spolu s příslušnými dominujícími portfolii a budeme zjišťovat, zda mezi těmito dvojicemi stále existuje relace jak SSD, tak ISD při využití scénářového přístupu, který nevyužívá předpoklad normality výnosů aktiv.

6.1 Data

V této kapitole budeme vycházet z dat z volně přístupné datové knihovny Kenneth French [3]. Pro naši analýzu použijeme roční nadvýnosy (výnosy, které překračují bezrizikovou úrokovou míru) z 5 různých reprezentativních portfolií pro 5 průmyslových odvětví. Protože budeme mimo jiné chtít zhodnotit vliv splnění či nesplnění předpokladu normality, kterého v našich metodách využíváme, použijeme dvě sady dat. První bude tvořena ročními nadvýnosy mezi lety 1976 a 2010 a druhá nadvýnosy měsíčními mezi lednem 2000 a prosincem 2010.

V první sadě dat tak máme pro každé reprezentativní portfolio 35 ročních údajů o jejich výnosnosti, což také znamená, že při využití scénářového přístupu budeme mít k dispozici 35 scénářů. Tato reprezentativní portfolia budeme považovat za dostupná aktiva. Váhy portfolií, která budeme pomocí nich vytvářet, budou určovat, jakou část kapitálu investujeme do daného odvětví jako celku. V následující tabulce jsou uvedeny základní statistiky nadvýnosů pro jednotlivá průmyslová odvětví a dále také korelační matice nadvýnosů. Zkratky pocházejí z angličtiny, Cnsmr = výroba spotřebního zboží, Manuf = průmysl, HiTec = technologicky vyspělá výroba, Hlth = zdravotní služby a Other = ostatní sektory.

	Cnsmr	Manuf	HiTec	Hlth	Other
průměr	14.12	13.84	13.39	14.17	13.65
medián	13.98	16.98	13.26	7.93	15.59
sm. odch.	16.36	15.58	24.08	20.46	19.58
mininimum	-25.66	-36.26	-40.23	-22.81	-46.84
maximum	51.73	42.05	67.80	61.77	45.16

	Cnsmr	Manuf	HiTec	Hlth	Other
Cnsmr	1.00	0.62	0.63	0.69	0.82
Manuf	0.62	1.00	0.59	0.53	0.83
HiTec	0.63	0.59	1.00	0.42	0.59
Hlth	0.69	0.53	0.42	1.00	0.67
Other	0.82	0.83	0.59	0.67	1.00

Druhá sada dat obsahuje 132 měsíčních údajů o nadvýnosech pro každé odvětví. V následujících dvou tabulkách jsou opět uvedeny základní statistiky nadvýnosů pro jednotlivá průmyslová odvětví a dále korelační matice nadvýnosů.

	Cnsmr	Manuf	HiTec	Hlth	Other
průměr	0.52	0.80	-0.11	0.34	0.26
medián	1.21	1.05	0.26	0.47	0.85
sm. odch.	4.20	4.88	7.56	4.10	5.68
mininimum	-15.33	-17.90	-22.79	-11.03	-19.66
maximum	11.02	9.69	20.23	11.58	16.11

	Cnsmr	Manuf	HiTec	Hlth	Other
Cnsmr	1.00	0.76	0.67	0.53	0.86
Manuf	0.76	1.00	0.61	0.52	0.76
HiTec	0.67	0.61	1.00	0.48	0.65
Hlth	0.53	0.52	0.48	1.00	0.57
Other	0.86	0.76	0.65	0.57	1.00

6.2 Eficience za předpokladu normality

V našich dalších analýzách bude klíčovým předpokladem normalita výnosů portfolií, proto hned na začátku provedeme testy vícerozměrné normality nadvýnosů. Využijeme k tomu statistický software R 2.13.0 [29] a budeme testovat, zda matice nadvýnosů odpovídá pěti-rozměrnému normálnímu rozdělení, a to jak testem využívajícím šikmost rozdělení, tak testem využívajícím jeho špičatost. Testy vícerozměrné normality jsou součástí balíčku *ICS*.

V první sadě dat obsahující roční nadvýnosy jednotlivých odvětví ani jeden z testů nulovou hypotézu o pěti-rozměrné normalitě dat na pětiprocentní hladině významnosti nezamítá, test založený na šikmosti *mvnorm.skew.test* s p-hodnotou 0,14 a test založený na špičatosti *mvnorm.kur.test* s p-hodnotou 0,23. Dále tedy budeme u první sady dat považovat předpoklad o normalitě za splněný.

Pro druhou sadu měsíčních dat je situace naprosto opačná a oba testy na všech obvyklých hladinách spolehlivosti pěti-rozměrnou normalitu zamítají, test založený na šikmosti *mvnorm.skew.test* s p-hodnotou 4,6e-05 a test založený na špičatosti *mvnorm.kur.test* s p-hodnotou 2,1e-11. V tomto případě se tedy jednoznačně prokázalo, že předpoklad normality nemůžeme považovat za splněný.

Dále využijeme splnění předpokladu normality v první sadě ročních dat a pokusíme se nalézt jednak eficientní množinu portfolií vzhledem k FSD a poté eficientní množinu portfolií vzhledem k SSD. Z kapitoly 5 již víme, že za předpokladu normality jsou všechny řády SD vyššího než druhého stupně včetně ISD ekvivalentní s SSD dominancí, proto nám stačí nalézt množinu SSD eficientních portfolií a ta je shodná s množinou ISD eficientních portfolií.

Kritérium pro SSD/ISD eficienci portfolií jsme již odvodili ve větě 5.4. Podobně lze z věty 5.1 odvodit následující optimalizační kritérium pro eficienci portfolií vzhledem k FSD. Pro testovací portfolio $\boldsymbol{\tau}$ takové, že $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau} \sim \mathcal{N}(\mu_\tau, \sigma_\tau^2)$ hledejme portfolio $\boldsymbol{\lambda}$ takové, že $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\lambda} \sim \mathcal{N}(\mu_\lambda, \sigma_\lambda^2)$, které FSD dominuje $\boldsymbol{\tau}$. Uvažujme následující maximalizační úlohu

$$D^\star = \max_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda, \sigma_\tau^2 = \sigma_\lambda^2} \mu_\lambda - \mu_\tau.$$

Platí, že $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\lambda} \succ_{FSD} \boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau}$ právě tehdy, když $D^\star > 0$. Naopak pokud $D^\star = 0$, tak neexistuje portfolio dominující $\boldsymbol{\tau}$ a $\boldsymbol{\tau}$ je tedy FSD eficientní.

Uvažujme omezenou množinu 1001 portfolií vytvořených na mřížce s krokem 0.1 pro všech pět složek portfolií. Každé takové portfolio posoudíme z hlediska jeho FSD a SSD/ISD eficience. K vyřešení dvou výše zmíněných úloh nelineárního programování byl použit optimalizační software GAMS 23.6 s využitím balíčků COINIPOPT a CONOPT.

Výsledky lze pro první sadu shrnout následovně. Množina FSD eficientních portfolií za předpokladu normality zahrnuje 18 portfolií a množina SSD/ISD eficientních portfolií, která je podmnožinou FSD eficientních portfolií, zahrnuje 10 portfolií. Obě množiny lze vidět i s jejich středními hodnotami a rozptyly v následujících dvou tabulkách.

Skripty k výpočtům jsou dostupné na přiloženém DVD, jehož obsah lze nalézt na konci práce v příloze A.

Cnsmr	Manuf	HiTec	Hlth	Other	průměr	rozptyl
0	0	0	1	0	14.170	419
0.1	0	0	0.9	0	14.165	383
0.2	0	0	0.8	0	14.161	352
0.3	0	0	0.7	0	14.156	326
0.4	0	0	0.6	0	14.151	304
0.4	0.5	0	0.1	0	13.986	206
0.5	0	0	0.5	0	14.147	287
0.5	0.3	0	0.2	0	14.048	219
0.5	0.4	0	0.1	0	14.015	210
0.6	0	0	0.4	0	14.142	274
0.6	0.1	0	0.3	0	14.109	248
0.6	0.2	0	0.2	0	14.076	229
0.6	0.3	0	0.1	0	14.043	217
0.7	0	0	0.3	0	14.138	265
0.7	0.1	0	0.2	0	14.105	244
0.7	0.2	0	0.1	0	14.072	228
0.8	0	0	0.2	0	14.133	262
0.8	0.1	0	0.1	0	14.100	243

Cnsmr	Manuf	HiTec	Hlth	Other	průměr	rozptyl
0	0	0	1	0	14.170	419
0.1	0	0	0.9	0	14.165	383
0.2	0	0	0.8	0	14.161	352
0.3	0	0	0.7	0	14.156	326
0.4	0	0	0.6	0	14.151	304
0.5	0	0	0.5	0	14.147	287
0.5	0.4	0	0.1	0	14.015	210
0.6	0	0	0.4	0	14.142	274
0.7	0	0	0.3	0	14.138	265
0.7	0.1	0	0.2	0	14.105	244

Přestože předpoklad normality ve druhé sadě měsíčních dat nemůžeme považovat za splněný, proveďme stejnou proceduru hledání eficientních množin, jako by splněn byl. V další podkapitole díky tomu budeme moci zhodnotit, jak důležité je splnění předpokladu normality pro relevanci výsledků metody.

V tomto případě množina FSD eficientních portfolií za předpokladu normality zahrnuje 19 portfolií a množina SSD/ISD eficientních portfolií obsahuje 5 portfolií. Obě množiny jsou i s jejich středními hodnotami a rozptyly uvedeny v následujících dvou tabulkách.

Cnsmr	Manuf	HiTec	Hlth	Other	průměr	rozptyl
0	0.8	0	0.2	0	0.71	19.3
0	0.9	0	0.1	0	0.75	21.3
0	1	0	0	0	0.80	23.8
0.1	0.6	0	0.3	0	0.63	16.4
0.1	0.7	0	0.2	0	0.68	18.0
0.1	0.8	0	0.1	0	0.72	19.9
0.1	0.9	0	0	0	0.77	22.3
0.2	0.4	0	0.4	0	0.56	14.5
0.2	0.5	0	0.3	0	0.60	15.5
0.2	0.6	0	0.2	0	0.65	16.9
0.2	0.7	0	0.1	0	0.70	18.7
0.2	0.8	0	0	0	0.74	20.9
0.3	0.3	0	0.4	0	0.53	13.9
0.3	0.4	0	0.3	0	0.58	14.8
0.3	0.5	0	0.2	0	0.62	16.1
0.3	0.6	0	0.1	0	0.67	17.7
0.4	0.1	0	0.5	0	0.46	13.2
0.4	0.2	0	0.4	0	0.50	13.6
0.4	0.3	0	0.3	0	0.55	14.3

Cnsmr	Manuf	HiTec	Hlth	Other	průměr	rozptyl
0	1	0	0	0	0.80	24
0.1	0.8	0	0.1	0	0.72	20
0.2	0.6	0	0.2	0	0.65	17
0.3	0.4	0	0.3	0	0.58	15
0.4	0.1	0	0.5	0	0.46	13

6.3 Eficience bez využití předpokladu normality

Pokud nechceme využít předpokladu normality, musíme přejít k druhému základnímu přístupu k testování SD, a to ke scénářovému přístupu. Takto však nelze ISD eficientní množinu portfolií vůbec zjistit, protože dosud není znám žádný test ISD eficience portfolií s využitím scénářového přístupu analogický k testu (5.4). Jediné, co lze pomocí scénářového přístupu zjišťovat, je to, zda mezi neeficientními portfolii z předchozí podkapitoly a těmi portfolii, která je dominovala, zůstane relace SD zachována i při scénářovém přístupu.

Pro srovnání tedy vezměme všechna neeficientní portfolia z minulého příkladu. Pro každé takové neeficientní portfolio $\boldsymbol{\tau}$ jsme při použití kritéria z věty 5.4 získali nejméně jedno portfolio $\boldsymbol{\lambda}^\star$ takové, že $\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\lambda}^\star \succ_{ISD} \boldsymbol{r}'\boldsymbol{\tau}$ za předpokladu normality. Úloha je sestavena pomocí dvou optimalizačních podúloh, z kterých mohou v případě neeficience $\boldsymbol{\tau}$ vyjít až dvě různá portfolia $\boldsymbol{\lambda}^\star$, která dominují $\boldsymbol{\tau}$. Takže maximální možný počet portfolií $\boldsymbol{\lambda}^\star$, která dominují 1001 zvolených portfolií $\boldsymbol{\tau}$ je 2002 v případě, že žádné vybrané portfolio $\boldsymbol{\tau}$ není eficientní. Nyní budeme zkoumat, zda a v kolika případech zůstane tato relace zachována, opustíme-li předpoklad normality. Protože za předpokladu normality je SSD a ISD ekvivalentní, ale při scénářovém přístupu jde o odlišné vztahy, budeme při testování zjišťovat přítomnost obou těchto relací mezi všemi testovanými dvojicemi.

K párovému srovnání portfolií využijeme neparametrické testy z vět 4.6 a 4.7. K testu SSD byl použit software R 2.13.0 [29] a k testování ISD eficience, které zahrnuje optimalizační úlohu, program GAMS 23.16 [28]. Opět provedeme výpočty na obou sadách dat.

V první sadě ročních dat množina SSD/ISD neeficientních portfolií za předpokladu normality obsahuje 991 portfolií, pro která bylo nalezeno 1982 (dvojnásobek) SSD/ISD dominujících portfolií. Při aplikaci scénářového přístupu a využití výše uvedených párových testů zjišťujeme, že relace SSD přetrvala u 647 (33%) portfolií a relace ISD u 1685 (85%) portfolií.

U druhé sady měsíčních dat množina SSD/ISD neeficientních portfolií za předpokladu normality obsahuje 996 portfolií, pro která bylo nalezeno 1992 SSD/ISD dominujících portfolií. Při použití scénářového přístupu zjišťujeme, že relace SSD přetrvala u 830 (42%) portfolií a relace ISD u 1204 (60%) portfolií.

Z uvedených shrnutí je vidět, že výsledky v této práci odvozené metody pro hledání ISD eficientních množin portfolií využívající předpokladu normálního rozdělení jsou v praxi na splnění tohoto předpokladu poměrně dosti závislé. Výsledek metody na normálně rozdělených ročních datech je v relativně dobré shodě s výsledky scénářového přístupu, když u 85% bylo prokázáno zachování relace ISD mezi neeficientními a dominujícími portfolii. Když však použijeme metodu na data, která s velmi vysokou pravděpodobností nepocházejí z normálního rozdělení, klesá tento poměr na 60%. Použité dvě sady dat reprezentují dva extrémní případy, kdy jednu sadu můžeme považovat za výběr z normálního rozdělení a druhou s vysokou mírou jistoty nemůžeme. Pokud by byl předpoklad normality splněn alespoň přibližně, dá se očekávat, že poměr bude ležet někde mezi 60% a 85%.

Kapitola 7

Závěr

V této práci jsme se zabývali především stochastickou dominancí vyšších řádů, zejména řádu nekonečného jak pro samotné náhodné veličiny, tak pro portfolia.

V druhé a třetí kapitole jsme postupně představili koncepty stochastické dominance prvního, druhého, třetího, obecného n-tého i nekonečného řádu pro náhodné veličiny. Důležité byly zejména poznatky týkající se nutných a postačujících podmínek pro jednotlivé řády stochastické dominance.

Ve čtvrté kapitole jsme přešli k aplikaci stochastické dominance na portfolia pomocí neparametrického scénářového přístupu. Představili jsme také tři nejnovější testy eficience portfolia vzhledem k SSD.

V páté kapitole jsme vyšli z předpokladu znalosti specifického rozdělení náhodných veličin, když jsme uvažovali nejprve normální a poté gamma rozdělení. Pro obě rozdělení byly známé nutné a postačující podmínky pro FSD a SSD. Nám se podařilo dokázat, že v případě obou rozdělení platí, že nutná a postačující podmínka pro ISD je ekvivalentní s nutnou a postačující podmínkou pro SSD. Na základě výsledků pro normální rozdělení jsme odvodili test eficience portfolia vzhledem k ISD za předpokladu normality výnosů aktiv.

V šesté kapitole jsme na data nadvýnosů akcií jednotlivých průmyslových odvětví aplikovali test eficience portfolia vzhledem k ISD za předpokladu normality odvozený v předchozí kapitole. Abychom mohli zjistit citlivost metody na splnění předpokladu normality, použili jsme dvě sady dat. U první sady ročních nadvýnosů se dal předpoklad normality považovat za splněný a u druhé sady měsíčních nadvýnosů byla normalita s vysokou mírou spolehlivosti zamítnuta.

Mezi 1001 testovanými portfolii jsme tak nalezli množinu 10 SSD/ISD eficientních portfolií při použití první sady ročních dat a množinu 5 SSD/ISD eficientních portfolií u druhé sady měsíčních dat. U zbývajících neeficientních portfolií byla nalezena SSD/ISD dominující portfolia. Dále jsme za pomoci scénářového přístupu zkoumali, zda relace SD mezi těmito páry portfolií vydrží i po opuštění předpokladu normality a využití scénářového přístupu. Výsledek pro první sadu dat byl, že u 85% portfolií byla potvrzena relace ISD i při využití neparametrického testu. V případě druhé sady dat, která jednoznačně nesplňovala předpoklad normality, došlo podle očekávání ke snížení tohoto poměru, a to na 60%. Když bylo hodnoceno přetrvání relace SSD, tyto poměry dosahovaly mnohem nižších hodnot 30%, resp. 42%.

Přestože nelze přímo srovnat množiny eficientních portfolií nalezené pomocí naší metody a pomocí scénářového přístupu z důvodu neexistence neparametrického testu ISD eficience, výsledky přetrvání relace ISD u neeficientních portfolií z páté kapitoly naznačují, že při testování ISD eficience by v této práci odvozená metoda mohla dávat výsledky, které nejsou v rozporu se scénářovým přístupem. Samozřejmě platí, že záleží na míře splnění předpokladu normality, na kterém je metoda postavena. Čím lépe je tento předpoklad splněn, tím lepší lze očekávat výsledky. Jak se ale ukázalo i v případě, že nebyl předpoklad normality vůbec splněn, není ani za této situace výsledek zcela v rozporu s výsledky scénářového přístupu.

Literatura

[1] Ali, M. M.: *Stochastic dominance and portfolio analysis.* Journal of Financial Economics, 2 (1975), 205-229.

[2] Bawa, V. S.: *Optimal Rules for Ordering Uncertain Prospect.* Journal of Financial Economics, 2 (1975), 95-121.

[3] Datová knihovna Kenneth R. Frenche:
http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french.

[4] Hadar J., Russell W. R.: *Rules for ordering uncertain prospects.* American Economic Review, 59 (1969), 25-34.

[5] Hanoch G., Levy H.: *The efficiency analysis of choices involving risk.* Review of Economic Studies, 36 (1969), 335-346.

[6] Jakubcová, M.: *Míry efficience portfolia vzhledem k stochastické dominanci.* Diplomová práce, KPMS MFF UK, 2008.

[7] Kopa, M.: *Utility functions in portfolio optimization.* Dizertační práce, KPMS MFF UK, 2006.

[8] Kopa, M., Chovanec P.: *A Second-Order Stochastic Dominance Portfolio Efficiency Measure.* Kybernetika 44, 2 (2008), 243-258.

[9] Kopa, M., Post T.: *A portfolio optimality test based on the first-order stochastic dominance criterion.* Journal of Finantial and Quantitative Analysis, 4(5), (2009), 1103-1124.

[10] Kuosmanen, T.: *Efficient diversiffication according to stochastic dominance criteria.* Management Science, 50 (2004), 1390-1406.

[11] Lachout, P.: *Teorie pravděpodobnosti.* Karolinum, Praha, 2004.

[12] Levy, H., Hanoch, G.: *Relative Effectiveness of Efficiency Criteria for Portfolio Selection.* Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1 (1970), 63-76.

[13] Levy H.: *Stochastic dominance and expected utility: survey and analysis.* Management Science, 4 (1992), 555-587.

[14] Levy H.: *Stochastic dominance: Investment decision making under uncertainty.* Second edition. Springer Science, New York, 2006. ISBN 80-7378-001-1

[15] Markowitz, H. M.: *Portfolio Selection.* Journal of Finance, 7 (1952), 77-91.

[16] Markowitz, H. M.: *Portfolio Selection: Efficient Diversiffication in Investment.* Wiley, New York, 1959.

[17] Neumann J., Morgenstern,O.: *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton University Press, third edition, 1953.

[18] Ogryczak W., Ruszczynski A.: *Dual stochastic dominance and related mean-risk models.* SIAM Journal on Optimization, 13 (2002), 60-78.

[19] Pflug G. Ch.: *Some remarks on the value-at-risk and the conditional value-at-risk, Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications*(S. Uryasev ed.). Kluwer Academic Publishers, Netherlands, (2000), 272-281.

[20] Post T.: *Empirical tests for stochastic dominance efficiency.* Journal of Finance, 58 (2003), 1905-1932.

[21] Pratt J.W.: *Risk aversion in the small and in the large.* Econometrica, 32 (1964), 122–136.

[22] Rockafellar,R. T., Uryasev S.: *Optimization of conditional value-at-risk.* Journal of Risk, 2 (2000), 21-41.

[23] Rothschild M., Stiglitz J. E.: *Increasing risk I: A definition.* Journal of Economic Theory, 2 (1970), 225-243.

[24] Russell, W. R., Seo T. K.: *Representative sets for stochastic dominance rules.* In: Studies in the Economics of Uncertainty (T. B. Fomby and T. K. Seo, eds.), Springer-Verlag, New York, 1989, 59-76.

[25] Thistle,P.D.: *Negative moments, risk aversion, and stochastic dominance.* Journal of Financial and Quantitative Analysis, 2 (1993), 301-311.

[26] Whitmore, G. A.: *Third-Degree Stochastic Dominance. American Economic Review* 60 (1970), 457-459.

[27] Whitmore, G. A.: *Stochastic Dominance for the Class of Completely Monotonic Utility Functions.* In: Studies in the Economics of Uncertainty (T. B. Fomby and T. K. Seo, eds.), Springer-Verlag, New York, 1989, 77-88.

[28] GAMS 23.16, dostupný na: http://www.gams.com/.

[29] R 2.13.0 , dostupný na: http://cran.r-project.org/.

Příloha A

Obsah přiloženého DVD

Na přiloženém disku lze najít následující obsah:

- Text diplomové práce ve formátu PDF.
- Použitá data obsahující měsíční a roční nadvýnosy jednotlivých průmyslových odvětví jsou uložena v adresáři Data.
- Skripty k výpočtům v programech R a GAMS lze nalézt v adresáři Skripty.