

Posudek oponenta na diplomovou práci p. Lukáše Macha

“Extremal properties of hypergraphs”

Předložená práce je věnována metodě pro určení extrémální hustoty grafů a hypergrafů bez daných indukovaných pod(hyper)grafů pomocí tzv. *flag algeber*, které před několika lety definoval A. A. Razborov. Tato metoda si získala značnou pozornost a v minulých letech se s její pomocí podařilo dokázat výsledky, které zlepšují známé odhady pro několik klasických problémů extrémální kombinatoriky.

Práce je rozdělena do tří kapitol. První shrnuje základy teorie flag algeber, druhá pojednává o její aplikaci pro odhady Turánovy hustoty, třetí je věnována výsledku Babera a Talbota souvisejícímu s hypotézou P. Erdőse ohledně tzv. hypergrafových skoků.

Jak lze vytušit ze závěrečné části práce (str. 33), autor se pokoušel o zlepšení hustotních odhadů pro některé třídy hypergrafů (např. $\{K_4^-\}$), ale narazil na přílišnou výpočetní náročnost výsledných optimalizačních úloh. Patrně z tohoto důvodu jde o práci kompilačního typu bez vlastních výsledků. Autorovým přínosem je nicméně vlastní implementace generátoru příslušných úloh semidefinitního programování, a to i s použitím netriviálních optimalizačních postupů navržených Razborovem.

Podle mého názoru je škoda, že autor nevyužil příležitost pojmut kapitole 1 jako čtivý, přístupný úvod do teorie flag algeber, použitelný pro první seznámení s problematikou. Tato část je namísto toho povětšinou zkrácenou verzí úvodu Razborovova článku [10], včetně formulace v kontextu teorií prvního řádu, který je pro daný účel až příliš obecný. Důkazy jsou přepsány s minimálními modifikacemi (např. lemma 1.1.4, lemma 1.2.1 nebo věta 1.3.9). Pozitivní na druhou stranu je zahrnutí příkladů ilustrujících pojmy zavedené v kapitole 1 (i když např. na straně 13 by neškodil alespoň stručný komentář).

Při čtení práce jsem narazil na několik drobnějších nepřesností/nejasností:

- na straně 9 je definována flag algebra \mathcal{A}^σ , ale o násobení flagů se hovoří až o stránku dále,
- člen $O(n)$ v Mantelově větě (věta 2.1.2) se mi zdá přebytečný a nevyplývá ani z uvedeného důkazu,
- není mi zřejmé, proč se v příkladu na straně 25 označení 3 objevuje u dvou vrcholů každého flagu.

Prosím o zodpovězení následujících otázek v rámci obhajoby:

- jak se v důkazu věty 1.3.9 používá Čebyševova nerovnost a Borel–Cantelliho lemma?
- je možné formulovat důkaz Turánovy věty v řeči kapitoly 2.2?

Práce je psána dobrou angličtinou. Z formálního hlediska bych diplomantovi vytkl jen absenci odkazu na zdroj u důkazů Turánovy věty na straně 19.

Jak je zmíněno výše, autor se podle mého názoru až příliš držel původních zdrojů a nepokusil se o vlastní samostatný výklad; z tohoto důvodu jsem u hodnocení váhal mezi stupni výborně a velmi dobře. Vzhledem k obtížnosti tématu a k tomu, že diplomant prokázal své detailní porozumění vytvořením funkční implementace popisované metody, jsem se rozhodl pro lepší z obou stupňů. **Doporučuji práci k obhajobě a navrhuji její ohodnocení stupněm výborně.**



V Plzni dne 2. září 2011.

Doc. RNDr. Tomáš Kaiser, Ph.D.
Katedra matematiky
Západočeská univerzita v Plzni