Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Aleš Holub

Zobecněné limity afinních funkcí

Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jiří Spurný Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Matematická analýza

Praha 2011

Děkuji doc. RNDr. Jiřímu Spurnému, Ph.D. za cenné rady a připomínky, které mi poskytl při vytváření této práce.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 8. prosince 2011 Aleš Holub

Název práce: Zobecněné limity afinních funkcí

Autor: Aleš Holub

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jiří Spurný Ph.D.

Abstrakt: V předložené práci je sestrojen koanalytický filtr na množině konečných posloupností přirozených čísel, který umožňuje získat silně afinní funkci libovolné borelovské třídy z kompaktní konvexní podmnožiny lokálně konvexního prostoru pomocí jediného limitního procesu (podle tohoto filtru) aplikovaného na spočetný systém spojitých afinních funkcí. A naopak se ukáže, že výsledek tohoto limitního procesu je pak právě borelovská silně afinní funkce. Dále se tento postup zobecní pomocí metody metrizovatelné redukce pro baireovské funkce v nemetrizovatelných prostorech. Poslední kapitola obsahuje výsledek o generování bianalytických funkcí v separabilních metrizovatelných prostorech opět pomocí limitního procesu ze spočetného systému spojitých funkcí.

Klíčová slova: silně afinní funkce, koanalytický filtr, bianalytické funkce

Title: Generalized limits of affine functions

Author: Aleš Holub

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: doc. RNDr. Jiří Spurný Ph.D.

Abstract: We construct a co-analytic filter on the set of finite sequences of natural numbers, which allows us to obtain a strongly affine function of arbitrary Borel class from compact convex subset of locally convex space through single limit process (by this filter) applied to countable system of affine continuous functions. Conversely we show that function obtainted as result of such process is necessarily Borel and strongly affine. Further we generalize this method using metrizable reduction approach for Baire functions on non-metrizable spaces. Last chapter covers similar result for bi-analytic functions on separable metrizable spaces.

Keywords: strongly affine functions, co-analytic filter, bi-analytic functions

Obsah

Kapitola 1

Příprava

1.1 Použité symboly a značení

Symbol	Popis
X^*	duální prostor k prostoru X
$\mathbb{R}$	reálná čísla
$\mathbb{Q}$	racionální čísla
$\mathscr{C}(X)$	spojité funkce na prostoru X
$\mathcal{M}^1(K)$	pravděpodobnostní míry na množině K
$\mathcal{M}_x(K)$	pravděpodobnostní míry na K s těžištěm v bodě x
$\mathbf{B}(X)$	borelovská $\sigma-$algebra množin v X
$\mathbf{\Sigma}_1^1(X)$	analytické podmnožiny X
$\mathbf{\Pi}_1^1(X)$	koanalytické podmnožiny X
$\mathrm{graf}\, f$	graf funkce f
$\mathfrak{A}^c(X)$	spojité afinní funkce na X
$\mathfrak{A}(X)$	borelovské silně afinní funkce na X
ω	první spočetný ordinál
$\aleph_1$	první nespočetný ordinál
$\mathcal{S}$	spočetné posloupnosti prvků z ω
$\mathcal{N}$	nekonečné posloupnosti prvků z ω, tj. ω^ω
ORD	třída všech ordinálů
$\mathscr{P}(X)$	množina všech podmnožin X
$\overline{\mathrm{co}}\,(A)$	konvexní uzavřený obal množiny A
$\mathcal{B}_\alpha(X)$	baireovské funkce třídy α na X
$\|.\|_\infty$	supremová norma (na prostoru spojitých funkcí)
$\mathrm{Rng}(f)$	obor hodnot funkce f
G_δ	spočetný průnik otevřených množin
$\mathrm{dist}(x, A)$	vzdálenost bodu x od množiny A

1.2 Hahn–Banachova věta

Pro vektorový prostor X budeme X^* označovat duální prostor k prostoru X, tj. prostor všech spojitých lineárních funkcionálů z X do $\mathbb{R}$.

Věta 1.1 (geometrická Hahn–Banachova věta)**.** *Nechť A, B jsou disjunktní neprázdné konvexní podmnožiny lokálně konvexního prostoru E.*

(a) Pokud A je otevřená, pak existuje $f \in E^*$ a $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$f(a) < c \leq f(b), \qquad a \in A, b \in B.$$

(b) Pokud A je kompaktní, B uzavřená, pak existuje $f \in E^*$ a $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ takové, že

$$f(a) < c_1 < c_2 < f(b), \qquad a \in A, b \in B.$$

Důkaz. [7], Theorem A.1 □

Formulujeme jednoduchý důsledek, který nám umožní provádět za splnění určitých předpokladů afinní selekci.

Důsledek 1.2. *Nechť K je kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního vektorového prostoru E a $A, B \subseteq K \times \mathbb{R}$ jsou konvexní, $A \cap B = \emptyset$ a splňují*

(a) A je neprázdná kompaktní a existuje $q \in \mathbb{R}$ takové, že $K \times \{q\} \subseteq A$,

(b) B je neprázdná uzavřená

(c) a pro všechna $(x, t) \in B$ platí $t > q$.

Potom existuje $f \in \mathfrak{A}^c(K)$, která splňuje

$$A \subseteq \{(x,t) \in K \times \mathbb{R} : f(x) > t\},$$
$$B \subseteq \{(x,t) \in K \times \mathbb{R} : f(x) < t\}.$$

Důkaz. Množiny A, B splňují předpoklady Hahn–Banachovy věty, tedy existuje $\psi \in (E \times \mathbb{R})^*$ a $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ takové, že $\psi(a) < c_1 < c_2 < \psi(b), a \in A, b \in B$. Protože $(E \times \mathbb{R})^* = E^* \times \mathbb{R}$, existují $g \in E^*$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\psi(x,t) = g(x) + \alpha t, (x,t) \in E \times \mathbb{R}.$$

Zvolme $y \in \pi(B)$, kde $\pi : E \times \mathbb{R} \to E$ je projekce na první souřadnici. Zvolme $t_2 \in \mathbb{R}$ tak, aby $(y, t_2) \in B$, potom $\psi(y, q) < c_1 < c_2 < \psi(y, t_2)$ a dostáváme, že $\alpha > 0$. Zvolme pevně $c \in (c_1, c_2)$ a položme $f(x) = \frac{c - g(x)}{\alpha}$. Pro pevné $(z, s) \in A$ pak platí

$$f(z) = \frac{c - g(z)}{\alpha} = \frac{c - \psi(z,s)}{\alpha} + s,$$

a protože víme, že $\psi(z, s) < c$ a $\alpha > 0$, máme $f(z) > s$ a

$$A \subseteq \{(x,t) \in K \times \mathbb{R} : f(x) > t\}.$$

Analogicky se ukáže, že $B \subseteq \{(x,t) \in K \times \mathbb{R} : f(x) < t\}$. □

1.3 Polospojité funkce

Pro X topologický prostor budeme prostor všech spojitých funkcí na X značit $\mathscr{C}(X)$.

Definice 1.3. Nechť X je topologický prostor. Řekneme, že funkce $f : X \to \mathbb{R}$ je zdola (resp. shora) polospojitá, pokud množina $\{x \in X : f(x) > c\}$ (resp. množina $\{x \in X : f(x) < c\}$) je otevřená pro všechna $c \in \mathbb{R}$.

Tvrzení 1.4 (ekvivalentní definice)**.** *Nechť X je topologický prostor. Potom funkce $f : X \to \mathbb{R}$ je zdola (resp. shora) polospojitá, právě když pro každou posloupnost $(x_i)_{i\in\omega}$ splňující $\lim_i x_i = x$ platí $f(x) \leq \liminf_i f(x_i)$ (resp. $f(x) \geq \limsup_i f(x_i)$).*

Tvrzení 1.5. *Nechť X je perfektně normální topologický prostor a $f : X \to [-1, 1]$ je funkce. Pak f je zdola (resp. shora) polospojitá, právě když existuje posloupnost $(f_n)_{n\in\omega} \subseteq \mathscr{C}(X)$ splňující $f_i(x) \leq f_{i+1}(x)$ (resp. $f_i(x) \geq f_{i+1}(x)$) pro $i \in \omega$ a $x \in X$ taková, že $f(x) = \lim_i f_i(x)$.*

Důkaz. [2], Problem 1.7.15. (c) □

Věta 1.6 (Michaelova selekční věta)**.** *Nechť X je normální topologický prostor a $f, g : X \to \mathbb{R}$ funkce takové, že f je shora polospojitá, g zdola polospojitá a splňují $f(x) \leq g(x), x \in X$. Potom existuje spojitá funkce $h : X \to \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $x \in X$ platí $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$.*

Důkaz. [2], Problem 1.7.12. (b) □

Tvrzení 1.7. *Nechť X je separabilní metrický prostor a $H \subseteq X \times \mathbb{R}$ je uzavřená a $G \subseteq X \times \mathbb{R}$ otevřená množina a splňují, že projekce na první souřadnici je celý prostor X, tj.*

$$(\forall x \in X)(\exists t \in \mathbb{R})((x, t) \in H),$$
$$(\forall x \in X)(\exists t \in \mathbb{R})((x, t) \in G),$$

a zároveň řezy množin G a H jsou shora omezené v $\mathbb{R}$, tj.

$$(\forall y \in X)(\exists s \in \mathbb{R} : s > 0)(\{r \in \mathbb{R} : (y, r) \in H\} \subseteq [-\infty, s]),$$
$$(\forall y \in X)(\exists s \in \mathbb{R} : s > 0)(\{r \in \mathbb{R} : (y, r) \in G\} \subseteq [-\infty, s]).$$

Potom funkce definovaná jako

$$h(x) = \sup \{t \in \mathbb{R} : (x, t) \in H\}, x \in X,$$

je shora polospojitá a funkce definovaná

$$g(x) = \sup \{t \in \mathbb{R} : (x, t) \in G\}, x \in X,$$

je zdola polospojitá.

Důkaz. Definice je korektní, neboť pro každé $x \in X$ se hledá supremum neprázdné množiny (nenabývá se hodnoty $-\infty$) a zároveň každý řez je shora omezený, tedy hledané supremum je konečné. Zvolme pevné $x \in X$ a libovolnou posloupnost $(x_n) \subseteq X$ konvergující k x.

Označme $k_n = h(x_n) = \sup \{t \in \mathbb{R} : (x_n, t) \in H\}$ a dále $k = \limsup_n k_n$, potom existuje vybraná podposloupnost (k_{n_j}) konvergující ke k. Z uzavřenosti H získáme, že $(x, k) \in H$ a platí

$$h(x) = \sup \{t \in \mathbb{R} : (x, t) \in H\} \geq k = \\ = \lim_j k_{n_j} = \limsup_n k_n = \limsup_n h(x_n),$$

čímž je první část tvrzení dokázána.

Označme $d_n = g(x_n) = \sup \{t \in \mathbb{R} : (x_n, t) \in G\}$. Zřejmě $(x_n, d_n) \notin G$ z otevřenosti G. Označme $d = \liminf_n d_n$, potom existuje vybraná podposloupnost (d_{n_j}) konvergující k d. Zřejmě $(x, d) \notin G$. Pokud by platilo $(x, d) \in G$, pak existuje otevřené okolí $U \subseteq X$ a $\varepsilon > 0$ tak, že $U \times (d - \varepsilon, d + \varepsilon) \subseteq G$. Tedy existuje $m \in \omega$ tak, že $(x_m, d_m) \in U \times (d - \varepsilon, d + \varepsilon)$, což je ale spor s definicí d_m. Máme tedy

$$g(x) = \sup \{t \in \mathbb{R} : (x, t) \in H\} \leq d = \\ = \lim_j d_{n_j} = \liminf_n d_n = \liminf_n g(x_n)$$

a dokázali jsme druhou část. □

Tvrzení 1.8. *Nechť X je separabilní metrický prostor a $f : X \to \mathbb{R}$ je shora polospojitá funkce. Potom množina $\{(x, t) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \geq t\}$ je uzavřená.*

Důkaz. Volme konvergentní posloupnost $(y_n, r_n) \subseteq \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \geq t\}$ a označme $(y, r) = \lim_{n\to\infty} (y_n, r_n)$. Z definice shora polospojité funkce máme

$$r = \lim_n r_n = \limsup_n r_n \leq \limsup_n f(y_n) \leq f(y),$$

a tedy $(y, r) \in \{(x, t) \in K \times \mathbb{R} : f(x) \geq t\}$. □

Tvrzení 1.9. *Nechť X je kompaktní metrizovatelný prostor a $f : X \to \mathbb{R}$ je zdola (resp. shora) polospojitá funkce. Potom f je zdola (resp. shora) omezená a nabývá na X svého infima (resp. suprema).*

Důkaz. [7], Proposition A.52. □

1.4 $\mathcal{M}^1(X)$

Pro X lokálně kompaktní $\sigma-$kompaktní prostor označíme $\mathcal{M}^1(X)$ množinu všech pravděpodobnostních Radonových měr na X. Následující definice a tvrzení jsou převzaty z [7], strany 12-14.

Nechť K je kompaktní konvexní množina v lokálně konvexním prostoru E. Bod $x \in K$ nazveme těžištěm míry $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$, pokud pro každou $f \in \mathfrak{A}^c(K)$ platí barycentrická formule $\int_K f d\mu = f(x)$. Těžiště míry $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ je určeno jednoznačně, označíme jej $r(\mu)$ a zobrazení $\mu \to r(\mu)$ je spojité z $\mathcal{M}^1(K)$ na K. Označme $\mathcal{M}_x(K) = \{\mu \in \mathcal{M}^1(K) : r(\mu) = x\}$.

Tvrzení 1.10. *Nechť X je kompaktní prostor a $f : X \to \mathbb{R}$ je zdola (resp. shora polospojitá). Potom $\mathcal{M}^1(X)$ je kompaktní konvexní množina a funkce*

$$\psi : \mathcal{M}^1(X) \to \mathbb{R}$$

definovaná $\psi(\mu) = \mu(f), \mu \in \mathcal{M}^1(X)$ je zdola (resp. shora polospojitá).

Důkaz. [7], Theorem A.85 (a),(b). □

Důsledek 1.11. *Nechť K je kompaktní konvexní prostor a $x \in K$. Potom $\mathcal{M}_x(K)$ je kompaktní.*

Důkaz. Platí $\mathcal{M}_x(K) = r^{-1}(x)$, kde r je spojité, tedy $\mathcal{M}_x(K)$ je uzavřená podmnožina kompaktu $\mathcal{M}^1(K)$. □

1.5 Deskriptivní teorie množin

Borelovskou hierarchii funkcí na metrizovatelném prostoru X zavedeme stejným způsobem jako v knize [5], kapitole 11. Soubor všech borelovských množin na X označíme $\mathbf{B}(X)$. Separabilní úplně metrizovatelný prostor budeme nazývat polský. Množinu $A \subseteq X$ nazveme analytickou a budeme značit $A \in \mathbf{\Sigma}_1^1(X)$, pokud existuje polský prostor Y a spojité zobrazení $f : Y \to X$ takové, že $f(Y) = A$. Dále řekneme, že A je analytická v separabilním metrickém prostoru W, pokud existuje polský prostor $Y \supseteq W$ a analytická $B \subseteq Y$ taková, že $A = B \cap W$. Množinu $B \subseteq W$ nazveme koanalytickou a budeme značit $B \in \mathbf{\Pi}_1^1(W)$, pokud $W \setminus B$ je analytická.

Nechť X je separabilní metrizovatelný prostor a $A \subseteq X$. Řekneme, že A je suslinovská, pokud existuje Suslinovo schéma uzavřených množin $(P_s)_{s\in\mathcal{S}}$ splňující $A = \bigcup_{\nu\in\mathcal{N}} \bigcap_{n\in\omega} P_{\nu|n}$. Množinu $C \subseteq X$ splňující, že $X \setminus C$ je suslinovská, budeme nazývat kosuslinovskou. Pokud A i $X \setminus A$ jsou analytické (resp. suslinovské) v X, potom řekneme, že A je bianalytická (resp. bisuslinovská) v X. Funkce $f : X \to \mathbb{R}$ je bianalytická (resp. bisuslinovská), pokud $f^{-1}(U)$ je bianalytická (resp. bisuslinovská) pro každou $U \subseteq \mathbb{R}$ otevřenou.

Pro úplnost uvedeme několik tvrzení o analytických a suslinovských množinách, které budeme dále bez odkazu používat.

Tvrzení 1.12. *Pokud Z je polský prostor. Pak $D \subseteq Z$ je suslinovská, právě když D je analytická.*

Důkaz. [5], Theorem 25.7. □

Pozorování 1.13. *Nechť X je metrizovatelný prostor a $A \subseteq X$ je suslinovská. Potom existuje Suslinovo schéma uzavřených množin $(P_s)_{s\in\mathcal{S}}$ splňující $P_s \supseteq P_t$ pro všechna $s \subseteq t$ a $A = \bigcup\limits_{\nu\in\mathcal{N}} \bigcap\limits_{n\in\omega} P_{\nu|n}$. Takové schéma budeme nazývat regulární.*

Důkaz. Nechť $(P'_s)_{s\in\mathcal{S}}$ je Suslinovo schéma uzavřených množin takové, že platí $A = \bigcup\limits_{\nu\in\mathcal{N}} \bigcap\limits_{n\in\omega} P'_{\nu|n}$. Položme $P_t = \bigcap\limits_{s\subseteq t} P'_s$. Z definice ověříme, že $(P_t)_{t\in\mathcal{S}}$ splňuje předpoklady. □

Tvrzení 1.14. *Nechť X je polský a $B \subseteq X$ je borelovská. Potom B je analytická.*

Důkaz. Plyne z Věty 13.7 v knize [5]. □

Tvrzení 1.15. *Nechť X je polský, $A \subseteq X$ je analytická i koanalytická. Potom A je borelovská.*

Důkaz. [5], Theorem 14.11. □

Nyní ukážeme jedno technické lemma, které později využijeme pro případ borelovských, resp. analytických množin.

Lemma 1.16. *Nechť X je polský prostor, $f : X \to \mathbb{R}$, $\mathcal{M}$ systém množin v $X \times \mathbb{R}$ a nechť množina $\{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \geq y\} \in \mathcal{M}$. Nechť $G \subseteq \mathbb{R}$ je otevřená množina, $\pi : X \times \mathbb{R} \to X$ je projekce na první souřadnici a $\mathcal{L}$ je systém množin v X splňující:*

(i) $\pi\left(M \cap (X \times (r, \infty))\right) \in \mathcal{L}, M \in \mathcal{M}, r \in \mathbb{R}$,

(ii) *$\mathcal{L}$ je uzavřený na spočetné průniky a sjednocení.*

Potom existují množiny $J_i, J'_i \in \mathcal{L}, i \in \omega$ takové, že

$$f^{-1}(G) = \bigcup_{i\in\omega} (J_i \cap (X \setminus J'_i)).$$

Důkaz. Zvolme $a_n, b_n, b_n^k \in \mathbb{Q}, n, k \in \omega$ splňující $a_n < b_n, b_n^k < b_n, b_n^k \nearrow b_n$ takové, že

$$\begin{aligned} G &= \bigcup_{n\in\omega} (a_n, b_n) = \bigcup_{n\in\omega} \left((a_n, \infty) \cap (-\infty, b_n)\right) = \\ &= \bigcup_{n\in\omega} \left((a_n, \infty) \cap \bigcup_{k\in\omega} (-\infty, b_n^k] \right) = \bigcup_{n\in\omega} \left((a_n, \infty) \cap \left(\mathbb{R} \setminus \bigcap_{k\in\omega} (b_n^k, \infty) \right) \right), \end{aligned}$$

tedy

$$f^{-1}(G) = \bigcup_{n\in\omega} \left(f^{-1}((a_n, \infty)) \cap \left(X \setminus \bigcap_{k\in\omega} f^{-1}\left((b_n^k, \infty)\right) \right) \right). \tag{1.1}$$

Současně pro $r \in \mathbb{R}$ je

$$f^{-1}(r,\infty) = \pi\left((X \times (r,\infty)) \cap \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \geq y\}\right) \in \mathcal{L}$$

díky podmínce (i). S využitím podmínky (ii) definujeme množiny

$$J_i = f^{-1}\left((a_i,\infty)\right),$$
$$J_i' = \bigcap_{k \in \omega} f^{-1}\left((b_i^k,\infty)\right),$$

které zřejmě splňují podmínky tvrzení. ☐

Dále budeme potřebovat tvrzení dávající do souvislosti kvalitu funkce a množin definovaných pomocí jejího grafu. Jedná se o jednoduché rozšíření Věty 14.12 z knihy [5]. Pro funkci $f : X \to \mathbb{R}$ označíme množinu

$$\operatorname{graf} f = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : f(x) = t\}.$$

Tvrzení 1.17. *Nechť X je polský prostor a $f : X \to \mathbb{R}$ funkce. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *f je borelovská,*

(ii) $\operatorname{graf} f$ *je borelovská množina,*

(iii) $\operatorname{graf} f$ *je analytická množina,*

(iv) *množiny $\{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : f(x) < y\}$ a $\{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : f(x) > y\}$ jsou borelovské,*

(v) *množiny $\{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : f(x) < y\}$ a $\{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : f(x) > y\}$ jsou koanalytické,*

(vi) *množina $\{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq y\}$ je borelovská.*

Důkaz. Implikace (ii) ⇒ (iii),(iv) ⇒ (v) a (iv) ⇒ (vi) jsou zřejmé. Z faktu

$$\operatorname{graf} f = X \times \mathbb{R} \setminus \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : f(x) < y \text{ nebo } f(x) > y\}$$

plyne (iv) ⇒ (ii) a (v) ⇒ (iii). Zbývá dokázat (i) ⇒ (iv), (iii) ⇒ (i) a (vi) ⇒ (i).

Nechť f je borelovská funkce. Potom

$$(a,b) \in \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : f(x) < y\} \Leftrightarrow (\exists q \in \mathbb{Q})\,(f(a) < q < b),$$

tedy

$$\begin{aligned}\{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : f(x) < y\} &= \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{x \in X : f(x) < q\} \times \{y \in \mathbb{R} : y > q\} \\ &= \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} f^{-1}\left((-\infty,q)\right) \times (q,\infty)\end{aligned}$$

a analogicky $\{(x,y)\in X\times\mathbb{R}: f(x)>y\} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} f^{-1}((q,\infty))\times(-\infty,q)$, což jsou borelovské množiny a máme (i) $\Rightarrow$ (iv).

Nechť $\operatorname{graf} f$ je analytická množina a označme $\pi: X\times\mathbb{R}\to X$ projekci na první souřadnici. Potom pro libovolnou otevřenou $G\subseteq\mathbb{R}$ platí

$$f^{-1}(G) = \pi((X\times G)\cap\operatorname{graf} f) = X\setminus\pi((X\times(\mathbb{R}\setminus G))\cap\operatorname{graf} f),$$

tedy vzor G je analytický a zároveň koanalytický, tudíž f je borelovská a dokázali jsme implikaci (iii) $\Rightarrow$ (i).

Zbývá (vi) $\Rightarrow$ (i). Pro zkrácení zápisu označme

$$P^f_{\leq} = \{(x,y)\in X\times\mathbb{R}: f(x)\leq y\},$$
$$P^f_{>} = \{(x,y)\in X\times\mathbb{R}: f(x)> y\}.$$

Potom pro $r\in\mathbb{R}$ platí

$$f^{-1}((r,\infty)) = \pi\left(P^f_{>}\cap(X\times(r,\infty))\right) = X\setminus\pi\left(P^f_{\leq}\cap(X\times(-\infty,r])\right),$$

což je evidentně borelovská množina. V Lemmatu 1.16 pak stačí vzít $\mathcal{M}=\mathbf{B}(X\times\mathbb{R})$ a $\mathcal{L}=\mathbf{B}(X)$ a dostaneme, že funkce f je borelovská. $\square$

V poslední kapitole budeme ještě potřebovat následující zobecnění předchozího tvrzení.

Tvrzení 1.18. *Nechť X je separabilní metrizovatelný prostor a $f: X\to\mathbb{R}$ funkce. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *f je bianalytická,*

(ii) *množiny $\{(x,y)\in X\times\mathbb{R}: f(x)<y\}$ a $\{(x,y)\in X\times\mathbb{R}: f(x)>y\}$ jsou koanalytické.*

Důkaz. Nechť f je bianalytická. Potom stejně jako v Tvrzení 1.17 dostáváme

$$\{(x,y)\in X\times\mathbb{R}: f(x)<y\} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} f^{-1}((-\infty,q))\times(q,\infty)$$

a analogicky

$$\{(x,y)\in X\times\mathbb{R}: f(x)>y\} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} f^{-1}((q,\infty))\times(-\infty,q)$$

s tím rozdílem, že nyní vidíme, že obě množiny jsou opravdu koanalytické.

Opačná implikace se ukáže opět podobně: Z (ii) vyplývá, že $\operatorname{graf} f$ je analytická množina, označíme $\pi: X\times\mathbb{R}\to X$ projekci $\pi((x,r))=x$. Potom pro libovolnou otevřenou $G\subseteq\mathbb{R}$ platí

$$f^{-1}(G) = \pi((X\times G)\cap\operatorname{graf} f) = X\setminus\pi((X\times(\mathbb{R}\setminus G))\cap\operatorname{graf} f),$$

tedy vzor G je analytický a zároveň jeho doplněk je analytický, tudíž f je bianalytická. $\square$

Podmnožinu $A \subseteq X$ polského prostoru nazveme univerzálně měřitelnou, pokud je $\mu-$měřitelná pro každou $\sigma-$konečnou úplnou borelovskou míru μ na X. Funkce $f : X \to \mathbb{R}$ je univerzálně měřitelná, pokud množina $f^{-1}(G)$ je univerzálně měřitelná pro každou $G \subseteq \mathbb{R}$ otevřenou.

Věta 1.19 (Lusin)**.** *Nechť X je polský prostor. Potom každá analytická $S \subseteq X$ je univerzálně měřitelná.*

Důkaz. [5] Theorem 21.10 □

Ještě ukážeme, že pouze polovina podmínky v z Tvrzení 1.17 stačí, abychom věděli, že funkce je univerzálně měřitelná.

Tvrzení 1.20. *Nechť X je polský prostor, $f : X \to \mathbb{R}$ funkce splňující, že množina $\{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : f(x) > y\}$ je koanalytická. Potom f je univerzálně měřitelná.*

Důkaz. Množina $\{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq y\}$ je analytická. Zvolme otevřenou množinu $G \subseteq \mathbb{R}$ a v Lemmatu 1.16 položme $\mathcal{M} = \mathbf{\Sigma}^1_1(X \times \mathbb{R})$ a $\mathcal{L} = \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$, které zřejmě splňují přepoklady. Dostáváme existenci univerzálně měřitelných množin $J_i, J_i' \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$ takových, že $f^{-1}(G) = \bigcup\limits_{i\in\omega} (J_i \cap (X \setminus J_i'))$, tudíž funkce f je univerzálně měřitelná. □

1.6 Afinní funkce

Definice 1.21. Nechť K je kompaktní konvexní množina v lokálně konvexním prostoru E, $f : K \to \mathbb{R}$ je funkce a nechť pro každé $x, y \in K$ a $\lambda \in (0, 1)$ platí

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Potom řekneme, že f je afinní funkce na K. Systém spojitých afinních funkcí na K označíme $\mathfrak{A}^c(K)$.

Definice 1.22. Nechť K je kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru E. Funkce $f : K \to \mathbb{R}$ splňuje barycentrickou formuli, pokud f je univerzálně měřitelná, $\mu(f)$ existuje pro každou $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ a $f(x) = \nu(f)$ pro každé $x \in K$ a $\nu \in \mathcal{M}_x(K)$. Systém borelovských silně afinních funkcí na K označíme $\mathfrak{A}(K)$.

Tvrzení 1.23. *Nechť K je kompaktní konvexní množina v lokálně konvexním prostoru E. Potom každá silně afinní funkce na K je omezená.*

Důkaz. [7], Lemma 4.5. □

1.7 $\mathcal{S}$ a $\mathcal{N}$

Následující značení je z velké části převzáno z knihy [5].

Definujme množinu konečných posloupností prvků z ω jako $\mathcal{S} = \bigcup_{n\in\omega} \omega^n$, kde $\omega^0 = \{\varnothing\}$ obsahuje prázdnou posloupnost. Potom prvek $s \in \omega^k \subseteq \mathcal{S}$ můžeme psát jako $s = (s(0), s(1), \ldots, s(k-1)) = (s_0, s_1, \ldots, s_{k-1})$, kde $s(i) = s_i \in \omega$. Délku konečné posloupnosti $s \in \mathcal{S}$ budeme značit $\operatorname{len}(s)$, posloupnosti délky 1 budeme zaměňovat s prvky ω, tj. místo (n) budeme občas psát n. Restrikci $s \in \mathcal{S}$ na délku $k \leq \operatorname{len}(s)$ označíme $s|k = (s_0, \ldots, s_{k-1})$, $s|0 = \varnothing$ a symbolem $s \subseteq t$ budeme pro $s, t \in \mathcal{S}, \operatorname{len}(s) \leq \operatorname{len}(t)$ značit fakt, že $t|\operatorname{len}(s) = s$. Dále pro $u \in \omega^k, v \in \omega^n$ je $u^\frown v \in \omega^{k+n}$ prvek splňující $(u^\frown v)(i) = u(i)$ pro $0 \leq i < k$ a $(u^\frown v)(j) = v(j-k)$ pro $k \leq j < k+n$. Pro $u, v \in \omega^k$ splňující pro všechna $0 \leq i < k$ vztah $u(i) \leq v(i)$ budeme zkráceně psát $u \leq v$. Pokud $u \leq v$ a $u \neq v$, napíšeme $u < v$.

Prostor nekonečných posloupností prvků z ω budeme značit $\mathcal{N} = \omega^\omega$ a budeme používat analogického značení jako výše.

Každou množinu $A \subseteq \mathcal{S}$ lze jednoznačně identifikovat s prvkem $a \in 2^{\mathcal{S}}$ následujícím způsobem: $(u \in A) \Leftrightarrow (a(u) = 1)$. Prostor $2^{\mathcal{S}}$ opatřený součinovou topologií je metrizovatelný kompaktní (a tedy polský) a pokud pro množiny $T_0, T_1 \subseteq \mathcal{S}$ splňující $T_0 \cap T_1 = \varnothing$ označíme

$$U_{T_0,T_1} = \left\{\rho \in 2^{\mathcal{S}} : (\forall t \in T_0)(\rho(t) = 0)\ \&\ (\forall v \in T_1)(\rho(v) = 1)\right\}, \qquad (1.2)$$

pak systém množin

$$\{U_{A,B} : A, B \subseteq \mathcal{S} \text{ konečné}, A \cap B = \varnothing\}$$

tvoří spočetnou obojetnou bázi prostoru $2^{\mathcal{S}}$.

Analogicky množinu všech zobrazení $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ můžeme jednoznačně ztotožnit s prostorem $\mathcal{S}^{\mathcal{S}}$. Tento prostor je zřejmě polský se součinovou topologií: soubor množin tvaru $\left\{f \in \mathcal{S}^{\mathcal{S}} : f(s) = t\right\}$ a $\left\{f \in \mathcal{S}^{\mathcal{S}} : f(s) \neq t\right\}$ pro $s, t \in \mathcal{S}$ tvoří spočetnou subbázi otevřených množin.

Řekneme, že podmnožina $T \subseteq \mathcal{S}$ je strom, pokud pro každé $u \in T$ platí $u|k \in T$ pro $0 \leq k \leq \operatorname{len}(u)$.

1.8 Limity podle filtru

Definice 1.24. Nechť A je libovolná množina. Systém $\mathscr{F}$ podmnožin A nazveme filtr, pokud jsou splněny následující podmínky:

(i) $A \in \mathscr{F}$.

(ii) Pokud $C, D \in \mathscr{F}$, pak $C \cap D \in \mathscr{F}$.

(iii) Pokud $C \in \mathscr{F}$ a $C \subseteq D$, pak i $D \in \mathscr{F}$.

Nechť $\mathscr{F}$ je filtr na $\mathcal{S}$ a X libovolná množina, dále nechť $(A_u)_{u\in\mathcal{S}}$ je posloupnost množin v X a $(f_u)_{u\in\mathcal{S}}$ posloupnost funkcí z X do $\mathbb{R}$. Potom definujeme

$$\begin{aligned}
\liminf_{\mathscr{F}} A_u &= \bigcup_{F\in\mathscr{F}} \bigcap_{u\in F} A_u,\\
\limsup_{\mathscr{F}} A_u &= X \setminus \liminf_{\mathscr{F}} (X\setminus A_u),\\
\liminf_{\mathscr{F}} f_u(x) &= \sup_{F\in\mathscr{F}} \inf_{u\in F} f_u(x),\\
\limsup_{\mathscr{F}} f_u(x) &= -\liminf_{\mathscr{F}} (-f_u(x)).
\end{aligned}$$

Pokud se obě limity rovnají, pak definujeme

$$\begin{aligned}
\lim_{\mathscr{F}} A_u &= \liminf_{\mathscr{F}} A_u = \limsup_{\mathscr{F}} A_u,\\
\lim_{\mathscr{F}} f_u(x) &= \liminf_{\mathscr{F}} f_u(x) = \limsup_{\mathscr{F}} f_u(x).
\end{aligned}$$

Občas budeme využivat i alternativní definice pojmu limes inferior.

Tvrzení 1.25. *Nechť $\mathscr{F}, X, (A_u)_{u\in\mathcal{S}}$ a $(f_u)_{u\in\mathcal{S}}$ jako výše. Potom platí*

$$\begin{aligned}
\liminf_{\mathscr{F}} A_u &= \{x\in X : \{u\in\mathcal{S} : x\in A_u\}\in\mathscr{F}\},\\
\liminf_{\mathscr{F}} f_u(x) > c &\Rightarrow \{u\in\mathcal{S} : f_u(x)>c\}\in\mathscr{F}, \quad x\in X.
\end{aligned}$$

Důkaz. První rovnost plyne přímo z

$$x\in\liminf_{\mathscr{F}} A_u \Leftrightarrow (\exists F\in\mathscr{F})(\forall u\in F)(x\in A_u).$$

Druhé tvrzení ukážeme následovně; pro libovolné $x\in X$ platí

$$\begin{aligned}
\liminf_{\mathscr{F}} f_u(x) > c \Rightarrow \sup_{F\in\mathscr{F}} \inf_{u\in F} f_u(x) > c \Rightarrow (\exists F\in\mathscr{F})(\forall u\in F)(f_u(x)>c) \Rightarrow\\
\Rightarrow \{u\in\mathcal{S} : f_u(x)>c\}\in\mathscr{F}.
\end{aligned}$$

□

Díky následujícímu tvrzení nám bude stačit dokazovat některá tvrzení o vlastnostech limes inferior podle filtru pouze pro případ množin. Pro případ funkcí pak dostaneme požadovaná tvrzení díky korespondenci mezi funkcí a jejím grafem.

Tvrzení 1.26. *Nechť $f_u : X\to\mathbb{R}, u\in\mathcal{S}$ jsou funkce, $\mathscr{F}$ filtr na $\mathcal{S}$. Potom platí*

$$\liminf_{\mathscr{F}} f_u(x) = \sup \liminf_{\mathscr{F}} \{t\in\mathbb{R} : f_u(x)\geq t\}.$$

Důkaz. Pro libovolnou funkci $g : X \to \mathbb{R}$ zřejmě platí

$$g(x) = \sup \{t \in \mathbb{R} : g(x) \geq t\} .$$

Dále máme pro dané $x \in X$

$$r \in \liminf_{\mathscr{F}} \{t \in \mathbb{R} : f_u(x) \geq t\} \Leftrightarrow (\exists F \in \mathscr{F})(\forall u \in F)(f_u(x) \geq r) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sup_{F \in \mathscr{F}} \inf_{u \in F} f_u(x) \geq r \Leftrightarrow \liminf_{\mathscr{F}} f_u(x) \geq r \Leftrightarrow r \in \Big\{(t \in \mathbb{R} : \liminf_{\mathscr{F}} f_u(x) \geq t\Big\} .$$

Dohromady pak dostáváme

$$\begin{aligned} \liminf_{\mathscr{F}} f_u(x) = \sup \Big\{t \in \mathbb{R} : \liminf_{\mathscr{F}} f_u(x) \geq t\Big\} = \\ = \sup \liminf_{\mathscr{F}} \{t \in \mathbb{R} : f_u(x) \geq t\} . \end{aligned}$$

□

1.9 Koanalytický rank a věta o omezenosti

Tato část je převzata z knihy [5], kapitoly 34 a 35.

Definice 1.27. Nechť X je polský prostor a $A \subseteq X$. Řekneme, že zobrazení

$$\varphi : A \to ORD,$$

kde ORD označuje třídu všech ordinálů, je koanalytický rank, pokud jsou existují relace $\leq_{\varphi}^{\Sigma_1^1} \in \mathbf{\Sigma}_1^1(X \times X)$ a $\leq_{\varphi}^{\Pi_1^1} \in \mathbf{\Pi}_1^1(X \times X)$ tak, že pro $x, y \in A$ platí:

$$\begin{aligned} \varphi(x) \leq \varphi(y) &\Leftrightarrow x \leq_{\varphi}^{\Sigma_1^1} y \\ &\Leftrightarrow x \leq_{\varphi}^{\Pi_1^1} y \end{aligned}$$

Řekneme, že φ je regulární, pokud $\varphi(A)$ je ordinál, tj. existuje ordinál ξ tak, že $\varphi(A) = \{\lambda : \lambda < \xi\}$.

Věta 1.28 (o omezenosti koanalytického ranku)**.** *Nechť X je polský prostor, množina $A \subseteq X$ je koanalytická, $\varphi : A \to \aleph_1$ je regulární koanalytický rank a splňuje $\varphi(A) = \aleph_1$. Potom pro $B \subseteq A$ analytickou platí* $\sup \{\varphi(x) : x \in B\} < \aleph_1$.

Důkaz. [5], Theorem 35.23. □

Kapitola 2

Filtr $G\mathcal{N}$

V této kapitole budeme definovat objekt, který je základem této práce. Filtr $G\mathcal{N}$ definujeme jako soubor množin, pro které bude mít hráč I vítěznou strategii v námi definované hře. Tento způsob definice s sebou poté přinese elegantní způsob důkazu některých tvrzení pomocí teorie her. Následně dokážeme vlastnosti filtru $G\mathcal{N}$, které budeme později potřebovat.

2.1 Hra $J(A)$

Nechť $A \subseteq \mathcal{S}$. Nekonečnou hru $J(A)$ definujeme následovně: Hráči I a II volí střídavě celá nezáporná čísla $m_0, n_0, m_1, n_1, \ldots$ tak, aby splnili podmínku $n_i \geq m_i$. Hráč I zvítězí ve hře $J(A)$, pokud existuje $k \in \omega$ takové, že pro každé $u \in \mathcal{S}$ je posloupnost $(n_0, n_1, \ldots, n_{k-1})^\frown u \in A$.

Označme

$$A_\spadesuit = \left\{u \in \mathcal{S} : (\forall v \in \mathcal{S})(u^\frown v \in A)\right\},$$
$$A_\heartsuit = \{u \in \mathcal{S} : (u \in A_\spadesuit) \,\&\, ((\forall k \in \mathbb{N})(k < \mathrm{len}(u))(u|k \notin A_\spadesuit))\}.$$

Zřejmě platí $A_\heartsuit \subseteq A_\spadesuit \subseteq A$.

Pro $A \subseteq \mathcal{S}$ definujme množinu $\tilde{A} \subseteq \mathcal{N}$ vztahem

$$\tilde{A} = \{\nu \in \mathcal{N} : (\exists k \in \mathbb{N})(\nu|k \in A_\heartsuit)\}.$$

Protože $J(A)$ není nekonečná hra ve smyslu, jak ji definuje kniha [5], definujeme si pomocnou hru, která je s tou naší jistým způsobem ekvivalentní:

Nechť $B \subseteq \mathcal{N}$. Definujeme hru $K(B)$, ve které hráči I a II (jako ve hře $J(A)$) volí celá nezáporná $m_0, n_0, m_1, n_1, \ldots$ splňující $n_i \geq m_i$. Hráč I vyhrává hru $K(B)$, pokud $(n_0, n_1, \ldots) \in B$.

Pokud jsou $m_i, n_i \in \omega$ tahy hráčů I a II ve hře $J(A)$, resp. $K(B)$, označme

$$M = M_\infty = (m_0, m_1, \ldots),$$
$$N = N_\infty = (n_0, n_1, \ldots),$$

a pro $k \in \omega$ buď $M_k = M|(k+1) = (m_0, \ldots, m_k), N_k = N|(k+1) = (n_0, \ldots, n_k)$.

Strategii můžeme chápat jako zobrazení $\lambda : \mathcal{S} \to \omega$ splňující pro $u \subseteq v \in \mathcal{S}$ vztah $\lambda(u) \subseteq \lambda(v)$. Strategie pro hráče I v našich hrách je tedy zobrazení λ_I takové, že $\lambda_I(\varnothing) = m_0$ a $\lambda_I(N_k) = m_{k+1}$ a strategie pro hráče II zobrazení λ_{II}, kde $\lambda_{II}(M_k) = n_k \geq m_k$. Vítězná strategie hráče I (resp. II) je strategie taková, že hráč I (resp. II) vyhrává libovolnou partii sehranou podle této strategie.

Další reprezentací pojmu strategie ve hře $J(A)$ je zobrazení $\rho : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, které splňuje $f(s) \subseteq f(t)$ pro všechna $s \subseteq t \in \mathcal{S}$ a $\operatorname{len}(f(s)) = k_s \in \omega$, kde $k_s = \operatorname{len}(s) + 1$, pokud je to strategie hráče I a $k_s = \operatorname{len}(s)$ v případě strategie hráče II. Samozřejmě strategie hráče II musí také splňovat základní podmínku hry a to $f(s) \geq s$. Označme $\mathcal{P}_I \subseteq \mathcal{S}^{\mathcal{S}}$ množinu všech strategií hráče I a $\mathcal{P}_{II} \subseteq \mathcal{S}^{\mathcal{S}}$ budou všechny strategie hráče II, tj.

$$\mathcal{P}_I = \Big\{ f \in \mathcal{S}^{\mathcal{S}} : (\forall s \in \mathcal{S}) \Big(\Big(\operatorname{len}(f(s)) = \operatorname{len}(s) + 1 \Big) \ \& \\ \Big((\forall t \subseteq s) \big(f(t) \subseteq f(s) \big) \Big) \Big) \Big\} \tag{2.1}$$

$$\mathcal{P}_{II} = \Big\{ f \in \mathcal{S}^{\mathcal{S}} : (\forall s \in \mathcal{S}) \Big(\Big(\operatorname{len}(f(s)) = \operatorname{len}(s) \Big) \ \& \\ \Big(\forall 0 \leq i < \operatorname{len}(s) \Big) \Big([f(s)](i) \geq s(i) \Big) \ \& \ \Big((\forall t \subseteq s) \big(f(t) \subseteq f(s) \big) \Big) \Big) \Big\} \tag{2.2}$$

Toto značení budeme dále používat.

Tvrzení 2.1. *Nechť $A \subseteq \mathcal{S}$. Pokud hráč I, resp. hráč II, má vítěznou strategii ve hře $K(\tilde{A})$, potom má hráč I, resp. hráč II, vítěznou strategii i ve hře $J(A)$.*

Důkaz. Předpokládejme, že hráč I má vítěznou strategii φ ve hře $K(\tilde{A})$. Mějme libovolnou partii hry $J(A)$ a $m_i, n_i, i \in \omega$ nechť jsou tahy obou hráčů. Předpokládejme, že hráč I použil strategii φ; potom víme, že $N \in \tilde{A}$. Z definice množiny $\tilde{A}$ dostáváme, že $N \in \tilde{A}$ tehdy a jen tehdy, pokud existuje $k \in \omega$ takové, že $N_k \in A_\heartsuit$. Ale $A_\heartsuit \subseteq A_\spadesuit$ a definice $A_\spadesuit$ nám dává, že $N_k \in A_\spadesuit$ právě tehdy, pokud pro všechna $u \in \mathcal{S}$ platí $N_k{}^\frown u \in A$. To ale neznamená nic jiného než to, že φ je vyhrávající strategie i ve hře $J(A)$.

Analogicky předpokládejme, že hráč II má víteznou strategii ψ ve hře $K(\tilde{A})$. Nechť $m_i, n_i, i \in \omega$ je libovolná partie hry $J(A)$ a hráč II hraje podle strategie ψ. Pak $N \notin \tilde{A}$, protože ψ je vyhrávající ve hře $K(\tilde{A})$. Ale

$$N \notin \tilde{A} \Leftrightarrow (\forall k \in \omega)(N_k \notin A_\heartsuit \subseteq A_\spadesuit) \Leftrightarrow (\forall k \in \omega)(\exists v \in \mathcal{S})(N_k{}^\frown v \notin A),$$

a strategie ψ použitá ve hře $J(A)$ je vyhrávající. $\square$

Tvrzení 2.2. *Nechť $A \subseteq \mathcal{S}$. Potom hra $K(\tilde{A})$ je determinovaná.*

Důkaz. Předpokládejme, že hráč II nemá vítěznou strategii ve hře $K(\tilde{A})$. Řekneme, že pozice $(m_0, n_0, \ldots, n_{i-1}, m_i)$ je neprohrávající pro hráče II, pokud existuje $n_i \geq m_i$ takové, že hráč I nemá vítěznou strategii ve hře se začátkem $(m_0, n_0, \ldots, m_i, n_i)$. Potom řekneme, že n_i je neprohrávající tah hráče II. To také znamená, že pokud pozice $(m_0, n_0, \ldots, m_i)$ je neprohrávající pro hráče II a hráč II volí neprohrávající tah n_i, pak i pozice $(m_0, n_0, \ldots, m_i, n_i, m_{i+1})$ je neprohrávající pro hráče II pro každé m_{i+1}.

Nyní zkonstruujeme vyhrávající strategii λ pro hráče II. Zřejmě pozice (m_0) je neprohrávající pro hráče II díky předpokladu, že hráč I nemá vítěznou strategii. Existuje tedy neprohrávající tah n_0, položme $\lambda(m_0) = n_0$. Nechť pozice $(m_0, n_0, \ldots, m_i)$ je neprohrávající pozice pro hráče II, potom existuje n_i neprohrávající tah, položme $\lambda(m_0, n_0, \ldots, m_i) = n_i$.

Pro spor předpokládejme, že λ není vítězná strategie. Nechť $(n_i)_{i\in\omega}$ jsou tahy hráče II zahrané podle této strategie tak, že $N = (n_0, n_1, \ldots) \in \tilde{A}$. Tudíž existuje $k \in \omega$ splňující $N|k \in A_\heartsuit \subseteq A$. To ale znamená, že n_{k+1} není neprohrávající tah hráče II, což je spor. $\square$

Důsledek 2.3. *Hra $J(A)$ je determinovaná pro každé $A \subseteq \mathcal{S}$.*

Důkaz. Plyne přímo z Tvrzení 2.1 a Tvrzení 2.2. $\square$

Pozorování 2.4. *Nechť $A \subseteq \mathcal{S}$ a $\lambda : \mathcal{S} \to \omega$ je vítězná strategie hráče I ve hře $J(A)$. Nechť $\rho : \mathcal{S} \to \omega$ a $\rho(u) \geq \lambda(u)$ pro všechna $u \in \mathcal{S}$. Potom i ρ je vítězná strategie hráče I ve hře $J(A)$.*

Tvrzení 2.5. *Nechť $\mathcal{P}_I$ a $\mathcal{P}_{II}$ jsou definovány vztahy* (2.1) *a* (2.2). *Potom $\mathcal{P}_I$ a $\mathcal{P}_{II}$ jsou G_δ množiny v $\mathcal{S}^\mathcal{S}$.*

Důkaz. Zobrazení $f \in \mathcal{P}_I$, pokud splňuje následující podmínky:

(i) $(\forall s \in \mathcal{S})\,(\mathrm{len}(f(s)) = \mathrm{len}(s) + 1)$,

(ii) $(\forall t \in \mathcal{S})(\forall u \in \mathcal{S})(t \subseteq u \Rightarrow f(t) \subseteq f(u))$.

Podmínky upravíme do následujícího tvaru

(i) $(\forall s \in \mathcal{S})(\forall t \in \mathcal{S} : \mathrm{len}(t) \neq \mathrm{len}(s) + 1)\,(f(s) \neq t)$,

(ii) $(\forall t \in \mathcal{S})(\forall u \in \mathcal{S})((t \subseteq u \;\&\; f(t) \subseteq f(u))$ nebo $(t \nsubseteq u))$.

a dostáváme

$$\mathcal{P}_I = \left(\bigcap_{s\in\mathcal{S}} \bigcap_{\substack{t\in\mathcal{S} \\ \mathrm{len}(t)\neq\mathrm{len}(s)+1}} \left\{ f \in \mathcal{S}^\mathcal{S} : f(s) \neq t \right\} \right) \cap$$
$$\cap \left(\bigcap_{t\in\mathcal{S}} \bigcap_{u\in\mathcal{S}} \left\{ f \in \mathcal{S}^\mathcal{S} : (t \subseteq u \;\&\; f(t) \subseteq f(u)) \text{ nebo } t \nsubseteq u \right\} \right),$$

tedy $\mathcal{P}_I$ je G_δ v $\mathcal{S}^\mathcal{S}$.

Analogicky $f \in \mathcal{P}_{II}$, pokud

(i) $(\forall s \in \mathcal{S})(\forall t \in \mathcal{S} : \operatorname{len}(t) \neq \operatorname{len}(s))\,(f(s) \neq t)\,,$

(ii) $(\forall t \in \mathcal{S})(\forall u \in \mathcal{S})\,((t \subseteq u \;\&\; f(t) \subseteq f(u))$ nebo $(t \nsubseteq u))\,,$

(iii) $(\forall v \in \mathcal{S})(\exists w \in \mathcal{S} : v \leq w)(f(v) = w)$.

Dohromady dostáváme

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{II} = &\left(\bigcap_{s \in \mathcal{S}} \bigcap_{\substack{t \in \mathcal{S} \\ \operatorname{len}(t) \neq \operatorname{len}(s)}} \left\{f \in \mathcal{S}^{\mathcal{S}} : f(s) \neq t\right\}\right) \cap \\ &\cap \left(\bigcap_{t \in \mathcal{S}} \bigcap_{u \in \mathcal{S}} \left\{f \in \mathcal{S}^{\mathcal{S}} : (t \subseteq u \;\&\; f(t) \subseteq f(u)) \text{ nebo } t \nsubseteq u\right\}\right) \cap \\ &\cap \left(\bigcap_{v \in \mathcal{S}} \bigcup_{\substack{w \in \mathcal{S} \\ v \leq w}} \left\{f \in \mathcal{S}^{\mathcal{S}} : f(v) = w\right\}\right),\end{aligned}$$

kde všechny tři množiny v závorkách jsou G_δ, tedy i $\mathcal{P}_{II}$ je G_δ v $\mathcal{S}^{\mathcal{S}}$. $\square$

2.2 Derivace d, rank h

Definice 2.6. Nechť $C \subseteq \mathcal{S}$. Derivaci $d(C)$ definujeme jako

$$d(C) = \left\{u \in C : \left\{n \in \omega : u^\frown n \in C\right\} \text{ je nekonečná}\right\}$$

a dále transfinitní rekurzí

$$\begin{aligned} d_1(C) &= C, \\ d_{\xi+1}(C) &= d(d_\xi(C))\,, \\ d_\lambda(C) &= \bigcap_{\eta < \lambda} d_\eta(C)\,, \text{pokud } \lambda \text{ je limitní,} \\ d_\infty(C) &= d_{\aleph_1}(C)\,. \end{aligned}$$

Pro $A \subseteq \mathcal{S}$ označíme $\widehat{A} = \left\{u \in \mathcal{S} : \exists v \in \mathcal{S}, u^\frown v \notin A\right\}$ strom všech počátečních úseků prvků z $\mathcal{S} \setminus A$ a definujeme

$$h(A) = \sup\left\{\xi < \aleph_1 : \varnothing \in d_\xi\left(\widehat{A}\right)\right\}$$

a v případě $\varnothing \notin \widehat{A}$ dodefinujeme $h(A) = 0$.

Následující tvrzení shrnuje několik jednoduchých základních vlastností d a h. Většina z nich plyne dosazením přímo z definice. Pro $A \subseteq \mathcal{S}$ a $n \in \omega$ budeme občas používat značení $A_{(n)} = \left\{u \in \mathcal{S} : n^\frown u \in A\right\}$ pro množinu všech pokračování (n) v A.

Tvrzení 2.7 (vlastnosti derivace d a funkce h). *Nechť* $A, B \subseteq \mathcal{S}$. *Potom*

(i) $A \subseteq B \Rightarrow d_\xi(A) \subseteq d_\xi(B)\,, \xi \leq \aleph_1$,

(ii) $A \subseteq B \Rightarrow h(A) \geq h(B)$,

(iii) $C = A \cap B \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{A} \cup \widehat{B}$,

(iv) $d_\xi(A \cup B) = d_\xi(A) \cup d_\xi(B)\,, \xi \leq \aleph_1$,

(v) $h(A \cap B) = \max(h(A)\,, h(B))$,

(vi) *pro* $0 < \xi < \aleph_1$ *platí* $h(A) \leq \xi \Leftrightarrow (\exists n_0 \in \omega)(\forall n \geq n_0)\left(h\big(A_{(n)}\big) < \xi\right)$,

(vii) *pro* $0 < \lambda < \aleph_1$ *platí*

$$h(A) \geq \lambda \Leftrightarrow (\forall \xi < \lambda)(\forall n_0 \in \omega)(\exists n \geq n_0)\left(h\big(A_{(n)}\big) \geq \xi\right).$$

Důkaz. Bod (i) je zřejmý pro $\xi = 1$, pro zbytek stačí použít transfinitní indukci.

Bod (ii) plyne okamžitě z bodu (i):

$$A \subseteq B \Rightarrow \widehat{A} \supseteq \widehat{B} \Rightarrow (\forall \xi < \aleph_1)\left(d_\xi\Big(\widehat{A}\Big) \supseteq d_\xi\Big(\widehat{B}\Big)\right) \Rightarrow h(A) \geq h(B)\,.$$

Dále

$$\begin{aligned} u \in \widehat{C} &\Leftrightarrow (\exists v \in \mathcal{S} : u^\frown v \notin C) \Leftrightarrow (\exists v \in \mathcal{S} : u^\frown v \notin A \text{ nebo } u^\frown v \notin B) \\ &\Leftrightarrow u \in \widehat{A} \cup \widehat{B} \end{aligned}$$

a máme tvrzení (iii).

Platí

$$\begin{aligned} u \in d(A \cup B) &\Leftrightarrow \big\{n : u^\frown n \in A \cup B\big\} \text{ je nekonečná} \Leftrightarrow \\ &\big\{n : u^\frown n \in A\big\} \text{ je nekonečná nebo } \big\{n : u^\frown n \in B\big\} \text{ je nekonečná} \Leftrightarrow \\ &\qquad u \in d(A) \cup d(B)\,. \end{aligned}$$

Nechť $\xi \leq \aleph_1$, předpokládejme platnost tvrzení pro všechna $\lambda < \xi$. Pro ξ izolovaný ordinál potom máme

$$\begin{aligned} d_\xi(A \cup B) = d(d_{\xi-1}(A \cup B)) &= d(d_{\xi-1}(A) \cup d_{\xi-1}(B)) = \\ &d(d_{\xi-1}(A)) \cup d(d_{\xi-1}(B)) = d_\xi(A) \cup d_\xi(B)\,. \end{aligned}$$

Pro ξ limitní platí

$$d_\xi(A \cup B) = \bigcap_{\eta<\xi} (d_\eta(A \cup B)) = \bigcap_{\eta<\xi} (d_\eta(A) \cup d_\eta(B))\,. \tag{2.3}$$

Zvolme $u \in d_\xi(A \cup B)$ a předpokládejme, že existuje $\zeta < \xi$ takové, že $u \notin d_\zeta(A)$. Potom z definice derivace d a (2.3) vyplývá, že $u \in d_\mu(B)$ pro všechna $\zeta \leq \mu < \xi$.

Tedy $u \in \bigcap\limits_{\eta<\xi} d_\eta(A) \cup \bigcap\limits_{\eta<\xi} (d_\eta(B)$, opačná inkluze je zřejmá a transfinitní indukce nám tedy dává tvrzení (iv).

Bod (v) obdržíme s využitím předchozích bodů z

$$h(A \cap B) = \sup\left\{\xi < \aleph_1 : \varnothing \in d_\xi\left(\widehat{C}\right)\right\} = \sup\left\{\xi < \aleph_1 : \varnothing \in d_\xi\left(\widehat{A} \cup \widehat{B}\right)\right\} = \\ = \sup\left\{\xi < \aleph_1 : \varnothing \in d_\xi\left(\widehat{A}\right) \cup d_\xi\left(\widehat{B}\right)\right\} = \max(h(A)\,, h(B)).$$

Body (vi) a (vii) vyžadují nepatrně více práce. Pro $n \in \omega$ s použitím

$$\widehat{A_{(n)}} = \left\{u \in \mathcal{S} : \exists v \in \mathcal{S}, u^\frown v \notin A_{(n)}\right\} = \left\{u \in \mathcal{S} : \exists v \in \mathcal{S}, n^\frown u^\frown v \notin A\right\} = \\ = \left\{u \in \mathcal{S} : n^\frown u \in \widehat{A}\right\} = \widehat{A}_{(n)} \tag{2.4}$$

ukážeme, že

$$d\left(\widehat{A_{(n)}}\right) = \left\{u \in \widehat{A_{(n)}} : \left\{k \in \omega : u^\frown k \in \widehat{A_{(n)}}\right\} \text{je nekonečná}\right\} = \\ = \left\{u \in \mathcal{S} : n^\frown u \in \widehat{A} : \left\{k \in \omega : n^\frown u^\frown k \in \widehat{A}\right\} \text{je nekonečná}\right\} = \\ = \left\{u \in \mathcal{S} : n^\frown u \in d\left(\widehat{A}\right)\right\} = d\left(\widehat{A}\right)_{(n)}.$$

Nechť $\zeta < \aleph_1$ je izolovaný ordinál. Potom

$$d_\zeta\left(\widehat{A_{(n)}}\right) = d\left(d_{\zeta-1}\left(\widehat{A_{(n)}}\right)\right) = d\left(d_{\zeta-1}\left(\widehat{A}\right)_{(n)}\right) = d\left(d_{\zeta-1}\left(\widehat{A}\right)\right)_{(n)} = \\ = d_\zeta\left(\widehat{A}\right)_{(n)}.$$

Pro $\zeta < \aleph_1$ limitní pak dostáváme

$$d_\zeta\left(\widehat{A_{(n)}}\right) = \bigcap_{\lambda<\zeta} d_\lambda\left(\widehat{A_{(n)}}\right) = \bigcap_{\lambda<\zeta}\left(d_\lambda\left(\widehat{A}\right)_{(n)}\right) = \left(\bigcap_{\lambda<\zeta} d_\lambda\left(\widehat{A}\right)\right)_{(n)} = \\ = d_\zeta\left(\widehat{A}\right)_{(n)},$$

kde předposlední rovnost ověříme jednoduchým dosazením do definice $(.)_{(n)}$. Pro všechna $\xi < \aleph_1$ tedy máme

$$d_\xi\left(\widehat{A_{(n)}}\right) = \left\{u \in \mathcal{S} : n^\frown u \in d_\xi\left(\widehat{A}\right)\right\} = d_\xi\left(\widehat{A}\right)_{(n)} \tag{2.5}$$

a také

$$h(A) \le \xi \Leftrightarrow \varnothing \notin d_{\xi+1}\left(\widehat{A}\right) \Leftrightarrow (\exists n_0 \in \omega)(\forall n \ge n_0)\left(n \notin d_\xi\left(\widehat{A}\right)\right).$$

Potom pro každé $n \geq n_0$ z (2.5) obdržíme

$$n \notin d_\xi\left(\widehat{A}\right) \Leftrightarrow \varnothing \notin d_\xi\left(\widehat{A_{(n)}}\right) \Leftrightarrow h\big(A_{(n)}\big) < \xi$$

a dohromady získáme tvrzení (vi).

Nechť $\lambda < \aleph_1$, potom

$$h(A) \geq \lambda \Leftrightarrow \varnothing \in d_\lambda\left(\widehat{A}\right) \Leftrightarrow (\forall \delta < \lambda)(\forall n_0 \in \omega)(\exists n \geq n_0)\left(n \in d_\delta\left(\widehat{A}\right)\right).$$

Pro každé $\delta < \lambda$ a $n \geq n_0$ tedy z (2.5) obdržíme

$$n \in d_\delta\left(\widehat{A}\right) \Leftrightarrow \varnothing \in d_\delta\left(\widehat{A_{(n)}}\right) \Leftrightarrow h\big(A_{(n)}\big) \geq \delta,$$

a dohromady máme dokázán bod (vii). $\square$

2.3 Základní vlastnosti filtru $G\mathcal{N}$

Definice 2.8. $G\mathcal{N} = \{A \subseteq \mathcal{S} :$ hráč I má vyhrávající strategii ve hře $J(A)\}$.

Tvrzení 2.9. *Systém $G\mathcal{N}$ je filtr na $\mathcal{S}$ a $G\mathcal{N} \in \mathbf{\Pi}^1_1\big(2^{\mathcal{S}}\big)$.*

Důkaz. Zřejmě $\mathcal{S} \in G\mathcal{N}$. Nechť $A \subseteq B \subseteq \mathcal{S}$. Pokud hráč I má vítěznou strategii ve hře $J(A)$, ta samá strategie je vítězná i ve hře $J(B)$, tedy $A \in G\mathcal{N}$ zaručuje $B \in G\mathcal{N}$. Pokud $A, B \in G\mathcal{N}$ a ρ_A, ρ_B jsou odpovídající vítězné strategie, pak ukážeme, že $\rho = \sup(\rho_A, \rho_B)$ je vítězná strategie hráče I ve hře $J(A \cap B)$. Pro spor předpokládejme, že není vítězná, tedy existuje partie, kde hráč I hraje podle strategie ρ a prohraje. Nechť M, N jsou posloupnosti tahů v této partii. Z Pozorování 2.4 víme, že ρ je vítězná strategie hráče I ve hře $J(A)$ i $J(B)$. Tedy existují $j_A, j_B \in \omega$, že pro všechna $u \in \mathcal{S}$ je $N_{j_A}{}^\frown u \in A$ a $N_{j_B}{}^\frown u \in B$. Položme $j = \max(j_A, j_B)$. Výhra hráče II ve hře $J(A \cap B)$ znamená, že pro každé $k \in \omega$ existuje $u \in \mathcal{S}$ takové, že $N_k{}^\frown u \notin A \cap B$. Nechť $u_j \in \mathcal{S}$ splňuje $N_j{}^\frown u_j \notin A \cap B$. Potom ale $N_j{}^\frown u_j \notin A$ nebo $N_j{}^\frown u_j \notin B$ a jsme ve sporu. Tudíž $A \cap B \in G\mathcal{N}$ a ověřili jsme, že $G\mathcal{N}$ je filtr.

Nechť $\mathcal{P}_{II}$ je množina všech strategií hráče II jako v (2.2). Množina $A \notin G\mathcal{N}$, právě když má hráč II vítěznou strategii ve hře $J(A)$, tedy

$$(\exists f \in \mathcal{P}_{II})(\forall u \in \mathcal{S})(\exists w \in \mathcal{S})(f(u) \subseteq w \,\&\, w \notin A),$$

tj. existuje f strategie taková, že pro každou posloupnost tahů $u \in \mathcal{S}$ hráče I existuje prodloužení posloupnosti $f(u)$ mimo množinu A (díky determinovanosti hry tato podmínka stačí). Definujme množinu $F \subseteq 2^{\mathcal{S}} \times \mathcal{S}^{\mathcal{S}}$; $(A, f) \in F$ pokud f je vítězná strategie hráče II ve hře $J(A)$ (zřejmě potom $A \notin G\mathcal{N}$). Po úpravách dostáváme

$$F = \big(2^{\mathcal{S}} \times \mathcal{P}_{II}\big) \cap \bigcap_{u \in \mathcal{S}} \bigcup_{w \in \mathcal{S}} \left(\left\{A \in 2^{\mathcal{S}} : A(w) = 0\right\} \times \left\{f \in \mathcal{S}^{\mathcal{S}} : f(u) = w|\operatorname{len}(f(u))\right\}\right),$$

z čehož je zřejmé, že F je G_δ v $\mathcal{S}^{\mathcal{S}}$. Zároveň pokud $\pi : 2^{\mathcal{S}} \times \mathcal{S}^{\mathcal{S}} \to 2^{\mathcal{S}}$ je projekce na první souřadnici, pak $\pi(F) = 2^{\mathcal{S}} \setminus G\mathcal{N} \in \mathbf{\Sigma}^1_1\big(2^{\mathcal{S}}\big)$, a tudíž $G\mathcal{N} \in \mathbf{\Pi}^1_1\big(2^{\mathcal{S}}\big)$. $\square$

Značení 2.10. Nechť $A \subseteq \mathcal{S}$. Pro $n \in \omega$ označíme $n^\frown A = \left\{n^\frown u : u \in A\right\}$. Pro filtr $\mathscr{F}$ na $\mathcal{S}$ budeme definovat $n^\frown \mathscr{F}$ jako nejmenší filtr generovaný množinami $n^\frown F, F \in \mathscr{F}$.

Lemma 2.11. *Nechť $\mathscr{F}$ je borelovský filtr na $2^{\mathcal{S}}$ a $n \in \omega$. Potom systém množin $\left\{n^\frown F : F \in \mathscr{F}\right\}$ je uzavřený na konečné průniky a $n^\frown \mathscr{F}$ je borelovský filtr na $2^{\mathcal{S}}$.*

Důkaz. Nechť $(A_i)_{i=0}^k \subseteq \left\{n^\frown F : F \in \mathscr{F}\right\}, 1 \leq k < \omega$. Tedy existují $B_i \in \mathscr{F}$ takové, že $A_i = n^\frown B_i, i = 0, \ldots, k$. Potom $\bigcap\limits_{i=0}^{k} A_i = \bigcap\limits_{i=0}^{k} n^\frown B_i = n^\frown \bigcap\limits_{i=0}^{k} B_i$, kde $\bigcap\limits_{i=0}^{k} B_i \in \mathscr{F}$, protože $\mathscr{F}$ je filtr.

Systém $n^\frown \mathscr{F}$ je filtr z definice, zároveň víme, že $n^\frown \mathscr{F} \supseteq \left\{n^\frown F : F \in \mathscr{F}\right\}$. Ukážeme, že platí $F \in n^\frown \mathscr{F} \Leftrightarrow F_{(n)} \in \mathscr{F}$, kde $F_{(n)} = \left\{u \in \mathcal{S} : n^\frown u \in F\right\}$ jako bylo použito v Tvrzení 2.7. Implikace doprava je zřejmá, zvolme tedy libovolné $H \in n^\frown \mathscr{F}$. Protože $\left\{n^\frown F : F \in \mathscr{F}\right\}$ je uzavřená na konečné průniky, musí existovat $K \in \mathscr{F}$ takové, že $H \supseteq n^\frown K$. Z toho vyplývá, že $H_{(n)} \supseteq K$ a tedy $H_{(n)} \in \mathscr{F}$ z definice filtru.

Definujme zobrazení $\Phi_n : 2^{\mathcal{S}} \to 2^{\mathcal{S}}$ vztahem $\Phi_n(F) = F_{(n)}$. Ukážeme, že je spojité: Volme U_{T_0,T_1} z otevřené báze $2^{\mathcal{S}}$, pak

$$\begin{aligned}\Phi_n^{-1}\left(U_{T_0,T_1}\right) &= \left\{\rho \in 2^{\mathcal{S}} : (\forall t \in T_0)(\rho(n^\frown t) = 0) \;\&\; (\forall v \in T_1)(\rho(n^\frown v) = 1)\right\} = \\ &= U_{n^\frown T_0, n^\frown T_1}.\end{aligned}$$

Současně z předchozí části vyplývá, že $\Phi_n^{-1}(\mathscr{F}) = n^\frown \mathscr{F}$ a tvrzení je dokázáno. □

Dospěli jsme do bodu, kdy můžeme charakterizovat množiny $A \in G\mathcal{N}$ pomocí funkce h. Zároveň sestrojíme borelovský rozklad filtru $G\mathcal{N}$.

Tvrzení 2.12. *(i)* $G\mathcal{N} = \{A \subseteq \mathcal{S} : h(A) < \aleph_1\}$

(ii) Nechť ξ je spočetný ordinál a $\mathcal{N}_\xi = \{A \subseteq \mathcal{S} : h(A) \leq \xi\}$. Množina $\mathcal{N}_\xi$ je borelovský filtr na $\mathcal{S}$ a $(\mathcal{N}_\xi)_{\xi<\aleph_1}$ je systém množin pokrývající filtr $G\mathcal{N}$.

(iii) *(a)* $\mathcal{N}_0 = \{\mathcal{S}\}$,

(b) pro $0 < \xi < \aleph_1, \mathcal{N}_\xi = \liminf\limits_n \left(n^\frown \bigcup_{\eta<\xi} \mathcal{N}_\eta\right)$,

(c) $G\mathcal{N} = \liminf\limits_n \left(n^\frown G\mathcal{N}\right)$.

Důkaz. (i) Předpokládejme $h(A) = \aleph_1$. Tedy $\varnothing \in d_\infty\left(\widehat{A}\right) = d\left(d_\infty\left(\widehat{A}\right)\right)$. Z definice derivace d víme, že $\{n \in d_\infty\left(\widehat{A}\right)\}$ je nekonečná, tedy pro každou volbu m_0 hráče I existuje $n_0 \geq m_0$ splňující $n_0 \in d_\infty\left(\widehat{A}\right) = d\left(d_\infty\left(\widehat{A}\right)\right)$. Opětovným použitím definice derivace získáme, že $\{n : {n_0}^\frown n \in d_\infty\left(\widehat{A}\right)\}$ je nekonečná a pro každé $m_1 \in \omega$ obdržíme $n_1 \geq m_1$ takové, že $(n_0, n_1) \in d_\infty\left(\widehat{A}\right)$. Indukcí podle $i \in \omega$ získáme ke každému m_i zvolenému hráčem I n_i takové, že

$(n_0, n_1, \ldots, n_i) \in d_\infty\left(\widehat{A}\right)$ a tudíž $(n_0, n_1, \ldots, n_i) \in \widehat{A}$, tedy hráč I nemá vyhrávající strategii ve hře $J(A)$ a $A \notin G\mathcal{N}$.

Naopak pokud $A \notin G\mathcal{N}$, potom má hráč II vítěznou strategii ve hře $J(A)$. Označíme $M_i, N_i \in \mathcal{S}$ konečné posloupnosti tahů hráče I a II, tj.

$$M_i = (m_0, \ldots, m_i), N_i = (n_0, \ldots, n_i)$$

a dále $M, N \in \mathcal{N}$ budou splňovat $M|(i+1) = M_i$ a $N|(i+1) = N_i$ pro $i \in \omega$. S použitím tohoto značení definujeme pro libovolné $M_{k+1}, N_k \in \mathcal{S}$ množinu

$$W_{M_{k+1},N_k} = \{n \in \omega : n \geq m_{k+1} \;\&\; \text{hráč II má vítěznou strategii ve hře } J(A) \text{ se začátkem } M_{k+1}, N_k{}^\frown n\ \} \,.$$

Množinu $T^M \subseteq \mathcal{S}$, $M \in \mathcal{N}$ definujeme následovně:

- $T^M_{-1} = \{\varnothing\}$,
- $T^M_i = \left\{u^\frown n : u \in T^M_{i-1}, n \in W_{M_i,N_{i-1}}\right\}, i \in \omega,$
- $T^M = \bigcup_{i \in \omega} T^M_i$.

Ukážeme, že $T^M \subseteq \widehat{A}$. Volme $v \in T^M$, potom existuje $i \in \omega$, že $v \in T^M_i$, tedy $v = u^\frown n$, kde $u \in T^M_{i-1}$ a $n \in W_{M_i,N_{i-1}}$. Z definice $W_{M_i,N_{i-1}}$ pak vyplývá, že $v \in \widehat{A}$.

Nyní nám postačí, že $d\big(T^M\big) = T^M$. Volme $u \in T^M \setminus d\big(T^M\big)$. To znamená, že množina $\left\{n \in \omega : u^\frown n \in T^M\right\}$ je konečná. To je ale spor s faktem, že hráč II má vyhrávající strategii ve hře s tímto začátkem. Tedy

$$\varnothing \in T^M = d_\infty\big(T^M\big) \subseteq d_\infty\left(\widehat{A}\right)$$

a $h(A) = \aleph_1$.

(ii) Z Tvrzení 2.7 (ii) a (v) spolu s částí (iiia) je zřejmé, že $\mathcal{N}_\xi$ je filtr. Z části (iiib) a Lemmatu 2.11 pak po použití transfinitní indukce dostáváme, že $\mathcal{N}_\xi$ je borelovský v $2^{\mathcal{S}}$.

(iii) Zřejmě (a) platí. V případě (b) volme $\xi > 0$ a $A \in \mathcal{N}_\xi$. Potom $h(A) \leq \xi$ a při zachování značení z Tvrzení 2.7 z bodu (vi) tohoto tvrzení plyne existence $n_0 \in \omega$, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $A_{(n)} \in \bigcup\limits_{\eta<\xi} \mathcal{N}_\eta$, tedy $A \in n^\frown \bigcup\limits_{\eta<\xi} \mathcal{N}_\eta$ a jednu inkluzi máme hotovou. Zvolme $B \in \liminf\limits_n \left(n^\frown \bigcup_{\eta<\xi} \mathcal{N}_\eta\right)$. To znamená, že existuje $n \in \omega$ takové, že pro všechna $m \geq n$ je $B \in m^\frown \bigcup_{\eta<\xi} \mathcal{N}_\eta$, tj. $B_m \in \bigcup_{\eta<\xi} \mathcal{N}_\eta$, a tedy $h(B_m) < \xi$. Pro spor předpokládejme, že $B \notin \mathcal{N}_\xi$, tj. $h(B) \geq \xi + 1$. Ale z Tvrzení 2.7 z bodu (vii) dostáváme, že potom pro každé $k_0 \in \omega$ existuje $k \geq k_0$ takové, že $h(B_k) \geq \xi$, což je hledaný spor.

V části (c) víme, že

$$
\begin{aligned}
A \in G\mathcal{N} &\Rightarrow (\exists \xi < \aleph_1)(A \in \mathcal{N}_\xi) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\exists \xi < \aleph_1)\left(A \in \liminf_n \left(n^\frown \bigcup_{\eta<\xi} \mathcal{N}_\eta\right)\right) \Rightarrow \\
&\Rightarrow A \in \liminf_n \left(n^\frown G\mathcal{N}\right),
\end{aligned}
$$

a tedy $G\mathcal{N} \subseteq \liminf_n \left(n^\frown G\mathcal{N}\right)$. Druhou inkluzi obdržíme z

$$
\begin{aligned}
A \in \liminf_m \left(m^\frown G\mathcal{N}\right) &\Leftrightarrow (\exists m_0 \in \omega)(\forall m \geq m_0)(A \in m^\frown G\mathcal{N}) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (\exists m_0 \in \omega)(\forall m \geq m_0)(\exists B_m \in G\mathcal{N})(A \supseteq m^\frown B_m).
\end{aligned}
$$

Uvažujme nyní hru $J(A)$ a sestrojme vyhrávající strategii φ pro hráče I následujícím způsobem:

- $\varphi(\emptyset) = m_0$ (m_0 jako výše),
- pro libovolné $n \geq m_0$ tah hráče II položíme

  $$\varphi((m_0, n)^\frown u) = \varphi_n(u), u \in \mathcal{S},$$

  kde φ_n je vyhrávající strategie hráče I ze hry $J(B_n)$.

Jednoduše ověříme, že potom φ je vítězná strategie hráče I ve hře $J(A)$, tudíž $A \in G\mathcal{N}$.

$\square$

2.4 Koanalytický rank h

V této části ukážeme, že zobrazení h je koanalytický rank, a tudíž pro něj platí věta o omezenosti. Díky tomu budeme moci pro každou analytickou $A \subseteq G\mathcal{N}$ nalézt $\xi < \aleph_1$ tak, že $A \subseteq \mathcal{N}_\xi$. Inspirací pro důkazy některých tvrzení byl kurz Deskriptivní teorie množin II přednášený v LS 2009/2010 na MFF UK docentem Holickým.

Lemma 2.13. *Nechť $f \in \mathcal{P}_{II}$ je strategie. Potom pro strom T a $\alpha < \aleph_1$ platí $d_\alpha(f^{-1}(T)) \subseteq f^{-1}(d_\alpha(T))$.*

Důkaz. Zvolme $s \in d(f^{-1}(T))$. Z definice derivace d dostáváme, že množina

$$\left\{n \in \omega : s^\frown n \in f^{-1}(T)\right\}$$

je nekonečná. Pro spor předpokládejme, že množina $\left\{n \in \omega : f(s)^\frown n \in T\right\}$ je konečná. Buď m největší prvek této množiny. Existuje $k > m$ takové, že $s^\frown k \in f^{-1}(T)$. Potom ale $f(s^\frown k) \in T$ a platí $f(s^\frown k) = f(s)^\frown p \in T$, kde $p \geq k > m$, což je spor. Množina $\left\{n \in \omega : f(s)^\frown n \in T\right\}$ je tedy nekonečná, což znamená, že $f(s) \in d(T)$.

Nechť $\beta < \aleph_1$ a předpokládejme, že tvrzení platí pro všechna $\alpha < \beta$. Pokud β je izolovaný ordinál, pak

$$d_\beta\big(f^{-1}(T)\big) = d\big(d_{\beta-1}\big(f^{-1}(T)\big)\big) \subseteq \\ d\big(f^{-1}(d_{\beta-1}(T))\big) \subseteq f^{-1}(d(d_{\beta-1}(T))) = f^{-1}(d_\beta(T)).$$

Pro β limitní máme

$$d_\beta\big(f^{-1}(T)\big) = \bigcap_{\alpha<\beta} d_\alpha\big(f^{-1}(T)\big) \subseteq \\ \bigcap_{\alpha<\beta} f^{-1}(d_\alpha(T)) = f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha<\beta} d_\alpha(T)\right) = f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha<\beta} d_\beta(T)\right)$$

a tvrzení je dokázáno. □

Pro strom $T \subseteq \mathcal{S}$ definujme

$$j(T) = \sup\{\xi < \aleph_1 : \varnothing \in d_\xi(T)\}, \\ j(\varnothing) = 0.$$

Vidíme, že pro množinu $A \subseteq \mathcal{S}$ platí $h(A) = j\left(\widehat{A}\right)$.
Dále pro strom $T \subseteq \mathcal{S}$ a $s \in \mathcal{S}$ definujme následující:

$$T_{(s)} = \big\{u \in \mathcal{S} : s^\frown u \in T\big\}, \\ j_s(T) = j\big(T_{(s)}\big).$$

Nechť $A \subseteq \mathcal{S}$ je libovolná množina a zvolme $g \in \mathcal{P}_I$. Potom položme

$$A^g = A \setminus \big\{u^\frown n \in \mathcal{S} : u \in \mathcal{S}, n \in \omega, u^\frown n < g(u)\big\}.$$

Pro jistotu zopakujeme, že pro $v, w \in \mathcal{S}, \operatorname{len}(v) = \operatorname{len}(w)$ je

$$u < v \Leftrightarrow ((\forall 0 \le i < \operatorname{len}(v))(v(i) \le w(i))\&(\exists 0 \le j < \operatorname{len}(v))(v(j) < w(j)))$$

V další části se nám bude hodit následující formulace bodů (vi) a (vii) z Tvrzení 2.7.

Tvrzení 2.14. *Nechť $T \subseteq \mathcal{S}$ je strom. Potom pro $s \in \mathcal{S}$ a $0 < \lambda < \aleph_1$ platí:*

$$j_s(T) \le \lambda \Leftrightarrow (\exists n_0 \in \omega)(\forall n \ge n_0)(j_{s^\frown n}(T) < \lambda), \tag{2.6}$$
$$j_s(T) \ge \lambda \Leftrightarrow (\forall \xi < \lambda)(\forall n_0 \in \omega)(\exists n \ge n_0)(j_{s^\frown n}(T) \ge \xi). \tag{2.7}$$

Důkaz. Položme $A = \mathcal{S} \setminus T_{(s)}$, potom zřejmě $\widehat{A} = T_{(s)}$. Nejprve si uvědomme, že

$$h\big(A_{(n)}\big) = j\left(\widehat{A_{(n)}}\right) \overset{(2.4)}{=} j\left(\widehat{A}_{(n)}\right) = j\left(\big(T_{(s)}\big)_{(n)}\right) = j_{s^\frown n}(T). \tag{2.8}$$

Z Tvrzení 2.7 bodu (vi) víme, že

$$j_s(T) \leq \lambda \Leftrightarrow h(A) \leq \lambda \Leftrightarrow (\exists n_0 \in \omega)(\forall n \geq n_0) \left(h\left(A_{(n)}\right) < \lambda\right)$$
$$\overset{(2.8)}{\Leftrightarrow} (\exists n_0 \in \omega)(\forall n \geq n_0) \left(j_{s^\frown n}(T) < \lambda\right)$$

a ověřili jsme (2.6).

Analogicky z Tvrzení 2.7 bodu (vii) dostaneme, že

$$j_s(T) \geq \lambda \Leftrightarrow h(A) \geq \lambda \Leftrightarrow (\forall \xi < \lambda)(\forall n_0 \in \omega)(\exists n \geq n_0) \left(h\left(A_{(n)}\right) \geq \xi\right)$$
$$\overset{(2.8)}{\Leftrightarrow} (\forall \xi < \lambda)(\forall n_0 \in \omega)(\exists n \geq n_0) \left(j_{s^\frown n}(T) \geq \xi\right),$$

což dokazuje (2.7). □

V následujícím tvrzení si definujeme zobrazení, které umožní z „jednodušších" podmnožin $\mathcal{S}$ generovat „složitější", což potom uplatníme v důkaze regularity ranku h.

Tvrzení 2.15. *Definujme zobrazení* $w : 2^{\mathcal{S}} \to 2^{\mathcal{S}}$ *vztahem*

$$w(A) = \mathcal{S} \setminus \left(\bigcup_{n \in \omega} \left\{ n^\frown u : u \notin A \right\} \cup \{\varnothing\} \right), A \subseteq \mathcal{S}.$$

Potom

(i) *zobrazení* w *je spojité,*

(ii) $h(A) = \aleph_1$ *nebo* $h(w(A)) = h(A) + 1, A \subseteq \mathcal{S}$.

Důkaz. Nechť $T_0, T_1 \subseteq \mathcal{S}$ jsou libovolné a buď U_{T_0,T_1} jako v (1.2). Pro libovolnou $R \subseteq \mathcal{S}$ označme $\overleftarrow{R} = \left\{u \in \mathcal{S} : (\exists n \in \omega)(n^\frown u \in R)\right\}$. Potom zřejmě

$$w^{-1}\left(U_{T_0,T_1}\right) = \begin{cases} U_{\overleftarrow{T_0},\overleftarrow{T_1}} & \text{pokud } \varnothing \notin T_1 \text{ a } \overleftarrow{T_0} \cap \overleftarrow{T_1} = \varnothing, \\ \varnothing & \text{pokud } \varnothing \in T_1 \text{ nebo } \overleftarrow{T_0} \cap \overleftarrow{T_1} \neq \varnothing. \end{cases}$$

Zobrazení w je tedy spojité.

Z definice zobrazení w vidíme, že pro $k \in \omega$ a $A \subseteq \mathcal{S}$ je $(w(A))_{(k)} = A$. Označme $\xi = h(A)$ a předpokládejme $\xi < \aleph_1$, díky čemuž můžeme využít body (vi) a (vii) z Tvrzení 2.7:

$$(\forall n \in \omega) \left(h\left(w(A)_{(n)}\right) = h(A) < \xi + 1\right) \Rightarrow (h(w(A)) \leq \xi + 1),$$
$$(\forall n \in \omega) \left(h\left(w(A)_{(n)}\right) = h(A) \geq \xi\right) \Rightarrow (h(w(A)) \geq \xi + 1).$$

□

Důsledek 2.16. $\{h(A) : A \in G\mathcal{N}\} = \aleph_1$.

Důkaz. Víme, že $h(\mathcal{S}) = 0$ a pro libovolné $u \in \mathcal{S}$ je $h(\mathcal{S} \setminus \{u\}) = 1$. Buď $C \in G\mathcal{N}$, že $h(C) = \xi$. Potom z předchozího tvrzení vyplývá

$$h(C) = \xi \Leftrightarrow h(w(C)) = \xi + 1.$$

Nechť $\lambda < \aleph_1$ je limitní ordinál. Buď $A_k \in G\mathcal{N}$ takové, že $h(D_k) = \zeta_k$, kde $\zeta_k \nearrow \lambda$. Definujme množinu $D = \mathcal{S} \setminus \bigcup_{k \in \omega} k^\frown(\mathcal{S} \setminus D_k)$. Pro libovolné $u \in \mathcal{S}$ a $m \in \omega$ platí

$$u \in D_k \Leftrightarrow u \notin \mathcal{S} \setminus D_k \Leftrightarrow k^\frown u \notin k^\frown(\mathcal{S} \setminus D_k) \Leftrightarrow k^\frown u \in D,$$

což nám dává $D_k = D_{(k)}$. Potom pro všechna $\gamma < \lambda, n_0 \in \omega$ existuje $n \geq n_0$ takové, že $h(D_n) = \zeta_n \geq \gamma$ a tedy z Tvrzení 2.7 bodu (vii) dostáváme $h(D) \geq \lambda$. Z bodu (vi) a faktu $h(D_k) < \lambda$ pak získáme druhou nerovnost, a tedy $h(D) = \lambda$. □

Lemma 2.17. *Nechť $T \subseteq \mathcal{S}$ je strom, $g \in \mathcal{P}_I$, $\alpha < \aleph_1$ a $u \in \mathcal{S}$. Potom*

$$d_\alpha(T^g) = (d_\alpha(T))^g\,.$$

Důkaz. Pro $u \in \mathcal{S}$ platí:

$$\begin{aligned} u \in d(T^g) &\Leftrightarrow u \in T^g \,\&\, \left\{n \in \omega : u^\frown n \in T^g\right\} \text{ je nekonečná} \\ &\Leftrightarrow u \in T^g \,\&\, \left\{n \in \omega : u^\frown n \in T \,\&\, u^\frown n \geq g(u)\right\} \text{ je nekonečná} \\ &\Leftrightarrow u \in T^g \,\&\, \left\{n \in \omega : u^\frown n \in T \,\&\, n \geq [g(u)](\operatorname{len}(u))\right\} \text{ je nekonečná} \\ &\Leftrightarrow u \in T^g \,\&\, \left\{n \in \omega : u^\frown n \in T\right\} \text{ je nekonečná} \end{aligned}$$

Nyní se situace rozděluje na dva případy. Pokud $u = \varnothing$, pak $\varnothing \in T^g \Leftrightarrow \varnothing \in T$, a protože $\{n \in \omega : n \in T\}$ je nekonečná, tak i $\varnothing \in d(T)$, a tudíž z definice dostáváme $\varnothing \in (d(T))^g$. Pokud $u \in \mathcal{S} \setminus \{\varnothing\}$, pak existuje $v \in \mathcal{S}$ a $k \in \omega$ takové, že $u = v^\frown s$. Posloupnost $u \in T^g$ právě když $u \in T \,\&\, g(v) \leq v^\frown k$, což s faktem, že množina $\left\{n \in \omega : u^\frown n \in T\right\}$ je nekonečná, dává $u \in (d(T))^g$.

Buď $\beta < \aleph_1$ izolovaný ordinál, potom

$$d_\beta(T^g) = d(d_{\beta-1}(T^g)) = d((d_{\beta-1}(T))^g) = (d(d_{\beta-1}(T)))^g$$

Nechť $\gamma < \aleph_1$ je limitní ordinál, potom

$$\begin{aligned} d_\gamma(T^g) &= \bigcap_{\delta<\gamma} (d_\delta(T^g)) = \bigcap_{\delta<\gamma} (d_\delta(T))^g \\ &= \bigcap_{\delta<\gamma} \left(d_\delta(T) \setminus \left\{u^\frown n \in \mathcal{S} : u \in \mathcal{S}, n \in \omega, u^\frown n < g(u)\right\}\right) \\ &= \left(\bigcap_{\delta<\gamma} d_\delta(T)\right) \setminus \left\{u^\frown n \in \mathcal{S} : u \in \mathcal{S}, n \in \omega, u^\frown n < g(u)\right\} \\ &= \left(\bigcap_{\delta<\gamma} d_\delta(T)\right)^g = (d_\gamma(T))^g\,. \end{aligned}$$

□

Lemma 2.18. *Nechť* $T_1, T_2 \subseteq \mathcal{S}$ *jsou stromy. Potom* $j(T_1) \leq j(T_2)$ *právě když existuje strategie* $f \in \mathcal{P}_{II}$ *a strategie* $g \in \mathcal{P}_I$ *tak, že* $T_1^g \subseteq f^{-1}(T_2)$ *.*

Důkaz. Nechť existují zobrazení f, g tak, že platí $T_1^g \subseteq f^{-1}(T_2)$. Tedy platí $j(T_1^g) \leq j(f^{-1}(T_2))$. Z Lemmatu 2.13 víme, že pro každé $\alpha \leq \aleph_1$ platí $d_\alpha(f^{-1}(T_2)) \subseteq f^{-1}(d_\alpha(T_2))$. To znamená, že

$$\varnothing \in d_\alpha\big(f^{-1}(T_2)\big) \Rightarrow \varnothing \in f^{-1}(d_\alpha(T_2))$$

a protože $f(\varnothing) = \varnothing$ dostáváme $j(f^{-1}(T_2)) \leq j(T_2)$, tedy máme $j(T_1^g) \leq j(T_2)$. Z Lemmatu 2.17 a z definice operace $()^g$ dostáváme pro každé $\alpha < \aleph_1$, že

$$\varnothing \in d_\alpha(T_1^g) \Leftrightarrow \varnothing \in (d_\alpha(T_1))^g \Leftrightarrow \varnothing \in d_\alpha(T_1)\,,$$

čímž jsme dokázali $j(T_1^g) = j(T_1)$.

Předpokládejme $j(T_1) \leq j(T_2)$. Prvky $f(s)$ a $g(s)$ budeme definovat indukcí podle délky $s \in \mathcal{S}$ tak, aby

$$j_s(T_1^g) \leq j_{f(s)}(T_2)\,. \tag{2.9}$$

Položme $f(\varnothing) = \varnothing$, podmínka 2.9 je zjevně splněna. Buď $u \in \mathcal{S}$ takové, že $j_u(T_1) \leq j_{f(u)}(T_2)$. Označíme $i = \operatorname{len}(u)$, potom z Lemmatu 2.14 dostáváme, že

$$(\exists n_0 \in \omega)(\forall n \geq n_0)(j_{u^\frown n}(T_1) < j_{f(u)}(T_2)) \tag{2.10}$$

$$(\forall \xi < j_{f(u)}(T_2))(\forall m_0 \in \omega)(\exists m \geq m_0)(j_{f(u)^\frown m}(T_2) \geq \xi) \tag{2.11}$$

Položme $g(u) = g(u|(i-1))^\frown n_0$, kde n_0 splňuje (2.10) a zobrazení $f(u^\frown k), k \in \omega$ definujme následovně:

$$f(u^\frown k) = \begin{cases} f(u)^\frown k & \text{pro } k < n_0, \\ f(u)^\frown p & \text{pro } k \geq n_0 \text{ a } p \in \omega \text{ takové, že splňuje} \\ & j_{f(u)^\frown p}(T_2) \geq j_{u^\frown k}(T_1)\,. \end{cases}$$

Podmínka (2.11) nám zajišťuje, že definice funkce f je korektní. Z celého postupu pak vyplývá, že pokud libovolné $v \in T_1^g$, pak $j_v(T_1^g) > 0$, a tudíž i $j_{f(v)}(T_2) > 0$ a $f(v) \in T_2$. □

Předchozí lemma nám umožní studovat relaci $\leq_h$ definovanou

$$A \leq_h B \Leftrightarrow h(A) \leq h(B)\,, A, B \in 2^{\mathcal{S}},$$

díky čemuž pak dokážeme, že h je koanalytický rank.

Tvrzení 2.19. *Množina* $Z_0 = \big\{(A, B) \in 2^{\mathcal{S}} \times 2^{\mathcal{S}} : h(A) \leq h(B)\big\}$ *je analytická.*

Důkaz. Definujme množinu

$$F = \Big\{(A, B, f, g) \in 2^{\mathcal{S}} \times 2^{\mathcal{S}} \times \mathcal{P}_{II} \times \mathcal{P}_I : \big(\widehat{A}\big)^g \subseteq f^{-1}\big(\widehat{B}\big)\Big\}.$$

Pro zkrácení zápisu označíme

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= 2^{\mathcal{S}} \times 2^{\mathcal{S}} \times \mathcal{P}_{II} \times \mathcal{P}_I, \\ \mathcal{S}_g &= \left\{ u^\frown n \in \mathcal{S} : u \in \mathcal{S}, n \in \omega, u^\frown n < g(u) \right\}. \end{aligned}$$

Ukážeme, že F je borelovská v $\mathcal{D}$. Platí:

$$\begin{aligned} (A, B, f, g) \in F \Leftrightarrow (\forall s \in \mathcal{S}) \left(s \in \left(\widehat{A}\right)^g \Rightarrow s \in f^{-1}\left(\widehat{B}\right)\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\forall s \in \mathcal{S}) \left(s \notin \widehat{A} \text{ nebo } s \in \mathcal{S}_g \text{ nebo } f(s) \in \widehat{B} \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\forall s \in \mathcal{S}) \left(s \notin \widehat{A} \text{ nebo } s \in \mathcal{S}_g \text{ nebo } (\forall t \in \mathcal{S})(t \in \widehat{B} \text{ nebo } f(s) \neq t) \right) \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} F = \bigcap_{s \in \mathcal{S}} \Bigg(& \left\{ (A, B, f, g) \in \mathcal{D} : s \notin \widehat{A} \right\} \cup \\ & \{ (A, B, f, g) \in \mathcal{D} : s < g(s|(\operatorname{len}(s) - 1)) \} \cup \\ & \bigcap_{t \in \mathcal{S}} \left(\left\{ (A, B, f, g) \in \mathcal{D} : t \in \widehat{B} \right\} \cup \{ (A, B, f, g) \in \mathcal{D} : f(s) \neq t \} \right) \Bigg). \end{aligned}$$

Nyní se podívame podrobně na jednotlivé množiny v předchozím zápisu.

- Buď $u \in \mathcal{S}$ pevné, pak množina

  $$\left\{ C \subseteq \mathcal{S} : u \notin \widehat{C} \right\} = \bigcap_{v \in \mathcal{S}} \left\{ C \subseteq \mathcal{S} : u^\frown v \in C \right\}$$

  je borelovská (dokonce uzavřená).

- Buď $u \in \mathcal{S} \setminus \{\varnothing\}$ pevné a označme $k = \operatorname{len}(u)$, pak množina

  $$\begin{aligned} \{ g \in \mathcal{P}_I : g(u|(k-1)) > u \} &= \mathcal{P}_I \setminus \{ g \in \mathcal{P}_I : g(u|(k-1)) \leq u \} \\ &= \mathcal{P}_I \setminus \bigcup_{v \leq u} \{ g \in \mathcal{P}_I : g(u|(k-1)) = v \} \end{aligned}$$

  je borelovská (uzavřená).

- Množina $\left\{ C \subseteq \mathcal{S} : u \in \widehat{C} \right\} = 2^{\mathcal{S}} \setminus \left\{ C \subseteq \mathcal{S} : u \notin \widehat{C} \right\}$ je také borelovská.

- A množina $\{ f \in \mathcal{P}_{II} : f(u) \neq v \}$ je otevřená, tedy i borelovská.

Z Lemmatu 2.18 pak vyplývá, že projekcí borelovské množiny F v polském prostoru $\mathcal{D}$ na první dvě souřadnice je právě množina Z_0, a tedy Z_0 je analytická. $\square$

Důsledek 2.20. *Platí:*

$$Z_1 = \big\{(A,B) \in 2^{\mathcal{S}} \times 2^{\mathcal{S}} : h(A) < h(B)\big\} \text{ je koanalytická,} \tag{2.12}$$
$$Z_2 = \big\{(A,B) \in 2^{\mathcal{S}} \times 2^{\mathcal{S}} : A \in G\mathcal{N} \;\&\; h(A) \leq h(B)\big\} \text{ je koanalytická.} \tag{2.13}$$

Důkaz. Zobrazení $t : 2^{\mathcal{S}} \times 2^{\mathcal{S}} \to 2^{\mathcal{S}} \times 2^{\mathcal{S}}$ takové, že

$$t(A,B) = (B,A), \qquad A,B \in 2^{\mathcal{S}} \times 2^{\mathcal{S}}$$

je homeomorfismus a platí

$$Z_1 = (2^{\mathcal{S}} \times 2^{\mathcal{S}}) \setminus t\left(\big\{(A,B) \in 2^{\mathcal{S}} \times 2^{\mathcal{S}} : h(A) \leq h(B)\big\}\right),$$

tedy máme dokázáno (2.12).

Nechť w je zobrazení z Tvrzení 2.15. Potom $h(w(A)) = h(A) + 1$ v případě, že $h(A) < \aleph_1$. Pak zřejmě

$$(A,B) \in Z_2 \Leftrightarrow (A, w(B)) \in Z_1,$$

a tedy $Z_2 = (\mathrm{id} \times w)^{-1}(Z_1)$, kde $\mathrm{id}(A) = A$, $A \subseteq \mathcal{S}$, a zobrazení $(\mathrm{id} \times w)$ je zřejmě spojité, tudíž Z_2 je koanalytická. □

Tvrzení 2.21. *Zobrazení $h : G\mathcal{N} \to \aleph_1$ je regulární koanalytický rank.*

Důkaz. Pro $A, B \in G\mathcal{N}$ definujme

$$A \leq_h^{\Sigma_1^1} B \Leftrightarrow (A,B) \in Z_0,$$
$$A \leq_h^{\Pi_1^1} B \Leftrightarrow (A,B) \in Z_2,$$

tedy h je koanalytický rank. Regularita vyplývá přímo z Důsledku 2.16. □

2.5 Další vlastnosti filtru $G\mathcal{N}$

V této fázi již známe všechny zásadní vlastnosti filtru $G\mathcal{N}$ a s ním souvisejícího zobrazení h, díky čemuž se můžeme vrhnout na další z nich vyplývající tvrzení, která posléze poslouží k důkazu vět o generování silně afinních a bianalytických funkcí.

Lemma 2.22. *Nechť X je topologický prostor, $x \in X$, $\xi < \aleph_1$ a nechť $Y_u^k \subseteq X$ pro $k \in \omega$ a $u \in \mathcal{S}$. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $(\exists n_0 \in \omega)(\forall k \geq n_0)(\exists \eta_k < \xi)\left(\big\{u \in \mathcal{S} : x \in Y_u^k\big\} \in \mathcal{N}_{\eta_k}\right)$,

(ii) $\bigcup_{n\in\omega} n^\frown \{v \in \mathcal{S} : x \in Y_v^n\} \in \mathcal{N}_\xi$.

Důkaz. Označíme

$$C_x^k = \left\{u \in \mathcal{S} : x \in Y_u^k\right\}, k \in \omega,$$
$$D_x = \bigcup_{n\in\omega} n^\frown \{v \in \mathcal{S} : x \in Y_v^n\}.$$

Zřejmě platí $n^\frown \{v \in \mathcal{S} : x \in Y_v^n\} \supseteq \bigcap_{m=n}^{\infty} m^\frown \{v \in \mathcal{S} : x \in Y_v^m\}$, a tedy i

$$D_x = \bigcup_{n\in\omega} n^\frown \{v \in \mathcal{S} : x \in Y_v^n\} \supseteq \bigcup_{n\in\omega} \bigcap_{m=n}^{\infty} m^\frown \{v \in \mathcal{S} : x \in Y_v^m\} =$$
$$= \liminf_n n^\frown C_x^n.$$

Protože tak

Z (i) víme, že $C_x^n \in \mathcal{N}_{\eta_k}$ pro nějaká $\eta_k < \xi$ a $n \geq n_0$, a z Tvrzení 2.12 části (iiib) spolu s jednoduchým faktem, že platí

$$\liminf_n n^\frown C_x^n = \liminf_{n\geq n_0} n^\frown C_x^n,$$

získáme $D_x \supseteq \liminf_{n\geq n_0} n^\frown C_x^n \in \mathcal{N}_\xi$ a dokázali jsme (i) $\Rightarrow$ (ii).

Pokud použijeme značení z Tvrzení 2.7, tak máme $C_x^k = (D_x)_{(k)}$ pro libovolné $k \in \omega$; z $h(D_x) \leq \xi$ a z bodu (vi) tohoto tvrzení rovnou dostáváme

$$(\exists n_0 \in \omega)(\forall n > n_0)\,(h(C_x^n) < \xi)\,,$$

což nám dává (ii) $\Rightarrow$ (i). $\square$

Důsledek 2.23. *Nechť X je topologický prostor, $x \in X$ a nechť $Y_u^k \subseteq X$ pro $k \in \omega$ a $u \in \mathcal{S}$. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $(\exists n_0 \in \omega)(\forall k \geq n_0)\left(\left\{u \in \mathcal{S} : x \in Y_u^k\right\} \in G\mathcal{N}\right)$,

(ii) $\bigcup_{n\in\omega} n^\frown \{v \in \mathcal{S} : x \in Y_v^n\} \in G\mathcal{N}$.

Důkaz. Jednoduchý fakt, že pro libovolnou množinu $A \subseteq \mathcal{S}$ platí

$$A \in G\mathcal{N} \Leftrightarrow (\exists \zeta < \aleph_1)(A \in \mathcal{N}_\zeta),$$

nám díky spočetnosti (Y_u^k) dává existenci $\xi < \aleph_1$ takového, že podmínka (i) (resp. (ii)) je ekvivalentní podmínce (i) (resp. (ii)) z Lemmatu 2.22. $\square$

Důsledek 2.24. *Nechť X je topologický prostor a nechť $Y_u^k \subseteq X, k \in \omega, u \in \mathcal{S}$. Nechť $Y^k = \liminf_{G\mathcal{N}} Y_u^k$ (resp. $Y^k = \limsup_{G\mathcal{N}} Y_u^k$) a $Z_v = Y_u^k$ pro $v = k^\frown u$. Potom $\liminf_k Y^k = \liminf_{G\mathcal{N}} Z_v$ (resp. $\limsup_k Y^k = \limsup_{G\mathcal{N}} Z_v$).*

Důkaz. Víme, že

$$
\begin{aligned}
x \in \liminf_k Y^k \Leftrightarrow & x \in \bigcup_{n \in \omega} \bigcap_{m=n}^{\infty} Y^m \\
\Leftrightarrow & (\exists n_x \in \omega)(\forall k \geq n_x)(x \in Y^k) \\
\Leftrightarrow & (\exists n_x \in \omega)(\forall k \geq n_x)(x \in \liminf_{G\mathcal{N}} Y_u^k) \\
\Leftrightarrow & (\exists n_x \in \omega)(\forall k \geq n_x) \left(\left\{u \in \mathcal{S} : x \in Y_u^k\right\} \in G\mathcal{N}\right)
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

a

$$
\begin{aligned}
x \in \liminf_{G\mathcal{N}} Z_v \Leftrightarrow & x \in \{y \in X : \{w \in \mathcal{S} : y \in Z_w\} \in G\mathcal{N}\} \\
\Leftrightarrow & \{w \in \mathcal{S} : x \in Z_w\} \in G\mathcal{N} \\
\Leftrightarrow & \left\{n^\frown v : v \in \mathcal{S}, n \in \omega, x \in Y_v^n\right\} \in G\mathcal{N} \\
\Leftrightarrow & \bigcup_{n \in \omega} n^\frown \{v \in \mathcal{S} : x \in Y_v^n\} \in G\mathcal{N}.
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

Použitím Důsledku 2.23 dostáváme požadovanou ekvivalenci (2.14) $\Leftrightarrow$ (2.15).

Případ $Y^k = \limsup_{G\mathcal{N}} Y_u^k$ ověříme jednoduchým výpočtem. Platí

$$
X \setminus Y^k = X \setminus \limsup_{G\mathcal{N}} Y_u^k = \liminf_{G\mathcal{N}} \left(X \setminus Y_u^k\right),
$$

tedy můžeme použít předchozí část pro $X \setminus Y_u^k$ a $X \setminus Z_v$. Dostáváme

$$
X \setminus \limsup_k Y^k = \liminf_k \left(X \setminus Y^k\right) = \liminf_{G\mathcal{N}} (X \setminus Z_v) = X \setminus \limsup_{G\mathcal{N}} Z_v,
$$

což je hledané tvrzení. □

Důsledek 2.25. *Nechť X je topologický prostor, nechť $Y_u^k \subseteq X, k \in \omega, u \in \mathcal{S}$ a $\lambda < \aleph_1$. Označme $Z_v = Y_u^k$ pro $v = k^\frown u$. Potom*

$$
\liminf_{\mathcal{N}_\lambda} Z_v = \liminf_k \bigcup_{\zeta < \lambda} \liminf_{\mathcal{N}_\zeta} Y_u^k.
$$

Důkaz. Platí

$$
\begin{aligned}
& x \in \liminf_k \bigcup_{\zeta < \lambda} \liminf_{\mathcal{N}_\zeta} Y_u^k \\
& \qquad \Leftrightarrow (\exists n \in \omega)(\forall k \geq n)(\exists \eta < \lambda) \left(\left\{u \in \mathcal{S} : x \in Y_u^k\right\} \in \mathcal{N}_\eta\right)
\end{aligned}
$$

a dále $x \in \liminf_{\mathcal{N}_\lambda} Z_v \Leftrightarrow \bigcup_{n \in \omega} n^\frown \{v \in \mathcal{S} : x \in Y_v^n\} \in \mathcal{N}_\lambda$ a Lemma 2.22 nám dává požadované tvrzení. □

Důsledek 2.26. *Nechť X je topologický prostor, nechť $f_u^k : X \to \mathbb{R}, k \in \omega, u \in \mathcal{S}$ jsou funkce a $\xi < \aleph_1$. Označme $g_v = f_u^k$ pro $v = k^\frown u$. Potom*

$$\liminf_{\mathcal{N}_\lambda} g_v = \liminf_{k} \sup_{\zeta<\lambda} \liminf_{\mathcal{N}_\zeta} f_u^k.$$

Důkaz. Plyne přímo z předchozího tvrzení a Tvrzení 1.26. □

Tvrzení 2.27. *Nechť $(A_u)_{u\in\mathcal{S}}$ je posloupnost borelovských množin v metrizovatelném prostoru E, $(f_u)_{u\in\mathcal{S}}$ buď posloupnost borelovských funkcí na E a $\mathscr{F}$ koanalytický (resp. borelovský) filtr na $2^{\mathcal{S}}$. Potom množiny*

$$\liminf_{\mathscr{F}} A_u, E \setminus \limsup_{\mathscr{F}} A_u, \left\{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : \liminf_{\mathscr{F}} f_u > t\right\},$$
$$\text{a } \left\{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : \limsup_{\mathscr{F}} f_u < t\right\}$$

jsou koanalytické (resp. borelovské).

Speciálně, pokud existují $\lim_{\mathscr{F}} A_u$ nebo $\lim_{\mathscr{F}} f_u$, pak jsou borelovské.

Důkaz. Pro $x \in E$ označme $S_x = \{u \in \mathcal{S} : x \in A_u\} \subseteq \mathcal{S}$. Definujme zobrazení $\varphi : E \to 2^{\mathcal{S}}$ jako $\varphi(x) = S_x$. Zvolme množinu U_{T_0,T_1} z báze otevřených množin v $2^{\mathcal{S}}$. Pak

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}\left(U_{T_0,T_1}\right) &= \{x \in E : (\forall t \in T_0)(\varphi(x)\,(t) = 0)\ \&\ (\forall v \in T_1)(\varphi(x)\,(v) = 1)\} = \\ &= \{x \in E : (\forall t \in T_0)(t \notin S_x)\ \&\ (\forall v \in T_1)(v \in S_x)\} = \\ &= \{x \in E : (\forall t \in T_0)(x \notin A_t)\ \&\ (\forall v \in T_1)(x \in A_v)\} = \\ &= \bigcap_{t\in T_0} (E \setminus A_t) \cap \bigcap_{v\in T_1} A_v \in \mathbf{B}(E)\,.\end{aligned}$$

Zřejmě i $\varphi^{-1}(V) \in \mathbf{B}(E)$ pro V libovolnou otevřenou, a tudíž φ je borelovská funkce.

Nyní již snadno ukážeme, že námi zkoumané množiny jsou opravdu koanalytické (resp. borelovské):

$$\begin{aligned}E \setminus \liminf_{\mathscr{F}} A_u &= E \setminus \{x \in E : S_x \in \mathscr{F}\} = \{x \in E : S_x \notin \mathscr{F}\} = \\ &= \varphi^{-1}\left(2^{\mathcal{S}} \setminus \mathscr{F}\right).\end{aligned}$$

Množinu $E \setminus \liminf_{\mathscr{F}} A_u$ jsme vyjádřili jako vzor analytické množiny $2^{\mathcal{S}} \setminus \mathscr{F}$ při borelovském zobrazení φ, tudíž $\liminf_{\mathscr{F}} A_u$ je koanalytická (resp. borelovská pro $\mathscr{F}$ borelovský). Množiny $B_u = E \setminus A_u$ jsou borelovské a splňují předpoklady věty, tedy víme, že $\liminf_{\mathscr{F}} B_u$ je koanalytická. Ale

$$\liminf_{\mathscr{F}} B_u = \liminf_{\mathscr{F}} (E \setminus A_u) = E \setminus \limsup_{\mathscr{F}} A_u.$$

Speciálně pokud existuje $\lim_{\mathscr{F}} A_u$, pak $\lim_{\mathscr{F}} A_u = \liminf_{\mathscr{F}} A_u = \limsup_{\mathscr{F}} A_u$ je koanalytická i analytická, tedy borelovská a první část důkazu je hotova.

Definujme zobrazení $\psi : E \times \mathbb{R} \to 2^{\mathcal{S}}$ pro $(x, c) \in \mathbb{R}$ jako

$$\psi((x, c)) = \{u \in \mathcal{S} : f_u(x) > c\} .$$

Buď U_{T_0,T_1} libovolná množina z báze otevřených množin v $2^{\mathcal{S}}$. Pak

$$\begin{aligned}\psi(x, c) \in U_{T_0,T_1} &\Leftrightarrow (\forall t \in T_0)(\psi(x, c)\,(t) = 0) \,\&\, (\forall v \in T_1)(\psi(x, c)\,(t) = 1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\forall t \in T_0)(f_t(x) \le c) \,\&\, (\forall v \in T_1)(f_v(x) > c),\end{aligned}$$

tedy

$$\begin{aligned}\psi^{-1}\left(U_{T_0,T_1}\right) = \bigcap_{t \in T_0} &\{(x, c) \in E \times \mathbb{R} : f_t(x) \le c\} \cap \\ &\cap \bigcap_{v \in T_1} \{(x, c) \in E \times \mathbb{R} : f_v(x) > c\} .\end{aligned}$$

Z Tvrzení 1.17 jako důsledek obdržíme, že ψ je borelovská funkce. Z následující úpravy potom získáme požadovaný výsledek.

$$\begin{aligned}\Big\{(x, c) \in E \times \mathbb{R} : \liminf_{\mathscr{F}} f_u > c\Big\} &= \\ = \{(x, c) \in E \times \mathbb{R} : \{u \in \mathcal{S} : f_u(x) > c\} \in \mathscr{F}\} &= \\ = \psi^{-1}\left(\mathscr{F}\right) = (E \times \mathbb{R}) \setminus \psi^{-1}\left(2^{\mathcal{S}} \setminus \mathscr{F}\right)&\end{aligned}$$

a dostáváme, že $\Big\{(x, c) \in E \times \mathbb{R} : \liminf_{\mathscr{F}} f_u > c\Big\}$ je koanalytická (resp. borelovská).

V případe limes superior platí $\limsup_{\mathscr{F}} f_u = -\liminf_{\mathscr{F}}(-f_u)$ a protože $-f_u$ jsou borelovské, tak s použitím předchozího dostáváme

$$\left\{(x, c) \in E \times \mathbb{R} : \limsup_{\mathscr{F}} f_u < c\right\} = \left\{(x, c) \in E \times \mathbb{R} : \liminf_{\mathscr{F}}(-f_u) > -c\right\},$$

což je koanalytická (resp. borelovská) množina.

Speciálně, pokud existuje $\lim_{\mathscr{F}} f_u$, pak z Tvrzení 1.17 dostáváme, že je borelovská.

$\square$

Důsledek 2.28. *Nechť E je kompaktní metrizovatelný prostor, $(f_u)_{u \in \mathcal{S}}$ je posloupnost borelovských funkcí na E, $0 \le f_u \le 1, u \in \mathcal{S}$, a $\xi < \aleph_1$. Potom funkce $\liminf_{\mathcal{N}_\xi} f_u$ je univerzálně měřitelná.*

Důkaz. Z omezenosti máme, že $\liminf_{\mathcal{N}_\xi} f_u$ je funkce a unoverzální měřitelnost plyne z Tvrzení 2.27 a 1.20. $\square$

Díky tomuto důsledku máme pro zbývající tvrzení této kapitoly vyřešenu otázku měřitelnosti funkcí definovaných jako limes inferior posloupnosti omezených borelovských funkcí podle některého z námi definovaných filtrů.

Lemma 2.29. *Nechť E je kompaktní metrizovatelný prostor, $\mu \in \mathcal{M}^1(E)$, $(f_u)_{u\in\mathcal{S}}$ je posloupnost borelovských funkcí na E, $0 \le f_u \le 1, u \in \mathcal{S}$, a $\xi < \aleph_1$. Potom platí*

$$\mu\left(\liminf_{\mathcal{N}_\xi} f_u\right) \le \liminf_{\mathcal{N}_\xi} \mu\left(f_u\right).$$

Důkaz. Pro $\xi = 0$ máme

$$\mu\left(\liminf_{\mathcal{N}_0} f_u\right) = \mu\left(\inf_{u\in\mathcal{S}} f_u\right) \le \inf_{u\in\mathcal{S}} \mu(f_u) = \liminf_{\mathcal{N}_0} \mu(f_u),$$

protože funkce $\inf\limits_{u\in\mathcal{S}} f_u \le f_v$ pro všechna $v \in \mathcal{S}$ a tvrzení platí.

Nechť $\xi < \aleph_1$ libovolné, označme $f_u^n = f_{n^\frown u}, n \in \omega, u \in \mathcal{S}$. Potom z Důsledku 2.26 máme

$$\liminf_{\mathcal{N}_\xi} f_v = \liminf_n \sup_{\zeta<\xi} \liminf_{\mathcal{N}_\zeta} f_u^n.$$

S využitim Fatouova lemmatu (např. [3], 123B) a indukčního předpokladu tedy dostáváme

$$\begin{aligned}\mu\left(\liminf_{\mathcal{N}_\xi} f_v\right) &= \mu\left(\liminf_n \sup_{\zeta<\xi} \liminf_{\mathcal{N}_\zeta} f_u^n\right) \overset{Fatou}{\le} \liminf_n \mu\left(\sup_{\zeta<\xi} \liminf_{\mathcal{N}_\zeta} f_u^n\right)\\ &= \liminf_n \sup_{\zeta<\xi} \mu\left(\liminf_{\mathcal{N}_\zeta} f_u^n\right) = \liminf_n \sup_{\zeta<\xi} \liminf_{\mathcal{N}_\zeta} \mu\left(f_u^n\right)\\ &= \liminf_{\mathcal{N}_\xi} \mu(f_v).\end{aligned}$$

□

Tvrzení 2.30. *Nechť E je kompaktní metrizovatelný prostor, $\mu \in \mathcal{M}^1(E)$ a nechť $(f_u)_{u\in\mathcal{S}}$ je posloupnost borelovských funkcí, $0 \le f_u \le 1, u \in \mathcal{S}$. Potom funkce definovaná vztahem $f = \liminf\limits_{G\mathcal{N}} f_u$ je μ-měřitelná a $\mu(f) \le \liminf\limits_{G\mathcal{N}} \mu(f_u)$.*

Speciálně, pokud $f = \lim\limits_{G\mathcal{N}} f_u$, pak $\mu(f) = \lim\limits_{G\mathcal{N}} \mu(f_n)$.

Důkaz. Označme $f_\xi = \liminf\limits_{\mathcal{N}_\xi} f_u$. Opět z Tvrzení 2.27 obdržíme, že funkce f_ξ jsou borelovské a z definice limes inferior plyne, že platí $f = \sup\limits_{\xi<\aleph_1} f_\xi$, a tedy pro $\zeta \le \zeta'$ je $f_\zeta \le f_{\zeta'}$. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje borelovská funkce $g_\varepsilon < f$ splňující $\mu(f - g_\varepsilon) < \varepsilon$. Pro $x \in E$ označme $A_x^\varepsilon = \{u \in \mathcal{S} : g_\varepsilon(x) < f_u(x)\}$ a z předchozího dostáváme, že $A_x^\varepsilon \in G\mathcal{N}$. Položme $G_\varepsilon = \{A_x^\varepsilon : x \in E\}$. Definujme funkci $\psi_\varepsilon : E \to 2^{\mathcal{S}}$ vztahem $\psi_\varepsilon(x) = A_x^\varepsilon$. Potom pro libovolnou U_{T_0,T_1} z otevřené báze $2^{\mathcal{S}}$ platí

$$\begin{aligned}x \in \psi_\varepsilon^{-1}\left(U_{T_0,T_1}\right) &\Leftrightarrow (\exists u \in T_1)(g_\varepsilon(x) < f_u(x))\ \&\ (\forall v \in T_0)(g_\varepsilon(x) \ge f_v(x)) \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow (\exists u \in T_1)(\exists q \in \mathbb{Q})(g_\varepsilon(x) < q < f_u(x))\ \&\\ &\qquad \&\ (\forall v \in T_0)(\forall p \in \mathbb{Q})(g_\varepsilon(x) \ge p \text{ nebo } f_v(x) < p),\end{aligned}$$

tedy

$$\psi_\varepsilon^{-1}\left(U_{T_0,T_1}\right) = \left(\bigcup_{u\in T_1}\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} g_\varepsilon^{-1}\left((-\infty,q)\right)\cap f_u^{-1}\left((q,\infty)\right)\right)\cap$$
$$\cap\left(\bigcap_{v\in T_0}\bigcap_{p\in\mathbb{Q}} g_\varepsilon^{-1}\left([p,\infty)\right)\cup f_v^{-1}\left((-\infty,p)\right)\right).$$

Protože funkce $f_u, u \in \mathcal{S}$ a g_ε jsou borelovské, i funkce ψ_ε je borelovská. Zřejmě $G\mathcal{N} \supseteq G_\varepsilon = \psi_\varepsilon(E) \in \mathbf{\Sigma}_1^1\big(2^{\mathcal{S}}\big)$. Z věty o omezenosti koanalytického ranku (Věta 1.28) dostáváme, že existuje $\xi(\varepsilon) < \aleph_1$ takové, že $G_\varepsilon \subseteq \mathcal{N}_{\xi(\varepsilon)}$. Potom $g_\varepsilon \leq f_{\xi(\varepsilon)}$ a pokud položíme $\xi_0 = \sup_{n\in\omega}\xi(\frac{1}{n})$, pak $g_{\frac{1}{n}} \leq f_{\xi_0} \leq f$ pro všechna $n \in \omega$ a platí $\mu(f) = \mu(f_{\xi_0})$. Víme, že $\liminf_{\mathcal{N}_{\xi_0}} \mu(f_u) \leq \liminf_{G\mathcal{N}} \mu(f_u)$ a z Lemmatu 2.29 máme $\mu(f_\xi) \leq \liminf_{\mathcal{N}_\xi} \mu(f_u)$. Dohromady tedy dostáváme $\mu(f) = \mu(f_{\xi_0}) \leq \liminf_{\mathcal{N}_{\xi_0}} \mu(f_u) \leq \liminf_{G\mathcal{N}} \mu(f_u)$ a jsme hotovi.

Nyní položme $g = \limsup_{G\mathcal{N}} f_u = -\liminf_{G\mathcal{N}}(-f_u)$. Potom z předchozího víme, že funkce $-g$ je μ-měřitelná a $\mu(g) \geq -\liminf_{G\mathcal{N}} -\mu(f_u) = \limsup_{G\mathcal{N}} \mu(f_u)$. Pokud tedy existuje $\lim_{G\mathcal{N}} f_u = f$, pak $\mu(f) \leq \liminf_{G\mathcal{N}} \mu(f_u) \leq \limsup_{G\mathcal{N}} \mu(f_u) \leq \mu(f)$, a tudíž $\mu(f) = \lim_{G\mathcal{N}} \mu(f_u)$. □

Kapitola 3

Silně afinní borelovské funkce

V této kapitole ukážeme, že lze ke každé borelovské silně afinní funkci najít systém spojitých afinních funkcí konvergujících k této funkci podle filtru $G\mathcal{N}$. Přesněji; nechť E je lokálně konvexní metrizovatelný prostor a $K \subseteq E$ je jeho konvexní kompaktní podmnožina, potom je prostor všech silně afinních borelovských funkcí na K tvořen právě všemi limitami podle filtru $G\mathcal{N}$ funkcí z $\mathfrak{A}^c(K)$ prostoru všech spojitých afinních funkcí na K.

Základním stavebním kamenem této části je Choquetova věta o kapacitabilitě.

3.1 Choquetova věta o kapacitabilitě

Věta 3.1 (G. Choquet[4])**.** *Nechť E a F jsou kompaktní metrizovatelné prostory, $A, A_n, \tilde{A} \subseteq E$ a $B, B_n, \tilde{B} \subseteq F, n \in \omega$, a $C : \mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(F) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ funkce splňující následující podmínky:*

$$A \subseteq \tilde{A}, B \subseteq \tilde{B} \Rightarrow C(A, B) \leq C(\tilde{A}, \tilde{B}), \tag{3.1}$$

$$A_n \nearrow A, B_n \nearrow B \Rightarrow C(A, B) = \sup_{n \in \omega} C(A_n, B_n). \tag{3.2}$$

Pak platí:

Pokud $A \subseteq E$ a $B \subseteq F$ jsou analytické množiny a $t < C(A, B)$, pak existují klesající posloupnosti kompaktních množin (H_n) a (L_n) takové, že pro každé $n \in \omega$ platí $C(H_n, L_n) > t$, $\bigcap_{n \in \omega} H_n \subseteq A$ a $\bigcap_{n \in \omega} L_n \subseteq B$.

Mějme danou funkci $f \in \mathfrak{A}(K)$ splňující $\operatorname{Rng}(f) \subseteq (-1, 1)$. Nechť $E = F = K \times [-1, 1]$. Definujme funkci $C : \mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(F) \to \{0, 1\}$ následujícím způsobem:

$$C(A, B) = \begin{cases} 0 & \text{pokud existuje posloupnost } (f_u)_{u \in \mathcal{S}} \subseteq \mathfrak{A}^c(K)\,, \\ & \operatorname{Rng}(f_u) \subseteq (-1, 1) \text{ splňující:} \\ & \text{(i)} \quad A \subseteq \liminf\limits_{G\mathcal{N}} \{(x, t) \in E : f_u(x) > t\}. \\ & \text{(ii)} \quad B \subseteq \limsup\limits_{G\mathcal{N}} \{(x, t) \in E : f_u(x) < t\}. \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases} \tag{3.3}$$

Z definice je zřejmé, že funkce C splňuje podmínku (3.1).

Tvrzení 3.2. *Funkce C splňuje podmínku* (3.2).

Důkaz. Nechť A_n, B_n, A, B jsou množiny jako ve Větě 3.1. Pokud existuje $n \in \omega$ takové, že $C(A_n, B_n) = 1$, pak z faktu, že funkce C splňuje podmínku (3.1) a $\mathrm{Rng}(C) = \{0, 1\}$, dostáváme $C(A, B) = 1$ a podmínka (3.2) je splněna. Předpokládejme tedy, že $C(A_n, B_n) = 0$ pro každé $n \in \omega$. Zvolme pro každé $n \in \omega$ posloupnost (f_u^n) z definice funkce C. Pro $n \in \omega$ a $u \in \mathcal{S}$ označme $g_{n^\frown u} = f_u^n$ (a $g_\varnothing = 0$).

V následující části ověříme, že g_u splňuje předpoklady z definice funkce C a tedy $C(A, B) = 0$. Nechť $Y_u^n = \{(x, t) \in E : f_u^n(x) > t\}$. Z (3.3)(i) dostáváme následující tvrzení:

$$A_n \subseteq \liminf_{G\mathcal{N}} \{(x, t) \in E : f_u^n(x) > t\} = \liminf_{G\mathcal{N}} Y_u^n = Y^n. \tag{3.4}$$

Použijeme-li Důsledek 2.24 pro Y_u^n, obdržíme $\liminf_n Y^n = \liminf_{G\mathcal{N}} Z_v$, kde pro $v = n^\frown u$ je $Z_v = \{(x, t) \in E : f_u^n(x) > t\} = \{(x, t) \in E : g_v(x) > t\}$. Tudíž

$$\begin{aligned} A = \lim_n A_n = \liminf_n A_n \subseteq \\ \subseteq \liminf_n Y^n = \liminf_{G\mathcal{N}} Z_v = \liminf_{G\mathcal{N}} \{(x, t) \in E : g_v(x) > t\} \end{aligned}$$

a podmínka (3.3)(i) je splněna.

Analogicky ověříme podmínku (3.3)(ii).
Důsledek 2.24 pro $Y_u^n = \{(x, t) \in E : f_u^n(x) < t\}$ a $Y^n = \limsup_{G\mathcal{N}} Y_u^n$ nám dává

$$\begin{aligned} B = \lim_n B_n = \limsup_n B_n \subseteq \\ \subseteq \limsup_n Y^n = \limsup_{G\mathcal{N}} Z_v = \limsup_{G\mathcal{N}} \{(x, t) \in E : g_v(x) < t\}. \end{aligned}$$

□

3.2 Generování silně afinních funkcí

Ukázali jsme, že námi zkonstruovaná funkce C splňuje předpoklady Choquetovy věty o kapacitabilitě, v této části toho využijeme vhodnou volbou množin A a B tak, abychom dokázali požadované tvrzení. V celé sekci budeme uvažovat K kompaktní konvexní podmnožinu lokálně konvexního metrizovatelného prostoru X a označíme $E = K \times [-1, 1]$.

Definice 3.3. Nechť $g : K \to \mathbb{R}$ je omezená shora polospojitá funkce. Horní obálku funkce g definujeme jako

$$\tilde{g} = \inf \{f \in \mathfrak{A}^c(K) : f \geq g\}.$$

Pozorování 3.4. *Funkce $\tilde{g}$ je shora polospojitá.*

Důkaz. Platí

$$\{x \in K : \tilde{g}(x) < c\} = \bigcup_{\substack{f \in \mathfrak{A}^c(K) \\ f \geq g}} \{x \in K : f(x) < c\} ,$$

kde sjednocení lze uvažovat spočetné díky separabilitě $\mathfrak{A}^c(K)$. □

Tvrzení 3.5 (Mokobodzki [1])**.** *Nechť $g, g_n : K \to \mathbb{R}, n \in \omega$ jsou shora polospojité funkce a posloupnost $(g_n)_{n\in\omega}$ je klesající. Potom platí:*

(i) $\tilde{g}(x) = \sup \{\mu(g) : \mu \in \mathcal{M}^1(K) , r(\mu) = x\} ,$

(ii) pokud $g = \inf_n g_n$*, potom* $\tilde{g} = \inf_n \tilde{g_n}$.

Lemma 3.6. *Nechť $g \in \mathfrak{A}(K)$. Označme $V = \{(x,t) \in E : g(x) > t\}$ a buď $W \subseteq E \setminus V$. Jestliže platí $C(V,W) = 0$, potom $g \leq \liminf_{G\mathcal{N}} f_u$, kde $(f_u)_{u\in\mathcal{S}}$ je libovolná posloupnost z definice funkce C.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že existuje $x \in K$ splňující

$$g(x) > \liminf_{G\mathcal{N}} f_u(x).$$

Zvolme $t \in (\liminf_{G\mathcal{N}} f_u(x), g(x))$, tj. $(x,t) \in V$. Pro každé $F \in G\mathcal{N}$ tudíž existuje $u_F \in F$ splňující $f_{u_F}(x) < t$, a tedy

$$(x,t) \notin \{(y,s) \in E : f_{u_F}(y) > s)\} , F \in G\mathcal{N}.$$

Potom ale

$$(x,t) \notin \bigcup_{F\in G\mathcal{N}} \bigcap_{u\in F} \{(y,s) \in E : f_u(y) > s\} \supseteq V$$

a máme spor s $C(V,W) = 0$. □

Lemma 3.7. *Nechť $G \subseteq K \times [-1,1]$ je uzavřená množina a bod $(y,-1) \in G$ pro všechna $y \in K$. Definujme funkci*

$$g(x) = \sup \{t \in [-1,1] : (x,t) \in G\} , x \in K.$$

Potom $\tilde{G} = \overline{\mathrm{co}}\,(G) = \{(x,t) \in E : \tilde{g}(x) \geq t\}$.

Důkaz. Množina $\{(x,t) \in E : \tilde{g}(x) \geq t\}$ je uzavřená (Tvrzení 1.8), konvexní a obsahuje množinu G. Tedy $\tilde{G} \subseteq \{(x,t) \in E : \tilde{g}(x) \geq t\}$. Pro druhou inkluzi zvolme $y \in K$. Zřejmě $(y, \tilde{g}(y)) \in \{(x,t) \in E : \tilde{g}(x) \geq t\}$. Pro spor předpokládejme, že $(y, \tilde{g}(y)) \notin \tilde{G}$. Potom množiny $\{(y, \tilde{g}(y))\}$ a $\tilde{G}$ jsou uzavřené kompaktní konvexní a z Hahn–Banachovy věty dostaneme existenci funkce $j \in \mathfrak{A}^c(K)$ takové, že splňuje $\tilde{G} \subseteq \{(x,t) \in E : t < j(x)\}$ a $(y, \tilde{g}(y)) \in \{(x,t) \in E : j(x) < t\}$. To je ale spor, protože funkce j splňuje $j \geq g$ a tedy musí z definice $\tilde{g}$ platit $\tilde{g} \leq j$. □

Věta 3.8. *Nechť K je kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního metrizovatelného prostoru X. Potom*

$$\mathfrak{A}(K) = \left\{ \lim_{G\mathcal{N}} f_u : (f_u)_{u \in \mathcal{S}} \subseteq \mathfrak{A}^c(K) \;\&\; (\exists r \in \mathbb{R})(\forall u \in \mathcal{S})(|f_u| \leq r) \right\}.$$

Důkaz. Nechť $(f_u)_{u \in \mathcal{S}}$ je omezená posloupnost spojitých afinních funkcí a nechť $f = \lim_{G\mathcal{N}} f_u$. Díky Tvrzení 2.27 víme, že f je borelovská, a pokud $\mu \in M_x$, tak z Tvrzení 2.30 plyne $\mu(f) = \lim_{G\mathcal{N}} \mu(f_u) = \lim_{G\mathcal{N}} f_u(x) = f(x)$, tudíž f je silně afinní.

Zvolme nyní pevně $f \in \mathfrak{A}(K)$, díky Tvrzení 1.23 můžeme uvažovat $f(K) \subseteq (-1, 1)$ a nechť

$$A_0 = \{(x,t) \in E : f(x) > t\},$$
$$B_0 = \{(x,t) \in E : f(x) < t\}.$$

Množiny A_0 a B_0 jsou borelovské podle Tvrzení 1.17 (a tedy i analytické), tedy můžeme aplikovat Větu 3.1 pro C, A_0 a B_0. Pokud $C(A_0, B_0) = 0$, zvolme pevně posloupnost f_u z definice funkce C. Použitím Lemmatu 3.6 pro f, A_0, B_0, f_u a $-f, B_0, A_0, -f_u$ obdržíme

$$f \leq \liminf_{G\mathcal{N}} f_u \leq \limsup_{G\mathcal{N}} f_u \leq f,$$

a tedy jsme ukázali, že $f = \lim_{G\mathcal{N}} f_u$.

Předpokládejme tedy $C(A_0, B_0) = 1$. Nechť H_n a L_n jsou posloupnosti kompaktních množin garantované Větou 3.1; tedy $C(H_n, L_n) = 1$ pro každé $n \in \omega$, $H = \bigcap H_n \subseteq A_0$ a $L = \bigcap L_n \subseteq B_0$. Nechť $H_d = K \times \{-1\}$, $L_d = K \times \{1\}$. Z faktu $\operatorname{Rng}(f) \subseteq (-1, 1)$ obdržíme $H_d \subseteq A_0$ and $L_d \subseteq B_0$. Označme $\tilde{H} = \overline{\operatorname{co}}\,(H \cup H_d)$, $\tilde{L} = \overline{\operatorname{co}}\,(L \cup L_d)$ a $\tilde{H_n} = \overline{\operatorname{co}}\,(H_n \cup H_d)$, $\tilde{L_n} = \overline{\operatorname{co}}\,(L_n \cup L_d)$.

Definujme $h(x) = \sup\{t \in (-1,1) : (x,t) \in H \cup H_d\}$ a pro každé $n \in \omega$ analogicky $h_n(x) = \sup\{t \in (-1,1) : (x,t) \in H_n \cup H_d\}$. Funkce h i h_n jsou shora polospojité z Tvrzení 1.7. Z Lemmatu 3.7 okamžitě dostáváme, že

$$\tilde{H} = \left\{ (x,t) \in E : \tilde{h}(x) \geq t \right\},$$
$$\tilde{H_n} = \left\{ (x,t) \in E : \tilde{h_n}(x) \geq t \right\}, n \in \omega.$$

Z Tvrzení 3.5 bodu (ii) pak obdržíme $\tilde{h} = \inf_n \tilde{h_n}$, tedy i $\tilde{H} = \bigcap_n \tilde{H}_n$.

Protože $H \subseteq A_0$, máme $h \leq f$. Zvolme pevně $x \in K$ a definujme funkci

$$\Phi_x : \mathcal{M}_x(K) \to \mathbb{R}, \quad \Phi_x(\mu) = \mu(h).$$

Potom z Tvrzení 1.10 dostáváme, že Φ_x je shora polospojitá a definovaná na kompaktu $\mathcal{M}_x(K)$, tudíž nabývá svého maxima (z Tvrzení 1.9). Nechť ν je míra, která maximalizuje Φ_x. S využitím Tvrzení 3.5 bodu (i) potom dostáváme $f(x) = \nu(f) \geq \nu(h) = \tilde{h}(x)$ a $\tilde{H} \subseteq A_0$. Analogicky se ukáže, že $\tilde{L} \subseteq B_0$

Nyní ukážeme, že existuje $k \in \omega$ takové, že $\tilde{H}_k \cap \tilde{L}_k = \varnothing$. Označme $M_n = \tilde{H}_n \cap \tilde{L}_n$. Potom

$$\bigcap_n M_n = \bigcap_n \left(\tilde{H}_n \cap \tilde{L}_n\right) = \bigcap_n \tilde{H}_n \cap \bigcap_n \tilde{L}_n = \tilde{H} \cap \tilde{L} \subseteq A_0 \cap B_0 = \varnothing,$$

a tedy $(K \times [-1,1]) \setminus M_n$ je otevřené pokrytí kompaktu $K \times [-1,1]$. Z konečného podpokrytí obdržíme hledané $k \in \omega$.

Množiny $\tilde{H}_k$ a $\tilde{L}_k$ jsou disjunktní neprázdné konvexní kompaktní podmnožiny lokálně konvexního prostoru $K \times [-1,1]$, čímž jsou splněny všechny předpoklady Hahn–Banachovy věty a s jejím využitím dostaneme existenci spojité afinní funkce $g : K \to [-1,1]$ splňující

$$\tilde{H}_k \subseteq \{(x,t) \in K \times [-1,1] : g(x) > t\},$$
$$\tilde{L}_k \subseteq \{(x,t) \in K \times [-1,1] : g(x) < t\}.$$

V definici $C(H_k, L_k)$ pak stačí položit $f_u = g, u \in \mathcal{S}$. Tudíž $C(H_k, L_k) = 0$, což je spor s předpokladem $C(A_0, B_0) = 1$. □

3.3 Silně afinní funkce v nemetriz. prostorech

V této sekci rozšíříme výsledek získaný výše i na nemetrizovatelné prostory díky metodě zvané metrizovatelná redukce.

Nechť Ψ je systém funkcí na prostoru X. Definujeme $\Psi_0 = \Psi$ a pro ordinál $\lambda < \aleph_1$ nechť Ψ_λ je systém obsahující všechny bodové limity funkcí z $\bigcup_{\kappa<\lambda} \Psi_\kappa$. Označme $\mathcal{W}(\mathfrak{A}^c(X)) = \{\inf w_i : w_i \in \mathfrak{A}^c(X), 0 \le i \le n\}$ systém spojitých konkávních po částech afinních funkcí na X. Dále pro $\alpha < \aleph_1$ budou $\mathcal{B}_\alpha(X) = (\mathscr{C}(X))_\alpha$ baireovské funkce třídy α.

Tvrzení 3.9. *$\mathcal{W}(\mathfrak{A}^c(X)) - \mathcal{W}(\mathfrak{A}^c(X))$ je hustý v $\mathscr{C}(X)$.*

Důkaz. [7], Proposition 3.11. (c). □

Tvrzení 3.10. *Nechť X je topologický prostor a $f \in \mathcal{B}_\beta(X), \beta < \aleph_1$ Potom existuje spočetný systém funkcí $\mathcal{F} \subseteq \mathscr{C}(X)$ takový, že $f \in \mathcal{F}_\beta$.*

Důkaz. Tvrzení zřejmě platí pro $\beta = 0$. Nechť $\beta < \aleph_1$ libovolné a předpokládejme, že tvrzení platí pro všechna $\alpha < \beta$, tj. pro libovolnou $g \in \mathcal{B}_\alpha(X)$ existuje spočetný systém $\mathcal{F}^g \subseteq \mathscr{C}(X)$, že $g \in (\mathcal{F}^g)_\alpha$. Nechť $f \in \mathcal{B}_\beta(X)$. Potom existují $f_n \in \mathcal{B}_{\beta_n}(X), \beta_n < \beta, n \in \omega$ takové, že $f = \lim_n f_n$. Položme $\mathcal{F} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{F}^{f_n}$. Potom $\mathcal{F} \subseteq \mathscr{C}(X)$ je spočetný, pro všechna $n \in \omega$ platí $f_n \in \mathcal{F}_{\beta_n}$, a tedy $f \in \mathcal{F}_\beta$. □

Tvrzení 3.11. *Nechť $\varphi : X \to Y$ je spojitá afinní surjekce kompaktní konvexní množiny X na kompaktní konvexní množinu Y. Nechť $g : Y \to \mathbb{R}$ je funkce. Potom g je silně afinní právě tehdy když $g \circ \varphi$ je silně afinní.*

Důkaz. [7], Proposition 5.29. $\square$

Lemma 3.12. *Nechť X je kompaktní konvexní množina a $f \in \mathcal{B}_\alpha(X)$, $\alpha < \aleph_1$ je silně afinní baireovská funkce. Potom existuje kompaktní konvexní metrizovatelná množina Y, spojitá afinní surjekce $\varphi : X \to Y$ a silně afinní borelovská funkce $\widetilde{g} : Y \to \mathbb{R}$ splňující*

$$f(x) = \widetilde{g}(\varphi(x)).$$

Důkaz. Díky Tvrzení 1.23 můžeme předpokládat, že $0 \leq f \leq 1$. Nechť

$$\mathcal{H} = \{h_n \in \mathscr{C}(X) : n \in \omega\}$$

je spočetný systém splňující, že $f \in \mathcal{H}_\alpha$ (Tvrzení 3.10). Z Tvrzení 3.9 dostaneme konečné soubory $\mathcal{U}_n^k \subseteq \mathfrak{A}^c(X)$, $\mathcal{V}_n^k \subseteq \mathfrak{A}^c(X)$ takové, že funkce $u_n^k = \inf \mathcal{U}_n^k \in \mathcal{W}(\mathfrak{A}^c(X))$, $v_n^k = \sup \mathcal{V}_n^k \in -\mathcal{W}(\mathfrak{A}^c(X))$ splňují $\left\|h_n - (u_n^k + v_n^k)\right\|_\infty < \frac{1}{k}$ pro všechna $n, k \in \omega$. Položme

$$\Phi = \bigcup_{n,k \in \omega} (\mathcal{U}_n^k \cup \mathcal{V}_n^k),$$

definujme $\varphi : X \to \mathbb{R}^\omega$ vztahem $\varphi(x) = (\phi(x))_{\phi \in \Phi}$ a označme $Y = \varphi(X)$. Potom φ je zřejmě spojitá afinní (všechny složky jsou spojité afinní) surjekce X na Y a Y je tedy kompaktní konvexní podmnožina metrického prostoru $\mathbb{R}^\omega$. Pro libovolné $\eta \in \Phi$ a $y \in Y$ definujme $\widetilde{\eta}(y) = \eta(x)$, kde $x \in X$ je takové, že $\varphi(x) = y$. Definice je korektní, protože pokud jsou $x_1, x_2 \in X$, že $\varphi(x_1) = y = \varphi(x_2)$, pak $\eta(x_1) = \eta(x_2)$. Potom $\widetilde{\eta}$ je afinní spojitá funkce.

Pro $n, k \in \omega$ označme

$$\widetilde{\mathcal{U}}_n^k = \left\{\widetilde{u} : u \in \mathcal{U}_n^k\right\},$$
$$\widetilde{\mathcal{V}}_n^k = \left\{\widetilde{v} : v \in \mathcal{V}_n^k\right\}$$

a $\widetilde{u}_n^k = \inf \widetilde{\mathcal{U}}_n^k$, $\widetilde{v}_n^k = \sup \widetilde{\mathcal{V}}_n^k$. Zvolme $y \in Y$ a $x \in \varphi^{-1}(y)$, potom zřejmě

$$\widetilde{u}_n^k(y) = \inf_{u \in \mathcal{U}_n^k} \widetilde{u}(y) = \inf_{u \in \mathcal{U}_n^k} \widetilde{u}(\varphi(x)) = \inf_{u \in \mathcal{U}_n^k} u(x) = u_n^k(x)$$

a analogicky dostaneme $\widetilde{v}_n^k \circ \varphi = v_n^k$.

Nyní ukážeme, že existuje $\widetilde{\mathcal{H}} \subseteq \mathscr{C}(Y)$ spočetný systém takový, že pro každé $\gamma \leq \alpha$ a $g \in \mathcal{H}_\gamma$ existuje $\widetilde{g} \in \widetilde{\mathcal{H}}_\gamma$, že $g = \widetilde{g} \circ \varphi$. Definujme

$$\widetilde{h}_n = \lim_k (\widetilde{u}_n^k + \widetilde{v}_n^k), n \in \omega,$$

a $\widetilde{\mathcal{H}} = \left\{\widetilde{h}_n : n \in \omega\right\}$, pak pro $y \in Y$ a $x \in \varphi^{-1}(y)$ platí

$$\widetilde{h}_n(y) = \lim_k (\widetilde{u}_n^k + \widetilde{v}_n^k)(y) = \lim_k (\widetilde{u}_n^k(\varphi(x)) + \widetilde{v}_n^k(\varphi(x))) = \lim_k (u_n^k(x) + v_n^k(x)) = h_n(x), \quad (3.5)$$

tedy definice je korektní a máme $\widetilde{h}_n \circ \varphi = h_n$, což je požadovaný výsledek pro $\gamma = 0$. Nechť $\gamma \leq \alpha$ a platí indukční předpoklad pro všechna $\delta < \gamma$. Potom pro libovolné $g \in \mathcal{H}_\gamma$ existují $g_n \in \mathcal{H}_{\delta_n}, \delta_n < \gamma$ takové, že $g = \lim_n g_n$. Z indukčního předpokladu dostáváme $\widetilde{g}_n \in \widetilde{\mathcal{H}}_{\gamma_n}$ a analogickým postupem jako v (3.5) obdržíme funkci $\widetilde{g}$ splňující $\widetilde{g} \circ \varphi = g$. Funkce $\widetilde{g}$ je zřejmě baireovská v metrizovatelném prostoru Y, tedy je borelovská. Zbývá ukázat, že funkce $\widetilde{g}$ je silně afinní, což plyne z Tvrzení 3.11. $\square$

Díky této metodě si nyní můžeme ve Větě 3.8 odpustit předpoklad metrizovatelnosti.

Věta 3.13. *Nechť X je kompaktní konvexní množina, $\alpha < \aleph_1$ a $f : X \to \mathbb{R}$ funkce. Potom f je silně afinní baireovská funkce právě když existuje $r \in \mathbb{R}$ a systém spojitých afinních funkcí $f_u : X \to \mathbb{R}, |f_u| \leq r, u \in \mathcal{S}$ takový, že $f = \lim_{G\mathcal{N}} f_u$.*

Důkaz. Nechť f je silně afinní funkce baireovské třídy $\alpha < \aleph_1$ a φ je spojitá afinní surjekce na $L = \varphi(X)$ kompaktní konvexní metrizovatelnou podmnožinu $\mathbb{R}^\omega$ z Lemmatu 3.12. Nechť $\widetilde{f} \in \mathfrak{A}(L)$ je odpovídající funkce z Lemmatu 3.12. Potom z Věty 3.8 dostáváme omezenou posloupnost spojitých afinních funkcí $\widetilde{f}_u : L \to \mathbb{R}, u \in \mathcal{S}$, splňující $\widetilde{f} = \lim_{G\mathcal{N}} \widetilde{f}_u$. Položme $f_u = \widetilde{f}_u \circ \varphi, u \in \mathcal{S}$. Potom zřejmě $f_u \in \mathfrak{A}^c(X)$ a pro $x \in X$ máme

$$\lim_{G\mathcal{N}} f_u(x) = \lim_{G\mathcal{N}} \widetilde{f}_u(\varphi(x)) = \widetilde{f}(\varphi(x)) = f(x).$$

Nechť $(f_u)_{u\in\mathcal{S}} \subseteq \mathfrak{A}^c(X)$ je omezená posloupnost a existuje $f = \lim_{G\mathcal{N}} f_u$. Nechť $\widetilde{f}_u, \widetilde{f} : L \to \mathbb{R}$ jsou odpovídající funkce z Lemmatu 3.12. Potom $\left(\widetilde{f}_u\right)_{u\in\mathcal{S}} \subseteq \mathfrak{A}^c(L)$ je omezená posloupnost a pro $y \in L$ a $x \in \varphi^{-1}(y)$ platí

$$\lim_{G\mathcal{N}} \widetilde{f}_u(y) = \lim_{G\mathcal{N}} \widetilde{f}_u(\varphi(x)) = \lim_{G\mathcal{N}} f_u(x) = f(x) = \widetilde{f}(\varphi(x)) = \widetilde{f}(y).$$

Funkce $\widetilde{f}$ je borelovská silně afinní z Věty 3.8, tudíž existuje $\alpha < \aleph_1$, že $\widetilde{f} \in \mathcal{B}_\alpha(L)$, což znamená, že i f je silně afinní funkce baireovy třídy α. $\square$

Kapitola 4

Bianalytické funkce

4.1 Konstrukce Suslinova schématu

Nejprve dokážeme jednoduché technické lemma, které se nám bude dále hodit.

Lemma 4.1. *Nechť X je separabilní metrizovatelný prostor a nechť $(P_s)_{s\in\mathcal{S}}$ je Suslinovo schéma tvořené podmnožinami X. Označme $G_s = \bigcap\limits_{s'\subseteq s} P_{s'}$ a $H_s = \bigcup\limits_{s'\leq s} G_{s'}$. Potom*

(i) $G_u \supseteq G_v,\quad$ *pro* $u \subseteq v \in \mathcal{S}$,

(ii) $H_u \supseteq H_v,\quad$ *pro* $u \subseteq v \in \mathcal{S}$,

(iii) $H_u \subseteq H_v,\quad$ *pro* $u \leq v \in \mathcal{S}$

(iv) a $\bigcup\limits_{\nu\in\mathcal{N}} \bigcap\limits_{n\in\omega} P_{\nu|n} = \bigcup\limits_{\nu\in\mathcal{N}} \bigcap\limits_{n\in\omega} H_{\nu|n}$.

Důkaz. Bod (i) plyne přímo z definice množin G_s. Bod (ii) lze nahlédnout z

$$\begin{aligned} x \in H_v \Leftrightarrow (\exists v' \leq v)(x \in G_{v'}) \overset{(i)}{\Rightarrow} (\exists v' \leq v)(\forall j \leq \operatorname{len}(v))(x \in G_{v'|j}) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\exists u' \leq u)(x \in G_{u'}) \Rightarrow x \in H_u \end{aligned}$$

a (iii) ukážeme následujícím způsobem:

$$x \in H_u \Leftrightarrow (\exists u' \leq u \leq v)(x \in G_{u'}) \Rightarrow x \in H_u.$$

Zbývá dokázat tvrzení (iv). Označme $C = \bigcup\limits_{\nu\in\mathcal{N}} \bigcap\limits_{n\in\omega} P_{\nu|n}$ a $B = \bigcup\limits_{\nu\in\mathcal{N}} \bigcap\limits_{n\in\omega} H_{\nu|n}$. Dostáváme

$$\begin{aligned} x \in C &\Leftrightarrow (\exists \eta \in \mathcal{N})(\forall m \in \omega)(x \in P_{\eta|m}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\exists \eta \in \mathcal{N})(\forall m \in \omega)(x \in G_{\eta|m}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\exists \eta \in \mathcal{N})(\forall m \in \omega)(x \in H_{\eta|m}) \Rightarrow x \in B, \end{aligned}$$

a tedy $C \subseteq B$. Zvolme nyní pevně $y \in B$ a nechť $\eta \in \mathcal{N}$ splňuje $y \in H_{\eta|m}$ pro všechna $m \in \omega$. Pro $u \in \mathcal{S}$ definujeme ordinál

$$\alpha_u = \sup \left\{ \beta < \omega : (\exists v \in \omega^\beta)(y \in G_{u^\frown v}) \right\} .$$

Posloupnosti $(a_i)_{i\in\omega}, a_i \in \omega$ a $(A_i)_{i\in\omega}, A_i \in \mathcal{S}$ definujeme následnovně:

$$\begin{aligned} A_0 &= (\varnothing), \\ a_0 &= \min \left\{ 0 \leq j \leq \eta(0) : \alpha_{A_0{}^\frown j} = \omega \right\} , \\ A_1 &= (a_0), \\ a_i &= \min \left\{ 0 \leq j \leq \eta(i) : \alpha_{A_i{}^\frown j} = \omega \right\} , \\ A_{i+1} &= A_i{}^\frown a_i. \end{aligned}$$

Prvně je třeba ověřit, že definice je korektní. Pro $i \in \omega$ položme

$$\alpha^i_{max} = \max \left\{ 0 \leq j \leq \eta(i) : \alpha_{A_i{}^\frown j} = \omega \right\} .$$

Pro spor předpokládejme, že $\alpha^0_{max} < \omega$. Potom pro všechna $0 \leq j \leq \eta(0)$ a $v \in \omega^{\alpha^0_{max}+1}$ platí $y \notin G_{j^\frown v}$, z čehož vyplývá $y \notin H_{\eta|(\alpha^0_{max}+2)}$. Analogicky z předpokladu $\alpha^i_{max} < \omega$ získáme spor $y \notin H_{\eta|(\alpha^i_{max}+i+2)}$, a tedy definice je korektní.

Položme $A = (a_0, a_1 \ldots)$, potom $y \in \bigcap\limits_{m\in\omega} G_{A|m}$, z čehož plyne $y \in C$ a obdrželi jsme druhou inkluzi $B \subseteq C$. □

Tvrzení 4.2. *Nechť E je separabilní metrický prostor, $C_1, C_2 \subseteq E$ koanalytické množiny. Potom existuje posloupnost množin $(H_u)_{u\in\mathcal{S}}$ v E splňující:*

(i) $C_1 \setminus C_2 \subseteq \liminf\limits_{G\mathcal{N}} H_u$,

(ii) $C_2 \setminus C_1 \subseteq E \setminus \limsup\limits_{G\mathcal{N}} H_u \left(= \liminf\limits_{G\mathcal{N}} (E \setminus H_u) \right)$.

Důkaz. Množina $E \setminus C_2$ je analytická a splňuje předpoklady Lemmatu 4.1, dostáváme tedy Suslinovo schéma $(L_u)_{u\in\mathcal{S}}$ splňující podmínky (ii) a (iii) z lemmatu. Taktéž $E \setminus C_1$ je analytická a splňuje předpoklady téhož lemmatu, takže dostáváme Suslinovo schéma $(K'_u)_{u\in\mathcal{S}}$. Položme $K_u = E \setminus K'_u, u \in \mathcal{S}$ a z podmínek (ii) a (iii) dostáváme pro K_u následující:

$$\diamond\, u \subseteq v \Rightarrow K_u \subseteq K_v, \tag{4.1a}$$

$$\diamond\, u, v \in \omega^k, k \in \omega : (u \leq v \Rightarrow K_u \supseteq K_v) . \tag{4.1b}$$

Položme $H_u = \bigcap\limits_{t\subseteq u} (K_t \cup L_t)$. Ověříme, že takto definované množiny splňují podmínky (i) a (ii) z tvrzení:

(i) Nechť $x \in C_1 \setminus C_2$. Protože $x \in C_1$, množina $A = \{u \in \mathcal{S} : x \notin K_u\}$ je strom s konečnými větvemi (označme WF). Zároveň $x \notin C_2$, tedy strom

$$B = \{u \in \mathcal{S} : x \in L_u\}$$

má nekonečnou větev (označme IF); exisuje $\alpha \in \mathcal{N}$, že $\alpha|n \in B$ pro všechna $n \in \omega$. Označme $D = \{u \in \mathcal{S} : x \in H_u\}$.
Uvažujme hru $J(D)$: Nechť hráč I hraje v $i-$tém tahu vždy $\alpha(i)$ bez ohledu na tahy hráče II a zvolme libovolné $\beta \in \mathcal{N}$ splňující $\beta \geq \alpha$, to znamená, že hráč II může hrát $\beta(i)$ jako odpověď na tah $\alpha(i)$ hráče I. Protože A je WF, tak existuje $k \in \omega$ takové, že $\beta|k \notin A$. Zvolme libovolné $u \in \mathcal{S}$ takové, že $u \supseteq \beta|k$. Nechť $t \subseteq u$. Nyní nastává právě jeden ze dvou případů:

(a) $\beta|k \subseteq t$: Potom $\beta|k \notin A$, a tudíž $t \notin A$, což znamená, že $x \in K_t$.

(b) $t = \beta|j$ pro nějaké $j \leq k$: Víme $\alpha(i) \leq \beta(i) = t(i)$ pro všechna $i \leq j$. Současně platí, že α je nekonečná větev v B a tedy $\alpha|j \in B$, což znamená $x \in L_{\alpha|j}$. Ale z podmínky (iii) Lemmatu 4.1 dostáváme $x \in L_{\alpha|j} \subseteq L_t$.

Když dáme oba případy dohromady, dostaneme $x \in K_t \cup L_t$ pro každé $t \subseteq u$. Tedy $x \in \bigcap_{t \subseteq u} K_t \cup L_t = H_u$, a tudíž $u \in D$. To znamená, že hráč I vyhrává ve hře $J(D)$ bez ohledu na to, co hraje hráč II (β bylo zvoleno libovolně) a máme $D \in G\mathcal{N}$. Z definice limes inferior vidíme, že

$$x \in \liminf_{G\mathcal{N}} H_u \Leftrightarrow \{u \in \mathcal{S} : x \in H_u\} \in G\mathcal{N},$$

což je přesně to, co jsme získali.

(ii) Nechť $x \in C_2 \setminus C_1$. Nyní množina $A = \{u \in \mathcal{S} : x \notin K_u\}$ je IF a existuje nekonečná větev $\alpha \in \mathcal{N}$ a množina $B = \{u \in \mathcal{S} : x \in L_u\}$ je WF. Označme $D' = \{u \in \mathcal{S} : x \notin H_u\}$. Pro hru $J(D')$ použijeme podobný argument jako výše: Hráč I hraje $\alpha(i)$ a hráč II hraje libovolné $\beta(i) \geq \alpha(i)$, $\beta \in \mathcal{N}$. Víme, že $\alpha|i \in A$ pro každé $i \in \omega$, tedy $x \notin K_{\alpha|i}$. Ale z (4.1b) a $\alpha(i) \leq \beta(i)$ dostáváme $K_{\alpha|i} \supseteq K_{\beta|i}$ a následně i $x \notin K_{\beta|i}$ pro každé $i \in \omega$. Protože B je WF, existuje $k \in \omega$ takové, že $\beta|k \notin B \Rightarrow x \notin L_{\beta|k}$ a z podmínky (ii) Lemmatu 4.1 obdržíme $x \notin L_{\beta|m}$ pro všechna $m \geq k$. Tedy $x \notin L_{\beta|m} \cup K_{\beta|m}$ pro $m \geq k$, a tudíž $x \notin H_u$ pro $u \supseteq \beta|k$, což vede k $(\beta|k)^\frown v \in D'$ pro všechna $v \in \mathcal{S}$, tedy $D' \in G\mathcal{N}$ a $x \in \liminf_{G\mathcal{N}}(E \setminus H_u)$.

$\square$

Předchozí tvrzení bylo formulováno pro obecné koanalytické množiny, což nám s bianalytickými funkcemi příliš nepomůže. Díky následujícím tvrzením a Větě 1.6 ale dokážeme tento problém odstranit.

Tvrzení 4.3. *Nechť E je separabilní metrizovatelný prostor a $B \subseteq E \times \mathbb{R}$ je analytická množina. Potom existuje Suslinovo schéma uzavřených množin $(Q_s)_{s \in \mathcal{S}}$ splňující:*

(i) $B = \bigcup_{\nu \in \mathcal{N}} \bigcap_{k \in \omega} Q_{\nu|k}$,

(ii) $(\forall u \in \mathcal{S} \setminus \{\varnothing\})(\exists t \in \mathbb{R} : t > 0)(Q_u \subseteq E \times [-t, t])$.

Důkaz. Pro $n \in \omega$ označme $E_{<n>} = E \times [-n, n]$. Nechť $(P_s)_{s\in\mathcal{S}}$ je Suslinovo schéma uzavřených množin splňující $B = \bigcup_{\nu\in\mathcal{N}} \bigcap_{k\in\omega} P_{\nu|k}$. Pro $n \in \omega$ a $u \in \mathcal{S}$ položme

$$Q_{n^\frown u} = E_{<n>} \cap P_u, Q_{(\varnothing)} = E \times \mathbb{R}.$$

Potom toto schéma zřejmě splňuje podmínku (ii). Zbývá ověřit podmínku (i).

Volme $(y, s) \in B$, tedy existuje $\eta \in \mathcal{N}$ tak, že pro všechna $k \in \omega$ je $(y, s) \in P_{\eta|k}$. Potom ale pro $m \in \omega$ takové, že $m > |s|$ platí $(y, s) \in Q_{(m^\frown\eta)|k}$ pro všechna $k \in \omega$ a tedy $B \subseteq \bigcup_{\nu\in\mathcal{N}} \bigcap_{k\in\omega} Q_{\nu|k}$.

Nyní zvolme $(y, s) \in \bigcup_{\nu\in\mathcal{N}} \bigcap_{k\in\omega} Q_{\nu|k}$. Opět existuje $\eta \in \mathcal{N}$, že pro $k \in \omega$ je $(y, s) \in Q_{\eta|k}$. Označme $\eta' \in \mathcal{N}$ takové, že $\eta = \eta(0)^\frown\eta'$. Potom ale lehce nahlédneme, že $(y, s) \in E_{<\eta(0)>} \cap P_{\eta'|k} \subseteq P_{\eta'|k}$ pro všechna $k \in \omega$ a máme i druhou hledanou inkluzi. □

Tvrzení 4.4. *Nechť E je separabilní metrizovatelný prostor a $B \subseteq E\times\mathbb{R}$ je analytická množina. Pro $r \in \mathbb{R}$ označme $E_{(r)} = E \times (-\infty, r)$, resp. $E_{[r]} = E \times (-\infty, r]$. Nechť $(P_s)_{s\in\mathcal{S}}$ je regulární Suslinovo schéma splňující $B = \bigcup_{\nu\in\mathcal{N}} \bigcap_{k\in\omega} P_{\nu|k}$. Položme $Q_s = P_s \cup E_{(-\operatorname{len}(s))}$, resp. $Q'_s = P_s \cup E_{[-\operatorname{len}(s)]}$. Potom platí:*

(i) $B = \bigcup_{\nu\in\mathcal{N}} \bigcap_{k\in\omega} Q_{\nu|k} = \bigcup_{\nu\in\mathcal{N}} \bigcap_{k\in\omega} Q'_{\nu|k}$,

(ii) pro $u \subseteq v$ platí $Q_u \supseteq Q_v$ a $Q'_u \supseteq Q'_v, u, v \in \mathcal{S}$,

(iii) pokud pro $u \leq v$ platí $P_u \subseteq P_v$, pak i $Q_u \subseteq Q_v$ a $Q'_u \subseteq Q'_v, u, v \in \omega^k, k \in \omega$.

Důkaz. Zřejmě $P_s \subseteq Q_s \subseteq Q'_s, s \in \mathcal{S}$ a tedy $B \subseteq \bigcup_{\nu\in\mathcal{N}} \bigcap_{k\in\omega} Q_{\nu|k} \subseteq \bigcup_{\nu\in\mathcal{N}} \bigcap_{k\in\omega} Q'_{\nu|k}$. Zvolme $(y, t) \in \bigcup_{\nu\in\mathcal{N}} \bigcap_{k\in\omega} Q'_{\nu|k}$. Tedy existuje $\nu \in \mathcal{N}$ tak, že

$$(y, t) \in \bigcap_{k\in\omega} Q'_{\nu|k} = \bigcap_{k\in\omega} \left(P_{\nu|k} \cup E_{[-k]}\right) = \left(\bigcap_{k\in\omega} P_{\nu|k}\right) \cup \left(\bigcap_{k\in\omega} E_{[-k]}\right),$$

kde poslední rovnost platí díky vlastnosti $P_{\nu|k} \supseteq P_{\nu|l}$ a $E_{[-k]} \supseteq E_{[-l]}$ pro libovolné $k \leq l$. Protože ale $\bigcap_{k\in\omega} E_{[-k]} = \varnothing$, tak dostáváme $(y, s) \in \bigcap_{k\in\omega} P_{\nu|k}$ a $\bigcup_{\nu\in\mathcal{N}} \bigcap_{k\in\omega} Q'_{\nu|k} \subseteq B$, tedy jsme ukázali bod (i). Body (ii) a (iii) plynou jednoduchým ověřením přímo z definice. □

Tvrzení 4.5. *Nechť E je separabilní metrizovatelný prostor a $B \subseteq E$ je analytická. Nechť $(P_u)_{u\in\mathcal{S}}$ je regulární Suslinovo schéma uzavřených množin takové, že $B = \bigcup_{\nu\in\mathcal{N}} \bigcap_{n\in\omega} P_{\nu|n}$. Potom existuje Suslinovo schéma otevřených množin $(Q_u)_{u\in\mathcal{S}}$ splňující*

(i) $Q_u \supseteq P_u, u \in \mathcal{S}$,

(ii) $B = \bigcup_{\nu \in \mathcal{N}} \bigcap_{n \in \omega} Q_{\nu|n}$.

Důkaz. Nechť ρ je kompatibilní metrika na E, označme $\operatorname{dist}(x, A)$ vzdálenost bodu $x \in E$ od množiny $A \subseteq E$, tj. $\operatorname{dist}(x, A) = \inf \{\rho(x, y) : y \in A\}$.

Položme $Q_u = \left\{x \in E : \operatorname{dist}(x, P_u) < \frac{1}{\operatorname{len}(u)}\right\}$, $u \in \mathcal{S}$. Potom Q_u jsou otevřené množiny a automaticky splňují podmínku (i). Zbývá tedy ukázat bod (ii). Zřejmě platí $B \subseteq \bigcup_{\nu \in \mathcal{N}} \bigcap_{n \in \omega} Q_{\nu|n}$, zvolme tedy pevně $x \in \bigcup_{\nu \in \mathcal{N}} \bigcap_{n \in \omega} Q_{\nu|n}$. Nechť $\eta \in \mathcal{N}$ splňuje $x \in Q_{\eta|n}$ pro všechna $n \in \omega$. Pro spor předpokládejme, že existuje $m \in \omega$ takové, že $x \notin P_{\eta|m}$. Položme $\varepsilon = \operatorname{dist}(x, P_{\eta|m})$. Protože množina $P_{\eta|m}$ je uzavřená, máme $\varepsilon > 0$. Zvolme $k \in \omega$, aby $\varepsilon > \frac{1}{k}$. Potom z regularity schématu (P_u) platí $\operatorname{dist}(x, P_{\eta|(m+k)}) > \frac{1}{k}$, z čehož dostáváme kýžený spor $x \notin Q_{\eta|(m+k)}$. □

4.2 Generování bianalytických funkcí

Tvrzení 4.6. *Nechť E je separabilní metrizovatelný prostor, $f : E \to \mathbb{R}$ funkce splňující, že množina $\{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : f(x) \geq t\}$ je analytická. Potom existuje systém spojitých funkcí $(h_u)_{u \in \mathcal{S} \setminus \{\varnothing\}}$, $h_u : X \to \mathbb{R}$ tak, že*

$$\{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : f(x) \geq t\} = \bigcup_{\nu \in \mathcal{N}} \bigcap_{k \in \omega} \{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : h_u(x) \geq t\}.$$

Důkaz. Tvrzení 4.3 nám zajišťuje existenci Suslinova schématu uzavřených množin $(P_s)_{s \in \mathcal{S}}$, kde množiny $t \in \mathbb{R} : (x,t) \in P_s, x \in E$ jsou omezené pro všechny posloupnosti $s \in \mathcal{S} \setminus \{\varnothing\}$. Standartním postupem (Pozorování 1.13) lze zajistit, že schéma (P_s) je regulární. Potom aplikací Tvrzení 4.4 získáme Suslinovo schéma uzavřených množin $(R_s)_{s \in \mathcal{S}}$, díky čemuž máme pro množiny $R_s, s \in \mathcal{S}$ splněny předpoklady Tvrzení 1.7. Tvrzení 4.5 nám pak k schématu $(R_s)_{s \in \mathcal{S}}$ zkonstruuje Suslinovo schéma otevřených množin $(Q_s)_{s \in \mathcal{S}}$ (přičemž neztratíme žádnou vlastnost, kterou potřebujeme pro splnění předpokladů Tvrzení 1.7). Můžeme tedy korektně definovat

$$r_s(x) = \sup \{t \in \mathbb{R} : (x,t) \in R_s\}, s \in \mathcal{S} \setminus \{\varnothing\},$$
$$q_s(x) = \sup \{t \in \mathbb{R} : (x,t) \in Q_s\}, s \in \mathcal{S} \setminus \{\varnothing\}.$$

Potom funkce $(r_s)_{s \in \mathcal{S} \setminus \{\varnothing\}}$ jsou omezené shora polospojité, funkce $(q_s)_{s \in \setminus \{\varnothing\}}$ omezené zdola polospojité a zároveň platí $p_s(x) \leq q_s(x)$ pro $x \in E, s \in \mathcal{S} \setminus \{\varnothing\}$, tedy z Věty 1.6 získáváme pro každé $s \in \mathcal{S} \setminus \{\varnothing\}$ existenci spojité funkce h_s splňující $p_s \leq h_s \leq q_s$. Všechna použitá tvrzení garantovala, že výsledek Suslinovy operace na nové schéma se nezmění, zřejmě tedy platí

$$\{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : f(x) \geq t\} = \bigcup_{\nu \in \mathcal{N}} \bigcap_{k \in \omega} \{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : h_u(x) \geq t\},$$

kde položíme $\left\{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : h_{(\varnothing)}(x) \geq t\right\} = X \times \mathbb{R}$. □

Důsledek 4.7. *Nechť E je separabilní metrizovatelný prostor, $f : E \to \mathbb{R}$ funkce splňující, že množina $\{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : f(x) \leq t\}$ je analytická. Potom existuje systém spojitých funkcí $(h_u)_{u\in\mathcal{S}\setminus\{\varnothing\}}, h_u : X \to \mathbb{R}$ tak, že*

$$\{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : f(x) \leq t\} = \bigcup_{\nu\in\mathcal{N}} \bigcap_{k\in\omega} \{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : h_u(x) \leq t\}\,.$$

Důkaz. Stačí aplikovat předchozí tvrzení pro funkci $-f$. □

Lemma 4.8. *Nechť E je separabilní metrizovatelný prostor, $f, g : E \to \mathbb{R}$ funkce, které splňují, že množiny*

$$\{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : f(x) > t\} \text{ a } \{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : g(x) < t\}$$

jsou koanalytické. Potom existuje posloupnost spojitých funkcí $(h_u)_{u\in\mathcal{S}}, h_u : X \to \mathbb{R}$, splňující pro všechna $x \in E$ taková, že $f(x) \leq g(x)$, vztah

$$f(x) \leq \liminf_{G\mathcal{N}} h_u(x) \leq \limsup_{G\mathcal{N}} h_u(x) \leq g(x).$$

Důkaz. Položme

$$C_1 = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : f(x) > t\}\,,$$
$$C_2 = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : g(x) < t\}\,.$$

Potom obě množiny jsou koanalytické a splňují předpoklady Lemmatu 4.2. Existuje tedy systém množin $(H_u)_{u\in\mathcal{S}}$ takový, že $C_1 \subseteq \liminf_{G\mathcal{N}} H_u \subseteq \limsup_{G\mathcal{N}} H_u \subseteq X \setminus C_2$.

V této chvíli se vrátíme k důkazu Lemmatu 4.2 a uvědomíme si následující. K definici množin $(H_u)_{u\in\mathcal{S}}$ se používají Suslinova schémata $(L_t)_{t\in\mathcal{S}}$ a $(K_t)_{t\in\mathcal{S}}$, která splňují specifické vlastnosti zaručené v Trzení 4.1. Když se podíváme podrobněji, zjistíme, že cesta ke schématu $(H_u)_{u\in\mathcal{S}}$ od původních schématů $(P_s)_{s\in\mathcal{S}}$ a $(P'_s)_{s\in\mathcal{S}}$ z Lemmatu 4.1 se děje pomocí konečných průniků, sjednocení a doplňků. Díky Tvrzení 4.6 a jeho důsledku můžeme pro analytické množiny $E \setminus C_1$ a $E \setminus C_2$ zvolit Suslinova schémata $(P_s)_{s\in\mathcal{S}}$ a $(P'_s)_{s\in\mathcal{S}}$ tak, aby funkce

$$p_s(x) = \inf\{t \in [-1,1] : (x,t) \in P_s\}\,, s \in \mathcal{S} \setminus \{\varnothing\},$$
$$p'_s(x) = \sup\{t \in [-1,1] : (x,t) \in P'_s\}\,, s \in \mathcal{S} \setminus \{\varnothing\}$$

byly spojité. Pokud pak položíme $h_u(x) = \sup(H_u)_x, u \in \mathcal{S} \setminus \{\varnothing\}, x \in E$, předchozí úvaha nám říká, že h_u jsou definované pomoci operací maxima a minima z konečných množin spojitých funkcí, a tedy $(h_u)_{u\in\mathcal{S}\setminus\{\varnothing\}}$ jsou spojité funkce. Zároveň můžeme funkci $h_{(\varnothing)}$ definovat libovolně a výsledek limitního procesu to neovlivní.

Zvolme $y \in X$ takové, že $f(y) \leq g(y)$. Potom díky tomu, že $(C_1)_y$ a $(C_2)_y$ jsou disjunktní dostáváme $(C_1)_y \subseteq \liminf_{G\mathcal{N}}(H_u)_y \subseteq \limsup_{G\mathcal{N}}(H_u)_y \subseteq \mathbb{R} \setminus (C_2)_y$, odkud rovnou plyne požadované tvrzení. □

Věta 4.9. *Nechť E je separabilní metrizovatelný prostor. Funkce $f : E \to \mathbb{R}$ je bianalytická tehdy a jen tehdy, když existuje posloupnost $(f_u)_{u\in\mathcal{S}} \subseteq \mathscr{C}(E)$ taková, že $f = \lim\limits_{G\mathcal{N}} f_u$.*

Důkaz. Nechť $(f_u)_{u\in\mathcal{S}}$ je posloupnost spojitých funkcí na E taková, že platí vztah $f = \lim\limits_{G\mathcal{N}} f_u$. Potom z Tvrzení 2.27 dostáváme, že platí podmínka (ii) v Lemmatu 1.18, a tudíž f je bianalytická.

Mějme j bianalytickou funkci z E do $\mathbb{R}$, potom z Lemmatu 1.18 víme, že pokud položíme v Lemmatu 4.8 $g(x) = f(x) = j(x), x \in E$, tak máme splněny jeho předpoklady, a tedy existuje posloupnost spojitých funkcí $(h_u)_{u\in\mathcal{S}}$ splňující

$$j(x) \leq \liminf_{G\mathcal{N}} h_u(x) \leq \limsup_{G\mathcal{N}} h_u(x) \leq j(x), x \in E.$$

Což neznamená nic jiného, než že $j(x) = \lim\limits_{G\mathcal{N}} h_u(x)$. $\square$

Literatura

[1] Claude Dellacherie, Paul-André Meyer: *Probabilités et Potentiel*, Tome 3, (chapitre X –3), Hermann, Paris, 1984.

[2] Ryszard Engelking: *General Topology*, Revised and completed edition, Heldermann, Berlin, 1989.

[3] Fremlin, David H.: *Measure Theory*, Volume 1, The Irreducible Minimum, Torres Fremlin, 2000.

[4] Gustave Choquet: *Theory of capacities*, Annales Inst. Fourier, Grenoble, 5 (1953-54), 131–295

[5] Alexander S. Kechris: *Classical Descriptive Set Theory*, Graduate Texts in Mathematics 156, Springer-Verlag, New York, 1995.

[6] Alain Louveau: *Sur la génération des fonctions boréliennes fortement affines*, Annales Inst. Fourier, Grenoble, 36 (1986), no. 2, 57–68

[7] Jaroslav Lukeš, Jan Malý, Ivan Netuka and Jiří Spurný: *Integral representation theory: Applications to Convexity, Banach Spaces and Potential Theory*, Walter de Gruyter, Berlin, 2010.