Posudek diplomové práce "Zobecněné limity afinních funkcí" studenta Aleše Holuba

Práce je zaměřena na prezentaci výsledku A. Louveaua o popisu silně afinních borelosvkých funkcí na konvexní kompaktní podmnožině lokálně konvexního prostoru a bianalytických funkcí na separabilních metrických prostorech pomocí limit odpovídajících spojitých funkcí podle speciálního koanalytického filtru. Úkolem diplomanta bylo zřejmě rozvést ty části důkazu, které jsou v článku A. Louveaua ponechány na čtenáři nebo jsou pojaty hodně velkoryse nebo se jejich znalost předpokládá. Dále byl přidán dodatek, který první výsledek zobecňuje na případ nemetrizovatelného prostoru. Výsledkem by měl být text, který by se alespoň částečně zasvěcenému čtenáři snadno četl. To se podařilo jen částečně. V důkazech se objevilo jen několik chyb, ale jsou na klíčových místech důkazů. V práci je vzhledem k jejímu charakteru příliš byť drobných chyb, nepřesností či zbytečně nepřehledně napsaných míst. Jejich seznam uvádím dále.

Odhaduji, že diplomant se při psaní práce naučil zajímavé partie analýzy, je pravděpodobné, že věnoval psaní dostatek péče, ale že řada nepřesností či nedokonalostí je způsobena tím, že látka je pro něho v souvislosti s rozsahem a potřebným časem pro její pochopení hodně obtížná.

Proto výsledek hodnotím jako diplomovou práci pro obhájení dostatečnou, ale ne o moc lépe.

Připomínky k práci.

Jsem si skoro jist, že některé mé pripomínky nejsou namístě, ale z časových důvodů píši vše a očekávám vysvětlení, která řadu věcí uvedou na pravou míru.

Závažnější připomínky.

Definice 1.22 ... nejasná definice silně afinních funkcí (definice explicitně neuvedena, domýšlím si, že jde o funkce splňující barycentrickou formuli; nevím, zda univerzálně měřitelné či jen borelovské).

Důkaz Tvrzení 1.17 ... $k = \limsup n$ může být ∞? Pak $(x, k) \notin H$ a muselo by se ošetřit zvlášť. Proč $g(x) \leq d$?

2.1 ... Není explicitně řečeno, kdy vyhrává hráč II. Není jasně definován pojem strategie - je řečeno, jak můžeme "strategii chápat" dvěma způsoby, ale není řečeno, co znamená ji aplikovat na hru, tedy jak souvisí s hrou. Strategie se "definuje" pro $J(A)$, ale užívá i pro $K(B)$.

24^{10} ... $u\hat{\ }n < g(u)$ znamená to, co se uvádí? V důkazu Lemmatu 2.17 $u\hat{\ }n \geq g(u)$ není negace $u\hat{\ }n < g(u)$? Na str. 26_9 je pro $u = v\hat{\ }k \in T^g$ jiná, asi správná, definice? 26_3 ... $u\hat{\ }n < g(u)$?

V (2.11) má být $\forall \xi < j_u(T_1)$? Bylo by lepší říci, jak se v které formuli Lemma 2.14 užívá.

$28_{5,3}$ ... uzavřená, otevřená jedině relativně někde, neboť $\mathcal{P}_I$ a $\mathcal{P}_{II}$ jsou G_δ.

Důkaz Lemmatu 2.22 ... $\bigcap_{m=n}^{\infty} m\hat{\ }\{...\} = \emptyset$, $\liminf n\hat{\ }C_x^n = \emptyset$, to nemůže dokazovat tvrzení. Jde o klíčové lemma, které se užívá v Lemmatu 2.29 a Tvrzení 3.2 prostřednictvím svých důsledků.

44^{12} ... Pro spor $\alpha^0_{\max} < \omega$ (je $\alpha^0_{\max} \leq \eta(0)$); má být zde a dál $\alpha_{(j)} < \omega$?

Nepřesnosti, formulace.

Suslinovy množiny definovány jen v separabilních metrizovatelných prostorech - v Pozorování 1.13 v neseparabilních prostorech;

v 1.16 lze spočetná sjednocení z předpokladů vynechat?;

1.17 ... užívá se několik tvrzení o uzavřenosti analytických množin na operace bez explicitní formulace; to je nekonzistentní s ostatním výkladem, navíc pojmy relativně analytických a koanalytických množin tak, jak se o nich mluví, nejsou zcela běžné. Konstatování "evidentně" mohlo zde být nahrazeno důkazem.

1.18 ... "vidíme" vyžaduje nějaké znalosti o zachovávání. Navíc $f^{-1}(G)$ či graf f jsou analytické je míněno relativně v X, což je třeba jasně formulovat nebo používat jinou terminologii (např. suslinovské a kosuslinovské množiny v separabilních prostorech).

V [5] jsou analytické a koanalytické množiny definovány v polském, ev. standardním borelovském, prostoru.

1.20 ... v Lemmatu 1.16 neostrý podgraf - zde nadgraf.

Def. 1.24 ... filtr - přesnější filtr na A (tak se vzápětí užívá - $\mathcal{F}$ na $\mathcal{S}$).

12^1 ... $(A_u)_{u\in\mathcal{S}}$ je Suslinovo schéma - ne posloupnost? Někde se opakuje, někde Suslinovo schéma.

1.2 ... vektorové prostory automaticky nad $\mathbb{R}$?

1.3 ... spojité funkce automaticky do $\mathbb{R}$?

1.4 ... posloupnost (x_i) v X?

1.6 ... [2], Problem 1.7.12(b) má být 1.7.15(b) - píše se, kdo dokázal tento speciální případ pozdější Michaelovy věty.

1.11 ... K je kompaktní konvexní prostor? Je někde definice?

18_8 ... "platnost tvrzení" - jde asi o (iv).

19^4 ... $C = A \cap B$?

20^5 ... zdá se, že zde $\lambda < \aleph_1$ znamená i $\lambda > 0$?

2.13 ... "$f \in \mathcal{P}_{II}$ je strategie" - "je strategie" je nadbytečné, není samo o sobě jasné čí strategie ani nebylo jasně definováno, co se tím myslí, vyjma právě definice množin $\mathcal{P}_I, \mathcal{P}_{II}$. "Pro strom T" - je jasné, co zde znamená strom?

$25_{2,3}$ ... asi jen pro $\xi > 0$; pro $A = \mathcal{S}$ nefunguje?

Str. 26 ... $w(C) \in G\mathcal{N}$, $D \in G\mathcal{N}$ dobré zmínit proč. $\xi > 0$?, $A_k = D_k$?.

27^{14} ... splněna pro $s = \emptyset$. Buď $u \in \mathcal{S}$ s $|u| \geq 1$?

2.22-26 ... X topologický prostor (proč ne množina)? Vše jen množinové?

34_{12-14} ... k jedné rovnosti potřebuji také monotonii a Fatouovo lemma ještě k další nerovnosti či rovnosti?

39^{13} ... skutečně B_0, A_0 odpovídají $-f$ jako A_0, B_0 odpovídá f?

40^{13} ... spor s $C(H_k, L_k) = 1$ výše je asi vhodnější.

40^{17} ... Ψ nějaká množina reálných funkcí na prostoru X přesnější - a co je X?

Tvrzení 3.11 atd. ... co je kompaktní konvexní množina X?

Věta 3.13 ... k čemu $\alpha < \aleph_1$?

Důkaz Tvrzení 4.2 ... $E \setminus C_2$, $E \setminus C_1$ analytické - třeba říci, že v E.

Uspořádání.

symbol $\nu|n$ a sousloví "Suslinovo schéma" na str. 6 bez definice - v 1.7 později definice $\nu|n$;

1.21 ... definice $\mathcal{A}^c(K)$ užito už v Důsledku 1.2.

1.8, 1.9 ... některá srovnatelně obtížná tvrzení se dokazují, některá ne (spíš výjimka).

str. 17 … V zápise P_{II} by $\bigcap_{t\in\mathcal{S}}\bigcap_{u\in\mathcal{S},t\subset u}\{f\in\mathcal{S}^{\mathcal{S}}:f(t)\subset f(u)\}$ bylo přehlednější.

Důkaz Tvrzení 2.9 … je třeba sporem? - není hra dle zvolené strategie jasně vítězná s pomocí Pozorování 2.4?

str. 22 … (ii) a (iii) by bylo dobré prohodit; v (ii) se užije kromě (iii) mlčky i (i) k tomu, že jde o pokrytí.

str. 25 … Tvrzení 2.15 o $\bigcup k\hat{\ }A$ v Důsledku 2.16 je třeba $\bigcup k\hat{\ }D_k$ a zvlášť se neřeší?

Lemma 2.17 … $g\in\mathcal{P}_I$ - dobré připomenout, že z (2.1).

Důsledek 2.20 … neškodilo by opět připomenout, že $w(A)=\bigcup k\hat{\ }A$.

Důkaz Lemmatu 2.22 … $D_x=\bigcup n\hat{\ }C_x^n$ je názornější.

36_7 … $f\in\mathcal{A}(K)$ - k čemu zde, zdá se mi, že se neužívá.

38^4 … proč důraz na spočetnost sjednocení otevřených množin?

45_6 … (Tvrzení 4.2) "příliš nepomůže" je matení čtenáře; jde o klíčové tvrzení, které velmi pomůže; je ovšem třeba ještě něco dodat (viz Lemma 4.8 a Věta 4.9).

Formální pochybení, překlepy, vyjadřování.

1.1 … symbol $\mathcal{S}$ chybně definován (srovnej se správnou definicí v 1.7).

10^9 … "podmínky v z …", "polovina podmínky".

11^2 … "převzáno".

13_{10} … "jsou existují".

19^{11} … dvakrát ":" v popisu množiny - podruhé vhodnější jiný oddělovač.

20_7 … díky determinovanosti nebo spíš díky definici hry a definici vítězství II.

20_2 … F je G_δ v $\mathcal{S}^{\mathcal{S}}$?

str. 21 … volme U_{T_0,T_1} - je dobré dodat, že z definice (1.2).

str. 22 … $N_{-1}=\emptyset$?

23^1 … "V části (c) víme"

24^7 … poslední průnik tam nepatří?

24_8 … $v<w$ (ne $u<v$).

26_{10} … $s=k$.

Důkaz Lemmatu 2.22 … Protože tak … chybí něco?, Z (i) víme, že $C_x^n\in\mathcal{N}_{\eta_n}$ (k=n?).

33_5 … univerzální (překlep).

42_1 … Baireovy.

45^1 … existuje.

47_2,48^4 … $k=u$.

Důkaz lemmatu 4.8 … Tvrzení 4.2 = Lemma 4.2

Důkaz věty 4.9 … Lemma 1.18 = Tvrzení 1.18.

V Praze dne 30.1.2012.

Doc. RNDr. Petr Holický, CSc.