Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Jiří Thomayer

Technické rezervy neživotního pojištění v interních modelech solventnosti

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce:	Mgr. Ing. Jakub Mertl
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Finanční a pojistná matematika

Praha 2011

Rád bych tímto poděkoval všem, co se nějakým způsobem podíleli na vývoji této práce. Především děkuji mému vedoucímu Mgr. Ing. Jakubovi Mertlovi nejen za jeho trpělivost při konzultacích a poskytnuté materiály, které vedli k sepsání této práce. Dále bych chtěl poděkovat své kolegyni Bc. Zuzaně Marchalínové, která se podílela na kontrole a korekci celého textu.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze, 4. srpna 2011 Bc. Jiří Thomayer

Název práce: Technické rezervy neživotního pojištění v interních modelech solventnosti
Autor: Bc. Jiří Thomayer
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Ing. Jakub Mertl

Abstrakt: V této práci studujeme a popisujeme výpočet solventnostního kapitálu pomocí standardní formule obsažené ve směrnici Evropské unie (Solventnost II), která má být zavedena do praxe na území Evropy 1. ledna 2013. Tento výpočet je popsán v kvantitivní dopadové studii 5. K tomu si popíšeme obecný přístup k měření rizik a uvedeme některé konkrétní v praxi používané míry na měření rizik. Vysvětlíme, za jakých podmínek je možné standardní formuli nebo její část nahradit interním modelem. Dále uvedeme nevýhody použití standardní formule a navrhneme možný interní model na výpočet rizika rezerv a rizika pojistného v neživotním pojištění. Nakonec navrhnutý model pro výpočet rizika rezerv v neživotním pojištění aplikujeme v praxi.

Klíčová slova: Standardní formule, Měření rizik, Solventnost II, Interní model;

Title: Technical reserves of non-life insurance in the internal solvency model
Author: Bc. Jiří Thomayer
Department: Department of Propability and Mathematical Statistics
Supervisor: Mgr. Ing. Jakub Mertl

Abstract: In this work we study and describe calculation of solvency capital using the standard formula contained in the Directive of the European Union (Solvency II), which should be put into practice in Europe on 1 January 2013. This calculation is described in quantitative impact study 5. We describe a general approach to risk measurement and we show some particular practical measures used to risk measurement. We explain under what conditions the standard formula or its parts can be replaced by internal model. Next, we show disadvantages of using the standard formula and we propose possible internal model to calculate risk premiums and risk reserves in non-life insurance. Finally we apply the proposed model for calculation risk reverses in non-life insurance in practice.

Keywords: Standard formula, Risk measurement, Solvency II, Internal model;

Obsah

Úvod **3**

1 Způsoby měření rizik **4**
1.1 Hodnota v riziku (VaR) 4
1.2 Zbytková hodnota v riziku (TVaR), podmíněná hodnota v riziku (CVaR) 6
1.3 Spektrální míry rizika 8
1.4 Proporcionální a distorzní míry rizika 9

2 Standardní formule **11**
2.1 Solventnost 11
2.2 Solventnost II 12
2.3 Standardní formule 13
2.4 Výpočet SCR 15
2.4.1 Operační riziko 15
2.4.2 Úprava zohledňující schopnost absorbovat zráty 15
2.4.3 BSCR 16
2.4.4 Upisovací riziko neživotního pojištění 20

3 Částečné interní modely **24**
3.1 Hlavní obchodní jednotky 24
3.2 Rozsah částečného interního modelu 25
3.3 Požadavky pro schválení interního modelu 26

4 Návrh částečného interního modelu **29**
4.1 Riziko pojistného 29
4.1.1 Velké škody 29
4.1.2 Katastrofické škody 31
4.1.3 Ostatní škody 31
4.2 Riziko rezerv 32
4.2.1 Zobecněný Mackův model 32
4.2.2 Střední kvadratická odchylka 33
4.2.3 Bootstrap 35
4.2.4 Výpočet VaR pomocí metody bootstrap 40

5 Praktická ukázka výpočtu rizika rezerv **42**
5.1 Bootstrap 44
5.1.1 Porovnání dvou případů metody bootstrap 45
5.2 Výpočet VaR 47

Závěr **49**

Literatura **50**

A Vstupní data pro výpočet rizika rezerv **52**

Úvod

Součástí této práce je popsání standardní formule obsažené v direktivě Solventnost II. Vycházeli jsme převážně z kvantitativní dopadové studie 5 [7] a konzultačních materiálů [4], [5] a [6] vydané výborem CEIOPS (Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors), který byl 1. ledna 2011 přejmenován na EIOPA (European Insurance and Occupational Pensions Authority). Zaměříme se hlavně na popsání upisovacího rizika neživotního pojištění a výpočet jeho solventnostního kapitálového požadavku. V platnost by měla tato direktiva přijít 1. ledna 2013. Hlavním cílem této práce je navržení možného interního modelu a jeho aplikace na reálných datech.

V první kapitole uvedeme obecnou teorii měření rizik a představíme konkrétní míry používané k měření rizik v pojišťovnách, především hodnotu v riziku, zbytkovou hodnotu v riziku a podmíněnou hodnotu v riziku. Dále zmíníme spektrální míry rizika, které získávájí v poslední době velkou oblibu. Pro doplnění ještě popíšeme základní vlastnosti proporcionální a distorzní míry rizika.

V druhé kapitole se zaměříme na to, co je Solventnost II, popíšeme standardní formuli a výpočty požadovaného solventnostního kapitálu. Více se poté zaměříme na upisovací riziko neživotního pojištění.

V třetí kapitole si stručně popíšeme požadavky dohledu na pojišťovny při tvorbě interních modelů, a to hlavně částečných interních modelů.

Ve čtvrté kapitole navrhneme jeden z možných přístupů k modelování rizika pojistného a rezerv v neživotním pojištění, který může být použit jako částečný interní model v rámci Solventnosti II. Opíráme se o znalosti Mackova modelu (popsaný například v [12]), zavedeme jeho rozšíření (viz [13]) a nakonec pomocí metody boostrap spočítáme solventnostní kapitálový požadavek.

Na závěr si na reálných datech předvedeme použití navrhnovaného modelu pro výpočet solventnostního kapitálového požadavku rizika rezerv, a to za použití dvou případů metody boostrap popsané ve čtvrté kapitole. Nakonec tyto dva případy mezi sebou porovnáme.

Kapitola 1

Způsoby měření rizik

Popíšeme si základní způsoby měření rizik, jejich vlastnosti a některé výhody a nevýhody jejich použití. *Rizikem* rozumíme náhodnou veličinu X vyjadřující velikost ztráty. Označme $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{L}^1$ množinu všech rizik. Dále *mírou rizika* budeme nazývat zobrazení $\rho : \mathcal{X} \to [0, \infty]$, které riziku $X \in \mathcal{X}$ přiřazuje nezáporné číslo $\rho(X)$, případně ∞. Pokud $\rho(X) = \infty$, pak riziko považujeme za *nepojistitelné*. Na míru rizika klademe následující axiomy označované jako požadavky *koherentnosti*. Jsou to vlastnosti, které intuitivně od míry rizika očekáváme.

- **Translativnost.** Pro libovolnou konstantu $c \in \mathbb{R}$ a $X \in \mathcal{X}$ je

  $$\rho(X + c) = \rho(X) + c.$$

  Speciálně pro $c = -\rho(X)$ dostáváme $\rho(X - \rho(X)) = 0$. Proto $\rho(X)$ nazýváme *jistotní ekvivalent rizika* X.

- **Pozitivní homogennost.** Pro libovolnou konstantu $c > 0$ a $X \in \mathcal{X}$ je

  $$\rho(cX) = c\rho(X).$$

- **Subaditivnost.** Pro libovolná rizika $X, Y \in \mathcal{X}$ taková,že $X + Y \in \mathcal{X}$ platí

  $$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y).$$

  Tedy spojením dvou rizik nevzniká dodatečné riziko.

- **Monotónnost.** Pro libovolná rizika $X, Y \in \mathcal{X}$ takové, že $\mathrm{P}(X \leq Y) = 1$ platí

  $$\rho(X) \leq \rho(Y).$$

1.1 Hodnota v riziku (VaR)

Hodnota v riziku (Value-at-Risk) je jednou z nejpoužívanějších měr rizik. Patří mezi tzv. *kvantilové metody* výpočtu míry rizika, které využívají pravděpodobnostní rozdělení rizika. Nechť $F_X(x)$ je distribuční funkce rizika $X \in \mathcal{X}$, potom hodnotu v riziku na hladině $\alpha \in (0, 1)$ definujeme jako *nejmenší hodnotu ztráty (rizika), která bude překročena s pravděpodobností nejvýše* $1 - \alpha$. Tuto hodnotu

značíme $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ a α volíme velmi blízké 1, protože označuje pravděpodobnost, s jakou riziko X nepřekročí hodnotu $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$. Dle definice tedy hodnota v riziku splňuje $\mathrm{P}(X > \mathrm{VaR}_\alpha(X)) \leq 1 - \alpha$ a

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha), \tag{1.1}$$

kde $F_X^{-1}(u) = \inf\{x | F_X(x) \geq u\}$ je kvantilová funkce rizika X.

Ačkoli je hodnota v riziku velmi používanou měrou, nevypovídá úplně o celkovém riziku. Například:

1. **Neodhalí málo pravděpodobné ztráty.** Při zvolené hladině α nám hodnota v riziku nic neříká o ztrátách, které mohou nastat s pravděpodobností, byť malou, $1-\alpha$. Ty mohou dokonce VaR několikanásobně převyšovat nebo se mohou výrazně lišit při stejné hodnotě VaR. Jedním možným řešením je sledovat VaR na více různých hladinách, což ale také neeliminuje málo pravděpodobné ztráty.

2. **Je vhodná jen na krátké časové období.** Uvažujme riziko $X \in \mathcal{X}$ například jako tržní riziko. Při výpočtu VaR předpokládáme, že změna tržních sazeb v budoucnu se bude chovat přibližně stejně jako v nedaleké minulosti. Jelikož se ale trh neustále vyvíjí a reaguje na každou změnu v ekonomice, tento předpoklad nemusí být splněn. Tedy VaR neodhalí náhlé změny na trhu.

3. **Je statická.** Neuvažuje změnu portfolia, která sice ovlivní výsledné riziko, přitom ale hodnota v riziku vypočtená před změnou zůstává stále stejná. V praxi se proto konstruují stresové scénáře vývoje různých veličin, které ovlivňují změnu portfolia. Pro každý scénář spočteme výsledné riziko a VaR na hladině α určíme jako výběrový α-kvantil těchto výsledných rizik, který je někdy nazývaný jako neparametrický VaR.

Podívejme se, jak je to s koherencí VaR. Zvolme α libovolné z $(0,1)$ a $c \in \mathbb{R}$. Nechť $X \in \mathcal{X}$ je riziko s distribuční funkcí $F_X(x)$. Potom distribuční funkce $F_{X+c}(x)$ náhodné veličiny $X + c$ je rovna $F_X(x - c)$. Ze vztahu (1.1) plyne, že

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X + c) = \inf\{x | F_{X+c}(x) \geq \alpha\} = \inf\{x | F_X(x - c) \geq u\} =$$

$$= \inf\{x - c | F_X(x - c) \geq u\} + c = \mathrm{VaR}_\alpha(X) + c.$$

Hodnota v riziku tedy je translativní. Dále náhodná veličina cX, kde $c > 0$, má distribuční funkci $F_X(\frac{x}{c})$ a podobnými úvahami jako výše dospějeme k tomu, že hodnota v riziku je pozitivně homogenní. Vezměme si $Y \in \mathcal{X}$ s distribuční funkcí $F_Y(x)$ takové, že $\mathrm{P}(X \leq Y) = 1$. Potom $F_X(x) \geq F_Y(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Proto $\{x | F_X(x) \geq u\} \supseteq \{x | F_Y(x) \geq u\}$ a tedy $\mathrm{VaR}_\alpha(X) \leq \mathrm{VaR}_\alpha(Y)$. Tím jsme dokázali monotónnost. VaR splňuje tedy tři vlastnosti koherentnosti, ale obecně není subaditivní[1].

[1] Subaditivnost VaR lze dokázat například za předpokladu, že rizika jsou nezávislá, viz [9] strana 789.

1.2 Zbytková hodnota v riziku (TVaR), podmíněná hodnota v riziku (CVaR)

Hodnota v riziku neříká nic o velikosti ztráty X, pokud tuto hodnotu překročíme - tedy pokud $X > \mathrm{VaR}$. Zavedeme si proto *zbytkovou hodnotu v riziku* (Tail Value-at-Risk), resp. *podmíněnou hodnotu v riziku* (Conditional Value-at-Risk), na hladině $\alpha \in (0,1)$. Značíme je $\mathrm{TVaR}_\alpha(X)$, resp. $\mathrm{CVaR}_\alpha(X)$, přičemž $\mathrm{CVaR}_\alpha(X)$ je definována jako očekávaná ztráta, pokud je překročena hodnota $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$, tj.

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(X) = \mathrm{E}[X|X > \mathrm{VaR}_\alpha(X)]. \tag{1.2}$$

Přitom předpokládejme, že $\mathrm{P}(X > \mathrm{VaR}_\alpha(X)) > 0$, aby výraz na pravé straně měl smysl.

$\mathrm{TVaR}_\alpha(X)$ je definován jako střední hodnota *α-chvostu* rozdělení X, kde α-chvost má distribuční funkci

$$F_X^\alpha(x) = \begin{cases} 0 & , x < \mathrm{VaR}_\alpha(X) \\ \frac{F_X(x)-\alpha}{1-\alpha} & , x \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X) \end{cases} \tag{1.3}$$

Pro X spojité dostáváme:

$$\mathrm{TVaR}_\alpha(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \mathrm{d}F_X^\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\mathrm{VaR}_\alpha(X)}^{\infty} x \mathrm{d}F_X(x) = \mathrm{CVaR}_\alpha(X).$$

Pro spojitá rozdělení tedy obě míry dávají stejné hodnoty, ale CVaR není obecně subaditivní, proto zavádíme TVaR, která již je koherentní mírou rizika, jak bude ukázáno dále.

Základní vztahy mezi podmíněnou a zbytkovou hodnotou v riziku:

- Pokud $P(X \leq \mathrm{VaR}_\alpha(X)) = \alpha$ (tzn., že buď v bodě $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ není skok (pravděpodobnostní atom) nebo je, ale α je „horním koncovým“ bodem tohoto atomu), pak $\mathrm{TVaR}_\alpha(X) = \mathrm{CVaR}_\alpha(X)$.
- Pokud $P(X \leq \mathrm{VaR}_\alpha(X)) > \alpha$ (tzn., že v bodě $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ je pravděpodobnostní atom a navíc α je mezi „dolním“ a „horním koncovým“ bodem tohoto atomu, pak $\mathrm{TVaR}_\alpha(X) < \mathrm{CVaR}_\alpha(X)$.

Důkaz je založen na tom, že $\mathrm{CVaR}_\alpha(X)$ se dá interpretovat jako sřední hodnota náhodné veličiny z rozdělení s distribuční funkcí

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < \mathrm{VaR}_\alpha(X) \\ \frac{F_X(x)-\alpha^+}{1-\alpha^+} & , x \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X), \end{cases}$$

kde $\alpha^+ = P(X \leq \mathrm{VaR}_\alpha(X))$. První tvrzení je zřejmé, neboť $\alpha = \alpha^+$, a druhé se dostane z nerovnosti $\alpha < \alpha^+$, ze které plyne

$$\mathrm{TVaR}_\alpha(X) = \int_{[-\infty,\infty]} x \mathrm{d}F_X^\alpha(x) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{[\mathrm{VaR}_\alpha(X),\infty]} x \mathrm{d}F_X(x) <$$

$$< \frac{1}{1-\alpha^+} \int\limits_{[\mathrm{VaR}_\alpha(X),\infty]} x \mathrm{d}F_X(x) = \int\limits_{[\mathrm{VaR}_\alpha(X),\infty]} x \mathrm{d}F(x) = \mathrm{CVaR}_\alpha(X).$$

Poznamenejme, že jiná možnost nastat nemůže, protože obecně platí, že $P(X \leq \mathrm{VaR}_\alpha(X)) \geq \alpha$, a $\mathrm{P}(X \leq \mathrm{VaR}_\alpha(X)) = 1$ nenastane, protože předpokládáme, že $\mathrm{P}(X > \mathrm{VaR}_\alpha(X)) > 0$.

Předpokládejme nyní, že $P(X \leq \mathrm{VaR}_\alpha(X)) = \alpha$, tedy podle předchozícho jsou obě míry shodné. Úpravami (1.2) dostáváme

$$\mathrm{E}[X|X > \mathrm{VaR}_\alpha(X)] = \mathrm{VaR}_\alpha(X) + \mathrm{E}[X - \mathrm{VaR}_\alpha(X)|X - \mathrm{VaR}_\alpha(X) > 0\ ] =$$

$$= \mathrm{VaR}_\alpha(X) + \frac{\mathrm{E}(X - \mathrm{VaR}_\alpha(X))\mathbb{I}_{(X-\mathrm{VaR}_\alpha(X)>0)}}{\mathrm{E}\,\mathbb{I}_{(X>\mathrm{VaR}_\alpha(X))}},$$

kde $\mathbb{I}_{(B)}$ je indikátorová funkce jevu B. Zavedeme si náhodnou veličinu $Y = X - \mathrm{VaR}_\alpha(X)$. Pro distribuční funkce platí $F_Y(x) = F_X(x+\mathrm{VaR}_\alpha(X))$. Z dodatečného předpokladu plyne, že $\mathrm{E}\,\mathbb{I}_{(X>\mathrm{VaR}_\alpha(X))} = \mathrm{P}(X > \mathrm{VaR}_\alpha(X)) = 1 - \alpha$. Dosazením dostaneme

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(X) = \mathrm{TVaR}_\alpha(X) = \mathrm{VaR}_\alpha(X) + \frac{1}{1-\alpha}\,\mathrm{E}\,Y\mathbb{I}_{(Y>0)}.$$

$$\mathrm{E}\,Y\mathbb{I}_{(Y>0)} = \int\limits_0^\infty y \mathrm{d}F_Y(y) = \int\limits_0^\infty 1 - F_Y(y)\mathrm{d}y = \int\limits_0^\infty 1 - F_X(y + \mathrm{VaR}_\alpha(X))\mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_{\mathrm{VaR}_\alpha(X)}^\infty 1 - F_X(y)\mathrm{d}y.$$

Celkem tedy lze psát

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(X) = \mathrm{TVaR}_\alpha(X) = \mathrm{VaR}_\alpha(X) + \frac{1}{1-\alpha} \int\limits_{\mathrm{VaR}_\alpha(X)}^\infty 1 - F_X(y)\mathrm{d}y. \tag{1.4}$$

Připomeňme, že jsme tento vztah odvodili pouze za omezujícího předpokladu $\mathrm{P}(X \leq \mathrm{VaR}_\alpha(X)) = \alpha$. Nadále tento předpoklad vypusťme.

Definujme si funkci na základě předchozí rovnosti (1.4):

$$G(x; X) = x + \frac{1}{1-\alpha} \int\limits_x^\infty 1 - F_X(y)\mathrm{d}y = x + \frac{1}{1-\alpha} E(X - x)^+. \tag{1.5}$$

Snadno dokážeme konvexnost $G(x; X)$ v proměnné x. K tomu stačí dokázat konvexnost funkce $g(x) = (X - x)^+$. Zvolme $\lambda \in (0, 1)$, pak

$$g(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) = (X - \lambda y_1 - (1-\lambda)y_2)^+ = \max(\lambda(X - y_1) + (1-\lambda)(X - y_2), 0) \leq$$

$$\leq \lambda \max(X - y_1, 0) + (1-\lambda)\max(X - y_2, 0) = \lambda g(y_1) + (1-\lambda)g(y_2).$$

Protože $G(x;X)$ je kovnexní vzhledem k x, existuje její minumum v proměnné x. Dá se dokázat[2] (i bez předpokladu $\mathrm{P}(X \leq \mathrm{VaR}_\alpha(X)) = \alpha$), že toto minumum se nabývá v bodě $x = \mathrm{VaR}_\alpha(X)$ (i když nemusí být jednoznačně určeno), a že $G(\mathrm{VaR}_\alpha(X);X) = \mathrm{TVaR}_\alpha(X)$.

Na základě tohoto tvrzení dokážeme konvexnost funkce $\mathrm{TVaR}_\alpha(X)$, což využijeme pro odvození její subaditivity. Obdobnými úvahami jako výše se dokáže, že funkce $G(x;X)$ je sdruženě konvexní. Dále víme, že $\mathrm{TVaR}_\alpha(X) = \min\limits_x G(x;X)$ a z konvexní analýzy plyne, že minimalizujeme-li sdruženě konvexní funkci vůči jedné proměnné, je tato minimalizační formule konvexní vzhledem k druhé proměnné. Tedy $\mathrm{TVaR}_\alpha(X)$ je konvexní funkce. Pro $X, Y \in \mathcal{X}$, $\alpha \in (0,1)$ díky konvexnosti dostáváme $\mathrm{TVaR}_\alpha(\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y) \leq \frac{1}{2}\mathrm{TVaR}_\alpha(X) + \frac{1}{2}\mathrm{TVaR}_\alpha(Y)$. Využitím pozitivní homogennosti[3] dostaneme $\mathrm{TVaR}_\alpha(X+Y) \leq \mathrm{TVaR}_\alpha(X) + \mathrm{TVaR}_\alpha(Y)$, tedy TVaR je subaditivní. Nechť navíc $\mathrm{P}(X \leq Y) = 1$, pak $F_X(x) \geq F_Y(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ (viz výše strana 5). Protože minumum výrazu (1.5) se nabývá v bodě $x = \mathrm{VaR}_\alpha(X)$, dostáváme

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) + \frac{1}{1-\alpha}\int\limits_{\mathrm{VaR}_\alpha(X)}^{\infty} 1 - F_X(y)\mathrm{d}y \leq \mathrm{VaR}_\alpha(Y) + \frac{1}{1-\alpha}\int\limits_{\mathrm{VaR}_\alpha(Y)}^{\infty} 1 - F_X(y)\mathrm{d}y \leq$$

$$\leq \mathrm{VaR}_\alpha(Y) + \frac{1}{1-\alpha}\int\limits_{\mathrm{VaR}_\alpha(Y)}^{\infty} 1 - F_Y(y)\mathrm{d}y.$$

Tedy $\mathrm{TVaR}_\alpha(X) \leq \mathrm{TVaR}_\alpha(Y)$, čímž jsme dokázali i monotónnost a tedy zbytková hodnota v riziku je koherentní mírou rizika. Proto je lepší jako míru rizika volit TVaR místo VaR. Z definice je zřejmé, že $\mathrm{VaR}_\alpha(X) \leq \mathrm{TVaR}_\alpha(X)$ na stejné hladině α, přičemž rovnost nastává tehdy a jen tehdy, je-li $\mathrm{P}(X > \mathrm{VaR}_\alpha(X)) = 0$. V praxi se většinou ale používá vzhledem k lepší interpretaci podmíněná hodnota v riziku i přesto, že není koherentní mírou rizika. Jak jsme ale dokázali, platí $\mathrm{CVaR}_\alpha(X) \geq \mathrm{TVaR}_\alpha(X)$. Tedy v případě použití CVaR místo TVaR nemůže dojít k podhodnocení rizika.

Poznámka. K důkazu subaditivity TVaR jsme využili její konvexnost a pozitivní homogennost. Toto lze i obrátit a pomocí subaditivity a pozitivní homogennosti jakkékoli míry rizika ρ lze dokázat její konvexnost:
Pro $X, Y \in \mathcal{X}$ a $\lambda \in (0,1)$ je $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$.

△

1.3 Spektrální míry rizika

V poslední době velmi populární jsou také *spektrální míry rizika*. K jejich definici přistoupíme úpravou zbytkové hodnoty v riziku. Pro jednoduchost předpokládejme, že $X \in \mathcal{X}$ má spojité rozdělení. Potom lze zbytkovou hodnotu v riziku

[2] Důkaz proveden v [11] na straně 14.

[3] Pozitivní homogennost a translativnost snadno dostaneme ze spektrálního vyjádření TVaR - viz odstavec 1.3.

psát ve tvaru

$$\mathrm{TVaR}_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int\limits_{\mathrm{VaR}_\alpha(X)}^{\infty} x \mathrm{d}F_X(x).$$

Substitucí $x = \mathrm{VaR}_p(X)$ dostáváme

$$\mathrm{TVaR}_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int\limits_{\alpha}^{1} \mathrm{VaR}_p(X) \mathrm{d}p,$$

což je *spektrální vyjádření* zbytkové hodnoty v riziku. Tato rovnost nicméně platí pro obecné $X \in \mathcal{X}$[4]. Tedy TVaR na hladině α pro $X \in \mathcal{X}$ je průměr hodnot v riziku nad touto hladinou. Zobecněním toho vztahu pro $X \in \mathcal{X}$ libovolné dostáváme spektrální míry rizika tvaru

$$\rho(X) = \int\limits_{0}^{1} \mathrm{VaR}_p(X) \phi(p) \mathrm{d}p,$$

kde $\phi(p) \geq 0$ je váhová funkce. Pomocí translativnosti, pozitivní homogennosti a monotónnosti VaR plynou tyto podmínky také pro spektrální míry rizika. Navíc spektrální míry rizika splňují podmínku subaditivnosti, a jsou tedy koherentními měrami[5]. Poznamenejme, že v definici spektrální míry rizika se neomezujeme na spojité rozdělení náhodné veličiny X a že zbytková hodnota v riziku TVaR je speciálním případem spektrální míry rizika pro váhovou funkci $\phi(p) = \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{I}_{(p>\alpha)}$[6].

1.4 Proporcionální a distorzní míry rizika

Předpokládejme, že $\mathcal{X}$ je množina nezáporných rizik skoro jistě (s.j.). Nechť $X \in \mathcal{X}$, potom označme $\bar{F}_X(x) = 1 - F_X(x)$ pro $x \geq 0$ dekumulativní distribuční funkci rizika X. *Proporcionální míru rizika* definujeme vztahem

$$\rho_p(X) = \int\limits_{0}^{\infty} \bar{F}_X(x)^{\frac{1}{a}} \mathrm{d}x,$$

kde $a \geq 1$ vyjadřuje averzi vůči riziku.

Poznámka. Pro riziko X s po částech spojitou hustotou $f_X(x)$ definujeme intenzitu rizika $\mu_X(x)$ jako $\mu_X(x) = \lim\limits_{h \to 0_+} \frac{P(X \in (x, x+h) | X > x)}{h}$. Úpravami dostaneme

$$\mu_X(x) = \lim_{h \to 0_+} \frac{P(X \in (x, x+h))}{h(1 - F_X(x))} = \lim_{h \to 0_+} \frac{F_X(x+h) - F_X(x)}{h(1 - F_X(x))} =$$

[4]Důkaz rovnosti je proveden v [2] na straně 6.

[5]Důkaz koherentnosti spektrálních měr rizika lze najít v [1] na straně 4.

[6]Takto definovaná funkce je váhová funkce, jelikož $\int_0^1 \phi(p)\mathrm{d}p = \int_\alpha^1 \frac{1}{1-\alpha}\mathrm{d}p = 1$.

$$= \frac{f_X(x)}{\bar{F}_X(x)} = -\frac{\partial}{\partial x}\log(\bar{F}_X(x)) \text{ s.j.} \tag{1.6}$$

Říkáme, že riziko $Y \in \mathcal{X}$ je *proporcionální* riziku X, je-li $\mu_Y(x) = \frac{1}{a}\mu_X(x)$ pro nějaké $a \geq 1$. Ze vztahu (1.6) plyne $\bar{F}_X(x) = \exp\left(-\int_0^x \mu_X(s)\mathrm{d}s\right)$ a odtud pro riziko Y proporcionální riziku X $\bar{F}_Y(x) = \bar{F}_X(x)^{\frac{1}{a}}, x \geq 0$, pro nějaké $a \geq 1$. Parametr a je *koeficient averze vůči riziku* a přechod od rizika X k riziku Y nazýváme *PH-transformace*.

△

Zobecněním proporcionálních měr dostáváme *distorzní míry rizika*, které jsou definovány vztahem $\rho_d(X) = \int_0^\infty g(\bar{F}_X(x))\mathrm{d}x$, kde $g(t)$ je distorzní funkce[7], tedy $g(0) = 0, g(1) = 1$ a $g(t)$ je neklesající, zprava spojitá na intervalu $[0,1]$. Jde opravdu o rozšíření proporcionální míry rizika, neboť $g(t) = t^{\frac{1}{a}}$ pro $a \geq 1$ je rostoucí spojitá funkce na $[0,1]$, $g(0) = 0$ a $g(1) = 1$. Obecně jsou splněny tři podmínky koherence:

- Pro $c \in \mathbb{R}$ takové, že $X + c \geq 0$ s.j. (tedy $X + c \in \mathcal{X}$) platí s použitím substituce, že

$$\rho_d(X+c) = \int_0^\infty g(\mathrm{P}(X+c>x))\mathrm{d}x = \int_{-c}^\infty g(\mathrm{P}(X>t))\mathrm{d}t =$$

$$\int_{-c}^0 g(\underbrace{\mathrm{P}(X>t)}_{=1})\mathrm{d}t + \int_0^\infty g(\mathrm{P}(X>t))\mathrm{d}t = c + \rho_d(X).$$

  Tedy je splněna podmínka translativnosti.

- Pro $c > 0$ je

$$\rho_d(cX) = \int_0^\infty g(\mathrm{P}(X > \frac{x}{c}))\mathrm{d}x = c\rho_d(X),$$

  čímž jsme dokázali pozitivní homogennost.

- Monotonie je zřejmá, protože pro $X, Y \in \mathcal{X}$ takové, že $\mathrm{P}(X \leq Y) = 1$, plyne $\bar{F}_X(x) \leq \bar{F}_Y(x)$ pro $x \geq 0$. A jelikož $g(t)$ je neklesající funkce, je $g(\bar{F}_X(x)) \leq g(\bar{F}_Y(x))$ pro $x \geq 0$.

Dále se dá dokázat, že ρ_d splňuje podmínky subaditivnosti tehdy a jen tehdy, je-li $g(t)$ konkávní funkce. Tedy distorzní míry rizika jsou koherentními měrami pro $g(t)$ konkávní distorzní funkci. Z toho je zřejmé, že proporcionální míry rizika ρ_p jsou koherentními měrami, neboť $g(t) = t^{\frac{1}{a}}$ pro $a \geq 1$ je konkávní funkce.

[7] Distorzní funkce $g(t)$ je libovolná distribuční funkce s nosičem rozdělení na $[0,1]$.

Kapitola 2

Standardní formule

2.1 Solventnost

Jednou z nejdůležitejších činností pojišťoven, popř. zajišťoven, z regulatorního pohledu je vykazování jejich *solventnosti* státnímu dozoru v pojišťovnictví. U nás tuto funkci zastupuje Česká národní banka (ČNB). Podle zákona č. 363/1999 Sb., o pojišťovnictví, ve znění pozdějších předpisů, je solventnost definovaná jako „schopnost pojišťovny nebo zajišťovny trvale zabezpečit vlastními zdroji úhradu závazků z pojišťovací nebo zajišťovací činnosti“. Jinak řečeno, po pojišťovně chceme, aby měla dostatek vlastních zdrojů, které by byly použity na úhradu závazků plynoucích z pojistných smluv. A to i v případě určitých neočekávaných událostí. Je proto důležité, aby byla nastavena taková obecná pravidla, aby pojišťovna splňující tato pravidla byla solventní.

Pro účely vykazování solventnosti pojišťoven se určuje *požadovaná míra solventnosti* (PMS), což je minimální výše vlastních zdrojů, které musí dle zákona pojišťovna mít po celou dobu své činnosti, a *disponibilní míra solventnosti* (DMS), která se získá z hodnoty vlastních zdrojů pojišťovny, jako je např. splacený základní kapitál, rezervní fondy, přenosy zisku a ztráty, cenné papíry bez stanované splatnosti atd.[1]. ČNB vyhláškou stanovuje způsob výpočtu obou těchto měr solventnosti, které se počítají zvlášť pro životní a neživotní pojištění. Zákon dále definuje *garanční fond* (GF), jehož hodnota je rovna $\max\{\frac{1}{3}PMS, 90 \text{ mil. Kč}\}$ v případě životního pojištění a některých odvětví neživotního pojištění nebo je rovna $\max\{\frac{1}{3}PMS, 60 \text{ mil. Kč}\}$ v případě ostatních odvětví neživotního pojištění[2]. Porovnáním hodnot DMS a PMS, popř. GF zjistíme solventnost pojišťovny. Pokud $DMS \geq PMS$, pak je pojišťovna solventní. Je-li ale $DMS < PMS$, přičemž $DMS \geq GF$ musí pojišťovna předložit ČNB ozdravný plán a je dále sledována dozorovým orgánem. Pokud $DMS < GF$, potom je na pojišťovnu uvalena nucená správa.

Tento současný režim vykazování solventnosti se označuje jako **Solventnost I**. Jejími velkými nedostatky jsou zahrnutí pouze pasivní strany pojišťovny do výpočtu, nemožnost jakékoli diverzifikace rizik či nezahrnutí rizikového profilu pojišťovny.

[1] Podrobnější seznam pro určování disponibilní míry solventnosti najdeme v [14] §6 odst. 2 a dále.

[2] Další podrobnosti najdeme v [15] §22.

2.2 Solventnost II

Jelikož tedy Solventnost I při svém výpočtu nezohledňuje všechna skutečně podstoupená rizika pojišťovny (a to jak rizika z pojišťovací činnosti, tak různá ostatní rizika, např. rizika při řízení společnosti, tržní rizika atd.), vedou se diskuze na úrovni Evropské unie a členských států o zavedení transparentního režimu vykazování solventnosti. Výsledkem bylo zahájení tvorby **Solventnosti II**, která lépe reflektuje rizika, kterým je pojišťovna skutečně podstoupena. Napomohl tomu také rozvoj tzv. risk managementu zabývající se vyčíslováním rizik, ze kterého bylo patrné, že současný režim nemůže plně reflektovat hrozící rizika. Díky modulárnímu přístupu v Solventnosti II (viz dále) lze stanovení solventnostního požadavku dobře modifikovat (přidávat dodatečná rizika, měnit stávající strukturu výpočtu apod.). Čím se nově diskuze zabývají, je vykazování solventnosti stále častějších finančních holdingů neboli finančních skupin, které poskytují své služby ve více finančních oblastech (pojišťovnictví, bankovnictví, obchodování s cennými papíry atd.). Zavedení Solventnosti II se nyní plánuje na začátek roku 2013.

Solventnost II je založena na třipilířovém přístupu (inspirováno Basel II):

- *Pilíř 1:* Kvantitativní požadavky.
  - zahrnutí všech kvantifikovatelných rizik
  - minimální a solventnostní kapitálový požadavek (MCR a SCR)
- *Pilíř 2:* Kvalitativní požadavky, činnosti dohledu.
  - kontrolní mechanismy, vlastní posouzení rizika a solventnosti (ORSA)
  - využití systému k řízení rizik
  - dozor může požadovat navýšení kapitálu, opatření proti snížení rizik
- *Pilíř 3:* Zvěřejňování.
  - transparentnost informací
  - harmonizované výkazy pojišťoven jejich orgánům dohledu

Vývoj Solventnosti II prochází tzv. **Lamfalussyho procesem**, který má 4 úrovně:

- *Úroveň 1:* Vyvíjí Evropská komise (EK). Vytváří se základní legislativa (direktivy a nařízení). Rozhoduje Evropská rada (ER) a Evropský parlament (EP).
- *Úroveň 2:* Vyvíjí EK. Implementuje způsob výpočtu a nastavení parametrů (prováděcí předpisy k základní legislativě). Rozhoduje EK se souhlasem EP a EIOPC (Evropský výbor pro pojišťovnictví a zaměstnanecké penzijní pojištění).
- *Úroveň 3:* Vyvíjí a rozhoduje CEIOPS (výbor orgánů dohledu v evropském pojišťovnictví a zaměstnaneckém penzijním pojištění). Vydávají se standardy, doporučení a návody k začlenění legislativy v členských státech a spolupracuje se s orgány dohledu.

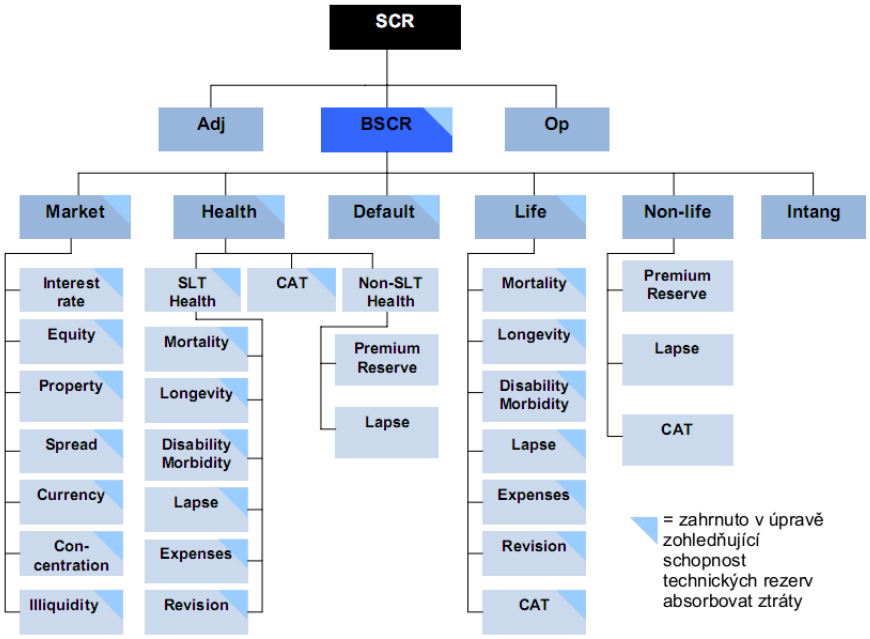
- *Úroveň 4:* Vyvíjí a rozhoduje EK. Kontroluje se implementace a dodržování pravidel.

2.3 Standardní formule

Základním výstupem v Solventnosti II jsou hodnoty SCR (solvency capital requirement - solventnostní kapitálový požadavek) a MCR (minimal capital requirement - minimální kapitálový požadavek), které jsou analogií dosavadní PMS a GF. K výpočtu SCR, tedy minimální požadované výše kapitálu, kterou pojišťovna musí držet, aby byla považovaná za solventní, se může použít standardní formule vytvořena výborem CEIOPS. My budeme vycházet z prozatím poslední verze navrhované standardní formule, která je popsána v kvantitativní dopadové studii 5 (quantitative impact study 5 - QIS5) [7], kde byl zvolen modulární přístup, tedy, že každé riziko, potažmo SCR, je představováno jedním modulem, viz obrázek 2.1. Ve stručnosti si popíšeme některá základní pravidla, kterými se celý výpočet standardní formulí řídí:

- *Technické rezervy:*

  V rámci technických rezerv je ve standardní formuli zahrnuto *riziko pojistného* a *riziko rezerv*. **Riziko pojistného** vychází z kolísání načasování, četnosti a velikosti pojistných událostí. Vztahuje se na pojištění uzavřené nebo prodloužené během sledovaného období a na zbývající rizika z již existujících smluv. Riziko pojistného tedy odpovídá riziku, že pojistné ve sledované období není dostatečné ke pokrytí všech nákladů a škod v tomto období.



Obrázek 2.1: Standardní formule

Riziko rezerv odpovídá riziku, že vytvořené rezervy nebudou dostatečné na kompenzaci již nastalých škod a souvisejících nákladů. Pro účely výpočtu SCR pomocí standardní formule je potřeba technické rezervy chápat bez rizikové přirážky (risk margin - RM), aby nedošlo k zacyklení celého výpočtu, protože rizikové přirážky se počítají z výsledných solventnostních kapitálových požadavků.

- *Rozsah upisovacích rizik:*

  Ve stardardní formuli jsou zahrnuty hned tři moduly *upisovacích rizik*, a to životního ($Life$), neživotního ($Non-life$) a zdravotního ($Health$) pojištění. Upisovací riziko je „riziko ztráty nebo nepříznivé změny hodnoty pojistných závazků v důsledku nepřiměřených předpokladů použitých ke stanovení pojistného a rezerv“. Rozsahy jednotlivých modulů jsou definovány následovně:

  - Modul $Life$ zahrnuje rizika ze závazků životního pojištění jiných než závazků zdravotního pojištění.
  - Modul $Health$ zahrnuje rizika ze závazků zdravotního pojištění.
  - Modul $Non-life$ zahrnuje rizika ze závazků neživotního pojištění jiných než závazků zdravotního pojištění.

  Takovéto rozdělení rizik ze závazků životního, neživotního a zdravotního pojištění je v QIS5 zahrnuto proto, aby nedošlo k vícenásobnému započítání jednoho rizika do výsledého SCR. Podrobnosti k členění mezi jednotlivé typy pojištění nalezneme v QIS5 [7] v kapitole 1 odstavce V.2.1.

- *Výpočet založený na scénáři:*

  Výpočet SCR některých modulů je založen na předepsaném šokovém scénáři, kdy SCR je určen dopadem tohoto scénáře na čistou hodnotu aktiv (net asset value - NAV) pojišťovny, kde NAV je definován jako rozdíl mezi aktivy a závazky pojišťovny. Závazky by neměly obsahovat rizikovou přirážku technických rezerv ani podřízené závazky. To zajišťuje, že NAV odpovídá základnímu kapitálu pojišťovny, tj. nadhodnota aktiv proti závazkům plus podřízené závazky. Změna NAV plynoucího ze scénáře se označuje jako ΔNAV a platí, že $\Delta NAV > 0$, pokud ze scénáře plyne ztráta NAV. Pokud by scénář měl za následek zvýšení NAV, a tedy by neznamenal riziko pro pojišťovnu, nemělo by to vést k zápornému kapitálovému požadavku. V takovém případě se proto odpovídající SCR pokládá nule.

- *Kalibrace:*

  SCR by měl představovat hodnotu v riziku (VaR) na hladině spolehlivosti $0,995$ v časovém horizontu 1 rok. Někdy se analogicky uvádí, že tímto nastavením dojde k ruinování pojišťovny jednou za 200 let. Tato představa by měla být aplikovaná na každý jednotlivý rizikový modul a celkový SCR se získá agregací dílčích SCR jednotlivých modulů pomocí korelačních koeficientů. Tyto koeficienty se určují tak, aby zohledňovaly koncovou závislost rozdělení (korelace za extrémních podmínek).

- *Proporcionalita a zjednodušení:*

  Princip proporcionality podporuje konzistentní použití principů při stanovení SCR pro všechny pojišťovny. Solventnost II poskytuje škálu metod výpočtu SCR, což umožňuje pojišťovně zvolit takovou, která je vhodná s ohledem na druh, rozsah a komplexnost rizika. Nabízí se tyto varianty:

  - úplný interní model
  - částečný interní model
  - standardní formule s upravenými parametry pojišťovnou
  - standardní formule
  - zjednodušení

  V QIS5 jsou popsána zjednušení některých částí standardní formule a zásady, podle kterých pojišťovna pozná, zda zjednodušení je považováno za proporcionální podkladovému riziku.

Vykazování SCR pojišťovnou státnímu orgánu dohledu bude nejspíše jednou ročně nebo při významnější změně rizikového profilu pojišťovny.

2.4 Výpočet SCR

Výsledný SCR se dostane jako

$$SCR = BSCR + Op - Adj, \tag{2.1}$$

kde $BSCR$ je základní SCR (basic SCR), Op je operační riziko a Adj je úprava zohledňující schopnost technických rezerv a odložené daňové povinnosti absorbovat ztráty.

2.4.1 Operační riziko

Operačním rizikem se rozumí „riziko ztráty vyplývající z nedostatečnosti nebo selhání interních procesů, pracovníků a systémů nebo vnějších událostí“. Zahrnuje též právní riziko, ale nezahrnuje riziko reputace (dobrého jména) nebo riziko špatného rozhodnutí při plánování. Je v rozsahu rizik, která nejsou explicitně zahrnuta v jiných rizikových modulech.

Výpočet není založen na šokových scénářích, ale na vzorci popsaném v QIS5. Tento vzorec se liší od vzorce popsaném v QIS4, protože dostatečně nereflektoval citlivost na změnu rizika. Nyní se narozdíl od minulosti bere do úvahy delší časové období než jeden rok, čímž by se měla lépe zahrnout celkově změna velikosti obchodu.

2.4.2 Úprava zohledňující schopnost absorbovat zráty

Úprava zohledňující schopnost technických rezerv a odložené daňové povinnosti absorbovat ztráty odráží případné kompenzace za neočekávané ztráty pomocí snížení technických rezerv nebo odložených daňových povinností. V technických rezervách tato úprava zohledňuje účinek snížení rizik pomocí budoucích

nepřipsaných podílů na zisku, tj. pouze do té doby, kdy snížení těchto podílů na zisku může být použito na krytí neočekávaných ztrát.

K odvození *Adj* jsou použity dva výpočty, a to *hrubý* a *čistý*. Hrubý výpočet se používá proto, aby nedošlo k dvojitému započtení efektu snižujícím riziko při modulárním přístupu. Nebere do úvahy realistické ekonomické podmínky ani účinek snížení rizik pomocí budoucích nepřipsaných podílů na zisku. Počítá se stejně jako čistý výpočet, ale za předpokladu zachování původních podílů na zisku. Při čistém výpočtu se očekává, že pojišťovna v reakci na šokový scénář provede realistické rozumné manažerské akce. Jak bylo avizováno, nově se v QIS5 testují dva přístupy při stanovení úpravy zohledňující schopnost absorbovat ztráty. Jsou to *modulární přístup* a *ekvivalentní scénář*. Očekává se, že pojišťovny provedou výpočet *Adj* podle obou přístupů, které potom budou vyhodnoceny a rozhodne se, který bude součástí Solventnosti II. Příklad na konstrukci ekvivalentního scénaře lze nalézt v příloze QIS5. *Adj* by neměla být záporná.

2.4.3 BSCR

$BSCR$ je „solventnostní kapitálový požadavek bez jakýchkoli úprav spočítaný na základě šesti hlavních rizikových modulů“:

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} SCR_i SCR_j} + SCR_{intang}, \tag{2.2}$$

kde
$Corr_{i,j}$ jsou položky korelační matice $Corr$ (viz tabulka 2.1),
SCR_i je SCR rizikového modulu i zahrnutého v korelační matici $Corr$,
SCR_{intang} je SCR za riziko nehmotného majetku.

Korelační matice $Corr$ a všechny další, které budou zmíněny, jsou vytvořeny pro potřeby QIS5. Finální korelační matice budou stanoveny později.

j i	Market	Default	Life	Health	Non-life
Market	1				
Default	0.25	1			
Life	0.25	0.25	1		
Health	0.25	0.25	0.25	1	
Non-life	0.25	0.5	0	0	1

Tabulka 2.1: Korelační matice $Corr$

Riziko nehmotného majetku

Nehmotný majetek je vystaven dvěma rizikům - **tržnímu**, kdy snížení cen na aktivním trhnu nebo neočekávaný propad likvidity[3] příslušného trhu může mít další dopad na ceny nebo zabránit k obchodování, a **vnitřnímu**, např. spojenému s poruchou nebo nežádoucí výchylkou procesu dokončení nehmotného aktiva nebo ovlivnění nehmotného aktiva takovým způsobem, že již nemáme očekávané budoucí přínosy z tohoto aktiva, nebo se sníží jeho hodnota.

$$SCR_{Intang} = 0,8IA, \tag{2.3}$$

kde IA je hodnota nehmotného majetku.

Tržní riziko

Tržním rizikem se rozumí „riziko ztráty nebo nepříznivé změny ve finanční situaci vyplývající přímo nebo nepřímo z kolísání úrovně a volatility[4] tržních cen finančních nástrojů (instrumentů)“. Je měřeno dopadem pohybů tržních proměnných jako jsou ceny akcií, úrokové míry, ceny nemovitosí a měnové kurzy. Modul tržního rizika sestává ze 7 submodulů, a to modulu úrokového rizika (riziko v důsledku změny úrokové míry), modulu akciového rizika (riziko v důsledku změn cen akcií), modulu rizika nemovitostí (riziko v důsledku citlivosti aktiv, závazků a finančních umístění na úroveň a volatilitu tržních cen nemovistostí), modulu rizika kreditního rozpětí (riziko v důsledku citlivosti aktiv, závazků a finančních nástojů na změnu úrovně nebo volatility kreditního rozpětí nad bezrizikovou úrokovou míru), modulu měnového rizika (riziko v důsledku změny měnových kurzů), modulu rizika koncentrace a modulu rizika nelikvidity (riziko v důsledku zvýšení cen technických rezerv kvůli snížení prémie za nelikviditu).

Výpočet probíhá obdobně jako u $BSCR$, tedy agregací jednotlivých tržních submodulů pomocí korelační matice:

$$SCR_{Market} = \max \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{\sum_{i,j} CorrMktUp_{i,j} Mkt_i^{up} Mkt_j^{up}}, \\ \sqrt{\sum_{i,j} CorrMktDown_{i,j} Mkt_i^{down} Mkt_j^{down}} \end{array} \right\}, \tag{2.4}$$

kde
$CorrMktUp$ a $CorrMktDown$ jsou dané korelační matice (viz tabulky 2.2 a 2.3),
Mkt_i^{up} je SCR rizikového modulu i zahrnutého v korelační matici $CorrMktUp$,
Mkt_i^{down} je SCR rizikového modulu i zahrnutého v korelační matici $CorrMktDown$.

Riziko selhání protistrany

Modul rizika selhání protistrany odráží případné ztráty způsobené neočekávaným selháním nebo zhoršením kreditního ratingu protistran a dlužníků pojišťovny během následujících 12 měsíců. Zahrnuje kontrakty, jimiž se pojišťovna zajišťuje

[3] Likviditou rozumíme schopnost aktiv být prodána bez způsobení významné změny ceny a s minimální ztrátou hodnoty.

[4] Volatilita je „míra kolísání hodnoty aktiva, výnosových nebo úrokových měr“.

CorrMktUp	Interest	Equity	Property	Spread	Currency	Concen-tration	Illiquidity premium
Interest	1						
Equity	0	1					
Property	0	0.75	1				
Spread	0	0.75	0.5	1			
Currency	0.25	0.25	0.25	0.25	1		
Concentration	0	0	0	0	0	1	
Illiquidity premium	0	0	0	-0.5	0	0	1

Tabulka 2.2: Korelační matice $CorrMktUp$

CorrMktDown	Interest	Equity	Property	Spread	Currency	Concen-tration	Illiquidity premium
Interest	1						
Equity	0.5	1					
Property	0.5	0.75	1				
Spread	0.5	0.75	0.5	1			
Currency	0.25	0.25	0.25	0.25	1		
Concentration	0	0	0	0	0	1	
Illiquidity premium	0	0	0	-0.5	0	0	1

Tabulka 2.3: Korelační matice $CorrMktdown$

proti rizikům (zajistné smlouvy, cenné papíry a deriváty), pohledávky za zprostředkovateli a další smlouvy závislé na kreditním ratingu, které nejsou pokryty submodulem kreditního rozpětí.

Všechny smlouvy zahrnuté v tomto modulu jsou rozděleny do dvou tříd. První třída obsahuje takové smlouvy, které nejsou vzájemně diverzifikovatelné a kde protistrana je v nějaké ratingové třídě. Druhá třída obsahuje všechny ostatní[5]. Potom výsledné SCR tohoto modulu spočítáme ze vztahu

$$SCR_{Default} = \sqrt{SCR_{def,1}^2 + 1,5SCR_{def,1}SCR_{def,2} + SCR_{def,2}^2}, \tag{2.5}$$

kde $SCR_{def,i}$ je SCR selhání protistrany se smlouvami v i-té třídě. SCR pro první třídu se počítá pomocí odhadu ztráty dané selháním protistrany a pravděpodobností jeho selhání. SCR pro druhou třídu se počítá ΔNAV přístupem.

[5]Podrobné rozdělení smluv do tříd najdeme v [7].

Upisovací riziko životního pojištění

Definici upisovacího rizika jsme již zmínili na straně 14, ovšem ve výpočtech stanovených v QIS5 se uvažují i další rizika.

Obsahuje 7 submodulů, a to modul rizika úmrtnosti, dlouhověkosti, postižení/nemocnosti, storen, nákladů (spojené se správou pojistných a zajistných smluv), katastrofy a změny (spojené se změnou sazeb uplatněné k výplatě důchodů kvůli právní změně nebo změně zdravotního stavu pojištěného). Výpočet je založen na agregaci rizik pomocí korelační matice $CorrLife$ (tabulka 2.4):

$$SCR_{Life} = \sqrt{\sum_{i,j} CorrLife_{i,j} Life_i Life_j}, \tag{2.6}$$

kde $Life_i$ je SCR rizikového modulu i zahrnutého v korelační matici $CorrLife$. Tyto kapitálové požadavky jednotlivých modulů se počítají ΔNAV přístupem.

	Mortality	Longevity	Disability	Lapse	Expenses	Revision	CAT
Mortality	1						
Longevity	-0.25	1					
Disability	0.25	0	1				
Lapse	0	0.25	0	1			
Expenses	0.25	0.25	0.5	0.5	1		
Revision	0	0.25	0	0	0.5	1	
CAT	0.25	0	0.25	0.25	0.25	0	1

Tabulka 2.4: Korelační matice $CorrLife$

Upisovací riziko neživotního pojištění

Popis tohoto modulu je totožný s popisem modulu upisovacího rizika životního pojištění.

Narozdíl od QIS4, kde tento modul obsahoval 2 submoduly (riziko pojistného a rezerv, riziko katastrofy), přibyl v QIS5 navíc ještě jeden submodul, a to modul rizka storen. Výpočet celkového SCR je opět založen na korelační matici

$$SCR_{Non-Life} = \sqrt{\sum_{i,j} CorrNL_{i,j} NL_i NL_j}, \tag{2.7}$$

kde NL_i je SCR rizikového modulu i zahrnutého v korelační matici $CorrNL$ (viz tabulka 2.5). Více podrobností nalezneme v samostatné části 2.4.4.

$CorrNL$	NL_{pr}	NL_{lapse}	NL_{CAT}
NL_{pr}	1		
NL_{lapse}	0	1	
NL_{CAT}	0.25	0	1

Tabulka 2.5: Korelační matice $CorrNL$

Upisovací riziko zdravotního pojištění

Tento modul prošel asi největší obměnou v porovnání s QIS4. Obsahuje 3 základní submoduly - modul rizika zdraví SLT (similar to life techniques), zdraví Non-SLT a katastrofy. Modul rizika zdraví SLT je koncipován jako modul rizika životního pojištění a modul rizika zdraví Non-SLT naopak jako modul rizika neživotního pojištění s tou výjimkou, že ani jeden z těchto modulů neobsahuje riziko katastrofy, protože to v modulu upisovacího rizika zdravotního pojištění stojí samostatně.

Co se týče výpočtů jednotlivých submodulů, neliší se mnoho od výpočtu v modulech upisovacích rizik životního a neživotního pojištění. Pouze modul rizika katastrofy má zcela odlišný přístup. Výsledné SCR se spočítá následovně:

$$SCR_{Health} = \sqrt{CorrHealth_{i,j} Health_i Health_j}, \tag{2.8}$$

kde $Health_i$ je SCR rizikového modulu i zahrnutého v korelační matici $CorrHealth$ (viz tabulka 2.6).

$CorrHealth$	$Health_{SLT}$	$Health_{Non\ SLT}$	$Health_{CAT}$
$Health_{SLT}$	1		
$Health_{Non\ SLT}$	0.5	1	
$Health_{CAT}$	0.25	0.25	1

Tabulka 2.6: Korelační matice $CorrHealth$

2.4.4 Upisovací riziko neživotního pojištění

Modul upisovacího riziko neživotního rizika mimo jiné zahrnuje také riziko nejistoty ohledně předpokladů o rozhodnutí pojistníka, jako je prodloužení nebo ukončení smlouvy. Bere v potaz nejistotu výsledku pojišťovny plynoucí nejen z existujících pojistných a zajistných smluv, ale také s očekávnaným novým obchodem uzavřeným během následujících 12 měsíců. Již jsme zmínili, že modul upisovacího rizika neživotního pojištění obsahuje tři submoduly. Nyní si podrobněji popíšeme, jak probíhá výpočet SCR těchto modulů podle QIS5.

Modul rizika pojistného a rezerv

Hlavními zdroji upisovacího rizika jsou *riziko pojistného* a *riziko rezerv*, jejichž definice jsme uvedli na stránce 13. Pro výpočet SCR rizika pojistného a rezerv je zapotřebí spočítat následující:

- PCO_{lob} - nejlepší odhad[6] nevyřízených škod pro každý druh pojištění (line of business - LoB) - viz tabulka 2.7
- $P_{lob}^{0,written}$ - odhad čistého předepsaného pojistného pro každý LoB během následujícího roku
- $P_{lob}^{0,earned}$ - odhad čistého zaslouženého pojistného pro každý LoB během následujícího roku
- $P_{lob}^{-1,written}$ - čisté předepsané pojistné pro každý LoB z minulého roku
- $P_{lob}^{-1,earned}$ - čisté zasloužené pojistné pro každý LoB z minulého roku
- PV_{lob} - současná hodnota čistého pojistného plynoucí z existujících pojistných smluv, u kterých se očekává jejich platnost za déle než jeden rok. Musí jít tedy o smlouvy s pojistnou dobou překračující následující rok (tj. včetně těch s možností prodloužení). Pro roční smlouvy bez možnosti prodloužení se pokládá PV_{lob} nule.

Číslo	LoB
1	pojištění odpovědnosti za škodu způsobenou provozem vozidla
2	ostatní pojištění motorového vozidla
3	námořnictví, letectví, doprava (MAT)
4	požární a majetkové pojištění
5	všeobecné pojištění odpovědnosti za škodu (mimo 1-3)
6	pojištění úvěrů a záruk
7	právní ochrana
8	asistence
9	pojištění různých finančních ztrát
10	neproporcionální zajištění - majetek
11	neproporcionální zajištění - nehoda
12	neproporcionální zajištění - MAT

Tabulka 2.7: Tabulka rozdělení LoB

Výledkem je SCR rizika pojistného a rezerv, který se počítá vztahem

$$NL_{pr} = \rho(\sigma)V, \tag{2.9}$$

kde V je objem rizika, σ je směrodatná odchylka získaná ze směrodatných odchylek rizika pojistného a rizika rezerv a ρ je funkce definována jako

$$\rho(x) = \frac{\mathrm{e}^{u_{0,995}\sqrt{\log(x^2+1)}}}{\sqrt{x^2+1}} - 1,$$

[6]Nejlepším odhadem rozumíme střední hodnotu současné hodnoty peněžních toků.

která odpovídá tomu, že za předpokladu logaritimicko normálního rozdělení podkladového rizika je kapitálový požadavek kalibrován na $\mathrm{VaR}_{0,995}$. Výpočet objemu rizika V a směrodatné odchylky σ probíhá v následujících dvou krocích:

1. Pro každý LoB se stanoví standardní odchylka a objem rizika pro riziko pojistného a pro riziko rezerv.

2. Celková standardní ochylka σ a objem rizika V se spočte agregací jednotlivých standardních odchylek a objemů rizika stanovené v prvním kroku.

Modul rizika storen

Jelikož pojistník může na smlouvách neživotního pojištění udělat taková rozhodnutí, která významně ovlivní závazky z nich plynoucí (např. prodloužení nebo ukončení smlouvy), je výpočet pojistného založený na předpokladech o pohybu sazeb při těchto rozhodnutí. Riziko, že tyto předpoklady se ukáží být špatné a musejí být změněny, se nazývá riziko storen. Pokud takové smlouvy, kde smí pojistník činit rozhodnutí, pojišťovna ve svém portfoliu nemá, je kapitálový požadavek modulu rizika storen roven nule.

SCR modulu rizika storen je stanoveno vztahem

$$NL_{lapse} = \max\{Lapse_{down}, Lapse_{up}, Lapse_{mass}\}, \tag{2.10}$$

kde $Lapse_{down}$, resp. $Lapse_{up}$, je SCR na riziko při permanentním snížení, resp. zvýšení míry stornovosti a $Lapse_{mass}$ je SCR na riziko při masové stornovosti. Všechny tři SCR se počítají ΔNAV přístupem, kde šokové scénáře jsou následující:
$\boldsymbol{shock_{down}}$ - snížení o 50% předpokládané míry rozhodnutí R na všech smlouvách, které nepříznivě postihne toto riziko. Tento šok nesmí snížit míru R o více než 20%. Tedy šoková míra $R_{down} = \max\{0,5R, R - 0,2\}$.
$\boldsymbol{shock_{up}}$ - zvýšení o 50% předpokládáné míry rozhodnutí R na všech smlouvách, které nepříznivě postihne toto riziko. Šoková míra R_{up} nemůže být vyšší než 100%, tedy $R_{up} = \min\{1,5R, 1\}$.
$\boldsymbol{shock_{mass}}$ - odstoupení 30% pojistných smluv se zápornou hodnotou nejlepšího odhadu rezerv pojistného.

Modul rizika katastrofy

Rizko katastrofy je definováno jako upisovací riziko související s extrémními nebo výjimečnými událostmi. Výpočet je rozdělen na dvě části, a to výpočet podle metody 1 a metody 2. Do metody 1 by měla pojišťovna zařadit všechna možná rizika. Jen pokud to není možné, použije se metoda 2, tj. zejména v následujících případech:

- přírodní katastrofy mimo území EEA[7]

- ostatní pojištení (viz tabulka 2.8)

[7]EEA je zkratka pro Evropský hospodářský prostor.

- neproporcionální zajištění

Výsledné SCR vznikne agregací těchto dvou metod, kdy se předpokládá, že jsou nezávislé, tedy

$$NL_{CAT} = \sqrt{NL_{CAT_1}^2 + NL_{CAT_2}^2}, \tag{2.11}$$

kde NL_{CAT_i} je SCR vypočtené podle metody i.
Metoda 1: Standardizovaný scénář. Tato metoda rozděluje rizika na přírodní katastrofy a na pohromy způsobené člověkem. Pro každou katastrofu a každou zemi v EEA je spočítáno její SCR. Dílčí kapitálový požadavek na každou katastrofu se spočítá agregací těchto SCR pomocí korelační matice vyjadřující korelaci mezi zeměmi. Nakonec výsledná SCR podle metody 1 dostaneme agregací dílčích SCR na každou katastrofu pomocí korelační matice vyjadřující korelaci mezi katastrofami.
Metoda 2: Metoda založená na faktorech. Pro tuto metodu předpokládáme hrubé předepsané pojistné a hrubé faktory reprezentující jednotlivé události. Dále pro výpočet SCR uvažujeme, že jednotlivé LoB jsou nezávislé mimo proporcionální zajištění, kde naopak uvažujeme 100% korelaci. Výsledný vztah tedy je

$$NL_{CAT_2} = \sqrt{\left(\sqrt{\sum_{t\in\{1,2,3,5\}} (c_t P_t)^2} + c_{11}P_{11}\right)^2 + \sum_{t\in\{4,7,8,9,10,13\}} (c_t P_t)^2 + (c_6 P_6 + c_{12}P_{12})^2},$$

kde c_t je faktor a P_t je pojistné pro příslušné LoB (viz tabulka 2.8).

t	Událost	LoB	Faktor c_t
1	Bouře	Požární a majetkové pojištění, ostatní pojištění motorového vozidla	1,75
2	Povodeň	Požární a majetkové pojištění, ostatní pojištění motorového vozidla	1,13
3	Zemětřesení	Požární a majetkové pojištění, ostatní pojištění motorového vozidla	1,20
4	Krupobití	Ostatní pojištění motorového vozidla	0,30
5	Velké požáry, exploze	Požární a majetkové pojištění	1,75
6	Velké pohromy MAT	MAT	1,00
7	Velké pohromy povinného ručení	Pojištění odpovědnosti za škodu způsobenou provozem vozidla	0,40
8	Velké nehody odpovědnosti za škodu třetí osoby	Všeobecné pojištění odpovědnosti za škodu	0,85
9	Úvěry	Pojištění úvěrů	1,39
10	Ostatní pojištění	Pojištění různých finančních ztrát	0,40
11	Neproporcionální zajištění (NPL) - majetek	NPL - majetek	2,50
12	NPL - MAT	NPL - MAT	2,50
13	NPL - nehoda	NPL - nehoda	2,50

Tabulka 2.8: LoB a faktory pro výpočet rizika katastrofy metodou 2

Kapitola 3

Částečné interní modely

Standardní formule poskytuje návod na výpočet SCR pojišťovny. Je závazný, ale také stejný, pro všechny pojišťovny v EU včetně Švýcarska, z čehož plynou některé nedostatky, a to hlavně, že standardní formule nemusí plně reflektovat rizikový profil každé pojišťovny. Je totiž tvořena a použitelná jen pro „průměrnou“ pojišťovnu. Může tedy hodnotu SCR výrazně nadhodnocovat nebo podhodnocovat. Proto bylo pojišťovnám povoleno vytvářet interní model, který by lépe zohledňoval rizika, kterým pojišťovna skutečně čelí. Má na výběr mezi úplným interním modelem (full internal model - FIM) a částečným interním modelem (partial internal model - PIM). Už z názvu je jasné, že úplný interní model zcela nahradí standardní formuli ve výpočtu SCR, kdežto částečný interní model nahrazuje pouze její část. Není samozřejmě plně v kompetenci pojišťovny používat interní model (IM), ale každý vyvinutý interní model pojišťovnou podléhá schválení dohledu.

3.1 Hlavní obchodní jednotky

Každá pojišťovna si může zadefinovat tzv. hlavní obchodní jednotku (major business unit - MBU), která musí být definovaná jako funkční jednotka v podnikání,

- která je řízena nezávislou a vyhrazenou správou
- u které má smysl počítat
  - výkaz zisků a ztrát
  - kapitálové požadavky jednotlivých modulů a submodulů, operačního rizika, úpravy zohledňující schopnost technických rezerv a odložené daňové povinnosti absorbovat ztráty a/nebo pro jakkákoli jiná výrazná kvantifikovatelná rizika.

Příklady hlavních obchodních jednotek: pobočky, životní a neživotní pojištění, zeměpisné regiony, oddělení pro určitý typ zákazníků apod. Definice MBU podléhá schválení dozoru.

3.2 Rozsah částečného interního modelu

Pokud se pojišťovna rozhodne pro PIM, může ho použít k modelování:

- jednoho a více modulů/submodulů (ze stejného i různého modulu) celého obchodu nebo jedné a více MBU
- úpravy zohledňující schopnost technických rezerv a odložené daňové povinnosti absorbovat ztráty pro celý obchod nebo jednu a více MBU
- operačního rizika celého obchodu nebo jedné a více MBU

Při použití PIM není pojišťovna vázaná na kategorizaci rizik podle standardní formule, ale může použít vlastní, např.:

- modelování rizik nezahrnutých ve standardní formuli
- užití jiného časového horizontu nebo jiné míry rizika
- nepoužití modulárního přístupu.

Jak již bylo řečeno, PIM podléhá schválení dozoru, který musí po obdržení žádosti na schválení PIM rozhodnout do 6 měsíců. Při posuzování žádosti se pohlíží především na tato ustanovení:

- dohled požaduje řádné odůvodnění omezeného rozsahu modelu.
- výsledné SCR vhodněji reflektuje rizikový profil pojišťovny.
- PIM musí být konzistentní se základními principy k plnému začlenění do standardní formule.
- může být vyžadován plán přechodu pro rozšíření rozsahu modelu.

Mezi základní principy patří např.:

- všechna kvantifikovatelná rizika musí být brány v potaz.
- počítají se neočekávané ztráty z existujících a z nových obchodů v následujících 12 měsíců.
- SCR odpovídá VaR na hladině $99,5\%$ v časovém horizontu jednoho roku.
- SCR pokrývá přinejmenším $Life, Non-Life, Health, Spread$ a Op (PIM nemusí nutně pokrývat všechna tato rizika)
- jsou započítány techniky k řízení rizik.

Plán přechodu pro rozšíření rozsahu PIM dohled vyžaduje, pokud omezený rozsah PIM není řádně odůvodněn nebo některá rizika, která nejsou zohledněna ve standardní formuli, jsou mimo rozsah PIM. Pokud ovšem PIM reprezentuje přechodný krok směrem k FIM, může dohled tento PIM schválit i přes jeho omezený rozsah a nevyžadovat plán přechodu pro rozšíření rozsahu.

Dohled dokonce může vyžadovat po pojišťovně, aby si vyvinula PIM (nebo FIM), a to tehdy, pokud rizikový profil pojišťovny neodpovídá struktuře standardní formule. Samozřejmě i takto nařízený IM musí splňovat vše výše uvedené.

3.3 Požadavky pro schválení interního modelu

Pojišťovna, která chce použít PIM (popř. FIM), musí zdokumentovat a odvodit důkazy, že splňuje všechny následující požadavky[1]:

- **Test použitelnosti**:
  Základní myšlenkou tohoto testu je, aby senior managment porozumněl PIM, aby se PIM využíval v různých částech obchodu a byl použit na podporu rozhodnutích v pojišťovně. A to z toho důvodu, aby pojišťovna sama pociťovala tlak na vylepšení tohoto svého PIM. Existují tři různé přístupy na posouzení dodržování testu požitelnosti. My se zaměříme na přístup, který vychází z předem daných principů, kterými se pojišťovna musí řídit. Další přístup je založen na detailním seznamu, který zahrnuje případy, pro který musí být PIM použit, a poslední přístup je analýza „případ od případu“ pro každé použití. Ty principy, kterými by se pojišťovna měla řídit, jsou následující[2]:

  1. Senior management a oddělení administrace, managementu nebo dozorčího orgánu musí být schopni demonstrovat porozumění PIM.
  2. PIM musí vyhovovat obchodnímu modelu, tedy výstupy z PIM budou použity v různých částech obchodu (např. při tvorbě strategie, obchodního plánu...)
  3. PIM musí být použit na podporu a ověření rozhodnutích v pojišťovně.
  4. PIM musí pokrývat rizika, která jsou užitečná pro risk management.
  5. PIM by měl být vytvořen tak, aby usnadňoval analýzu obchodních rozhodnutí.
  6. PIM musí být široce začleněn do systému řízení rizik.
  7. PIM musí být použit ke zlepšení systému řízení rizik.
  8. Začlenění PIM do systému řízení rizik musí být na konzistetních základech.
  9. SCR z PIM musí být počítán minimálně jednou ročně a také, pokud nastane významná změna v rizikovém profilu pojišťovny, podkladových předpokladů a/nebo postupů způsobených změnou rozhodovacího nebo obchodního modelu. Dále pokud nový výpočet je nezbytný pro poskytnutí aktuálních informací pro tvorbu rozhodnutí nebo jiné použití modelu nebo pro splnění požadavků dohledu ohledně vykazování.

  Test použitelnosti v podstatě vyžaduje, aby PIM hrál důležitou roli v pojišťovně a byl široce využit.

- **Standardy statistické kvality**:
  Tyto standardy vyžadují, aby se použily vhodné techniky a přesná, kompletní a odpovídající data. Měly by se aplikovat na model rizik užívaný pro projekci, na oceňovací model a všechny procesy s tím spojené.

[1] Podrobnosti k jednotlivých požadavkům na PIM nalezneme v Consultation Paper 56 [5].
[2] Podrobnosti k jednotlivým principům nalezneme v Consultation Paper 56 [5].

- **Standardy kalibrace**:
  Pokud v PIM použijeme jiný časový horizont nebo jinou míru rizika, je potřeba ukázat, že je poskytnuta přinejmenším stejná ochrana jako při použití standardní formule.

- **Přisuzování zisků a ztrát**:
  Pojišťovna musí minimálně jednou ročně vykázat příčiny a zdroje zisků a ztrát pro každou hlavní obchodní jednotku.

- **Standardy validace**:
  Pojišťovna musí mít vlastní validační (ověřovací) model, který zahrnuje monitorování výkonnosti PIM, vykazování vhodnosti jeho specifikací a testování výsledku z PIM proti skutečnosti. Měl by se zaměřovat přinejmenším na tyto oblasti:

  - data
  - metody
  - předpoklady
  - expertní odhad
  - dokumentace
  - systémy/IT
  - model řízení
  - test použitelnosti.

  Pomocí back-testingu bychom měli srovnat skutečná data s predikcí PIM za účelem odhalení slabé stránky PIM. Pro poskytnutí informací ohledně výkonosti PIM v různých stresových situacích se využívá rozsáhlého stresového testování a testování scénářů.

- **Standardy dokumentace**:
  Nezbytná dokumentace by měla nezávislé informované třetí straně umožnit utvořit si zdravý úsudek o vhodnosti modelu a dodržování předchozích zásad a dalších ustanovení. Management by tedy měl mít dobrou znalost klíčových částí PIM a jejich omezení. Měla by být identifikována všechna slabá místa PIM a dokumentace by měla obsahovat detaily ohledně vybudování a správy PIM.

- **Externí modely a data**:
  Použití modelu nebo dat získaných třetí stranou nemůže být považováno za zdůvodnění pro vyjmutí z jakkýchkoli předchozích zásad. Pojišťovna tedy musí zajistit, že externí model nebo data jsou konzistentní s těmito zásady. Pokud se pojišťovna rozhodne pro externí model nebo data, musí:

  - vysvětlit jejich význam včetně dopadu na SCR,
  - vysvětlit, proč jim dala přednost před interním modelem nebo interním datům,

- demonstrovat hlubokou znalost postupů a konstrukce externího modelu,
- znát omezení externího modelu,
- přezkoumat externí model minimálně jednou ročně, aby zajistila, že model je stále funkčí tak, jak pojišťovna očekává.

Kapitola 4

Návrh částečného interního modelu

Popíšeme si jeden z návrhů částečného interního modelu pro stanovení SCR upisovacího rizika neživotního pojištění ($SCR_{Non-Life}$). Konkrétně se zaměříme na výpočet rizika pojistného a rizika rezerv, jejichž definice jsme zavedli na stránce 21. Tento model plně nahrazuje submodul rizika pojistného a rezerv a částečně také submodul rizika katastrofy. Narozdíl od standardní formule, ve které se předpokládá logaritmicko-normální rozdělení podkladového rizika, v tomto modelu neuvažujeme jedno konkrétní rozdělení. To umožňuje každé pojišťovně zvolit takové rozdělení, které nejlépe odpovídá jejímu rizikovému profilu. V případě rizika rezerv dokonce dané rozdělení simulujeme pomocí metody bootstrap. Tím bychom měli eliminovat chybu danou špatnou volbou rozdělení rizika.

4.1 Riziko pojistného

Pro stanovení rizika pojistného potřebujeme informace o pojistném, nákladech a celkových škodách. Pojistné a náklady pro každý LoB bereme z předpovědi pro modelovaný rok. Jestliže historická data o pojistném a nákladech jsou dostatečně ustálená (odchylka od odhadovaných hodnot je velmi nízká), můžeme je modelovat deterministicky, v opačném případě je nutné použít stochastický model. Na modelování škody se lépe hodí stochastické modely s daným pravděpodobnostním rozdělením. V našem případě je budeme dělit na škody velké, katastrofické a ostatní.

4.1.1 Velké škody

Velká škoda je taková škoda, jejíž aktuální konečná výše překročí stanovenou mez. Obvykle je tato mez volena s ohledem na XL-zajištění a dostupnost dat. Obecně požadujeme, aby mezi prioritou XL-zajištění a stanovenou mezí byl dostatek pozorování (odpovídající počet může být 30 a více). Pro její výpočet můžeme postupovat například tak, že si vezmeme všechny škody větší než 95% kvantil (bráno z empirického rozdělení škod) a dále budeme zjišťovat, kolik dat leží nad $95,05\%$, $95,1\%, \ldots$ kvantilem. Čím více máme pozorování, tím lépe proložíme daty dané pravděpodobnostní rozdělení. Na druhou stranu nechceme mez

nastavit příliš nízko, abychom modelovali opravdu jen velké škody s malou frekvencí výskytu a ne „běžné“ škody s velkou frekvencí výskytu.

Modelování velkých škod založíme na kolektivním modelu rizika. Budeme tedy odhadovat počet škod a výše jednotlivých škod samostatně. Pro výpočet počtu škod využijeme metodu Chain-ladder na kumulativní trojúhelník počtu velkých škod. Dostaneme odhad konečného počtu škod z jednotlivých let, které upravíme na úroveň modelovaného roku $t+1$, což provedeme vztahem

$$adj_number_j = \frac{ultimate_number_claims_j}{exposure_j} exposure_{t+1}, j = 1, \ldots, t,$$

kde t je počet let, $exposure_j$ je expozice v roce j (tedy $exposure_{t+1}$ je předpověď expozice pro modelovaný rok), adj_number_j je upravený počet škod na úroveň modelovaného roku $t+1$, $ultimate_number_claims_j$ je odhad konečného počtu škod z roku j. Poté zvolíme vhodné pravděpodobnostní rozdělení upraveného počtu škod. Na výběr máme z následujících:

1. Negativně binomické rozdělení - pro taková data, kde střední hodnota počtu škod je menší než jejich rozptyl.

2. Poissonovo rozdělení - pro taková data, kde střední hodnota a rozptyl počtu škod jsou přibližně stejné.

3. Binomické rozdělení - pro taková data, kde střední hodnota počtu škod je větší než jejich rozptyl. A to tehdy, pokud parametr označující počet škod je dostatečně velký a představuje maximální možný počet.

Pro odhad rozdělení výše škod nejprve upravíme jednotlivé rezervy (rezervy každé škody) dle očekávané úrovně celkové rezervy roku j. Úpravu provedeme pomocí α faktoru následujícím vztahem

$$claim_ultimate_j^k = payments_j^k + \alpha_j \cdot reserve_j^k, \ j = 1, \ldots, t,$$

kde $claim_ultimate_j^k$ je konečná výše k-té škody vzniklé v roce j, $payments_j^k$ jsou proběhlé výplaty za k-tou škodu vzniklou v roce j a $reserve_j^k$ je rezerva na k-tou škodu vzniklou v roce j. Faktor α pro každý rok spočítáme ze vztahu

$$\alpha_j = \frac{number_claims_j \cdot average_claim_j - payments_j}{reserve_j}, \ j = 1, \ldots, t,$$

kde

$$average_claim_j = \frac{claims_ultimate_j}{ultimate_number_claims_j}, \ j = 1, \ldots, t,$$

$number_claims_j$ je počet nahlášených škod z roku j (tj. čísla na diagonále kumulativního trojúhelníku), $payments_j$ je výše proběhlých plateb na škody vzniklé v roce j, $reserve_j$ je rezerva na škody z roku j a $claims_ultimate_j$ je odhad konečné výše škod z roku j pomocí metody Chain-ladder na kumulativní trojúhelník výše škod. Z výpočtu faktoru α je zřejmé, že pro $\alpha_j > 1$ je rezerva na škody z roku j nedostatečná a je potřeba ji právě o násobek faktoru α_j navýšit. Naopak pro $\alpha_j < 1$ je rezerva na škody z roku j nadhodnocená a můžeme

část rezerv rozpustit. Pro $\alpha_j = 1$ je rezerva na škody z roku j ve správné výši a není třeba ji upravovat. Máme tedy k dispozici konečné výše velkých škod a nyní odhadneme jejich rozdělení. K tomu využíváme logaritmicko-normální rozdělení, gamma rozdělení nebo Paretovo rozdělení.

4.1.2 Katastrofické škody

Výchozím bodem je určení škod, které patří mezi katastrofické. Rozhodovacím kritériem mohou být tyto parametry - příčina vzniku (událost), omezené časové období, počet škod nebo celková výše škod. Pro Českou republiku mezi příčiny vzniku může typicky patřit povodeň, vichřice/bouře a kroupy. Ve světě mezi další příčiny patří například zamětřesení, požáry, tsunami apod. Tyto škody je lepší modelovat napříč jednotlivými riziky dle dané události. Při sestavení modelu katastrofických škod můžeme použít dva odlišné přístupy. První z nich je založen na modelování z vlastních historických dat, kdy máme dostatečně velkou zkušenost s daným typem události. Při nedostatku vlastních dat využijeme místo nich externích modelů (RMS, EQUECAT), jejichž výstupem je pravděpodobnostní rozdělení katastrofických škod týkající se dané pojišťovny. Dále už je jen potřeba alokovat jednotlivé katastrofické škody k LoB podle historické zkušenosti.

4.1.3 Ostatní škody

Ostatní škody jsou takové škody, které nepatří ani do jedné z předchozích skupin. Pro jejich modelování využijeme individuální model rizika - tedy výše škody v jednotlivých letech je odhadnuta jediným pravděpodobnostním rozdělením. Mezi vhodná rozdělení patří logaritmicko-normální rozdělení, gamma rozdělení a inverzní gamma rozdělení. K odhadu parametrů rozdělení můžeme využít buď metodu momentů nebo metodu maximální věrohodnosti.

Ze vztahu

$$UV_{\text{att},j} = UV_{\text{total},j} - UV_{\text{large},j} - UV_{\text{CAT},j},\ j = 1, \dots, t$$

dostaneme výši ostaních škod z roku j pro každý LoB, kde $UV_{\text{att},j}$ je očekávaná výše ostatních škod z roku j, $UV_{\text{total},j}$ je očekávaná celková výše všech škod z roku j určená nejlepším odhadem z předchozího roku, $UV_{\text{large},j}$ je očekávaná výše velkých škod z roku j a $UV_{\text{CAT},j}$ je očekávaná výše katastrofických škod z roku j. Tento vztah používáme proto, abychom dospěli ke stejnému odhadu[1] celkové výše škod.

Dále je nutné očistit výše ostatních škod o vliv expozice v jednotlivých letech. Proto si zavedeme veličinu $z_j = \frac{UV_{\text{att},j}}{\nu_j}$, kde ν_j je velikost expozice v roce j. Nechť $Z_1, \dots, Z_t$ je náhodný výběr, jehož pozorované hodnoty jsou $z_1, \dots, z_t$. Nechť tento náhodný výběr pochází např. z logaritmicko-normálního rozdělení $\text{LN}(\theta, \frac{\sigma}{\nu})$. Metodou maximální věrohodnosti dostaneme odhad parametrů:

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{j=1}^{t} \nu_j \log(z_j)}{\sum_{j=1}^{t} \nu_j} \quad \text{a} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{t} \nu_j (\log(z_j) - \hat{\theta})^2}{t}.$$

[1]Pokud bychom odhadovali ostatní škody např. metodou Chain-ladder, mohli bychom po sečtení $UV_{\text{large},j} + UV_{\text{CAT},j} + UV_{\text{att},j}$ dostat jiný výsledek než $UV_{\text{total},j}$ pro nějaké $j = 1, \dots, t$.

Odhadneme-li výši expozice ν_{t+1} pro modelovaný rok $t+1$ (např. extrapolací historických dat, použitím obchodního plánu apod.), náhodná veličina $S = \nu_{t+1}Z$ označuje výši škod pro následující rok $t+1$, kde Z má rozdělení uvažované výše.

Výhodou tohoto postupu oproti standardní formuli spočívá v jiném přístupu pro každý typ škod (velké, katastrofické, ostatní). Na druhou stranu tím klademe větší nároky na vstupní data, která nemusíme mít pokaždé k dispozici. Výstupy tohoto výpočtu jsou rozdělení pro každý typ škod. Pomocí nich stanovíme kapitálový požadavek pro každý typ škod a stanovíme celkový kapitálový požadavek na riziko pojistného jako jejich součet.

4.2 Riziko rezerv

V této části si popíšeme zobecněný Mackův model pro odhad vývoje škod. Zavedeme výpočet odhadu nejistoty (tj. rizika rezerv) pomocí střední kvadratické odchylky a metody bootstrap, kterou využijeme i pro výpočet VaR. Upravíme výpočet střední kvadratické odchylky na rekurzivní formuli, čímž dosáhneme možnosti zohlednit zbytkový faktor ve vývoji škod.

4.2.1 Zobecněný Mackův model

Mackův model bývá někdy nazývám také metodou Chain-ladder. Je to jeden z nejpoužívanějších modelů. Důvodem je určitě jeho jednoduchost a to, že není potřeba předpokladát žádné konkrétní rozdělení škod. Nevýhodou zase bývá jeho velká citlivost na kolísání pozorovaných dat ve škodním roce.

Nechť $C_{j,s}, j = 1, \ldots, t, s = 0, \ldots, t-1$, je kumulativní výše škod vzniklých v roce j (tzv. *škodní rok*) a vyřízených do konce roku $j+s$, kde s je *vývojový rok*. Z historických dat získáme *vývojový trojúhelník* $\triangle = \{C_{j,s}, j = 1, \ldots, t, j+s \leq t\}$, který doplníme na čtverec, a tím získáme odhad vývoje škod. Základní předpoklady Mackova modelu jsou následující.

- Předpoklad popisující úměrnost sloupců ve vývojovém trojúhelníku:

$$\mathrm{E}[C_{j,s+1}|C_{j,0}, \ldots, C_{j,s}] = f_s C_{j,s} \ \forall j = 1, \ldots, t, \tag{4.1}$$

  kde $f_s, s = 0, \ldots, t-2$, jsou *vývojové faktory*.

- Škody v různých škodních letech jsou na sobě nezávislé:

$$\text{vektory } (C_{j,0}, \ldots, C_{j,t-1}) \text{ a } (C_{k,0}, \ldots, C_{k,t-1}) \text{ jsou vzájemně nezávislé pro } \forall j \neq k. \tag{4.2}$$

Z úměrnosti sloupců dostáváme předpoklad vývoje škod $\hat{C}_{j,s+1} = \hat{f}_s \hat{C}_{j,s}$, kde pro odhad vývojového faktoru využíváme vztah

$$\hat{f}_s = \frac{\sum_{j=1}^{t-s-1} w_{j,s} C_{j,s}^{\beta} F_{j,s}}{\sum_{j=1}^{t-s-1} w_{j,s} C_{j,s}^{\beta}}, \quad \beta \in \{0, 1, 2\}, \tag{4.3}$$

kde $F_{j,s} = \frac{C_{j,s+1}}{C_{j,s}}, j = 1, \ldots, t, s = 0, \ldots, t-2$, jsou *individuální vývojové faktory* a $w_{j,s} \in [0,1], j = 1, \ldots, t, s = 0, \ldots, t-2$, jsou libovolné váhy, které jsou často využívány pro snížení vlivu odlehlých $F_{j,s}$.

Uvažujeme-li, že $w_{j,s} = 1 \ \forall j, s$ (v praxi velmi časté), pak pro $\beta = 1$ dává vzorec (4.3) odhad vývojových faktorů u původního Mackova modelu (vážený průměr individuálních vývojových faktorů), pro $\beta = 0$ dostáváme výběrový průměr individuálních vývojových faktorů a pro $\beta = 2$ je tento vzorec výsledkem lineární regrese $C_{j,s+1} = f_s C_{j,s} + \epsilon_j, j = 1, \ldots, t-s-1$.

Na základě (4.1) odhad výše škody $C_{j,t-1}$ odpovídá vztahu

$$\hat{C}_{j,t-1} = C_{j,t-j} \hat{f}_{t-j} \hat{f}_{t-j+1} \ldots \hat{f}_{t-2}, \quad j = 1, \ldots, t. \tag{4.4}$$

Jelikož vývoj škod ve škodním roce nemusí končit po t letech, pro tento případ použijeme *zbytkový faktor* $\hat{f}_{ult} > 1$ k odhadu konečné výše škod v každém škodním roce vztahem

$$\hat{C}_{j,ult} = \hat{C}_{j,t-1} \hat{f}_{ult}, \quad j = 1, \ldots, t.$$

4.2.2 Střední kvadratická odchylka

Pro odvození střední kvadratické odchylky potřebujeme ještě dodatečný předpoklad, že

$$\operatorname{var}[C_{j,s+1} | C_{j,0}, \ldots, C_{j,s}] = C_{j,s}^{2-\beta} \frac{\sigma_s^2}{w_{j,s}}, \ \forall j = 1, \ldots, t, \tag{4.5}$$

který je zobecněním předpokladu v původním Mackově modelu. Střední kvadratická odchylka odhadu výše škody $C_{j,s}$ je definovaná jako

$$\operatorname{mse} \hat{C}_{j,s} = \mathrm{E}[(\hat{C}_{j,s} - C_{j,s})^2 | \triangle],$$

což z předpokladu na nezávislost řádků (předpoklad (4.2)) je stejné jako

$$\operatorname{mse} \hat{C}_{j,s} = \mathrm{E}[(\hat{C}_{j,s} - C_{j,s})^2 | C_{j,0}, \ldots, C_{j,t-j}].$$

Pro získání odhadu σ_s^2 si ukážeme, že pro $s = 0, \ldots, t-2$ je

$$\sigma_s^{2^*} = \frac{1}{t-s-1} \sum_{j=1}^{t-s-1} w_{j,s} C_{j,s}^{\beta} (F_{j,s} - f_s)^2 \tag{4.6}$$

nestranný odhad σ_s^2. Protože dle předpokladu (4.1) platí $f_s = \mathrm{E}[F_{j,s} | C_{j,0}, \ldots, C_{j,s}]$, můžeme (4.6) upravit na

$$\mathrm{E}\, \sigma_s^{2^*} = \mathrm{E} \frac{1}{t-s-1} \sum_{j=1}^{t-s-1} w_{j,s} \, \mathrm{E}[C_{j,s}^{\beta} (F_{j,s} - \mathrm{E}\, [F_{j,s} | C_{j,0}, \ldots, C_{j,s}])^2 | C_{j,0}, \ldots, C_{j,s}] =$$

$$= \mathrm{E} \frac{1}{t-s-1} \sum_{j=1}^{t-s-1} w_{j,s} C_{j,s}^{\beta} \operatorname{var}[F_{j,s} | C_{j,0}, \ldots, C_{j,s}].$$

Dále z předpokladu (4.5) dostáváme, že $\mathrm{var}[F_{j,s}|C_{j,0},\dots,C_{j,s}] = \frac{\sigma_s^2}{w_{j,s}C_{j,s}^{\beta}}$. Tedy celkem

$$\mathrm{E}\,\sigma_s^{2^*} = \mathrm{E}\,\frac{1}{t-s-1}\sum_{j=1}^{t-s-1} w_{j,s}C_{j,s}^{\beta}\frac{\sigma_s^2}{w_{j,s}C_{j,s}^{\beta}} = \sigma_s^2,$$

čímž jsme dokázali nestrannost odhadu. Jelikož ale vývojové faktory jsou neznámé, používáme pro odhad σ_s^2 vztah

$$\hat{\sigma}_s^2 = \frac{1}{t-s-2}\sum_{j=1}^{t-s-1} w_{j,s}C_{j,s}^{\beta}(F_{j,s}-\hat{f}_s)^2,$$

který je opět nestranným odhadem σ_s^2. (viz [13]) Při $s = t-2$ nemůžeme využít předchozího vztahu, většinou proto předpokládáme, že

$$\frac{\sigma_{t-3}^2}{\sigma_{t-4}^2} = \frac{\sigma_{t-2}^2}{\sigma_{t-3}^2},$$

pokud $\sigma_{t-4}^2 > \sigma_{t-3}^2$. Z čehož získáváme $\hat{\sigma}_{t-2}^2 = \min\{\frac{\sigma_{t-3}^4}{\sigma_{t-4}^2}, \min\{\sigma_{t-3}^2, \sigma_{t-4}^2\}\}$.

Pro další značení si definujme useknutý vývojový trojúhelník

$$\triangle_s = \{C_{j,k}, j = 1,\dots,t, k = 0,\dots,s, j+k \le t\}.$$

V původním Mackově modelu ($\beta = 1$ a $w_{j,s} = 1\ \forall j,s$) byl odvozen odhad pro střední kvadratickou odchylku (viz [12])

$$\widehat{\mathrm{mse}\,\hat{C}_{j,t-1}} = \hat{C}_{j,t-1}^2 \sum_{s=t-j}^{t-2}\frac{\hat{\sigma}_s^2}{\hat{f}_s^2}\left(\frac{1}{\hat{C}_{j,s}} + \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{t-s-1} C_{i,s}}\right),$$

který může být přepsán do podoby

$$\widehat{\mathrm{mse}\,\hat{C}_{j,t-1}} = \hat{C}_{j,t-1}^2 \sum_{s=t-j}^{t-2}\frac{\widehat{\mathrm{mse}\,F_{j,s}} + \widehat{\mathrm{mse}\,\hat{f}_s}}{\hat{f}_s^2}, \tag{4.7}$$

kde $\widehat{\mathrm{mse}\,F_{j,s}}$ je odhad podmíněného rozptylu $\mathrm{E}[(F_{j,s} - \underbrace{\mathrm{E}[F_{j,s}|\triangle_s]}_{=f_s})^2|\triangle_s] =$

$= \mathrm{var}[F_{j,s}|C_{j,0},\dots,C_{j,s}] = \frac{\sigma_s^2}{C_{j,s}}$ a $\widehat{\mathrm{mse}\,\hat{f}_s}$ je odhad střední kvadratické odchylky

$$\mathrm{E}[(\hat{f}_s - \underbrace{f_s}_{\mathrm{E}[\hat{f}_s|\triangle_s]})^2|\triangle_s] = \mathrm{var}[\hat{f}_s|\triangle_s] = \frac{\sigma_s^2}{\sum_{j=1}^{t-s-1} C_{j,s}}.$$

Takto upravený vztah (4.7) je platný i pro zobecněný Mackův model (pro $\beta \in \{0,1,2\}$ a libovolné váhy $w_{j,s}$) (viz [13]), kde

$$\widehat{\mathrm{mse}\,F_{j,s}} = \frac{\hat{\sigma}_s^2}{w_{j,s}\hat{C}_{j,s}^{\beta}} \quad \text{a} \quad \widehat{\mathrm{mse}\,\hat{f}_s} = \frac{\hat{\sigma}_s^2}{\sum_{j=1}^{t-s-1} w_{j,s}\hat{C}_{j,s}^{\beta}}.$$

Dále tento vztah můžeme jednoduše upravit na rekurzivní formuli

$$\widehat{\operatorname{mse}\hat{C}_{j,s+1}} = \hat{C}_{j,s}^2(\widehat{\operatorname{mse} F_{j,s}} + \widehat{\operatorname{mse}\hat{f}_s}) + \widehat{\operatorname{mse}\hat{C}_{j,s}}\hat{f}_s^2 \tag{4.8}$$

s počáteční hodnotou $\widehat{\operatorname{mse}\hat{C}_{j,t-j}} = 0$. Po zohlednění zbytkového faktoru dostaneme rozšířením předchozí rekurzivní formule (4.8) vztah

$$\widehat{\operatorname{mse}\hat{C}_{j,ult}} = \hat{C}_{j,t-1}^2(\widehat{\operatorname{mse} F_{j,ult}} + \widehat{\operatorname{mse}\hat{f}_{ult}}) + \widehat{\operatorname{mse}\hat{C}_{j,t-1}}\hat{f}_{ult}^2, \tag{4.9}$$

kde index ult pro $F_{j,ult}$, f_{ult} a σ_{ult}^2 znamená $ult = t-1$, zatímco pro $C_{j,ult}$ znamená $ult = t$. Většinou lze najít $s < t-1$ takové, že $\hat{f}_{s-1} > \hat{f}_{ult} > \hat{f}_s$. Potom při hledání odhadů $\widehat{\operatorname{mse}\hat{f}_{ult}}$ a $\widehat{\operatorname{mse} F_{j,ult}}$ ověříme, zda je možné předpokládat nerovnosti

$$\widehat{\operatorname{mse}\hat{f}_{s-1}} > \widehat{\operatorname{mse}\hat{f}_{ult}} > \widehat{\operatorname{mse}\hat{f}_s}$$

a

$$\widehat{\operatorname{mse} F_{j,s-1}} > \widehat{\operatorname{mse} F_{j,ult}} > \widehat{\operatorname{mse} F_{j,s}}.$$

Potom vhodnou extrapolací dostaneme požadované odhady. Pokud nebudou nerovnosti splněny, budeme hledat odhady mimo tyto nerovnosti.

Pro odhad střední kvadratické odchylky celkových škod za všechny škodní roky využíváme rekurzivní formule (viz [13])

$$\begin{aligned}\operatorname{mse}\left(\widehat{\sum_{j=t-s}^{t}\hat{C}_{j,s+1}}\right) &= \operatorname{mse}\left(\widehat{\sum_{j=t-s+1}^{t}\hat{C}_{j,s}}\right)\hat{f}_s^2 + \sum_{j=t-s}^{t-1}\hat{C}_{j,s}^2\widehat{\operatorname{mse}\hat{F}_{j,s}} + \\ &\quad + \widehat{\operatorname{mse}\hat{f}_s}\left(\sum_{j=t-s}^{t}\hat{C}_{j,s}\right)^2\end{aligned} \tag{4.10}$$

pro $s = 0, \ldots, t-2$. Uvažujeme-li zbytkový faktor, potom rekurzí postupujeme až do $s = t-1$.

Střední kvadratická odchylka má jednotku v mocnině jednotky škod ve vývojovém trojúhelníku. Obvykle se proto uvádí její odmocnina (nazývaná *odmocněná střední kvadratická odchylka* (rmse), která má již shodnou jednotku.

4.2.3 Bootstrap

Metoda bootstrap vychází z Monte Carlo simulací. Zatímco ale Monte Carlo simulace předpokládá předem dané rozdělení náhodného výběru $X_1, \ldots, X_n$, což je v praxi často nereálný předpoklad, u metody bootstrap nejprve rozdělení náhodného výběru odhadneme. Potom je postup již stejný. Jako odhad distribuční funkce většinou bereme empirickou distribuční funkci

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{I}_{(X_j \le x)}.$$

Takový odhad je nestranný, jelikož pro $x \in \mathbb{R}$ je $\mathrm{E}\,\hat{F}(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}\,\mathbb{I}_{(X_j \le x)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}(X_j \le x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} F(x) = F(x)$, kde F značí distribuční funkci X_1, a také silně konzistentní, což vychází ze silného zákona velkých čísel. Nechť $X_1^*, \dots, X_n^*$ je náhodný výběr z $\hat{F}$ (daná funkce při daných pozorováních $X_1, \dots, X_n$). $X_1^*, \dots, X_n^*$ jsou tedy (podmíněně) nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny. Každá z nich nabyde hodnoty z $\{X_1, \dots, X_n\}$ s pravděpodobností $\frac{1}{n}$. Náhodný výběr $X_1^*, \dots, X_n^*$ se nazývá *bootstrapový výběr*. Nyní již použijeme metodu Monte Carlo na bootstrapový výběr ze známého rozdělení $\hat{F}$, tedy opakovaně generujeme náhodný výběr z rozdělení $\hat{F}$, z každého z nich spočteme požadovanou charakteristiku a jako výsledek bereme výběrový průměr těchto charakteristik.

Popíšeme si, jak využít metodu bootstrap pro odhadnutí střední kvadratické odchylky odhadu výše škod v každém škodním roce i odhadu celkové výše škod. Metodu bootstrap ale využijeme i pro pro odhad hodnoty v riziku, jak vyžaduje Solventnost II. Pro účely modelování střední kvadratické odchylky si nejprve rozebereme vztah na její výpočet:

$$\begin{aligned}
\operatorname{mse} \hat{C}_{j,t-1} &= \mathrm{E}[(\hat{C}_{j,t-1} - \mathrm{E}[C_{j,t-1}|\triangle] + \mathrm{E}[C_{j,t-1}|\triangle] - C_{j,t-1})^2|\triangle] = \\
&= \mathrm{E}[(\mathrm{E}[C_{j,t-1}|\triangle] - C_{j,t-1})^2|\triangle] + (\hat{C}_{j,t-1} - \mathrm{E}[C_{j,t-1}|\triangle])^2 + \\
&\quad + (\hat{C}_{j,t-1} - \mathrm{E}[C_{j,t-1}|\triangle]) \underbrace{\mathrm{E}[\mathrm{E}[C_{j,t-1}|\triangle] - C_{j,t-1}|\triangle]}_{=0} = \\
&= \operatorname{var}[C_{j,t-1}|\triangle] + (\hat{C}_{j,t-1} - \mathrm{E}[C_{j,t-1}|\triangle])^2. \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

Pro $j = 1$ je $\operatorname{mse} \hat{C}_{1,t-1} = 0$, tento rozklad proto platí pro $j = 2, \dots, t$. Nadále předpokládejme, že $j = 2, \dots, t$. K vyjádření $\operatorname{var}[C_{j,t-1}|\triangle]$ (nazýváme *procesní riziko* (*process variance*)) využijeme předpokladů (4.2), (4.5) a vztahu $\operatorname{var}[X|\mathcal{F}] = \mathrm{E}\,[\operatorname{var}[X|\mathcal{C}]|\mathcal{F}] + \operatorname{var}[\mathrm{E}[X|\mathcal{C}]|\mathcal{F}]$, kde $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$ jsou σ-algebry. Jelikož se v praxi $\beta = 0$ téměř nepoužívá, dále se omezíme na $\beta \in \{1, 2\}$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}[C_{j,t-1}|\triangle] &\overset{\text{ozn.}}{=} \operatorname{provar} C_{j,t-1} = \\
&\overset{(4.2)}{=} \operatorname{var}[C_{j,t-1}|C_{j,0}, \dots, C_{j,t-j}] = \\
&= \mathrm{E}[\underbrace{\operatorname{var}[C_{j,t-1}|C_{j,0}, \dots, C_{j,t-2}]}_{C_{j,t-2}^{2-\beta}\frac{\sigma_{t-2}^2}{w_{j,t-2}}}|C_{j,0}, \dots, C_{j,t-j}] + \\
&\quad + \operatorname{var}[\underbrace{\mathrm{E}[C_{j,t-1}|C_{j,0}, \dots, C_{j,t-2}]}_{C_{j,t-2}f_{t-2}}|C_{j,0}, \dots, C_{j,t-j}] = \\
&= C_{j,t-j}^{2-\beta}(f_{t-j}f_{t-j+1}\dots f_{t-3})^{2-\beta}\frac{\sigma_{t-2}^2}{w_{j,t-2}} + \\
&\quad + f_{t-2}^2 \operatorname{var}\,[C_{j,t-2}|C_{j,0}, \dots, C_{j,t-j}] = \dots
\end{aligned}$$

Pokračujeme stejnou úvahou dále, dokud nedojdeme k výrazu

$$\operatorname{var}[C_{j,t-j}|C_{j,0}, \dots, C_{j,t-j}] = 0.$$

Výsledkem potom je

$$\operatorname{provar} C_{j,t-1} = C_{j,t-j}^{2-\beta} \sum_{s=t-j}^{t-2} (f_{t-j} \dots f_{s-1})^{2-\beta} \frac{\sigma_s^2}{w_{j,s}} f_{s+1}^2 \dots f_{t-2}^2. \tag{4.12}$$

Dalšími úpravami převedeme předchozí vztah na

$$\operatorname{provar} C_{j,t-1} = C_{j,t-j}^{2-\beta} \sum_{s=t-j}^{t-2} (f_{t-j} \dots f_{s-1})^{2-\beta} \frac{\sigma_s^2}{w_{j,s}} \frac{C_{j,s}^{\beta}}{C_{j,s}^{\beta}} \frac{f_s^2}{f_s^2} f_{s+1}^2 \dots f_{t-2}^2,$$

z nehož získáme odhad

$$\widehat{\operatorname{provar} C}_{j,t-1} = \hat{C}_{j,t-1}^2 \sum_{s=t-j}^{t-2} \frac{\hat{\sigma}_s^2}{\hat{f}_s^2 w_{j,s} \hat{C}_{j,s}^{\beta}}, \tag{4.13}$$

který lze opět vyjádřit rekurzivní formulí (viz (4.8))

$$\widehat{\operatorname{provar} C}_{j,s+1} = \hat{C}_{j,s}^2 \widehat{\operatorname{mse} F}_{j,s} + \widehat{\operatorname{provar} C}_{j,s} \hat{f}_s^2$$

s počáteční hodnotou $\widehat{\operatorname{provar} C}_{j,t-j} = 0$. Nyní si vyjádříme druhý sčítanec (nazýváme *parametrové riziko* (*parameter variance*)) pro výpočet střední kvadratické odchylky

$$\begin{aligned}
(\mathrm{E}[C_{j,t-1}|\triangle] - \hat{C}_{j,t-1})^2 &\overset{\text{ozn.}}{=} \operatorname{parvar} C_{j,t-1} = \\
&= (C_{j,t-j} f_{t-j} \dots, f_{t-2} - C_{j,t-j} \hat{f}_{t-j} \dots, \hat{f}_{t-2})^2 = \\
&= C_{j,t-j}^2 \left(\prod_{s=t-j}^{t-2} f_s - \prod_{s=t-j}^{t-2} \hat{f}_s \right)^2.
\end{aligned}$$

V tomto momentě nelze pro odhad parametrového rizika odhadnout vývojové faktory f_s výrazem $\hat{f}_s$, jelikož bychom získali vždy 0. Využijeme proto metody bootstrap pro získání odhadu rozdělení vývojových faktorů f_s (za předpokladu, že jde o náhodné veličiny).

Označme $\hat{C}_{\cdot,t-1} = \sum_{j=2}^{t} \hat{C}_{j,t-1}$ jako odhad celkové výše škod za všechny škodní roky a $C_{\cdot,t-1} = \sum_{j=2}^{t} C_{j,t-1}$ jako skutečnou celkovou výši škod za všechny škodní roky. Analogicky jako při odvození (4.11) si odvodíme střední kvadratickou odchylku odhadu celkové výše škod

$$\operatorname{mse} \hat{C}_{\cdot,t-1} = \mathrm{E}[(\hat{C}_{\cdot,t-1} - C_{\cdot,t-1})^2|\triangle] = \operatorname{var}[C_{\cdot,t-1}|\triangle] + (\mathrm{E}[C_{\cdot,t-1}|\triangle] - \hat{C}_{\cdot,t-1})^2.$$

Díky předpokladu 4.5 platí $\operatorname{var}[C_{\cdot,t-1}|\triangle] = \operatorname{var}[\sum_{j=2}^{t} C_{j,t-1}|\triangle] = \sum_{j=2}^{t} \operatorname{var}[C_{j,t-1}|\triangle]$.

Druhý sčítenec upravíme umocněním následovně

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{E}[C_{\cdot,t-1}|\triangle] - \hat{C}_{\cdot,t-1})^2 = (\mathrm{E}[\sum_{j=2}^{t} C_{j,t-1}|\triangle] - \sum_{j=2}^{t} \hat{C}_{j,t-1})^2 \\
= \; & (\sum_{j=2}^{t}(\mathrm{E}[C_{j,t-1}|\triangle] - \hat{C}_{j,t-1}))^2 = \\
= \; & \sum_{i,j=2}^{t}(\mathrm{E}[C_{i,t-1}|\triangle] - \hat{C}_{i,t-1})(\mathrm{E}[C_{j,t-1}|\triangle] - \hat{C}_{j,t-1}) = \\
= \; & \sum_{i,j=2}^{t} C_{i,t-1}C_{j,t-1}(f_{t-i}\dots f_{t-2} - \hat{f}_{t-i}\dots\hat{f}_{t-2})(f_{t-j}\dots f_{t-2} - \hat{f}_{t-j}\dots\hat{f}_{t-2}) \\
= \; & 2\sum_{\substack{i,j=2\\ i<j}}^{t} C_{i,t-1}C_{j,t-1}\left(\prod_{s=t-i}^{t-2} f_s - \prod_{s=t-i}^{t-2}\hat{f}_s\right)\left(\prod_{s=t-j}^{t-2} f_s - \prod_{s=t-j}^{t-2}\hat{f}_s\right) \\
& + \sum_{j=2}^{t} C_{j,t-1}^2\left(\prod_{s=t-j}^{t-2} f_s - \prod_{s=t-j}^{t-2}\hat{f}_s\right)^2
\end{aligned}
$$

Výsledkem potom je

$$
\begin{aligned}
\operatorname{mse}\hat{C}_{\cdot,t-1} \; = \; & \sum_{j=2}^{t}\underbrace{\left(\operatorname{var}[C_{j,t-1}|\triangle] + C_{j,t-1}^2\left(\prod_{s=t-j}^{t-2} f_s - \prod_{s=t-j}^{t-2}\hat{f}_s\right)^2\right)}_{\overset{(4.11)}{=}\operatorname{mse}\hat{C}_{j,t-1}} + \\
& + \; 2\sum_{\substack{i,j=2\\ i<j}}^{t} C_{i,t-1}C_{j,t-1}\left(\prod_{s=t-i}^{t-2} f_s - \prod_{s=t-i}^{t-2}\hat{f}_s\right)\left(\prod_{s=t-j}^{t-2} f_s - \prod_{s=t-j}^{t-2}\hat{f}_s\right) = \\
= \sum_{j=2}^{t}\operatorname{mse}\hat{C}_{j,t-1} + 2\sum_{\substack{i,j=2\\ i<j}}^{t} C_{i,t-1}C_{j,t-1}\left(\prod_{s=t-i}^{t-2} f_s - \prod_{s=t-i}^{t-2}\hat{f}_s\right)\left(\prod_{s=t-j}^{t-2} f_s - \prod_{s=t-j}^{t-2}\hat{f}_s\right).
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Ani zde pro odhad střední kvadratické odchylky odhadu $\hat{C}_{\cdot,t-1}$ nemůžeme odhadnout vývojové faktory f_s výrazem $\hat{f}_s$, proto i zde využijeme metody bootstrap pro odhad rozdělení vývojových faktorů f_s (opět za předpokladu, že jde o náhodné veličiny). Popíšeme si 2 postupy na získání simulovaných hodnot vývojových faktorů metodou bootstrap.

Bootstrap 1

Z výchozího trojúhelníku $\triangle$ popsaného v kapitole 4.2.1 vytvoříme trojúhelník složený z individuálních vývojových faktorů

$$\triangle_F = \{F_{j,s}, j = 1, \dots, t-1, j+s \leq t-1\}$$

a budeme předpokládat, že sloupec s (tj. hodnoty $F_{1,s}, \ldots, F_{t-s-1,s}$) tohoto trojúhelníku tvoří náhodný výběr z rozdělení F_s. Vytvoříme bootstrapový výběr $F^*_{1,s}, \ldots, F^*_{t-s-1,s}$ z rozdělení $\hat{F}_s$, kde $\hat{F}_s$ je empirická distribuční funkce náhodného výběru $F_{1,s}, \ldots, F_{t-s-1,s}$. Hodnoty $F^*_{1,s}, \ldots, F^*_{t-s-1,s}$ tedy získáme jako $t-s-1$ výběrů s vracením z množiny $\{F_{1,s}, \ldots, F_{t-s-1,s}\}$. Takto získáme bootstrapový výběr pro všechna $s = 0, \ldots, t-2$, z nichž složíme bootstrapový trojúhelník

$$\triangle^*_F = \{F^*_{j,s}, j = 1, \ldots, t-1, j+s \leq t-1\}.$$

Tento postup B-krát zopakujeme a získáme B trojúhleníku $\triangle^*_{F,b}, b = 1, \ldots, B$.

Nyní z každého trojúhelníku $\triangle^*_{F,b}$ spočteme ze vzorce (4.3) odhad vývojových faktorů $\hat{f}^*_{0,b}, \ldots, \hat{f}^*_{t-2,b}$ pro $b = 1, \ldots, B$. Potom jako odhad parametrového rizika pro škodní rok j vezmeme výberový průmer

$$\widehat{\mathrm{parvar}\, C_{j,t-1}} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^{B} C^2_{j,t-j} \left(\prod_{s=t-j}^{t-2} \hat{f}^*_{s,b} - \prod_{s=t-j}^{t-2} \hat{f}_s \right)^2$$

a jako odhad odmocněné střední kvadratické odchylky

$$\widehat{\mathrm{rmse}\, \hat{C}_{j,t-1}} = \sqrt{\widehat{\mathrm{provar}\, C_{j,t-1}} + \widehat{\mathrm{parvar}\, C_{j,t-1}}}. \tag{4.15}$$

Pro případné zohlednění zbytkového faktoru použijeme vztah (4.9).

Obdobně budeme postupovat při stanovení odhadu střední kvadratické odchylky odhadu celkové výše škod, kdy druhý sčítanec vztahu (4.14) nahradíme výběrovým průměrem

$$\overline{\mathrm{odh\,mse}} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^{B} 2 \sum_{\substack{i,j=2 \\ i<j}}^{t} C_{i,t-1} C_{j,t-1} \left(\prod_{s=t-i}^{t-2} f^*_{s,b} - \prod_{s=t-i}^{t-2} \hat{f}_s \right) \left(\prod_{s=t-j}^{t-2} f^*_{s,b} - \prod_{s=t-j}^{t-2} \hat{f}_s \right),$$

a celkový odhad odmocněné střední kvadratické odchylky získáme vztahem

$$\mathrm{rmse}\, \hat{C}_{\cdot,t-1} = \sqrt{\sum_{j=2}^{t} \widehat{\mathrm{mse}\, \hat{C}_{j,t-1}} + \overline{\mathrm{odh\,mse}}}.$$

Pro případné zohlednění zbytkového faktoru použijeme vztah (4.10).

Bootstrap 2

Využitím předpokladů (4.1) a (4.5) si spočteme odhad reziduí $\hat{\varepsilon}_{j,s+1}$ pro $j = 1, \ldots, t-1, s+j \leq t-1$ jako

$$\hat{\varepsilon}_{j,s+1} = \frac{C_{j,s+1} - \widehat{\mathrm{E}[C_{j,s+1}|C_{j,0}, \ldots, C_{j,s}]}}{\sqrt{\widehat{\mathrm{var}[C_{j,s+1}|C_{j,0}, \ldots, C_{j,s}]}}} = \frac{C_{j,s+1} - \hat{f}_s C_{j,s}}{\hat{\sigma}_s \sqrt{\frac{C^{2-\beta}_{j,s}}{w_{j,s}}}}$$

a předpokládáme, že $\hat{\varepsilon}_{j,s+1}, j = 1, \ldots, t-1, s+j \leq t-1$, jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny z rozdělení $F_{\hat{\varepsilon}}$. Dále vytvoříme bootstrapový výběr

reziduí $\hat{\varepsilon}^*_{j,s+1}$ pro $j = 1, \ldots, t-1, s+j \leq t-1$ z rozdělení $F_{\hat{\varepsilon}}$. Jako v předešlém případě množina $\{\hat{\varepsilon}^*_{j,s+1}, j = 1, \ldots, t-1, s+j \leq t-1\}$ tvoří výběr s vracením z množiny $\{\hat{\varepsilon}_{j,s+1}, j = 1, \ldots, t-1, s+j \leq t-1\}$. Dále získáme bootstrapový trojúhelník $\triangle^* = \{C^*_{j,s+1}, j = 1, \ldots, t-1, s+j \leq t-1\}$ ze vztahu $C^*_{j,s+1} = \hat{f}_s C_{j,s} + \sigma_s \sqrt{\frac{C^{2-\beta}_{j,s}}{w_{j,s}}} \hat{\varepsilon}^*_{j,s+1}$. Nyní již spočteme bootstrapový trojúhelník individuálních faktorů

$$\triangle^*_F = \{F^*_{j,s} = \frac{C^*_{j,s+1}}{C_{j,s}}, j = 1, \ldots, t-1, s+j \leq t-1\}$$

a dále již postupujeme stejně jako v předchozím případě.

Případ 2 má velkou výhodu v tom, že bootstrapový výběr děláme v rámci celého trojúhelníku, a tedy bootstrapové individuální vývojové faktory posledního sloupce ($s = t-2$) nejsou konstantní jako v případě 1. Tím potom odhad $\widehat{\text{parvar}\, C_{2,t-1}}$ není nulový, což více odpovídá realitě.

4.2.4 Výpočet VaR pomocí metody bootstrap

Uplatnění metody bootstrap je široké a nemusí se omezovat jen pro odhad (odmocněné) střední kvadrické odchylky odhadu výše škody. Předvedeme si, jak ji využít pro výpočet odhadu hodnoty v riziku výše rezervy na hladině α jak pro jednotlivé škodní roky, tak za všechny škodní roky dohromady. Jelikož se zabýváme částečným interním modelem v rámci Solventnosti II, za α volíme hodnotu $0,995$.

Nechť máme boostrapové trojúhelníky individuálních vývojových faktorů $\triangle^*_{F,b}$, $b = 1, \ldots, B$, získané jednou z metod popsané výše. Potřebnou výši rezervy na škody vzniklé v roce j označme $R_j = C_{j,ult} - C_{j,t-j}, j = 1, \ldots, t$, a celkovou výši rezervy za všechny škodní roky $R = \sum_{j=1}^{t} R_j$. Jako odhady těchto veličin potom bereme $\hat{R}_j = \hat{C}_{j,ult} - C_{j,t-j}, j = 1, \ldots, t$, a $\hat{R} = \sum_{j=1}^{t} \hat{R}_j$. Pro každé $b = 1, \ldots, B$ potom spočteme Mackovým modelem popsaným na stránce 32 odhady $\hat{R}^*_{j,b}$ a $\hat{R}^*_b$. Jako odhad hodnoty v riziku $\widehat{\text{VaR}_\alpha(R_j)}$ výše rezervy pro škodní rok j na hladině α bereme výběrový α-kvantil odhadnutých výší rezerv pro tento škodní rok, tedy

$$\widehat{\text{VaR}_\alpha(R_j)} = \hat{R}^*_{j,(\lceil \alpha B \rceil)}, \tag{4.16}$$

kde $\hat{R}^*_{j,(n)}$ značí n-tý nejmenší prvek v uspořádané posloupnosti $\hat{R}^*_{j,b}, b = 1, \ldots, B$. A odhad hodnoty v riziku $\widehat{\text{VaR}_\alpha(R)}$ celkové výše rezerv za všechny škodní roky na hladině α analogicky spočítáme jako

$$\widehat{\text{VaR}_\alpha(R)} = \hat{R}^*_{(\lceil \alpha B \rceil)}, \tag{4.17}$$

kde $\hat{R}^*_{(n)}$ značí n-tý nejmenší prvek v uspořádané posloupnosti $\hat{R}^*_b, b = 1, \ldots, B$.

Poznámka. (Odmocněná) střední kvadratická odchylka odhadu výše rezervy na škody vzniklé v roce j je stejná jako (odmocněná) střední kvadratická odchylka

odhadu výše škod ve škodním roce j po zohlednění případného zbytkového faktoru[2], jelikož platí

$$\begin{aligned} \operatorname{mse} \hat{R}_j &= \mathrm{E}[(\hat{R}_j - R_j)^2 | \triangle] = \mathrm{E}[((\hat{C}_{j,ult} - C_{j,t-j}) - (C_{j,ult} - C_{j,t-j}))^2 | \triangle] = \\ &= \mathrm{E}[(\hat{C}_{j,ult} - C_{j,ult})^2 | \triangle] = \operatorname{mse} \hat{C}_{j,ult}. \end{aligned}$$

Obdobně lze dokázat, že

$$\operatorname{mse} \hat{R} = \operatorname{mse} \hat{C}_{\cdot,ult},$$

kde $\hat{C}_{\cdot,ult} = \sum_{j=1}^{t} \hat{C}_{j,ult}$.

$\triangle$

[2]Pokud nezohledněnujeme zbytkový faktor, nahrazujeme ve vzorcích $ult = t - 1$.

Kapitola 5

Praktická ukázka výpočtu rizika rezerv

Výpočet rizika rezerv a získání VaR pomocí metody bootstrap ilustrujeme na následujícím příkladě. Máme k dispozici kumulativní trojúhelník RBNS rezerv($\triangle^R$) a kumulativní trojúhelník výplat za škody($\triangle^P$) - viz tabulky A.1 a A.2. Data jsou čtvrtletní, začínají 1. čtvrtletím roku 2001 a končí 4. čtvrtletím roku 2009.

Tedy dle našeho značení je $t = 36$ a jako $C_{j,s}$ si označíme součet $\triangle^R_{j,s} + \triangle^P_{j,s}$ pro $j = 1, \ldots, 36, s = 0, \ldots, 35$. Využijeme vztahu (4.3) na výpočet odhadů vývojových faktorů $\hat{f}_s, s = 0, \ldots, 34$. Výsledky pro zvolené hodnoty $\beta = 1$ a 2 jsou následující:

pro $\beta = 1$:

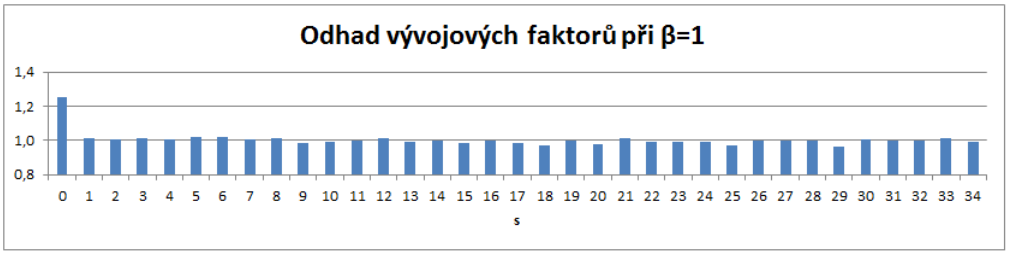
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1,2496	1,0148	1,0038	1,0120	1,0082	1,0180	1,0211	1,0072	1,0102	0,9888	0,9943	0,9991	1,0113	0,9948	0,9976	0,9835	0,9981	0,9872

18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
0,9717	1,0015	0,9795	1,0114	0,9900	0,9904	0,9948	0,9725	0,9998	0,9984	0,9989	0,9630	1,0036	1,0000	0,9999	1,0137	0,9949

pro $\beta = 2$:

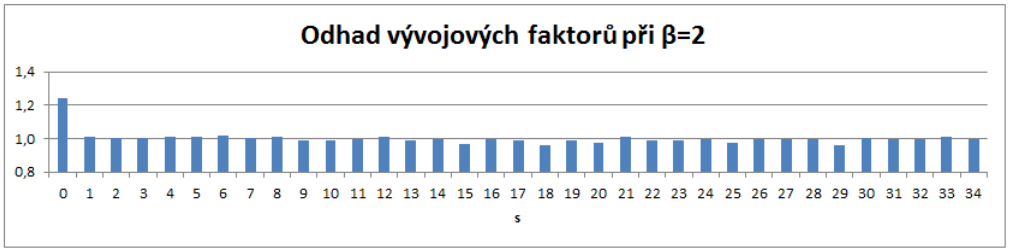
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1,2439	1,0111	1,0014	1,0041	1,0100	1,0150	1,0174	1,0026	1,0106	0,9880	0,9933	0,9990	1,0107	0,9931	0,9960	0,9700	0,9957	0,9875

18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
0,9635	0,9922	0,9759	1,0112	0,9931	0,9900	0,9935	0,9755	1,0000	0,9993	0,9985	0,9575	1,0036	1,0000	0,9999	1,0128	0,9949



V obou případech se objevují vývojové faktory, které jsou menší než 1 (buď z důvodu regresů, nebo kvůli rozpouštění rezerv[1]). V praxi bychom tato čísla

[1]Pokud jsme byli při tvorbě rezerv moc obezřetní a stále držíme rezervu na škodu, u níž zjistíme, že již nic vyplácet nebudeme, potom tuto rezervu rozpustíme.



upravovali, nicméně v této ukázce výpočtu rizika rezerv budeme brát výstupy čistě z navrhnutého modelu. Ze vztahu (4.4) vypočteme odhad výsledných škod za jednotlivé škodní čtvrtletí $j = 1, \ldots, 36$, přičemž předpokládáme, že vývoj škod je po 36 čtvrtletích ukončen. Z nich určíme potřebnou výši rezervy na škody vzniklé ve čtvrtletí j jako $\hat{R}_j = \hat{C}_{j,35} - C_{j,36-j}, j = 1, \ldots, 36$, viz tabulka 5.1 a 5.2. Můžeme si všimnout, že některé rezervy jsou záporné, což je dáno tím, že jsme neupravovali vývojové faktory. Při $\beta = 2$ je potřebná výše rezervy vždy menší nebo rovna výši rezervy při $\beta = 1$, což se dá vysvětlit tím, že pro odhad vývojových faktorů při $\beta = 2$ využíváme modelu lineární regrese, tedy tento odhad je získán metodou nejmenších čtverců rozdílů skutečných škod od jejich odhadů za všechny škodní čtvrtletí

$$\min_{\hat{f}_s} \sum_{j=1}^{t-s-1} (C_{j,s+1} - \hat{f}_s C_{j,s})^2 \text{ pro každé } s = 0, \ldots, 34.$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	-11 154	23 340	20 063	19 208	44 942	-110 375	-92 299	-91 032	-124 539	-261 451	-211 732	-421 370	-445 382	-457 077	-606 604	-365 130	-528 609
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
-872 908	-586 167	-813 336	-614 345	-671 446	-676 948	-858 524	-983 859	-1 510 347	-996 995	-1 032 289	-780 930	-930 567	-629 841	-789 368	-573 162	-685 006	1 663 771

Tabulka 5.1: Výše $\hat{R}_j$ pro $\beta = 1$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	-11 154	20 884	17 895	17 133	41 429	-138 828	-116 401	-110 535	-150 354	-274 726	-225 900	-447 630	-453 642	-468 432	-641 453	-422 541	-625 896
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
-1 014 711	-689 736	-1 007 318	-764 131	-835 738	-858 954	-1 088 877	-1 243 187	-1 885 620	-1 260 326	-1 347 689	-1 082 514	-1 376 360	-947 097	-1 308 054	-982 320	-1 314 594	849 116

Tabulka 5.2: Výše $\hat{R}_j$ pro $\beta = 2$

Nyní odhadneme odmocněnou střední kvadratickou odchylku výše rezervy - tedy, jak daleko ve střední hodnotě je odhadnutá rezerva od skutečné rezervy. Podle poznámky na straně 40 platí vztah

$$\widehat{\text{rmse}}\, \hat{R}_j = \sqrt{\widehat{\text{mse}}\, \hat{C}_{j,35}},$$

jehož hodnoty pro $\beta = 1$ a 2 jsou zobrazeny v tabulkách 5.3 a 5.4. Z obdobného důvodu jako v předchozím výpočtu vidíme, že téměř vždy je odhad rmse menší pro $\beta = 2$.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
549,7	64 677,9	58 873,2	57 184,2	86 091,1	225 914,2	197 106,7	190 484,7	230 115,2	413 187,4	350 507,9	488 921,0	497 967,2	585 257,4	655 823,7	584 278,9	641 693,8	807 420,8

20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
663 090,5	784 402,9	668 833,8	695 827,3	758 710,4	864 886,5	915 047,4	1 142 930,4	1 088 915,4	1 189 360,6	1 182 581,7	1 475 944,8	1 267 580,2	1 571 206,0	1 363 303,1	1 698 522,3	1 950 667,0

Tabulka 5.3: Výše $\widehat{\text{rmse}}\,\hat{R}_j$ pro $\beta = 1$

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
578,2	60 978,1	57 828,0	56 976,1	75 633,0	188 130,9	176 155,5	174 831,9	190 964,7	335 073,8	320 974,4	370 642,9	383 089,4	428 611,7	501 903,6	510 510,5	563 746,1	608 304,4

20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
598 080,1	672 096,6	654 871,8	665 419,8	698 985,9	720 034,4	732 545,8	808 424,5	918 140,3	964 522,8	1 008 276,5	1 091 747,6	1 074 030,7	1 142 741,3	1 104 573,7	1 183 488,7	1 271 734,9

Tabulka 5.4: Výše $\widehat{\text{rmse}}\,\hat{R}_j$ pro $\beta = 2$

5.1 Bootstrap

Než přejdeme k simulování vývojových faktorů pomocí metody bootstrap, je pro účely výpočtu rmse , popř. mse , potřeba znát hodnotu procesního rizika, viz (4.11) a (4.13). Dosazením dostáváme pro $\beta = 1$ a 2 hodnoty v tabulkách 5.5 a 5.6.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
397,9	51 160,1	47 738,8	46 711,2	65 364,5	195 203,0	174 801,3	170 418,0	198 859,4	376 060,3	326 578,8	436 367,8	450 929,3	523 848,1	593 065,1	553 415,0	606 984,6	745 779,9

20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
629 498,6	739 286,6	639 761,1	664 428,3	723 054,0	814 761,3	857 428,2	1 046 879,8	1 032 289,0	1 125 311,6	1 128 729,3	1 387 588,9	1 211 533,2	1 476 139,5	1 299 885,1	1 588 008,8	1 804 331,1

Tabulka 5.5: Výše $\widehat{\text{provar}}\,C_{j,35}$ pro $\beta = 1$

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
428,0	46 590,2	46 592,2	46 592,2	51 157,1	151 888,6	152 086,7	153 848,3	153 930,6	292 652,3	297 122,3	305 027,7	326 408,6	350 036,2	423 629,9	480 701,6	530 037,9	537 091,2

20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
566 239,9	626 884,9	629 658,0	637 611,4	666 189,0	668 689,1	671 062,6	689 856,6	858 954,1	895 578,9	953 829,8	988 341,0	1 016 922,6	1 030 484,4	1 038 673,6	1 048 656,1	1 080 551,8

Tabulka 5.6: Výše $\widehat{\text{provar}}\,C_{j,35}$ pro $\beta = 2$

Pro oba popsané případy metody bootstrap využíváme stejného vztahu (4.15) pro výslednou rmse . Jediné, v čem se oba případy liší, jsou hodnoty parametrového rizika.

Bootstrap 1

Po vypočtení parametrového rizika pomocí bootstrapu 1 a dosazení do vztahu (4.15) pro výpočet výsledné hodnoty rmse dostáváme pro $\beta = 1$ a 2 hodnoty, které jsou v následujících tabulkách.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
397,9	58 346,4	53 624,9	52 238,3	76 862,6	220 453,1	193 232,9	186 862,8	224 481,0	409 891,5	348 448,5	484 806,6	494 549,1	580 910,0	651 362,3	592 292,4	653 636,3	829 345,0

20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
676 650,3	815 164,0	690 988,8	721 979,8	786 529,9	904 100,6	962 267,1	1 224 354,9	1 128 046,6	1 241 732,8	1 228 380,0	1 554 285,1	1 318 212,3	1 695 813,9	1 458 146,0	1 886 177,4	2 234 188,6

Tabulka 5.7: Výše $\widehat{\text{rmse}}\,\hat{C}_{j,35}$ pro $\beta = 1$ a bootstrap 1

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
428,0	54 563,4	52 750,6	52 265,0	65 684,6	194 325,3	181 039,0	177 813,6	195 613,5	343 535,3	326 417,2	385 138,2	395 585,5	446 918,0	521 274,6	546 189,1	619 882,9	720 661,7

20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
657 702,6	807 991,7	740 911,2	766 446,3	813 715,3	893 080,9	943 719,2	1 187 005,2	1 096 823,7	1 199 992,3	1 211 737,0	1 473 106,4	1 293 640,7	1 663 792,0	1 467 067,0	1 913 560,3	2 341 296,4

Tabulka 5.8: Výše $\widehat{\text{rmse}}\,\hat{C}_{j,35}$ pro $\beta = 2$ a bootstrap 1

Bootstrap 2

Po vypočtení parametrového rizika pomocí bootstrapu 2 a dosazení do vztahu

(4.15) pro výpočet výsledné hodnoty rmse dostáváme pro $\beta = 1$ a 2 hodnoty, které jsou v následujících tabulkách.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
546,9	64 610,2	58 814,1	57 128,6	86 032,6	224 773,0	196 300,8	189 811,2	229 099,9	412 810,7	350 342,8	488 856,3	498 477,5	586 968,8	658 820,3	586 257,1	644 592,0	813 348,2
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	
667 026,8	790 664,1	673 172,4	700 913,9	765 527,0	874 723,9	926 783,9	1 164 493,7	1 104 122,1	1 208 344,2	1 200 760,3	1 508 366,8	1 290 103,2	1 611 730,5	1 391 922,8	1 750 484,9	2 025 056,0	

Tabulka 5.9: Výše $\widehat{\text{rmse}}\,\hat{C}_{j,35}$ pro $\beta = 1$ a bootstrap 2

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
568,5	60 205,8	57 213,9	56 404,9	74 266,6	187 178,1	175 539,1	174 400,2	190 277,5	336 575,4	322 191,7	374 846,8	388 604,2	438 861,6	516 549,2	517 583,4	573 554,0	630 033,6
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	
610 002,1	691 688,9	666 582,9	679 164,8	716 792,5	748 472,4	767 463,5	878 543,6	961 825,1	1 019 777,6	1 057 141,1	1 188 987,0	1 134 022,9	1 261 862,0	1 180 336,2	1 336 297,1	1 495 256,7	

Tabulka 5.10: Výše $\widehat{\text{rmse}}\,\hat{C}_{j,35}$ pro $\beta = 2$ a bootstrap 2

5.1.1 Porovnání dvou případů metody bootstrap

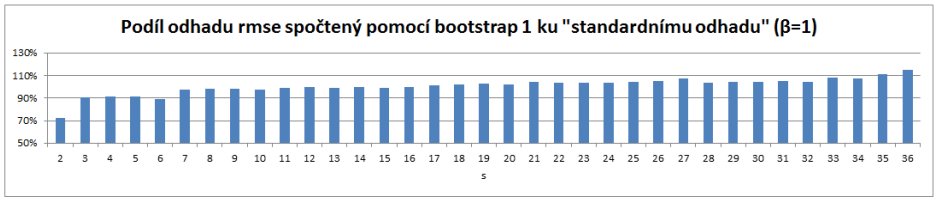
Nejprve porovnáme výsledky obou případů metody bootstrap pro $\beta = 1$. V následujících tabulkách je procentuální podíl odhadu rmse vypočtený metodou boostrap ku „standardnímu“ odhadu rmse .

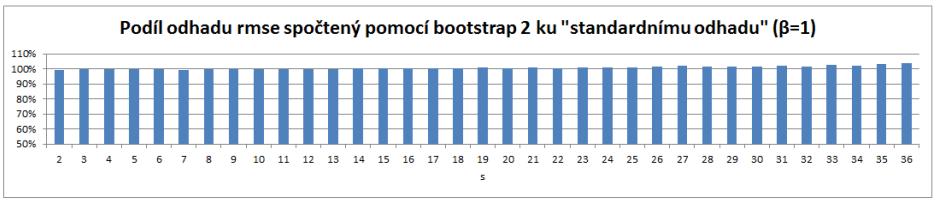
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
72%	90%	91%	91%	89%	98%	98%	98%	98%	99%	99%	99%	99%	99%	99%	101%	102%	103%
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	
102%	104%	103%	104%	104%	105%	105%	107%	104%	104%	104%	105%	104%	108%	107%	111%	115%	

Tabulka 5.11: Podíl odhadu rmse spočtený pomocí bootstrap 1 ku „standardnímu odhadu rmse“ při $\beta = 1$

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
99%	100%	100%	100%	100%	99%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	101%
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	
101%	101%	101%	101%	101%	101%	101%	102%	101%	102%	102%	102%	102%	103%	102%	103%	104%	

Tabulka 5.12: Podíl odhadu rmse spočtený pomocí bootstrap 2 ku „standardnímu odhadu rmse“ při $\beta = 1$





Oba případy metody bootstrap pro $\beta = 1$ dávají v průměru výsledky kolem 100% a výrazně se od sebe neliší. Pouze v případě 1 dochází v prvních čtvrtletích k podhodnocení rmse (tím myslíme, že podíl rmse je pod hodnotou 100%), což je zřejmé z definice, protože v prvních čtvrtletích simulujeme náhodné výběry z velmi malé množiny individuálních vývojových faktorů, a tím pádem nelze dostatečně popsat jejich rozdělení.

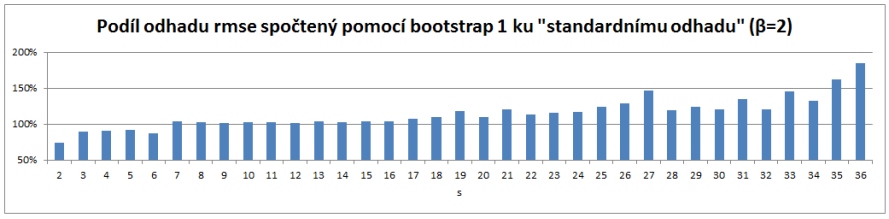
Nyní porovnáme výsledky obou případů metody boostrap pro $\beta = 2$. Opět si znázorníme procentuální podíly odhadu rmse.

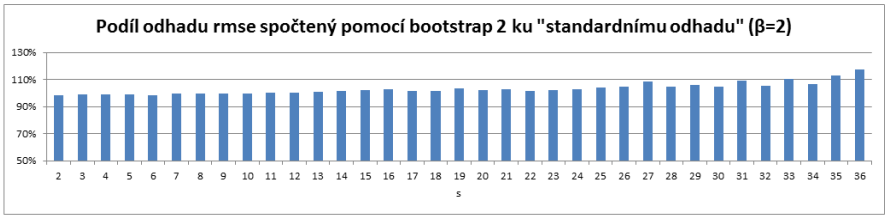
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
74%	89%	91%	92%	87%	103%	103%	102%	102%	103%	102%	104%	103%	104%	104%	107%	110%	118%
	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
	110%	120%	113%	115%	116%	124%	129%	147%	119%	124%	120%	135%	120%	146%	133%	162%	184%

Tabulka 5.13: Podíl odhadu rmse spočtený pomocí bootstrap 1 ku „standardnímu odhadu rmse“ při $\beta = 2$

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
98%	99%	99%	99%	98%	99%	100%	100%	100%	100%	100%	101%	101%	102%	103%	101%	102%	104%
	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
	102%	103%	102%	102%	103%	104%	105%	109%	105%	106%	105%	109%	106%	110%	107%	113%	117%

Tabulka 5.14: Podíl odhadu rmse spočtený pomocí bootstrap 2 ku „standardnímu odhadu rmse“ při $\beta = 2$





Zde jsou již rozdíly mezi oběma případy velice značné. Zatímco případ 2 dává stále rozumné výsledky, v případě 1 dochází s přibývajícím vývojovým čtvrtletím k nadhodnocení hodnoty rmse (tím myslíme, že podíl rmse značně převyšuje 100%). V průměru případ 2 dává hodnotu opět kolem 100%, kdežto případ 1 přes 125%.

Na základě těchto výsledků byla potvrzena naše domněnka, že bootstrap 2 dává lepší výsledky než bootstrap 1.

5.2 Výpočet VaR

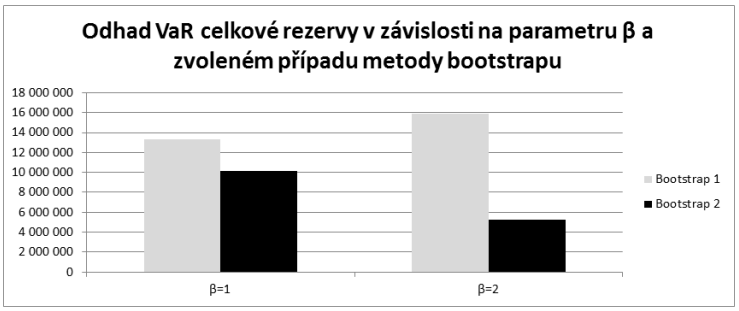
Nejprve si opět porovnáme výsledky pro $\beta = 1$. Podle (4.16) vypočteme odhad VaR na hladině $\alpha = 0,995$ pro odhad rezervy v každém škodním čtvrtletí pomocí obou popsaných případů metody bootstrap. Jejich hodnoty jsou zobrazeny v následujícíh tabulkách. Hodnota v riziku v některých škodních čtvrtletí vychází záporná, což je opět dáno tím, že jsme žádným způsobem neupravovali výstupy z modelu. V praxi bychom zápornou hodnotu VaR nulovali.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
-11 154,4	65 460,3	56 999,7	54 572,2	133 182,2	123 509,4	97 440,9	88 574,6	119 638,2	91 598,7	54 841,4	55 462,7	3 481,6	120 404,4	43 337,8	229 312,3	146 975,2	158 514,6
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	
120 390,6	135 419,0	104 433,4	105 339,2	165 810,3	212 700,3	214 165,7	219 413,2	277 949,7	446 784,0	567 777,5	1 043 437,1	811 719,4	1 434 644,9	1 171 631,4	1 976 362,6	4 970 511,2	

Tabulka 5.15: $\widehat{\mathrm{VaR}_{0,995}}(R_j)$ pomocí bootstrap 1 při $\beta = 1$

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
-9 453,9	160 410,5	139 396,6	133 460,0	240 265,3	246 318,7	192 949,5	179 872,7	243 177,1	279 805,9	196 781,5	281 346,2	222 978,4	366 610,6	262 838,5	202 082,9	107 770,0	73 680,9
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	
58 021,7	-11 574,5	-14 452,4	-31 604,0	50 450,8	61 728,2	28 594,9	-35 659,3	118 395,0	213 636,0	380 976,2	720 367,9	615 268,6	1 067 881,9	852 660,0	1 391 657,2	4 271 555,9	

Tabulka 5.16: $\widehat{\mathrm{VaR}_{0,995}}(R_j)$ pomocí bootstrap 2 při $\beta = 1$



Obrázek 5.1: Odhady hodnot v riziku celkových rezerv.

Je patrné, že záleží na zvoleném přístupu, jelikož výsledky se liší. Pozorujeme, že v prvních čtvrtletích získáváme pomocí případu 1 nižší hodnoty, což je zřejmě dáno tím, že dochází k podhodnocení rizika, jak jsme zmiňovali výše. Naopak v posledních čtvrtletích dává případ 2 nižší hodnoty. Odhad $\widehat{\mathrm{VaR}_{0,995}}(R)$ odhadu celkové rezervy je při použití bootstrapu 1 rovna $13.309.380,5$ a při bootstrapu 2 $10.173.950,0$. Všimněme si, přestože VaR není obecně subaditivní, v obou těchto případech subaditivitu splňuje. Je tedy výhodnější držet požadovaný kapitál na celkovou výši rezervy než na jednotlivé rezervy každého škodního čtvrtletí.

Nyní porovnáme výsledky pro $\beta = 2$. V následujících tabulkách jsou opět znázorněny odhady hodnot v riziku na hladině $\alpha = 0,995$ pro odhady rezerv každého škodního čtvrtletí.

Opět pozorujeme, že v prvních čtvrtletích získáváme pomocí případu 1 nižší hodnoty, kdežto v posledních čtvrtletích nižší hodnoty dává případ 2. Odhad $\widehat{\mathrm{VaR}_{0,995}}(R)$ odhadu celkové rezervy je při použití bootstrapu 1 rovna $15.926.846,8$

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
-11 154,4	65 460,3	56 999,7	54 572,2	135 803,3	127 603,7	100 588,2	87 674,8	118 455,3	95 961,8	58 662,5	59 677,0	23 943,7	150 332,3	93 737,1	319 989,0	239 328,7	282 895,6
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	
208 859,3	270 738,0	200 572,3	194 705,6	290 945,1	362 625,6	368 898,8	462 133,4	435 537,3	621 356,6	739 767,6	1 239 468,8	978 654,6	1 698 650,8	1 342 236,8	2 208 573,3	5 343 267,3	

Tabulka 5.17: $\widehat{\mathrm{VaR}_{0,995}}(R_j)$ pomocí bootstrap 1 při $\beta = 2$

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
-9 488,9	157 352,4	137 044,9	131 208,6	230 737,4	191 747,0	148 662,5	138 050,1	187 774,4	237 396,0	161 865,5	228 953,2	195 851,5	327 991,4	222 118,9	137 866,1	16 299,6	-46 200,6
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	
-31 740,4	-159 239,6	-128 286,0	-171 858,7	-105 756,2	-124 966,5	-187 624,6	-351 501,2	-54 535,5	-12 233,3	163 777,1	435 664,0	408 406,7	654 362,7	528 669,0	909 026,3	3 580 532,4	

Tabulka 5.18: $\widehat{\mathrm{VaR}_{0,995}}(R_j)$ pomocí bootstrap 2 při $\beta = 2$

a při bootstrapu 2 je rovna $5.238.076,4$. Tato hodnota je nejnižší ze všech ostatních hodnot (viz grafické znázornění na obrázku 5.1). Odhadnuté hodnoty v riziku i zde splňují podmínku subaditivity. Za povšimnutí určitě stojí fakt, že pomocí bootstrapu 1 při přechodu od $\beta = 1$ k $\beta = 2$ dochází k navýšení potřebného kapitálu - tedy navýšení hodnot v riziku -, zatímco pomocí bootstrapu 2 dochází k jeho snížení.

Závěr

Cílem práce bylo popsání direktivy Evropské unie Solventnost II, výpočet solventnostního kapitálového požadavku pomocí standardní formule a navrhnutí částečného interního modelu. Vzhledem k tomu, že k direktivě neustále vycházejí konzultační materiály a není ještě zcela ustálená, je možné, že některé informace obsažené v této práci nejsou již aktuální. Předpokládá se ale, že velké změny ve standardní formuli již nanastanou. Také není možné zaručit, že navrhnovaný interní model bez úprav projde schvalovacím procesem dozoru, je třeba ho brát pouze jako podklad pro vybudování vlastního částečného interního modelu. Navíc je nutné při jeho využití podstatně více dat než při použití standardní formule, která nemusíme mít pokaždé k dispozici.

K pochopení této tematiky jsme probrali teorii měření rizik a ukázali některé prakticky používané míry rizik, jako je hodnota v riziku, zbytková hodnota v riziku, spektrální míry rizik a další. Dále jsme stručně popsali náležitosti při tvorbě interních modelů - především, že nesmíme opomenout žádná kvantifikovatelná rizika, SCR musí odpovídat VaR na hladině $0,995$ v časovém horizontu jednoho roku, internímu modelu musí senior management porozumět, musí být využit při tvorbě strategie, různých rozhodnutí v pojišťovně apod., musí být dobře zdokumentován a mnoho dalších.

V navrhovaném interním modelu jsme si popsali dva případy pro výpočet kapitálového požadavku, které jsme nakonec na praktickém příkladě srovnali. Výsledky se lišily v závislosti na použití parametru β při výpočtu odhadu vývojových faktorů v Mackově modelu (viz (4.3)). Při $\beta = 1$ jsou výsledky srovnatelné a příliš se neliší. Přesto v případě 2 je potřebné množství kapitálového požadavku nižší. Při $\beta = 2$ vyplynuly více nedostatky případu 1, které jsme popsali v předešlé kapitole, což vedlo ke zbytečnému držení většího množství kapitálu než v případě 2. Na základě těchto zjištění bychom doporučovali využívat v navrhnutém interním modelu případ 2, který dává jak pro $\beta = 1$, tak pro $\beta = 2$, lepší výsledky.

Literatura

[1] Acerbi, Carlo. *Spectral Measures of Risk: a Coherent Representation of Subjective Risk Aversion*, 2002

[2] Acerbi, Carlo - Tashe, Dirk. *On the coherence of Expected Shortfall*, 2002

[3] CEIOPS. *Addendum to Consultation Paper no. 37: Draft Level 2 Advice on the Procedure to be followed for the approval of a group internal model*, červenec 2009

[4] CEIOPS. *Consultation Paper no. 37: Draft Level 2 Advice on the Procedure to be followed for the approval of an Internal Model*, březen 2009

[5] CEIOPS. *Consultation Paper no. 56: Draft Level 2 Advice on Tests and Standards for Internal Model Approval*, červenec 2009

[6] CEIOPS. *Consultation Paper no. 65: Draft Level 2 Advice on Partial Internal Models*, listopad 2009

[7] CEIPOS. *Quatitative Impact Study 5: Technical specifications*, červenec 2010

[8] Peters, Gareth W. - Wüthrich, Mario V. - Shevchenko, Pavel V.. *Chain Ladder Method: Bayesian Bootstrap versus Classical Bootstrap*, Insurance: Math. Econom. 47, 2010, s. 36-51

[9] Peng, Jin. *Value at Risk and Tail Value at Risk in Uncertain Environment*, Uncertainty Theory Laboratory, 2005

[10] Prášková, Zuzana. *Metoda bootstrap*, JČMF ROBUST, 2004

[11] Rockafellar, R. Tyrrell - Uryasev, Stanislav. *Conditional Value-at-Risk for General Loss Distribution*, Risk Management and Financial Engineering Lab, 2001

[12] Mack, Thomas: *Distribution-free Calculation of the Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates*, ASTIN Bulletin 23, 1993, s. 213-225

[13] Mack, Thomas: *The Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates: Recursive Calculation and Inclusion of a Tail Factor*, ASTIN Bulletin 29, 1999, s. 367-368

[14] *Vyhláška č. 303/2004 Sb., kterou se provádí některá ustanovení zákona o pojišťovnictví*, 6. květen 2004

[15] *Zákon č. 363/1999 Sb., o pojišťovnictví*, 21. prosince 1999

Příloha A

Vstupní data pro výpočet rizika rezerv

t \s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
200101	977	556	405	303	520	460	456	505	530	487	469	383	366	360	353	430	763	784	777	755	742	736	729	684	684	671	665	647	640	635	289	335	335	335	335	323
200102	945	707	436	362	334	405	373	281	233	275	221	191	239	142	102	110	129	126	133	123	981	981	933	933	930	930	119	119	116	116	116	116	116	109	172	
200103	1119	1074	578	450	431	456	330	347	332	148	132	121	121	74	172	169	147	124	93	34	34	28	28	28	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3		
200104	1117	741	659	536	434	363	351	333	180	198	172	204	139	134	146	146	120	112	120	133	128	128	130	130	120	120	120	109	45	45	45	45	45			
200201	1218	789	474	822	831	807	792	878	796	790	774	856	836	839	848	833	818	818	818	449	449	449	439	3	3	3	3	3	3	3	3	3				
200202	1346	1055	837	702	651	613	575	562	725	773	967	933	933	907	707	819	810	778	533	569	568	529	484	469	410	409	417	286	283	283	21					
200203	1845	1334	1088	1010	1089	909	793	696	1485	1820	2112	2126	2098	2416	2408	2411	2401	2298	2297	2283	2254	576	580	544	546	357	359	354	362	333						
200204	1833	1420	1003	825	662	465	427	544	696	649	644	642	622	611	818	811	763	762	762	720	706	706	649	646	385	385	378	378	378							
200301	1788	1569	1260	1011	1110	971	916	918	882	751	737	649	608	598	598	564	564	564	561	382	382	334	319	317	317	317	293	293								
200302	1434	1129	993	803	1177	1173	1572	2129	2098	2075	2006	1991	2056	2043	2023	2023	2023	2131	1856	1851	1810	1804	1765	1747	1728	1708	1650									
200303	2683	2323	1951	1811	1720	1556	1448	1226	1226	1024	1061	1005	1086	907	899	897	895	641	639	473	421	314	459	457	423	99										
200304	2349	1625	1203	1024	1263	1296	1120	1060	848	755	747	747	632	627	627	617	432	432	390	356	121	117	114	109	109											
200401	2492	1687	1445	1213	1270	1510	1388	1335	1915	2428	1155	927	904	1922	1891	1583	683	1421	1202	1124	1124	1120	1111	1107												
200402	2708	1997	2198	1869	1659	1527	2618	3558	2819	2781	2576	2563	2557	2427	1929	1929	1912	1749	1501	1501	1500	1413	1413													
200403	3287	2875	2298	1915	2195	1943	2135	1909	2376	1982	1943	1931	1808	1745	1718	1707	1641	1409	1494	1400	1386	1386														
200404	2878	2494	1806	1712	1671	1648	1605	3327	3217	6035	6035	5911	5845	5839	5730	5608	2280	2230	2279	1111	705															
200501	3310	2264	1623	1296	1060	1052	975	906	782	754	493	463	465	488	436	436	351	198	85	85																
200502	3167	2749	2349	2057	1914	1756	1476	1380	1365	1036	951	928	849	811	811	811	793	694	665																	
200503	4409	3827	3146	2902	2271	2031	2574	2544	2691	2086	2043	1952	1867	1887	1842	1828	1995	1410																		
200504	3342	2880	2449	2027	1831	1693	1643	1596	1358	1244	1071	947	1153	1131	1157	1157	868																			
200601	4184	3354	2572	2205	2089	1732	1606	1411	1153	826	659	609	576	558	558	548																				
200602	3377	2756	2236	1844	1623	1470	1181	1115	1054	725	693	656	636	630	595																					
200603	3884	3254	2705	2161	1961	1632	1512	1396	1063	846	759	749	698	675																						
200604	3412	2546	2016	1943	1907	1547	1529	1469	1198	1010	993	960	915																							
200701	3533	3770	3383	3040	2955	2734	2864	2629	2139	2039	2025	1986																								
200702	4600	3700	2998	2603	2256	2004	2119	2071	2537	2193	2097																									
200703	5165	4595	3634	3330	3036	4167	4005	3825	3441	2762																										
200704	4463	3327	2598	2469	2264	2078	2035	1987	1594																											
200801	4904	3491	2478	2122	1950	1778	1634	1574																												
200802	4095	2731	2032	2059	1764	1467	1235																													
200803	5880	5238	4714	3854	3645	3108																														
200804	3582	2459	1861	1720	1487																															
200901	5355	3916	3325	2852																																
200902	4208	2717	1947																																	
200903	6342	4101																																		
200904	6038																																			

Tabulka A.1: Kumulativní trojúhelník RBNS rezervy na škody (v tis. Kč)

t \s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
200101	1340	1623	1737	1741	2086	2161	2237	2327	2421	2407	2403	2331	2321	2321	2321	2408	2747	2782	2782	2767	2762	2762	2762	2724	2724	2726	2726	2714	2714	2718	2379	2425	2425	2425	2425	2413
200102	1324	1682	1688	1754	1940	2058	2098	2046	2041	2092	2041	2064	2132	2148	2109	2117	2146	2146	2153	2143	3003	3003	2955	2953	2952	2952	2140	2140	2140	2140	2140	2140	2140	2140	2203	
200103	1654	2480	2684	2719	2774	2849	2774	2849	2842	2729	2728	2732	2736	2685	2783	2781	2803	2798	2796	2767	2767	2760	2760	2760	2734	2733	2733	2733	2733	2732	2733	2732	2732	2731		
200104	1704	2277	2467	2458	2479	2478	2495	2509	2437	2460	2461	2494	2436	2432	2448	2449	2422	2425	2433	2446	2441	2441	2444	2444	2433	2434	2434	2438	2378	2378	2378	2378	2378			
200201	2010	2324	2262	2697	2838	2911	2960	3079	3063	3057	3064	3147	3130	3135	3144	3132	3115	3112	3114	2742	2742	2739	2729	2289	2289	2286	2286	2283	2283	2279	2279	2277				
200202	2110	2568	2760	2776	2825	2831	2969	3008	3346	3454	3648	3661	3668	3678	3486	3604	3603	3732	3488	3527	3534	3496	3988	4034	3964	3970	3979	3979	3980	3980	3718					
200203	2612	3312	3523	3659	3852	3907	3880	3884	4682	5026	5318	5345	5364	5684	5671	5681	5673	5575	5589	5577	5564	4532	4538	4528	4534	4346	4350	4358	4379	4356						
200204	2703	3470	3489	3443	3406	3311	3372	3507	3699	3679	3670	3669	3653	3640	3853	3846	3805	3805	3804	3764	3757	3757	3763	3760	3500	3500	3492	3492	3491							
200301	2715	3528	3546	3518	3705	3653	3650	3665	3664	3686	3672	3583	3565	3560	3560	3526	3526	3528	3524	3342	3342	3292	3275	3272	3272	3272	3248	3247								
200302	2188	2935	3074	3048	3590	3640	4109	4707	4687	4674	4599	4624	4693	4752	4741	4746	4745	4870	4600	4600	4557	4551	4512	4494	4489	4485	4417									
200303	3471	4925	5121	5320	5405	5427	5392	5276	5458	5267	5323	5298	5399	5229	5229	5229	5234	4992	4992	4826	4773	4666	4811	4807	4773	4763										
200304	3272	3863	3888	3932	4255	4405	4373	4364	4184	4158	4153	4160	4048	4059	4059	4052	3866	3866	3823	3788	3552	3548	3544	3538	3538											
200401	3343	3991	4212	4244	4441	4760	4698	4707	5319	5944	5065	4839	4821	5844	5824	5537	5635	6371	6202	6125	6125	6120	6120	6115												
200402	3459	4164	4789	4647	4683	4675	6117	7100	6775	6776	6637	6624	6622	6493	6006	6006	5993	5870	5622	5622	5621	5621	5697													
200403	4505	6036	6231	6174	6574	6576	6841	6758	7411	7417	7390	7435	7332	7256	7255	7233	7118	6898	6862	6761	6760	6757														
200404	3848	4935	4795	4976	5153	5329	5376	7179	7087	10101	10101	10000	10041	10047	10001	9937	8500	8468	8515	7392	6993															
200501	4439	5259	5131	4985	4945	4969	4919	4879	4856	4838	4580	4563	4568	4589	4546	4544	4464	4341	4278	4278																
200502	4026	5511	5704	5682	5663	5631	5419	5365	5381	5091	5022	5013	4933	4903	4902	4902	4882	4783	4753																	
200503	5260	6868	7076	7207	6762	6656	7278	7274	7517	7274	7249	7053	6970	7252	7218	7200	7367	7118																		
200504	4181	5380	5407	5327	5244	5274	5275	5264	5058	5020	4859	4756	4972	4954	4983	4983	4717																			
200601	5560	6732	6655	6651	6833	6856	6805	6601	6377	6106	5965	5910	5878	5875	5876	5862																				
200602	4375	5074	5049	4955	4926	4895	4797	4757	4717	4406	4396	4399	4389	4385	4363																					
200603	4936	5958	5956	5681	5607	5357	5265	5213	4928	4720	4666	4677	4647	4623																						
200604	4663	5398	5363	5548	5596	5491	5495	5468	5223	5071	5054	5029	4993																							
200701	5010	6833	6854	6676	6708	6623	6777	6711	6370	6327	6330	6298																								
200702	5979	7246	6973	6820	6682	6587	6835	6811	7291	7017	6966																									
200703	6838	9137	9314	9453	9417	10850	10773	10695	10569	10014																										
200704	5780	7104	7198	7488	7400	7387	7396	7389	7014																											
200801	6463	7750	7625	7583	7499	7497	7485	7591																												
200802	5581	6678	6621	6866	6866	6720	6632																													
200803	7528	9437	9607	9507	9441	9133																														
200804	5278	6553	6688	6748	6661																															
200901	7600	9373	9572	9432																																
200902	6109	7179	7146																																	
200903	8481	10282																																		
200904	10004																																			

Tabulka A.2: Kumulativní trojúhelník výplat za škody (v tis. Kč)