Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Miroslav Řezáč

Exponenciální, logaritmické rovnice a jejich soustavy s využitím internetu

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce:	RNDr. Jarmila Robová CSc.
Studijní program:	matematika
Studijní obor:	učitelství matematiky - informatiky pro SŠ

Praha 2011

Rád bych poděkoval mé vedoucí diplomové práce RNDr. Jarmile Robové CSc., která mi pomohla jak po odborné, tak metodické stránce a zejména s problematikou středoškolské terminologie. Dále mé poděkování patří M. Rendlovi, který mi pomohl s technickými obtížemi s jazykem HTML a PHP.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Kladně dne 7.7.2011

Název práce: Exponenciální, logaritmické rovnice a jejich soustavy s využitím internetu

Autor: Miroslav Řezáč

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jarmila Robová CSc., KDM MFF UK

Abstrakt: Úkolem této diplomové práce je vypracovat kvalitní učební pomůcku při studiu exponenciálních a logaritmických rovnic na střední škole. Nemá se jednat o učebnici ale o interaktivní webové stránky, které budou obsahovat dynamické prvky a testy, které pomohou studentům pochopit danou látku. Stránky mají sloužit zejména středoškolským studentům jako doplňkový studijní materiál. Nejprve jsou v práci rozebrány a ohodnoceny stávající webové stránky, které se věnují tomuto tématu. Na základě poznatků z těchto a dalších výukových webů jsou vytvořeny vlastní webové stránky.

Klíčová slova: exponenciální rovnice, logaritmické rovnice, výukový web

Title: Exponential, logarithmic equations and their system with use of internet

Author: Miroslav Řezáč

Department: Didactics of mathematics

Supervisor: RNDr. Jarmila Robová CSc., KDM MFF UK

Abstract: The aim of this diploma thesis is to develop a good teaching tool for studying exponential and logarithmic equations at the secondary school. It is not a textbook but an interactive website which contains dynamic elements and tests that can help students understand this subject matter. The website should mainly serve secondary school students as a supplementary study material. In the first chapter of the work the existing websites devoted to this theme are discussed and evaluated. On the basis of these and other educational sites the autor created a new website.

Keywords: exponential equations, logarithmic equations, educational web site

Obsah

Úvod

Tato diplomová práce je jednou z řady internetových učebnic pro střední školy, které již několik let vznikají na Katedře didaktiky matematiky Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy. Jejím úkolem je zpracovat téma logaritmických a exponenciálních rovnic a nerovnic a jejich soustav pro studenty středních škol.

Práce reaguje na skutečnost, že studenti stále častěji využívají internet jako učební pomůcku a přestávají používat papírové učebnice. Bohužel se na internetu objevuje celá řada stránek, které obsahují chybné nebo nepřesné informace, neboť nemají žádnou odbornou korekturu. Cílem této práce je vytvořit kvalitní internetovou učebnici, která bude sloužit jako pomůcka při studiu exponenciálních a logaritmických rovnic. Práce částečně nahrazuje papírové učebnice, nemůže však nikdy nahradit výklad učitele.

První část práce je věnována hodnocení stávajících internetových stránek. Přestože je zde uvedeno kvalitativní hodnocení jednotlivých stránek, v práci nejde o vytvoření žebříčku webových stránek. V první řadě práce poukazuje na skutečnost, že existuje málo kvalitních webů (zejména těch česky psaných), které se věnují tomuto tématu a má tedy cenu vytvářet web nový. V druhé řadě se autor této práce může poučit z chyb druhých a inspirovat se při vlastní tvorbě stránek.

Druhá část práce je věnována samotné tvorbě webových stránek. Na rozdíl od jiných témat neexistuje učebnice, která by se komplexně věnovala tomuto tématu. Výklad je proto spíše inspirován sbírkami příkladů, a jednotlivé kapitoly jsou řazeny tak, jak se s největší pravděpodobností učí na střední škole (aby bylo možné počítat příklady z těchto sbírek).

Nutným předpokladem pro řešení exponenciálních a logaritmických rovnic je práce s mocninami. Proto je první kapitola věnována zopakování tohoto tématu. Následuje kapitola, ve které je definován logaritmus a ve které si studenti procvičí počítání s logaritmy. Pro studenty, kteří se více zajímají o matematiku, je zde uvedeno i použití logaritmů v praxi. Vzhledem k tomu, že základní úpravou při řešení exponenciálních a logaritmických rovnic je porovnání exponentů, respektive argumentů logaritmů, což je vlastně porovnání argumentů prosté funkce, je třetí kapitola věnována opakování funkcí (studenti zde mohou pochopit souvislosti mezi ekvivalentními úpravami rovnice a prostými funkcemi).

Ostatní kapitoly jsou věnovány řešení exponenciálních a logaritmických rovnic a nerovnic a jejich soustav. Jednotlivé podkapitoly a řazení příkladů je opět inspirováno sbírkami příkladů. Za zmínku určitě stojí podkapitoly věnované grafickému řešení exponenciálních a logaritmických rovnic pomocí Java appletu. Je zde dáno do souvislosti řešení rovnice s grafem funkce.

1. Stávající webové stránky

1.1 Výběr stávajících webových stránek

Úkolem této kapitoly je vybrat stránky, které budou v následujícím textu hodnoceny. Nejprve se pokusím určit stránky, které s největší pravděpodobností navštíví student střední školy, pokud bude mít problém s látkou exponenciálních a logaritmických rovnic či nerovnic. Lze předpokládat, že do nejznámějšího internetového vyhledávače Google zadá klíčová slova: LOGARITMICKÉ ROVNICE nebo EXPONENCIÁLNÍ ROVNICE. Tabulka 1.1 zachycuje prvních deset výsledků tj. první stránku, internetového vyhledávače Google.

Některé stánky nebudou v této práci hodnoceny, neboť se nejedná o stránky věnované středoškolské matematice nebo je za ně nelze považovat (např. fórum studentů, zadání písemné práce nebo úkolu). U cizojazyčných stránek jsou kritéria nastavena ještě přísněji - vybíral jsem pouze stránky, které jsou dle mého názoru vhodné pro studenty středních škol.

Mezi zajímavé stránky, o kterých se práce nezmiňuje, jistě patří odkaz na webu YOUTUBE, kde je vystaveno video, na kterém učitel vysvětluje studentům řešení jednoduché exponenciální rovnice. Dále může být i zajímavý projekt gymnázia ve Zlíně, kde jsou vystaveny řešené příklady exponenciálních a logaritmických rovnic a nerovnic a uživatelé mají možnost postupně odkrývat řešení. Projekt bohužel není zatím dokončen.

Dále budu hodnotit stránky, které mi byly doporučeny jako dobré učební pomůcky matematiky. Jedná se o cizojazyčné stránky využívající dynamické prvky zejména Java aplety. Tyto stránky mně mají posloužit jako inspirace při tvorbě vlastních stránek.

V tabulce 1.2 je předložen seznam všech stránek, které jsou uvedeny v této práci.

1.2 Výběr kritérií pro hodnocení webových stránek

Nyní popíši kritéria, podle kterých jsem se rozhodl hodnotit stávající webové stránky. Za nejdůležitější jsem považoval odbornou správnost, aby si studenti nezapamatovali chyby, které se jen těžko dostávají z paměti.

Dále jsem se zaměřil na programátorské zpracování stránek. Za nejdůležitější považuji strukturu, která usnadňuje orientaci a práci se stránkami, potom jejich vzhled, který může zaujmout náhodného návštěvníka, a nakonec použití dynamických prvků, které mohou pomoci studentům s pochopením látky.

Rovněž jsem se zaměřil na zpracování tématu logaritmických a exponenciálních rovnic a nerovnic. Hodnotím didaktické zpracování teoretického výkladu, kde se zaměřuji na vysvětlení podstaty problému. Zvlášť jsou hodnoceny řešené příklady.

Dále bych chtěl upozornit, že hodnocení podle některých kritérií není zcela objektivní (vzhled stránek), protože je v něm zahrnut můj subjektivní názor. Známky mi mají zejména posloužit jako inspirace při tvorbě nových stránek.

Výsledky na doraz LOGARITMICKÉ ROVNICE	
Adresa výsledku	Budeme hodnotit
http://matematika-online-a.kvalitne.cz/logaritmicke-rovnice.htm	ANO
http://matematika-online-a.kvalitne.cz/logaritmicke-rovnice.htm	ANO
http://www.e-matematika.cz/stredni-skoly/logaritmicke-rovnice.php	ANO
http://maths.cz/clanky/exponencialni-a-logaritmicke-rovnice.html	ANO
http://www.aristoteles.cz/matematika/rovnice/logaritmicke/logaritmicke-rovnice -priklady.php	ANO
http://webvyukacontent.olportal.cz/w-matsbirkass-041215/Logaritmicke_rovnice.htm	NE
http://www.jarjurek.cz/aktuality/Vyuka/logaritmicke_rovnice_ucebnice.pdf	NE
http://www.ucebnice.krynicky.cz/Matematika/02_Funkce_a_rovnice/ 9_Expone ncialni_a_logaritmicke_funkce_a_rovnice/2917_Logaritmicke_rovnice_I.pdf	ANO
http://cs.wikipedia.org/wiki/Logaritmická_rovnice	ANO
http://artemis.osu.cz/mmmat/txt/sm/exr.htm	ANO
Výsledky na doraz EXPONENCIÁLNÍ ROVNICE	
Adresa výsledku	Budeme hodnotit
www.matweb.cz/exponencialni-rovnice	ANO
http://matematika-online-a.kvalitne.cz/exponencialni-rovnice.htm	ANO
http://www.e-matematika.cz/stredni-skoly/exponencialni-rovnice.php	ANO
http://cs.wikipedia.org/wiki/Exponenciální_rovnice	ANO
http://www.aristoteles.cz/matematika/rovnice/exponencialni/ exponencialni- rovnice.	ANO
http://www.priklady.eu/cs/Matematika/Exponencialni-rovnice.alej	NE
http://matfiz.xf.cz/soubory/exporovnice.pdf	NE
http://www.gjszlin.cz/gztgm/webs/rovnice-a-nerovnice/exprov.html	NE
Výsledky na doraz LOGARITHMIC EXPONENTIAL EQUATIONS	
Adresa výsledku	Budeme hodnotit
http://www.occc.edu/maustin/exp_log_equations/ exponential%20and%20logarithmic%20equations.htm	NE
http://www.themathpage.com/aprecalc/logarithmic-exponential-functions.htm	ANO
http://library.thinkquest.org/20991/alg2/log.html	ANO
http://www.sosmath.com/algebra/logs/log4/log46/log46.html	NE
http://uncw.edu/courses/mat111hb/EandL/equations/equations.html	NE
http://www.intmath.com/Exponential-logarithmic-functions/ Exponential-log-functions-intro.php	ANO NE
http://www.purplemath.com/modules/solvexpo2.htm	NE
http://www.youtube.com/watch?v=arBR2ErXkyA	NE
http://home.cerge-ei.cz/kalovcova/files/AAU_F2009/lecture6.pdf	NE

Tabulka 1.1: Seznam stránek z internetového prohlížeče Google

Název stránek	**Internetová adresa**
České stránky zjištěné vyhledávačem Google	
Matematika pro každého online	matematika-online-a.kvalitne.cz
Nesnesitelně snadná matematika	www.e-matematika.cz
Matematika pro každého (pro Střední školy)	maths.cz
Aristoteles.Cz - matematika, chemie a fyzika online	www.aristoteles.cz
Počítačové učebnice matematiky a fyziky pro gymnázia	www.ucebnice.krynicky.cz
Wikipedie, otevřená encyklopedie	cs.wikipedia.org
Multimediální kurz aplikované vyšší matematiky	artemis.osu.cz/mmmat/
Matematika pro střední a základní školy - Matematika polopatě	www.matweb.cz
Cizojazyčné stránky zjištěné vyhledávačem Google	
TheMathPage	www.themathpage.com
Math for Morons Like Us	library.thinkquest.org/20991/alg2/log.html
S.O.S. Math	www.sosmath.com
Doporučené cizojazyčné stránky	
Maths online	www.univie.ac.at/future.media/moe/
MathsNet.net - interactive mathematics in education	mathsnet.net/
International Education Software	www.ies.co.jp/
Homepage Walter Fendt	www.walter-fendt.de

Tabulka 1.2: Seznam hodnocených stránek

Vyjma dále zmíněných kritérií hodnotím také komplexnost stránek a vhodnost stránek pro výuku na střední škole.

Hodnotit budu na stupnici 1 - 4 podobně jako na vysoké škole. Předem je nutno upozornit, že číselné hodnocení (průměrná známka) nemůže zcela postihnout vhodnost daných stránek pro výuku. Co která známka znamená, se pokusím popsat na následujících řádcích:

- Odborná správnost
  1. Správně.
  2. Po formální stránce je vše v pořádku, ale v rozporu se značením či způsobům zavedení na střední škole nebo se vyskytují drobné nepřesnosti.
  3. Vyskytují se menší chyby, které mají minimální vliv na špatné pochopení látky a správné výsledky.
  4. Vyskytují se velké formální chyby vedoucí ke špatnému pochopení tématu.
- Struktura stránek a přehlednost
  1. Na každé stránce je k dispozici menu a v textu se lze odkazovat na dříve zavedené pojmy a probrané oblasti.
  2. Uživatel má na každé stránce k dispozici menu, pomocí něhož se může odkazovat na ostatní témata.
  3. Jediný prvek, který zlepšuje přehlednost, je navigační stránka.

4. Stránky jsou nepřehledné a špatně se v nich hledají požadované informace.

- Vzhled stránek
  1. Profesionální provedení.
  2. Stránky jsou graficky zpracovány bez moderních technologií (css, php,…)[1].
  3. Stránky obsahují grafické prvky, ale působí spíše rušivě.
  4. Jedná se o informativní stránky bez jakékoli grafiky.
- Dynamické prvky
  1. Dynamické prvky slouží k vysvětlení, lepšímu pochopení a provázání látky.
  2. Na stránkách jsou náročnější dynamické prvky, např. dynamické testy, Java applety…
  3. Stránka obsahuje jednoduché dynamické prvky např. hypertextové odkazy, krokování příkladů, kalkulačku…
  4. Stránka neobsahuje žádné dynamické prvky.
- Didaktické zpracování teorie (pouze téma logaritmických a exponenciálních rovnic)
  1. Dobré didaktické zpracování (srozumitelnost, přehlednost, návaznost…).
  2. Stránky obsahují výklad, který není v souladu se středoškolskými učebnicemi nebo se ve výkladu vyskytují drobné nepřesnosti.
  3. Jsou uvedeny pouze metody řešení bez teoretického výkladu.
  4. Zcela vynechán výklad i metody řešení příkladů.
- Řešené příklady (pouze téma logaritmických a exponenciálních rovnic)
  1. Řešené příklady s vysvětlením a zdůvodněním všech kroků.
  2. Je uveden popis řešení, bez vysvětlení a zdůvodnění jednotlivých kroků nebo jsou tyto kroky popsány nepřesně.
  3. Stránky obsahují řešené příklady bez popisu řešení.
  4. Stránky neobsahují řešené příklady.

1.3 Hodnocení stávajících webových stránek

V následujícím textu je uvedeno hodnocení stávajících webových stránek. V popisu stránek jsem se nejprve zabýval hodnocením z pohledu uživatele. Tedy spíše z hlediska prvního dojmu, který si náhodný návštěvník těchto stránek udělá, doplněný o odborné posouzení matematického textu. V závěru jsem se věnoval zpracování tématu logaritmických a exponenciálních rovnic a celkovému hodnocení podle výše uvedených kritérií.

[1] css - kaskádové styly, php - programovací jazyk

Obrázek 1.1: Matematika pro každého online

1.3.1 Matematika pro každého online

http://matematika-online-a.kvalitne.cz
obrázek 1.1
1. místo ve vyhledávači google na dotaz LOGARITMICKÉ ROVNICE
2. místo ve vyhledávači google na dotaz EXPONENCIÁLNÍ ROVNICE

Mezi velké přednosti těchto stránek patří jejich profesionální vzhled, přehlednost a celistvost. Jsou zde vysvětleny všechny partie středoškolské matematiky.

Mezi další velké pozitiva patří řešené příklady. Vždy jsou předem přehledně uvedeny všechny potřebné vzorce a postupy řešení. Každý příklad má jasné zadání a závěr. Důležité kroky jsou v příkladech doplněny komentářem.

Za slabší považuji definování pojmů a vysvětlování látky. Na mnoha místech se vyskytují drobné formální chyby a nevhodné formulace (*"Lineární rovnice je rovnice ve které se vyskytuje pouze jedna neznámá v první mocnině je například ve tvaru a*x + b = 0, jestliže se a nerovná nule pak můžeme její jediný kořen vypočítat: x1 = ? b/a"* nebo *"Parametr je písmeno ve významu čísla. Může to být libovolné obecné číslo, které se vyskytuje v dané rovnici. Pří řešení rovnice s parametrem zvažujeme jakých nabývá hodnot. Řešit rovnici s parametrem znamená určit její kořeny v závislosti na příslušných hodnotách parametru."*)[2].

Stránky jsou ve své podstatě statické. Za jediné dynamické prvky lze považovat online kalkulačky určené k výpočtům i složitějších matematických operací.

U tématu exponenciálních rovnic je uvedena neformální definice a metoda řešení základních typů rovnic, které jsou doplněny o řešené příklady. Logaritmus prakticky není

[2] Jedná se o doslovnou citaci uvedenou na stránkách.

Obrázek 1.2: Nesnesitelně snadná matematika - e-Matematika.cz

zaveden a u vzorců nejsou uvedeny podmínky. K dispozici je jen malé množství logaritmických rovnic a je zcela vynecháno téma exponenciálních a logaritmických nerovnic.

Přes všechny tyto nedostatky hodnotím stránky pozitivně (stránky získaly průměrnou známku 2,33). Příjemně se s nimi pracuje a vysvětlují, jak řešit příklady středoškolské matematiky. Jako plnohodnotný studijní materiál jsou ovšem nedostačující a nemohou nahradit středoškolské učebnice či dokonce výklad učitele.

1.3.2 Nesnesitelně snadná matematika - e-Matematika.cz

http://www.e-matematika.cz
obrázek 1.2
2. místo ve vyhledávači google na dotaz LOGARITMICKÉ ROVNICE
3. místo ve vyhledávači google na dotaz EXPONENCIÁLNÍ ROVNICE

Stánky na první pohled vypadají profesionálně a mohou se tím pádem jevit jako vhodné studijní materiály, ale první dojem trochu klame.

Látka není přehledně členěná a chybí výklad, který by propojoval jednotlivé partie matematiky. Ten je slibován za příspěvek 200 Kč na podporu stránek. Vzhledem k tomu, že některá témata (zejména vysokoškolská) jsou k dispozici zdarma jako ukázka, tak bych si další za tento poplatek nepořídil.

Jedná se o učebnicový výklad bez dynamických prvků či názorného grafického zpracování. Vyskytuje se zde jen několik formálních nedostatků, které by nejspíš neměly vliv

Obrázek 1.3: Matematika pro každého (pro Střední školy)

na správné pochopení daného tématu. Někde chybí podmínky, jinde se vyskytují nevhodné formulace definic. (*"Graf funkce je obrázek, ze kterého můžete o funkci získat nějakou představu, vidíte její vlastnosti a vyčtete funkční hodnoty. Na vodorovné ose jsou hodnoty x, na svislou osu vynášíme funkční hodnoty f (x)."*)

Se stránkami se mi nepracuje dobře. Člověk musí řadu věcí složitě hledat a často se stane, že některá témata středoškolské matematiky zcela chybí, např. téma logaritmických a exponenciálních rovnic, u kterého jsou uvedeny pouze úlohy na procvičení.

Mezi velká pozitiva těchto stránek naopak patří podrobný popis metod řešení jednotlivých typů příkladů. Každý vzorový příklad je rozdělen do několika kroků, které jsou podrobně popsány a vysvětleny. Přitom jsou uvedeny všechny potřebné poznatky a vzorečky, které se v daném příkladu použijí.

Tyto stránky nepůsobí na uživatele pozitivním dojmem (stránky získaly průměrnou známku 2,67). Dle mého názoru se nedají využít jako studijní materiál, který by pomohl studentům k pochopení daného tématu. Protože je zde vytvořena podrobná kuchařka na řešení příkladů, budou tyto stránky dle mého názoru oblíbené u slabších studentů.

1.3.3 Matematika pro každého (pro Střední školy)

http://maths.cz/
obrázek 1.3
3. místo ve vyhledávači google na dotaz LOGARITMICKÉ ROVNICE

Stránky jsou pěkně graficky zpracovány a obsahují většinu matematických témat probíraných na základních a středních školách.

Jedná se spíše o portál, kde několik redaktorů přispívá svými články o matematice, než o učebnici matematiky. Z toho plyne, že témata nejsou dobře členěna a provázána a chybí i navigační menu, které by zlepšilo přehlednost a práci s těmito stránkami. Dále jsou témata zpracována různými metodickými styly, což nemusí každému studentovi vyhovovat.

U konkrétního tématu jsou vysvětleny důležité pojmy a uvedeno několik vzorových příkladů s postupem. Na stránkách je funkčních i několik dynamických testů z různých matematických témat.

Mezi slabší stránky patří zavádění nových pojmů. Definice jsou neformální a v některých případech i chybné (*"Prostá funkce: $\forall x \in D_f$ - každé x náleží definičnímu oboru funkce, $x1 \neq x2$ a $f(x1) \neq f(x2)$ - mezi dvěma body na grafu a jejich hodnotami v definičním oboru a oboru hodnot není žádný vztah"*).

Téma logaritmických a exponenciálních rovnic je zde zpracováno velice stručně (jsou uvedeny jen základní typy rovnic). Obsahují zejména postupy řešení a vysvětlení jednotlivých kroků. Někdy je uvedeno nevhodné nebo žádné zdůvodnění (*"Jakmile se základy rovnají, můžeme je škrtnout a řešit rovnici danou exponenty"*).

Stránky na mě udělaly docela pozitivní dojem (stránky získaly průměrnou známku 2,33). Škoda, že nejsou více přehledné a nejsou odstraněny chybné a nevhodné formulace. Je to nejspíše způsobeno tím, že autoři nemají nad matematikou dostatečný nadhled. Stránky se až na teorii dají použít jako pomůcka při studiu matematiky na střední škole.

1.3.4 Aristoteles.Cz - matematika, chemie a fyzika online

http://www.aristoteles.cz/
obrázek 1.4
4. místo ve vyhledávači google na dotaz LOGARITMICKÉ ROVNICE
5. místo ve vyhledávači google na dotaz EXPONENCIÁLNÍ ROVNICE

Stránky mají celou řadu výhod i nevýhod. Mezi výhody jistě patří, že jsou velice obsáhlé. Na stránkách jsou všechna témata středoškolské matematiky zpracována a u každého je uvedeno několik vysvětlujících řádek a tři řešené příklady.

Mezi velké nevýhody patří trochu složitější orientace na těchto stránkách a také fakt, že další řešené příklady a rozpracovaná teorie je zpoplatněna částkou 300 Kč.

Zlomky teorie na úvod tématu, které jsou zdarma přístupné, jsou až na nevhodná slovíčka a formulace většinou správné (vyskytují se drobné chyby, kterých si průměrný středoškolák nejspíše nevšimne). V místech, kde je pokus o rozsáhlejší vysvětlení látky jsou však nedostatky způsobené nesprávným pochopením tématu (*"Lineární rovnice s parametrem: V podstatě jde o to, že hledáme takové parametry p, pro které bude mí rovnice a) jedno řešení - 1 kořen b) nekonečně mnoho řešení c) žádné řešení"*).

Téma logaritmických a exponenciálních rovnic je rozpracováno podrobněji než na ostatních stránkách. Jsou zde uvedeny i postupy řešení logaritmických a exponenciálních nerovnic. U řešených příkladů se jedná spíše o popis řešení než o vysvětlení. Pomocné vzorce sice mají podmínky, ale jsou chybné.

Stránky na mě nepůsobí dobře (stránky získaly průměrnou známku 2,5). Je to hlavně způsobeno špatnou strukturou a také faktem, že téměř všechny odkazy, které by mohly

Obrázek 1.4: Aristoteles.Cz - matematika, chemie a fyzika online

být zajímavé a užitečné, jsou zpoplatněny. Proto bych tyto stránky žákům střední školy nedoporučoval.

1.3.5 Počítačové učebnice matematiky a fyziky pro gymnázia

http://www.ucebnice.krynicky.cz/
obrázek 1.5
7. místo ve vyhledávači google na dotaz LOGARITMICKÉ ROVNICE

Velice dobrá internetová učebnice středoškolské matematiky. Jsou zde obsažena a podrobně rozpracována veškerá témata středoškolské matematiky.

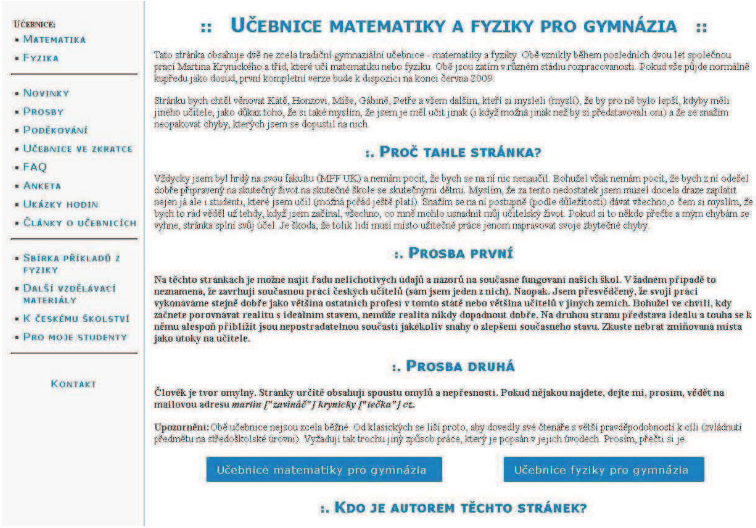
Ke každému tématu je poctivě uveden výklad i několik řešených příkladů a názorných obrázků.

Mezi velká pozitiva patří odborná správnost jak po formální, tak didaktické stránce. Stránky vytvářel učitel matematiky a fyziky na gymnáziu, který je absolventem Matematicko-fyzikální fakulty UK. Na stránkách se nevyskytují téměř žádné chyby.

Menším nedostatkem je statičnost těchto stránek a jejich nepřehlednost. Témata sice nejsou provázána hypertextovými odkazy a chybí i interaktivní menu, ale veškeré potřebné poznatky jsou vždy shrnuty na začátku kapitoly.

Stránky se i podrobně zabývají tématem logaritmických a exponenciálních rovnic. Jsou zde uvedeny a rozebrány všechny základní typy rovnic, které se probírají na střední škole včetně popisu řešení a vysvětlení jednotlivých kroků.

Stránky jsou velice vhodné ke studiu matematiky (stránky získaly průměrnou známku



Obrázek 1.5: Počítačové učebnice matematiky a fyziky pro gymnázia

2). Ocení je zejména studenti, kteří se zajímají o matematiku a kteří se chtějí kvalitně připravit na maturitní zkoušku nebo přijímací zkoušky na vysokou školu.

1.3.6 Wikipedie, otevřená encyklopedie

http://cs.wikipedia.org/wiki
obrázek 1.6
8. místo ve vyhledávači google na dotaz LOGARITMICKÉ ROVNICE
4. místo ve vyhledávači google na dotaz EXPONENCIÁLNÍ ROVNICE

Jak již název stránek napovídá, jedná se o encyklopedii a ne o výukové stránky věnované matematice. Student, který chce tyto stránky navštívit, musí znát hesla, podle kterých lze požadované informace vyhledat. Stránky jsou proto nepřehledné a špatně se v nich orientuje. Chybí celkový koncept a návaznost jednotlivých témat.

Mezi největší pozitiva stránek (pouze v oblasti exponenciálních a logaritmických rovnic) patří formální správnost jejich obsahu. Většinou se nevyskytují chyby, ale jen menší nepřesnosti nebo nevhodné formulace (*"Rovnice: Uvažujme dvě funkce f(x),g(x), které jsou definovány na nějaké množině D, pak nalezení všech x, která splňují rovnost f(x) = g(x) se nazývá rovnicí o jedné neznámé x."*). Další výhodou je provázanost jednotlivých pojmů (nikoli matematických témat) pomocí hypertextových odkazů.

Logaritmické a exponenciální rovnice jsou zpracovány velice zjednodušeně, ale je zde uvedena podstata řešení. Chybí ovšem řešený příklad a příklady k procvičení, bez kterých jsou tyto stránky téměř nepoužitelné pro středoškoláka.

Stránky lze považovat za špatnou učební pomůcku (stránky získaly průměrnou známku 2,83). Využít jí mohou buď vysokoškolští studenti nebo nadaní středoškoláci, kteří již mají nadhled nad problematikou a nebudou se ztrácet v jejich zhuštěném obsahu.

Obrázek 1.6: Wikipedie, otevřená encyklopedie

1.3.7 Multimediální kurz aplikované vyšší matematiky

http://artemis.osu.cz/mmmat/
obrázek 1.7
9. místo ve vyhledávači google na dotaz LOGARITMICKÉ ROVNICE

Stránky jsou určeny pro vysokoškolské studenty Přírodovědecké fakulty Ostravské univerzity. Obsahují zejména partie vysokoškolské matematiky a dále pak několik témat středoškolské matematiky, které autor pokládá za důležité procvičit před zahájením vysokoškolského kurzu. Mezi tato témata patří i řešení logaritmických a exponenciálních rovnic.

Stránky jsou po formální stránce zcela správné (autoři jsou vysokoškolští učitelé), ale je zde použito hodně formalismů. Definice a věty jsou formulovány pomocí kvantifikovaných výroků bez dalšího vysvětlení.

Stránky nejsou dobře strukturované, špatně se v nich orientuje. Za dynamické prvky lze považovat několik hypertextových odkazů a dále pokus o dynamické testy, které nejsou zcela funkční a nepracují tak, jak by běžný uživatel předpokládal.

Téma logaritmických a exponenciálních rovnic je zpracováno velice stručně. Je zde vysvětlena problematika a teoretický výklad postupu řešení. Příkladů je velice málo (zdaleka neobsahují nejznámější a nejjednodušší příklady) a v řešení je přeskočeno několik dílčích kroků (prakticky je uvedeno jen zadání a výsledek se slovním popisem řešení). Proto tyto příklady nepokládám za "řešené příklady".

Stránky jsou určené vysokoškolským studentům a nejsou vhodné pro studenty střední školy (stránky získaly průměrnou známku 2,5). Aby uživatel stránek dobře chápal výklad, musí dobře ovládat základy výrokové a predikátové logiky a mít již nějaké zkušenosti s vysokoškolskou matematikou.

Obrázek 1.7: Multimediální kurz aplikované vyšší matematiky

1.3.8 Matematika pro střední a základní školy - Matematika polopatě

http://www.matweb.cz/
obrázek 1.8
1. místo ve vyhledávači google na dotaz EXPONENCIÁLNÍ ROVNICE

Velice sympatické stránky věnované matematice. Snaží se pomoci studentům se zvládnutím jednotlivých témat. Jsou uvedeny většinou správné pojmy a definice doplněné o neformální komentář, který snad pomůže slabším studentům k pochopení jednotlivých pojmů.

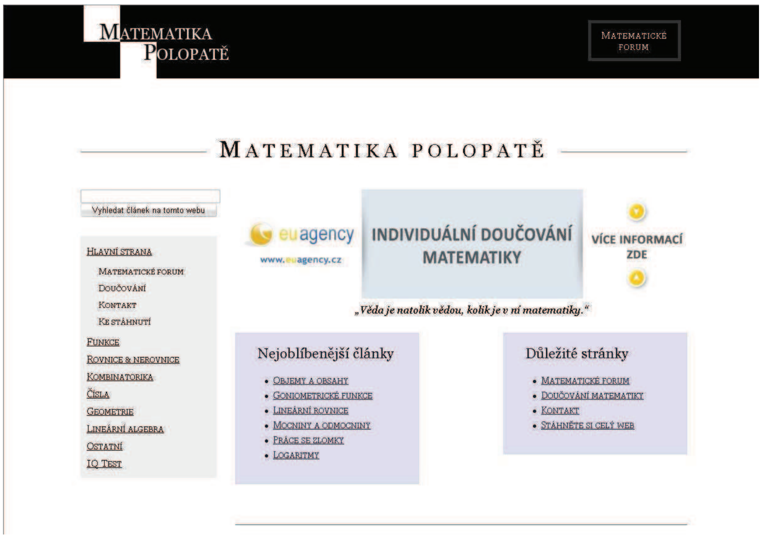
Stánky jsou přehledné a dobře se s nimi pracuje. Graficky jsou velice pěkně zpracovány včetně zvýrazňování pojmů a strukturování jednotlivých témat a podtémat.

Po odborné stránce se vyskytují spíše menší nepřesnosti, které by nemusely mít vliv na správné pochopení tématu.

Za dynamické prvky lze považovat jen hypertextové odkazy a skrytá řešení příkladů. Hypertextové odkazy jsou však vhodně označeny a použity jen v místech, kde lze předpokládat zájem studentů o dané téma.

Téma exponenciálních rovnic je velice pěkně zpracováno. Jsou zde uvedeny a podrobně vysvětleny základní typy rovnic, které jsou vyřešeny. Stránky ale obsahují malé množství řešených příkladů a je zde nepochopitelně vynecháno téma logaritmických rovnic a nerovnic.

Stránky na mě udělaly velice dobrý dojem (stránky získaly průměrnou známku 2). Jsou určeny spíše slabším studentům než jako příprava k maturitě či přijímačkám na vy-



Obrázek 1.8: Matematika pro střední a základní školy - Matematika polopatě

sokou školu. Témata jsou zpracována pečlivě se snahou pomoci studentům s pochopením a zvládnutím středoškolské matematiky.

1.3.9 TheMathPage

http://www.themathpage.com/
obrázek 1.9
2. místo ve vyhledávači google na dotaz LOGARITHMIC EXPONENTIAL EQUATIONS

Jedná se o anglicky psané stránky, které se zabývají matematikou základní a střední školy. Jsou velice obsáhlé a zpracovány jedním stylem jak didaktickým, tak grafickým.

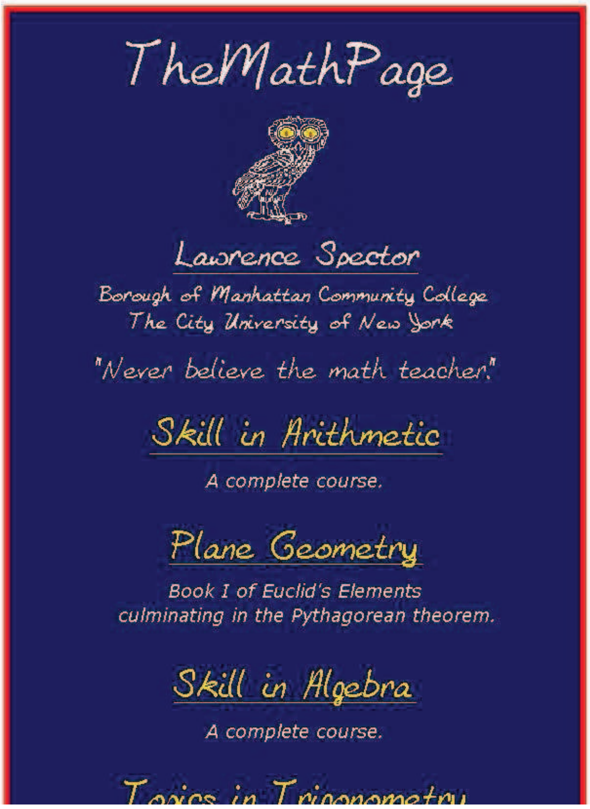
Mezi velké přednosti patří podrobný popis a obsáhlost jednotlivých témat s důrazem na pochopení látky, který je podpořen dynamicky řešenými příklady, kde uživatel může postupně odkrývat řešení.

Po odborné stránce je matematický obsah zcela správný. Těžko mohu posoudit, zda jsou použity vhodné formulace a zda je vše v souladu se zaváděním pojmů na střední škole.

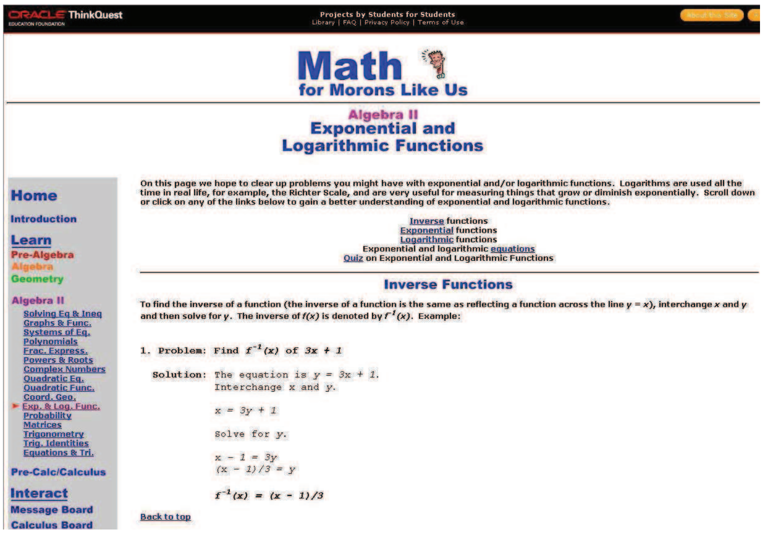
Mezi velká pozitiva patří jednoduší dynamické prvky, které zakrývají řešení příkladů a odpovědi na jednoduché otázky. To umožňuje uživateli nejprve promyslet odpověď, a potom teprve odkrýt správné řešení. U delších příkladů je možné odkrývat jednotlivé řádky řešení nebo jen pravou či levou část rovnice.

Téma logaritmických a exponenciálních rovnic není rozpracováno tak podrobně jako ostatní témata. Jsou zde uvedeny jen základní typy příkladů. Téma logaritmických a exponenciálních nerovnic je dokonce vynecháno. Mezi velké pozitivum naopak patří důkladné procvičení práce s mocninami, odmocninami a logaritmy, které je pro toto téma podstatné.

Stránky považuji za kvalitní vyučovací pomůcku (stránky získaly průměrnou znám-



Obrázek 1.9: TheMathPage



Obrázek 1.10: Math for Morons Like Us

ku 1,5). Mezi největší výhody patří dynamické prvky, které uživateli průběžně umožňují kontrolovat, zda správně pochopil probíranou látku.

1.3.10 Math for Morons Like Us

http://library.thinkquest.org/20991/alg2/log.html
obrázek 1.10
3. místo ve vyhledávači google na dotaz LOGARITHMIC EXPONENTIAL EQUATIONS

Stránky jsou velice obsáhlé a dobře strukturované. Lze je spíše považovat za fórum studentů, než za výukové stránky věnované matematice. Stránky spravují a píší studenti, kteří tím chtějí zlepšit své znalosti a studijní výsledky v matematice.

Po odborné stránce není z mého pohledu vše v pořádku. Jsou zde vyslovovány neformální definice a často jsou informace neúplné (nemůžu zcela přesně posoudit - neznám didaktiku matematiky daného státu).

Stránky neobsahují žádné dynamické prvky, které by pomáhaly studentům pochopit dané téma. Jsou inzerovány dynamické testy, které se mi bohužel nepodařilo zprovoznit, a proto je považuji za nefunkční (předpokládám, že stejný problém by měl náhodný návštěvník těchto stránek).

Téma logaritmických a exponenciálních rovnice je velice stručné. Nejsou uvedeny ani základní typy rovnic, které se řeší na střední škole.

Stránky nepovažuji za vhodnou učební pomůcku (stránky získaly průměrnou známku 2,5). Nejsou po odborné stránce zcela správné a neobsahují žádné podpůrné prvky, které by pomohly studentům pochopit dané téma.

Obrázek 1.11: S.O.S. Math

1.3.11 S.O.S. Math

http://www.sosmath.com/
obrázek 1.11
6. místo ve vyhledávači google na dotaz LOGARITHMIC EXPONENTIAL EQUATIONS

Stránky jsou podle tvůrce určeny zejména studentům vysokých škol. Vysvětlují se zde zejména postupy řešení středoškolských a vysokoškolských příkladů z matematiky, které jsou doplněné o stručný výklad teorie.

Stránky nejsou příliš dobře zpracovány. Uživatel se složitě na stránkách orientuje a je zde použito několik metodických stylů pro zpracování různých témat.

Po odborné stránce se vyskytují jen drobné nedostatky, zejména chybějící podmínky. Dále si nejsem jist, zda jsou formulace úplně vhodné. Stránky bohužel neobsahují žádné dynamické prvky.

Téma logaritmických a exponenciálních rovnic je zpracováno společně s logaritmickými a exponenciálními funkcemi. Jsou zde vysvětleny postupy řešení základních typů příkladů. Dále jsou stránky doplněny velkým množstvím řešených příkladů s popisem řešení.

Stránky jsou spíše určeny pro studenty, kteří si mají zopakovat nebo procvičit jednotlivá témata z matematiky. Nepovažuji je za vhodnou studijní pomůcku pro středoškoláka (stránky získaly průměrnou známku 2,5).

1.3.12 Maths online

http://www.univie.ac.at/future.media/moe/
obrázek 1.12

Obrázek 1.12: Maths online

Stránky využívají dynamické prvky zejména Java applety a dynamické prvky, které mají posloužit k lepšímu pochopení a prohloubení znalostí z matematiky.

Stránky nejsou moc přehledné a grafické zpracování je již trochu zastaralé. Stránky neobsahují řadu témat. Probrána jsou pouze taková témata, kde lze vhodně využít Java appletů.

Stránky se nezabývají výkladem a ani nemají sloužit jako učebnice. Jedná se spíše o učební pomůcku, která má studentům pomoci lépe pochopit probírané téma, o kterém již někde získali základní informace. Mezi další velká pozitiva patří dynamické testy, které obsahují celou řadu příkladů a otázek na dané téma.

Téma logaritmických a exponenciálních rovnic není zpracováno a nejsou k dispozici žádné řešené příklady.

Stránky lze považovat za vhodnou učební pomůcku (stránky získaly průměrnou známku 1,75) Mohou pomoci studentům lépe pochopit jednotlivé partie středoškolské matematiky. Dále si zde studenti mohou v testech ověřit, zda dané téma správně pochopili.

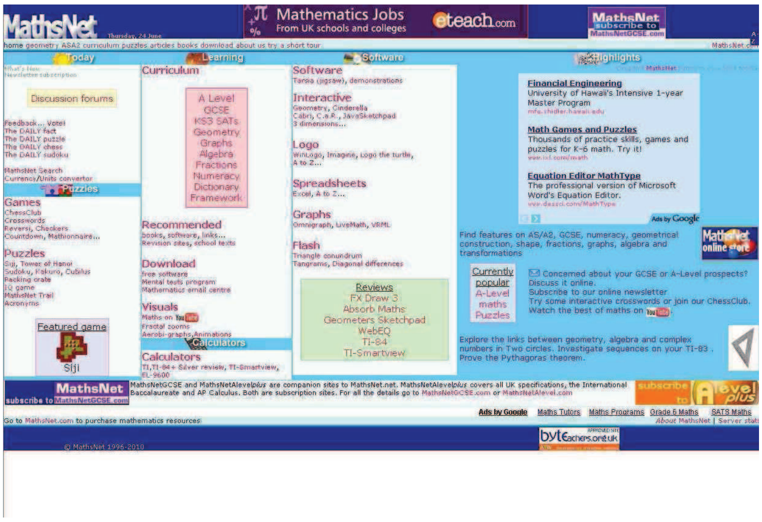
1.3.13 MathsNet.net - interactive mathematics in education

http://mathsnet.net/
obrázek 1.13

Jedná se o anglicky psané stránky, které jsou z části komerční. Je zde obsaženo mnoho dynamických pomůcek pro lepší pochopení matematiky, včetně řady dynamických testů.

Stránky jsou pro českého středoškoláka trochu nepřehledné. Stránky obsahují několik sekcí (nejspíše dle anglických osnov), které nejsou provázané.

V jednotlivých sekcích se již orientuje dobře pomocí interaktivního menu. Je zde hodně didaktických pomůcek zejména Java appletů, které vysvětlují různé matematické pojmy a



Obrázek 1.13: MathsNet.net - interactive mathematics in education

zákonitosti. Dále jsou zde interaktivně zpracovány řešené příklady a v neposlední řadě je k dispozici i velké množství dynamických testů.

Na stránkách jsem nenašel žádné odborné nedostatky. Je to způsobeno zejména tím, že je zde téměř vynechán výklad. Téma logaritmických a exponenciálních rovnic zpracováno není. Stránky se pouze zabývají logaritmickými a exponenciálními funkcemi.

Stránky mohou sloužit jako dobrá pomůcka anglickým studentům (stránky získaly průměrnou známku 1,5), ale obávám se, že český středoškolák by se na stránkách nezorientoval. Dynamické prvky mi však poslouží jako inspirace při tvorbě vlastních stránek.

1.3.14 International Education Software

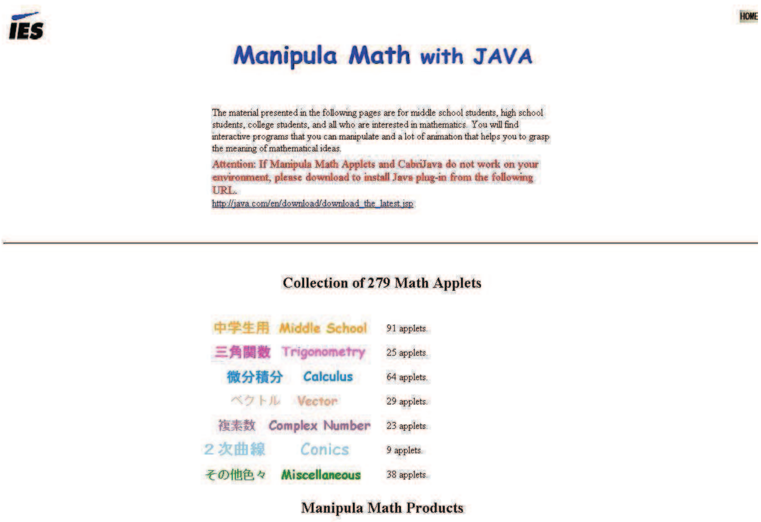
www.ies.co.jp/
obrázek 1.14

Jedná se o japonské stránky, které jsou přeloženy do angličtiny. Obsahují Java applety, pomocí nichž se snaží autoři vysvětlit matematické vztahy a zákony.

Jsou zde velice jednoduše a názorně ukázána pravidla, která lze v matematice "vidět". Proto stránky obsahují jen některá témata, kde lze Java applety s výhodou využít. Zejména se jedná o geometrii a trigonometrii, kuželosečky, vektorovou algebru a teorii diferenciálního počtu. U každého appletu jsou návodné otázky, pomocí nichž může uživatel odvodit příslušné pravidlo.

Bohužel zde není rozpracováno téma logaritmických a exponenciálních rovnic a nevyskytují se zde žádné řešené příklady.

Stránky považuji za vhodný doplněk středoškolských učebnic (stránky získaly průměrnou známku 1,75). Vzhledem k tomu, že jsou stránky velice jednoduše ovladatelné, lze překonat i jazykovou bariéru a využít tyto stránky i na českých středních školách.



Obrázek 1.14: International Education Software

1.3.15 Homepage Walter Fendt

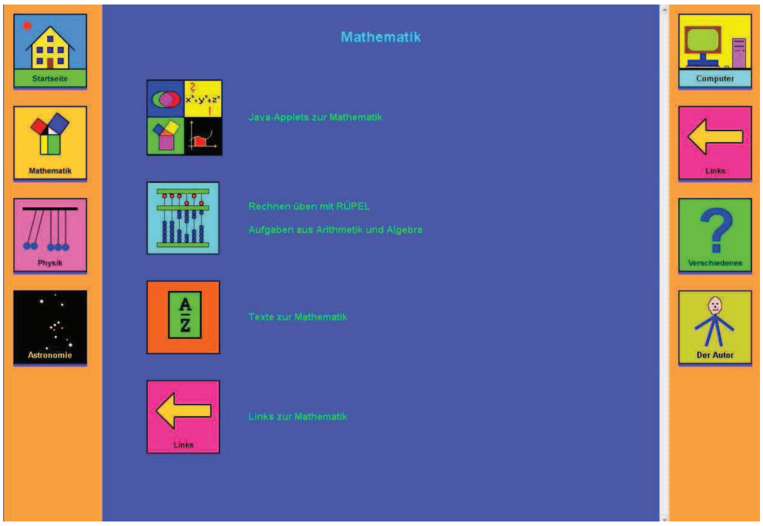
http://www.walter-fendt.de/
obrázek 1.15

Jedná se o německy psané stránky, jejichž autorem je učitel gymnázia Walter Fendt. Stránky jsou však přeloženy do mnoha jazyků včetně češtiny - díky učiteli Miroslavu Panošovi.

Na stránkách jsou pomocí Java appletů vysvětleny některé partie středoškolské matematiky a fyziky. Velice kvalitně je zpracována geometrie (zejména planimetrie) a dále pak fyzika, kde jsou předvedeny zajímavé pokusy. Bohužel chybí celá řada matematických témat včetně logaritmických a exponenciálních rovnic.

Stránky nepůsobí příliš celistvě a přehledně. Zcela chybí výklad a není zde vysvětleno, jak spolu jednotlivá témata souvisí. U jednotlivých appletů jsou pouze uvedeny věty, které lze pomocí daného appletu ukázat či dokázat. Věty jsou formulovány přesně a v souladu se středoškolskými učebnicemi.

Celkově tyto stránky hodnotím velice pozitivně (stránky získaly průměrnou známku 1,75). Stránky slouží k lepšímu pochopení matematiky a názorně vysvětlují některé vztahy a zákonitosti. Jejich zpracování je z didaktického hlediska správné, což je nejspíše důsledek toho, že stránky vytvářel zkušený učitel matematiky a fyziky. Stránky ovšem nelze považovat za kompletní učební pomůcku, ale spíše za doplněk, neboť chybí výklad a řešené příklady.



Obrázek 1.15: Homepage Walter Fendt

Název stránek - zkrácený	form. správ.	strukt., přehled.	vzhled stránek	dynam. prvky	didakt. zprac.	řešené příklady	průměr průměr
Matematika pro každého online	3	2	1	3	3	2	2,33
Nesnesitelně snadná matematika	3	3	1	4	3	2	2,67
Matematika pro každého	3	3	1	2	3	2	2,33
Aristoteles.Cz	3	3	1	4	2	2	2,5
Počítačové učebnice matematiky	1	3	2	4	1	1	2
Wikipedie, otevřená encyklopedie	2	4	1	3	3	4	2,83
Multimediální kurz matematiky	2	3	2	2	2	4	2,5
Matematika polopatě	2	2	1	3	2	2	2
TheMathPage	1	3	1	2	1	1	1,5
Math for Morons Like Us	3	2	1	4	3	2	2,5
S.O.S. Math	2	3	2	4	2	2	2,5
Maths online	1	3	2	1	X	X	1,75
MathsNet.net	1	2	2	1	X	X	1,5
International Education Software	1	3	2	1	X	X	1,75
Homepage Walter Fendt	1	3	2	1	X	X	1,75

Tabulka 1.3: hodnocení webových stránek

1.4 Výsledky hodnocení

Tabulka 1.3 s výsledky ukazuje, které stránky jsou dle mých kritérií vhodné ke studiu středoškolské matematiky. Dále jsem během hodnocení zjistil, že české weby lze rozdělit do několika charakteristických skupin.

První skupinu tvoří stránky, které by měly sloužit studentům, kteří mají problémy s matematikou a hledají na internetu pomoc (Matematika pro každého online; Nesnesitelně snadná matematika; Matematika pro každého (pro Střední školy); Aristoteles.Cz - matematika, chemie a fyzika online; Matematika pro střední a základní školy - Matematika polopatě). Jsou často psány samotnými studenty nebo lidmi, kteří se snaží stránky komerčně využít (jsou zpoplatněny řešené příklady a materiály s teoretickým výkladem). Společným rysem těchto stránek jsou nepřesné formulace definic a pokus o vytvoření početní kuchařky na jednotlivé typy příkladů. Mezi velká pozitiva naopak patří profesionální vzhled, kterým lákají uživatele a díky němu se vyskytují na předních příčkách internetových vyhledávačů.

Druhou skupinu tvoří stránky spíše vědecké (Wikipedie, otevřená encyklopedie; Multimediální kurz aplikované vyšší matematiky). Je zde kladen důraz na formální správnost a přesnost. Nejsou zde však pojmy vysvětleny a chybí řešené příklady. Autoři těchto stránek jsou často vysokoškolští pedagogové nebo odborníci na dané téma.

Třetí skupinu tvoří stránky, které jsou tvořeny pod záštitou středoškolských pedagogů. Je zde kladen důraz na vysvětlení a pochopení pojmů. Nevyskytují se formální chyby a témata jsou dobře didakticky zpracována. Mezi menší nedostatky patří absence dynamických prvků.

Ze zahraničních stránek se budu zejména inspirovat Java applety a dalšími dynamickými prvky.

2. Vlastní webové stránky

Druhá část diplomové práce je věnována vlastní tvorbě webových stránek. Při tvorbě jsem se inspiroval již existujícími českými a zahraničními weby, které se věnují tématu logaritmických a exponenciálních rovnic, a zároveň výukovými weby, které již vznikly pod Katedrou didaktiky matematiky Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy. Zejména prací Jana Končela, která je věnována analytické geometrii.

V práci se nevyskytují žádné citace a celý text práce je vlastní dílo autora.Použité definice a věty jsou převzaty z učebnic pro gymnázia. Zadání příkladů, cvičení a úloh je vlastní dílo autora, ale je z velké části inspirováno sbírkami příkladů, které jsou uvedeny v seznamu literatury. Některé obrázky jsou vytvořeny přímo autorem práce, jiné jsou staženy z internetu (jde o logaritmická pravítka a tabulku intenzity hluku). Technické provedení webu v jazyce HTML, PHP a JavaScript je inspirováno technickým provedením jiných internetových stránek.

Práce je vystavena na internetové adrese www.karlin.mff.cuni.cz/∼rezac. K jejímu prohlížení je nejvhodnější internetový prohlížeč Mozilla Firefox, pro který byly stránky tvořeny a který nejlépe prezentuje matematické výrazy pomocí interpretu jsMath. Stejně tak je možné použít internetové prohlížeče Opera a Google Chrome (asi nejrychlejší prezentace), ve kterých se také stránky správně zobrazují. Pro prezentaci není vhodný internetový prohlížeč Internet Explorer, který nedodržuje některé normy HTML kódu, a proto se některé pasáže stránek nemusí správně zobrazovat (stránky jsou plně funkční, ale grafická prezentace obsahuje chyby).

Protože má tato práce sloužit jako učební pomůcka, je podstatné nejen její odborné ale i didaktické provedení. Práce bude prezentována v přibližně stejné podobě, která je vystavena na webu. Tištěná verze je vygenerována internetovým prohlížečem Mozilla Firefox se všemi klady i zápory. Kvalita některých obrázků (zejména zápisy řešených příkladů) a zalamování textu (aniž by byla respektována typografická pravidla) patří k menším nedostatkům. Naopak velikost písma jednotlivých pasážích, rámečky a dělení textu (zejména příkladů) do ohraničených bloků má pomoci studentům k efektivnímu učení.

V následujícím textu je vytištěn obsah jednotlivých kapitol. Kapitoly prezentované na webu jsou číslovány čísly 1 - 8 a odpovídají číslování 2.1 - 2.8 v této práci (to z důvodu, že v papírové formě se jedná o druhou část práce). V papírové formě není uveden úvod, seznam použitých symbolů a rejstřík. Z technických důvodů zde nejsou obsaženy ani úlohy a dynamické testy (jejich dynamičnost lze těžko prezentovat v papírové formě).

Mezi dynamické prvky, které práce obsahuje a které čtenář tištěné verze nepozná, patří

- hypertextové odkazy v rámci této práce i mezi dalšími výukovými weby,
- skryté poznámky a důkazy vět, které jsou v tištěné verzi zobrazeny,
- postupné odkrývání řešení cvičení a úloh,
- animace v kapitole o logaritmech,
- Java applety v kapitole o funkcích a jako nástroj ke grafickému řešení rovnic a
- dynamické testy.

1. Mocniny

Mocniny s přirozeným exponentem

Nejprve si připomeneme počítání s mocninami. Pokud si ve výpočtech nebudete jisti, podívejte se na následující definici nebo využijte webovou aplikaci věnovanou **základním poznatkům matematiky na střední škole**.

Cvičení 1.1
Vypočítejte:

$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$

$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

$17^1 = 17$

$(-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$

$1,3^2 = 1,3 \cdot 1,3 = 1,69$

$(-\frac{3}{2})^2 = (-\frac{3}{2}) \cdot (-\frac{3}{2}) = \frac{9}{4}$

$(-\frac{2}{5})^3 = (-\frac{2}{5}) \cdot (-\frac{2}{5}) \cdot (-\frac{2}{5}) = -\frac{8}{125}$

$0,2^4 = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,001\,6$

Pro každé reálné číslo a a přirozené číslo n platí:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}.$$

Zápis a^n čteme **"n -tá mocnina čísla a".**

Číslo a nazýváme **základ mocniny**,
číslo n nazýváme **exponent**.

NAHORU

Mocniny s celým exponentem

Dále rozšíříme exponent mocniny na všechna celá čísla. Je tedy nutné připomenout, co znamená a^0 a a^{-n}, kde $n \in N$.

Cvičení 1.2
Vypočítejte:

$4^0 = 1$

$9^{-1} = \frac{1}{9}$

$(\frac{5}{3})^{-1} = \frac{3}{5}$

$(5)^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

Pro každé reálné číslo $a \neq 0$ a přirozené číslo n platí:

$$a^0 = 1,$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

NAHORU

Mocniny s racionálním exponentem

Již umíme vypočítat mocninu s celočíselným exponentem. Nyní si připomeneme výpočet mocniny s racionálním exponentem. Musíme vysvětlit, co znamená $a^{\frac{1}{n}}$ a $a^{\frac{k}{n}}$, kde n je libovolné přirozené číslo a k je libovolné celé číslo.

V následujícím textu budeme počítat se **základem** mocniny, který bude nabývat pouze **kladných hodnot**. Pokud bychom uvažovali i záporná čísla, museli bychom se omezit pouze na liché odmocniny.

Cvičení 1.3
Vypočítejte:

$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$ $\quad$ $8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$

$4^{-\frac{1}{2}} = (\sqrt{4})^{-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ $\quad$ $25^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{25})^3 = 5^3 = 125$

$16^{0,5} = 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$ $\quad$ $81^{-0,25} = 81^{-\frac{1}{4}} = (\sqrt[4]{81})^{-1} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

$32^{0,4} = 32^{\frac{2}{5}} = (\sqrt[5]{32})^2 = 2^2 = 4$ $\quad$ $(\frac{1}{8})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

Pro každé **kladné** reálné číslo a, přirozené číslo n a celé číslo k platí:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a},$$
$$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k.$$

Aritmetické operace s mocninami

Zbývá si připomenout vzorce pro práci s mocninami. Zopakujeme si násobení, umocňování a dělení mocnin.

Cvičení 1.4
Upravte výraz (předpokládejte přípustné hodnoty proměnných):

$a^3 \cdot a^5 = a^{3+5} = a^8$ $\quad$ $b^7 : b^4 = b^{7-4} = b^3$

$x^2 : x^7 = x^{2-7} = x^{-5}$ $\quad$ $y^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = y^{\frac{2+3}{6}} = y^{\frac{5}{6}}$

$(c^{-3})^4 = c^{(-3)\cdot 4} = c^{-12}$ $\quad$ $(a^2b)^3 = (a^2)^3b^3 = a^{2\cdot 3}b^3 = a^6b^3$

$(\frac{x^3}{2y})^2 = \frac{(x^3)^2}{(2y)^2} = \frac{x^{3\cdot 2}}{2^2y^2} = \frac{x^6}{4y^2}$ $\quad$ $(\frac{ab}{c})^{-2} = (\frac{c}{ab})^2 = \frac{c^2}{a^2b^2}$

Pro každá dvě **kladná** reálná čísla a, b a racionální čísla r, s platí:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$
$$(a^r)^s = a^{r\cdot s}$$
$$a^r : a^s = a^{r-s}$$
$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$
$$(\frac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r}$$

Zatím jsme nezmínili, jak sčítat mocniny. Mocniny lze sčítat, pokud mají stejný základ i exponent. Zjednodušeně lze říct, že jde o sčítání dvou jednočlenů.

Vytýkání

Poučku o sčítání mocnin budeme používat hlavně při vytýkání. Součet dvou mocnin budeme upravovat na součin. Např. ve výrazu $5^x + 5^{x+1}$ nelze sečíst mocniny, ale po převodu na výraz $5^x + 5 \cdot 5^x$ můžeme vytknout mocninu 5^x a získat výraz $5^x \cdot (1 + 5) = 6 \cdot 5^x$.

Cvičení 1.5
Vhodnou úpravou převeďte výraz na součinový tvar:

$3^x + 3^{x+2} = 3^x + 9 \cdot 3^x = 3^x \cdot (1 + 9) = 10 \cdot 3^x$

$7^x - 7^{x-1} = 7 \cdot 7^{x-1} - 7^{x-1} = 7^{x-1} \cdot (7 - 1) = 6 \cdot 7^{x-1}$

$(\frac{1}{4})^x - (\frac{1}{4})^{x-1} = (\frac{1}{4})^x - 4 \cdot (\frac{1}{4})^x = (\frac{1}{4})^x \cdot (1 - 4) = -3 \cdot (\frac{1}{4})^x$

$5^{x+1} - 5^{x-1} = 25 \cdot 5^{x-1} - 5^{x-1} = 5^{x-1} \cdot (25 - 1) = 24 \cdot 5^{x-1}$

2. Logaritmus

2.1. Zavedení logaritmu

Zavedení logaritmu

V matematice se setkáváme se situací, kdy rovnost mezi čísly můžeme vyjádřit různými způsoby. Ukážeme si vztah mezi mocninou a odmocninou:
Z rovnosti $3^2 = 9$ plyne rovnost $\sqrt[2]{9} = 3$,
z rovnosti $5^3 = 125$ plyne rovnost $\sqrt[3]{125} = 5$.

Nyní zavedeme ještě další zápis pro mocninu $a^v = r$, kde základ a je kladné reálné číslo různé od jedné.

Poznámka

1. Důvod, proč uvažujeme pouze základ $a > 0, a \neq 1$ naznačíme v kapitole o **exponenciálních funkcích**.
2. Předpokládejme, že a je kladné rálné číslo různé od jedné. Když toto číslo umocníme, získáme také kladné reálné číslo. Proto i mocnina r bude kladné reálné číslo.

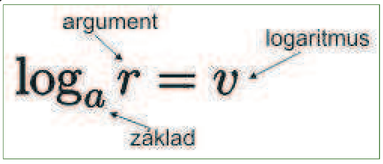
Skryj

Logaritmus čísla $r > 0$ o základu $a > 0, a \neq 1$ je takové číslo v, pro které platí: $a^v = r$.

$$\log_a r = v \quad \Leftrightarrow \quad a^v = r.$$

Zápis $\log_a r = v$ čteme **"logaritmus r o základu a je v".**

Číslo a nazýváme **základ logaritmu**,
číslo r nazýváme **argument logaritmu**,
číslo v nazýváme **logaritmus.**



Příklad 2.1
Přepište následující rovnosti pomocí definice logaritmu:

a) $2^3 = 8$
b) $3^{(-2)} = \frac{1}{9}$
c) $25^{\frac{1}{2}} = 5$

Řešení

Využijeme definici logaritmu $\log_a r = v \quad \Leftrightarrow \quad a^v = r$.

a)
- Základ mocniny $a = 2$ použijeme jako základ logaritmu,
- exponent $v = 3$ jako logaritmus,
- mocninu $r = 8$ jako argument logaritmu.
- Zapíšeme výsledek: $\log_2 8 = 3$.

$a^r = v \quad \log_a v = r$

Zápis řešení:

a) $\log_2 8 = 3$
b) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$
c) $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$

Cvičení 2.1

Přepište následující rovnosti pomocí definice logaritmu:

$2^5 = 32$	$\log_2 32 = 5$	$10^3 = 1\,000$	$\log_{10} 1\,000 = 3$
$7^0 = 1$	$\log_7 1 = 0$	$3^{-3} = \frac{1}{27}$	$\log_3 \frac{1}{27} = -3$
$16^{\frac{1}{4}} = 2$	$\log_{16} 2 = \frac{1}{4}$	$(\frac{1}{3})^{-2} = 9$	$\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$

NAHORU

Výpočet logaritmů

Nejprve se naučíme určovat logaritmy daných základů a argumentů.

Příklad 2.2

Vypočítejte:

a) $\log_3 9$
b) $\log_2 16$
c) $\log_6 \frac{1}{36}$
d) $\log_8 2$

Řešení

a)
- Hledané číslo si označíme symbolem ?: $\log_3 9 = ?$.
- Přepíšeme rovnost pomocí definice logaritmu $\log_a r = v \quad \Leftrightarrow \quad a^v = r$ tj. $3^? = 9$.
- Určíme hledané číslo. Ptáme se, na kolikátou musíme umocnit číslo 3, abychom získali číslo 9.
- Snadno uhodneme, že hledané číslo je 2, protože $3^2 = 9$.
- Zapíšeme výsledek: $\log_3 9 = 2$

$\log_3 9 = ? \quad 3^? = 9 \quad ? = 2 \quad \log_3 9 = 2$

Zápis řešení:

a) $\log_3 9 = ? \longrightarrow 3^? = 9 \longrightarrow ? = 2$, proto $\log_3 9 = 2$
b) $\log_2 16 = ? \longrightarrow 2^? = 16 \longrightarrow ? = 4$, proto $\log_2 16 = 4$
c) $\log_6 \frac{1}{36} = ? \longrightarrow 6^? = \frac{1}{36} \longrightarrow ? = -2$, proto $\log_6 \frac{1}{36} = -2$
d) $\log_8 2 = ? \longrightarrow 8^? = 2 \longrightarrow ? = \frac{1}{3}$, proto $\log_8 2 = \frac{1}{3}$

Cvičení 2.2

Vypočítejte:

$\log_7 7 = ?$	$7^? = 7$	$? = 1$	$\log_7 7 = 1$
$\log_4 16 = ?$	$4^? = 16$	$? = 2$	$\log_4 16 = 2$
$\log_{11} 1 = ?$	$11^? = 1$	$? = 0$	$\log_{11} 1 = 0$
$\log_2 \frac{1}{8} = ?$	$2^? = \frac{1}{8}$	$? = -3$	$\log_2 \frac{1}{8} = -3$
$\log_{\frac{1}{3}} 9 = ?$	$(\frac{1}{3})^? = 9$	$? = -2$	$\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$
$\log_9 3 = ?$	$9^? = 3$	$? = \frac{1}{2}$	$\log_9 3 = \frac{1}{2}$

$\log_{\frac{2}{7}} \frac{7}{2} =?$	$(\frac{2}{7})^? = \frac{7}{2}$	$? = -1$	$\log_{\frac{2}{7}} \frac{7}{2} = -1$
$\log_{\frac{1}{4}} 0,5 =?$	$(\frac{1}{4})^? = 0,5$	$? = \frac{1}{2}$	$\log_{\frac{1}{4}} 0,5 = \frac{1}{2}$

NAHORU

Určování základu a argumentu logaritmu

Při řešení **logaritmických** a **exponenciálních** rovnic bude třeba určit neznámý základ či argument logaritmu. V následujícím příkladu se naučíme základy a argumenty logaritmů počítat.

Příklad 2.3

Určete $x \in R$, aby byla splněna rovnost:

a) $\log_x 16 = 4$
b) $\log_8 x = \frac{1}{3}$

Řešení

a) Nejprve ukážeme, jak vypočítat základ logaritmu v rovnosti $\log_x 16 = 4$

- Přepíšeme rovnost podle definice logaritmu $\log_a r = v \quad \Leftrightarrow \quad a^v = r$.
  $\log_x 16 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 = 16$
- Řešení této rovnice můžeme uhodnout nebo ji vyřešit odmocněním: $x = \sqrt[4]{16} = 2$.
- Zapíšeme výsledek: $x = 2$.

Poznámka

Malé nepřesnosti jsme se dopustili, když jsme uvedli, že rovnici $x^4 = 16$ můžeme vyřešit odmocněním. Odmocněním můžeme ztratit záporné kořeny této rovnice. Záporné kořeny ale neuvažujeme, protože logaritmus je definován pouze pro kladný základ různý od jedné.

Skryj

b) V rovnosti $\log_8 x = \frac{1}{3}$ vypočítáme argument logaritmu.

- Opět přepíšeme rovnost podle definice logaritmu $\log_a r = v \quad \Leftrightarrow \quad a^v = r$.
  $\log_8 x = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 8^{\frac{1}{3}} = x$
- Z této rovnice přímo vidíme, jak vypočítat neznámou $x = 8^{\frac{1}{3}} = 2$.
- Zapíšeme výsledek $x = 2$.

Zápis řešení:

a) $\log_x 16 = 4 \longrightarrow x^4 = 16 \longrightarrow x = 2$
b) $\log_8 x = \frac{1}{3} \longrightarrow 8^{\frac{1}{3}} = x \longrightarrow x = 2$

Cvičení 2.3

Určete $x \in R$, aby byla splněna rovnost:

$\log_x 8 = 1$	$x^1 = 8$	$x = 8$
$\log_3 x = 4$	$3^4 = x$	$x = 81$
$\log_5 x = 0$	$5^0 = x$	$x = 1$
$\log_x \frac{1}{4} = 2$	$x^2 = \frac{1}{4}$	$x = \frac{1}{2}$
$\log_x 125 = -3?$	$x^{-3} = 125$	$x = \frac{1}{5}$
$\log_{\frac{1}{4}} x = -3?$	$(\frac{1}{4})^{-3} = x$	$x = 64$

NAHORU

Vlastnosti logaritmů

Ve cvičeních **2.2** a **2.3** jsme se setkali s několika příklady, kdy byl logaritmus roven nule nebo jedné. Než začnete číst další odstavec, zkuste se podívat, co měly tyto příklady společného.

- Logaritmus byl roven nule, pokud agrumnet logaritmu byl roven jedné.
- Logaritmus byl roven jedné, pokud základ i argument logaritmu byl stejný.

Poznámka

- Logaritmus byl roven nule vždy, když argument logaritmu byl roven jedné. To přímo plyne z rovnosti $a^0 = 1$ pro libovolné $a \neq 0$, což základ logaritmu určitě splňuje. Pokud tuto rovnost přepíšeme dle definice logaritmu, dostáváme $\log_a 1 = 0$.
- Jiná souvislost je vidět u logaritmů, které jsou rovny jedné. Argumenty a základy těchto logaritmů jsou stejné. To plyne z rovnosti $a^1 = a$. Pokud tuto rovnost opět přepíšeme dle definice logaritmu, dostáváme $\log_a a = 1$.

Skryj

Již jsme zjistili, kdy je logaritmus roven nule nebo jedné. V následující tabulce přehledně uvedeme, jakých hodnot logaritmus nabývá v závislosti na základu a argumentu logaritmu.

$a \in (0, 1)$		$a \in (1, +\infty)$	
r	$\log_a r$	r	$\log_a r$
$(0, a)$	$(1, +\infty)$	$(0, 1)$	$(-\infty, 0)$
$\{a\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{0\}$
$(a, 1)$	$(0, 1)$	$(1, a)$	$(0, 1)$
$\{1\}$	$\{0\}$	$\{a\}$	$\{1\}$
$(1, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	$(a, +\infty)$	$(1, +\infty)$

Příklad 2.4
Rozhodněte, zda je logaritmus kladné nebo záporné číslo:

a) $\log_{12} 3$
b) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{5}$

Řešení
Ukážeme nejprve obecně platný postup, který využívá výše zmíněnou tabulku. Nejprve se podíváme, jaký je základ logaritmu:

- Základ je z intervalu $(0, 1)$.
  - Je-li argument menší než jedna, je logaritmus kladné číslo.
  - Je-li argument větší než jedna, je logaritmus záporné číslo.
- Základ je z intervalu $(1, +\infty)$.
  - Je-li argument menší než jedna, je logaritmus záporné číslo.
  - Je-li argument větší než jedna, je logaritmus kladné číslo.

a) Pro $\log_{12} 3$ je základ větší než 1 a zároveň argument je větší než 1. Logaritmus proto nabývá **kladné** hodnoty.

b) Pro $\log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{5}$ je základ menší než 1 a zároveň argument je menší než 1. Logaritmus proto nabývá **kladné** hodnoty.

Cvičení 2.4
Rozhodněte, zda je logaritmus kladné nebo záporné číslo:

$\log_7 \frac{1}{4}$	**záporné**	$\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{6}$	**kladné**
$\log_2 0,2$	**záporné**	$\log_{0,4} 1,3$	**záporné**

NAHORU

Dekadický a přirozený logaritmus

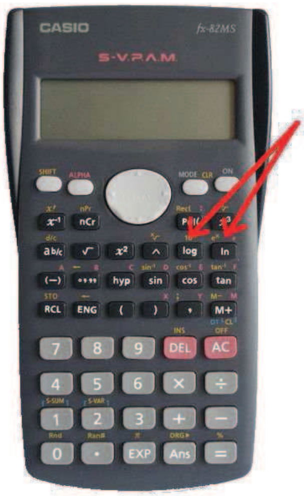
Na závěr této kapitoly se budeme věnovat dvěma nejčastěji používaným logaritmům - dekadickému a přirozenému.

Dekadický logaritmus je logaritmus o základu 10. Byl využíván zejména v době, kdy se používala logaritmická pravítka a tabulky logaritmů k výpočtům složitějších matematický operací (více se o tom zmíníme v kapitole o **využití logaritmů v praxi**). Základ 10 nebyl zvolen náhodou, ale vycházel ze skutečnosti, že lidé počítají v desítkové soustavě. Dekadický logaritmus je hojně využíván, a proto se zkrátil jeho zápis. Místo $\log_{10}$ se používá zkrácený zápis $\log$.

Přirozený logaritmus je logaritmus se základem e. Číslo e je iracionální (podobně jako číslo π) a nazývá se **Eulerovo číslo**. Jeho přibližná hodnota je 2,71. Tento logaritmus je také hojně využíván, a proto byla pro jeho zápis opět vytvořena zkratka. Místo $\log_e$ se používá zkrácený zápis $\ln$.

Pro libovolné $x \in R^+$ zapisujeme
$$\log_{10} x = \log x,$$
$$\log_e x = \ln x.$$

Dekadické a přirozené logaritmy jsou často používány, a proto obsahují kalkulačky funkci na počítání těchto logaritmů (ostatní logaritmy můžeme pomocí těchto logaritmů vypočítat, jak bude ukázáno v **následující kapitole**).

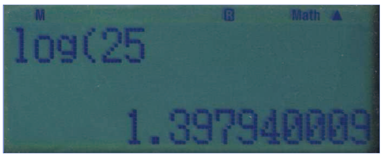


Příklad 2.5
Na kalkulačce vypočítejte a zaokrouhlete na čtyři desetinná místa:

a) $\log 25$
b) $\ln 7$

Řešení

Na kalkulačce zvolíme funkci **log** nebo **ln**. Jako argument logaritmu zadáme příslušné číslo.



Zápis řešení:

a) $\log 25 = 1,397\,9$
b) $\ln 7 = 1,945\,9$

Cvičení 2.5
Na kalkulačce vypočítejte a zaokrouhlete na čtyři desetinná místa:

$\log 156 =$	$2,193\,1$	$\log 3,1 =$	$0,491\,4$
$\ln 24 =$	$3,178\,1$	$\ln 0,5 =$	$-0,693\,1$

NAHORU

2.2. Věty o logaritmech

Vztah mocniny a logaritmu

V celé této kapitole budeme využívat jedno pomocné tvrzení, z kterého odvodíme známé věty o logaritmech.

Pro každé $a \in R^+ - \{1\}$ a libovolné kladné reálné číslo r platí:

$$a^{\log_a r} = r.$$

Důkaz

Důkaz nebudeme provádět zcela formálně. Správně bychom měli vycházet z pravdivého tvrzení a odvozovat z něj rovnost $a^{\log_a r} = r$. V tom případě bychom museli uhodnout, z kterého pravdivého tvzení vycházet. Proto raději zvolíme opačný přístup. Budeme upravovat rovnost $a^{\log_a r} = r$, až dostaneme pravdivé tvrzení. Na konci jen ověříme, že všechny úpravy lze provést opačně - tedy z pravdivého tvzení dokázat tuto rovnost.

Přepišme rovnost $a^{\log_a r} = r$ dle definice logaritmu
$\log_a r = v \quad \Leftrightarrow \quad a^v = r$:

- Základ mocniny je a,
- exponent je $\log_a r$,
- mocnina je r.

$\log_a r = \log_a r$

Poslední rovnost je jistě pravdivá.
Všechny úpravy lze provést i v opačném směru, takže z pravdivého tvrzení dokážeme odvodit požadovanou rovnost. Tím je důkaz hotov.

Skryj

NAHORU

Logartimus součinu

Pro každé $a \in R^+ - \{1\}$ a libovolná kladná reálná čísla r, s platí:

$$\log_a (r \cdot s) = \log_a r + \log_a s$$

Důkaz

Přepišme rovnost $\log_a (r \cdot s) = \log_a r + \log_a s$ dle definice logaritmu
$\log_a r = v \quad \Leftrightarrow \quad a^v = r$:

- Základ logaritmu je a,
- argument logaritmu je $r \cdot s$,
- logaritmus je dán výrazem $\log_a r + \log_a s$.

$a^{\log_a r + \log_a s} = r \cdot s$
$a^{\log_a r} \cdot a^{\log_a s} = r \cdot s$
$r \cdot s = r \cdot s$

Poslední rovnost je jistě pravdivá.
Všechny úpravy lze provést i v opačném směru, takže z pravdivého tvrzení dokážeme odvodit požadovanou rovnost. Tím je důkaz hotov.

Skryj

Zjednodušeně říkáme:

Logaritmus součinu je součet logaritmů.

Příklad 2.6

Vypočítejte:

a) $\log_3 (81 \cdot 27)$
b) $\log_6 9 + \log_6 4$

Řešení

K řešení využijeme tvrzení, že logaritmus součinu je součet logaritmů a obráceně.

a)
- Přepíšeme výraz $\log_3 (81 \cdot 27)$ podle výše zmíněného tvrzení na $\log_3 81 + \log_3 27$.
- Vypočítáme oba logaritmy a sečteme je: $\log_3 81 + \log_3 27 = 4 + 3 = 7$

b)
- Přepíšeme výraz $\log_6 9 + \log_6 4$ podle výše zmíněného tvrzení na $\log_6 (9 \cdot 4)$.
- Vypočítáme tento logaritmus: $\log_6 (9 \cdot 4) = \log_6 36 = 2$

Zápis řešení:

a) $\log_3 (81 \cdot 27) = \log_3 81 + \log_3 27 = 4 + 3 = 7$
b) $\log_6 9 + \log_6 4 = \log_6 (9 \cdot 4) = \log_6 36 = 2$

NAHORU

Logaritmus podílu

Pro každé $a \in R^+ - \{1\}$ a libovolná kladná reálná čísla r, s platí:

$$\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s$$

Důkaz

Přepišme rovnost $\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s$ dle definice logaritmu $\log_a r = v \quad \Leftrightarrow \quad a^v = r$:

- Základ logaritmu je a,
- argument logaritmu je $\frac{r}{s}$,
- logaritmus je dán výrazem $\log_a r - \log_a s$.

$a^{\log_a r - \log_a s} = \frac{r}{s}$
$a^{\log_a r} : a^{\log_a s} = \frac{r}{s}$
$r : s = \frac{r}{s}$

Poslední rovnost je jistě pravdivá.
Všechny úpravy lze provést i v opačném směru, takže z pravdivého tvrzení dokážeme odvodit požadovanou rovnost. Tím je důkaz hotov.

Skryj

Opět zjednodušeně říkáme:

Logaritmus podílu je rozdíl logaritmů.

Příklad 2.7
Vypočítejte:

a) $\log_2 \frac{1024}{128}$
b) $\log_3 18 - \log_3 2$

Řešení

K řešení využijeme tvrzení, že logaritmus podílu je rozdíl logaritmů a obráceně.

a)
- Přepíšeme výraz $\log_2 \frac{1024}{128}$ podle výše zmíněného tvrzení na $\log_2 1024 - \log_2 128$
- Vypočítáme oba logaritmy a odečteme je: $\log_2 1024 - \log_2 128 = 10 - 7 = 3$

b)
- Přepíšeme výraz $\log_3 18 - \log_3 2$podle výše zmíněného tvrzení na $\log_3 \frac{18}{2}$.
- Vypočítáme tento logaritmus: $\log_3 \frac{18}{2} = \log_3 9 = 2$

Zápis řešení:

a) $\log_2 \frac{1024}{128} = \log_2 1024 - \log_2 128 = 10 - 7 = 3$
b) $\log_3 18 - \log_3 2 = \log_3 \frac{18}{2} = \log_3 9 = 2$

NAHORU

Logaritmus mocniny

Pro každé $a \in R^+ - \{1\}$ a libovolná kladná reálná čísla r, s platí:

$$\log_a r^s = s \cdot \log_a r.$$

Důkaz

Přepišme rovnost $\log_a r^s = s \cdot \log_a r$ dle definice logaritmu
$\log_a r = v \quad \Leftrightarrow \quad a^v = r$:

- Základ logaritmu je a,
- argument logaritmu je r^s,
- logaritmus je dán výrazem $s \cdot \log_a r$.

$a^{s \cdot \log_a r} = r^s$
$(a^{\log_a r})^s = r^s$
$r^s = r^s$

Poslední rovnost je jistě pravdivá.
Všechny úpravy lze provést i v opačném směru, takže z pravdivého tvrzení dokážeme odvodit požadovanou rovnost. Tím je důkaz hotov.

Skryj

Zjednodušeně můžeme říct:

Logaritmus mocniny je násobek logaritmu.

Příklad 2.8
Vypočítejte:

a) $\log_3 9^4$
b) $3 \log_8 2$

Řešení

K řešení využijeme tvrzení, že logaritmus mocniny je násobek logaritmu a obráceně.

a)
- Přepíšeme výraz $\log_3 9^4$ podle výše zmíněného tvrzení na $4\log_3 9$.
- Vypočítáme logaritmus a určíme výsledek: $4\log_3 9 = 4 \cdot 2 = 8$

b)
- Přepíšeme výraz $3\log_8 2$ podle výše zmíněného tvrzení na $\log_8 2^3$.
- Vypočítáme tento logaritmus: $\log_8 2^3 = \log_8 8 = 1$.

Zkrácený zápis řešení:

$$\text{a) } \log_3 9^4 = 4\log_3 9 = 4 \cdot 2 = 8$$
$$\text{b) } 3\log_8 2 = \log_8 2^3 = \log_8 8 = 1$$

NAHORU

Úpravy výrazů s logaritmy

Výše zmíněné věty využijeme při řešení **logaritmických rovnic**. Často budeme muset výraz na jedné straně rovnice převést na jeden logaritmus. Jak převést výraz s logaritmy na jeden logaritmus, je ukázáno v následujících příkladech.

Příklad 2.9

Převeďte výraz na jeden logaritmus (předpokládejte přípustné hodnoty proměnných):

$$2 - 4\log_3 a + \tfrac{1}{2}\log_3(a+1)$$

Řešení

- Nejprve převedeme číslo 2 na logaritmus o základu 3.
  Hledáme takové x, pro které je výraz $\log_3 x = 2$ **viz předchozí kapitola**:
  $\log_3 9 = 2$
- Nyní obsahuje výraz jen logaritmy o stejném základu $\log_3 9 - 4\log_3 a + \frac{1}{2}\log_3(a+1)$.
- Podle věty o logaritmu **mocniny** převedeme všechna čísla před logaritmy do argumentu logaritmu:
  $4\log_3 a = \log_3 a^4$,
  $\frac{1}{2}\log_3(a+1) = \log_3(a+1)^{\frac{1}{2}} = \log_3 \sqrt{a+1}$.
- Získáme výraz $\log_3 9 - \log_3 a^4 + \log_3 \sqrt{a+1}$, na který aplikujeme věty o logaritmu **součinu** a **podílu**. Převedeme výraz na jeden logaritmus s argumentem ve tvaru zlomku, kde v čitateli bude součin argumentů logaritmů s kladným znaménkem před logaritmem a ve jmenovateli součin argumentů logaritmů se záporným znaménkem před logaritmem:
  $\log_3 \frac{9\sqrt{a+1}}{a^4}$.

Zápis řešení:

$$2 - 4\log_3 a + \tfrac{1}{2}\log_3(a+1) =$$
$$= \log_3 9 - 4\log_3 a + \tfrac{1}{2}\log_3(a+1) =$$
$$= \log_3 9 - \log_3 a^4 + \log_3 \sqrt{a+1} =$$
$$= \log_3 \tfrac{9\sqrt{a+1}}{a^4}.$$

Cvičení 2.9

Převeďte výraz na jeden logaritmus (předpokládejte přípustné hodnoty proměnných):

$$2\log_5 x - 1 - \log_5(3x-2) =$$
$$= 2\log_5 x - \log_5 5 - \log_5(3x-2) =$$
$$= \log_5 x^2 - \log_5 5 - \log_5(3x-2) =$$
$$= \log_5 \tfrac{x^2}{5(3x-2)}$$

$$-\tfrac{1}{3}\log_2 b - 3 - \log_2(2-a) =$$
$$= -\tfrac{1}{3}\log_2 b - \log_2 8 - \log_2(2-a) =$$
$$= -\log_2 \sqrt[3]{b} - \log_2 8 - \log_2(2-a) =$$
$$= \log_2 \tfrac{1}{8\sqrt[3]{b}(2-a)}$$

NAHORU

Podíl dvou logaritmů

Pro každé $a \in R^+ - \{1\}$ a libovolná kladná reálná čísla r a $s, s \neq 1$ platí:

$$\frac{\log_a r}{\log_a s} = \log_s r.$$

Důkaz

Nejprve se zbavíme zlomku. Celou rovnost vynásobíme výrazem $\log_a s$:

$\log_a r = \log_s r \cdot \log_a s$

Dále přepišme rovnost $\log_a r = \log_s r \cdot \log_a s$ sdle definice logaritmu

$\log_a r = v \quad \Leftrightarrow \quad a^v = r$:

- Základ logaritmu je a,
- argument logaritmu je r,
- logaritmus je dán výrazem $\log_s r \cdot \log_a s$

$a^{\log_s r \cdot \log_a s} = r$

$(a^{\log_a s})^{\log_s r} = r$

$s^{\log_s r} = r$

$r = r$

Poslední rovnost je jistě pravdivá.
Všechny úpravy lze provést i v opačném směru, takže z pravdivého tvrzení dokážeme odvodit požadovanou rovnost. Tím je důkaz hotov.

Skryj

Pomocí tohoto tvrzení lze na kalkulačce vypočítat logaritmus libovolného přípustného základu a argumentu:

Pro libovolná kladná reálná čísla r a $s, s \neq 1$ platí:

$$\log_s r = \frac{\log r}{\log s},$$

$$\log_s r = \frac{\ln r}{\ln s}.$$

Příklad 2.10

Na kalkulačce vypočítejte a zaokrouhlete na čtyři desetinná místa:

Poznámka

V průběhu výpočtu nebudeme zaokrouhlovat, aby výsledná hodnota byla co nejpřesnější. Mezivýsledky budeme uvádět s přesností na čtyři desetinná místa doplněné o $\ldots$, které symbolizují, že počítáme s maximální přesností, která je na kalkulačce k dispozici.

Skryj

a) $\log_4 13$

b) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{7}{4}$

Řešení

K výpočtu využijeme dekadický logaritmus (stejně tak bychom mohli použít přirozený logaritmus).

a)
- Přepíšeme výraz $\log_4 13$ podle výše zmíněného tvrzení na $\frac{\log 13}{\log 4}$.
- Vypočítáme oba dekadické logaritmy **na kalkulačce**.
- Dále na kalkulačce určíme jejich podíl, který je výsledkem příkladu.

Druhý a třetí krok lze provést současně zadáním celého výrazu do kalkulačky. Tak získáme co nejpřesnější výsledky.

Zápis řešení:

$$\text{a) } \log_4 13 = \frac{\log 13}{\log 4} = \frac{1{,}113\,9\ldots}{0{,}602\,0\ldots} \doteq 1{,}850\,2$$

$$\text{b) } \log_{\frac{1}{3}} \frac{7}{4} = \frac{\log \frac{7}{4}}{\log \frac{1}{3}} = \frac{0{,}243\,0\ldots}{-0{,}477\,1\ldots} \doteq -0{,}509\,4$$

Cvičení 2.10

Na kalkulačce vypočítejte a zaokrouhlete na čtyři desetinná místa:

$\log_{25} 15 =$	$\frac{\log 15}{\log 25} =$	$\frac{1{,}176\,0\ldots}{1{,}397\,9\ldots} \doteq$	$0{,}841\,3$
$\log_{1{,}2} 37 =$	$\frac{\log 37}{\log 1{,}2} =$	$\frac{1{,}568\,2\ldots}{0{,}079\,1\ldots} \doteq$	$19{,}805\,2$
$\log_{\frac{1}{4}} 125 =$	$\frac{\log 125}{\log \frac{1}{4}} =$	$\frac{2{,}096\,9\ldots}{-0{,}602\,0\ldots} \doteq$	$-3{,}482\,9$

NAHORU

2.3. Využití logaritmů v praxi

V této kapitole představíme několik praktických aplikací logaritmů. Nejprve ukážeme, jak se pomocí logaritmů počítaly složité výpočty v době, kdy lidé něměli k dispozici kalkulačky, a zároveň vysvětlíme, jaký obrázek se nachází v hlavičce těchto stránek. Nakonec ukážeme výhodu použití logaritmické stupnice, která se používá dodnes.

Technické výpočty

Ve škole v matematice často počítáme příklady, které obsahují pouze "jednoduchá" čísla (stejně jako v této práci). V praxi naopak pracujeme s čísly "ošklivými", která získáváme například fyzikálním měřením nebo z popisu reálné situace. Taková čísla obsahují větší počet cifer a je obtížné s nimi provádět základní matematické operace jako násobení, dělení, umocňování či odmocňování. V tomto odstavci ukážeme, jak s takovými čísly počítat bez použití kalkulačky.

Naším cílem tedy bude převést "složité" početní operace na nějaké "jednodušší", které budou pro počítání přijatelnější. Začněme s násobením velkých čísel a postupně ukážeme, jak podobným postupem zjednodušit ostatní operace. Předpokládejme, že chceme určit součin $147,153 \cdot 45\,967,2$.

Nikomu z nás se nejspíš nebude chtít zapsat si tato dvě čísla pod sebe a vynásobit pomocí algoritmu, který jsme se naučili na základní škole. Pokud bychom však měli tato dvě čísla sečíst, nedělalo by nám to zas tak velké problémy. Sčítání je určitě jednodušší operace než násobení. Převádět součin na součet jsme se již ale naučili v předchozí kapitole, tedy za předpokladu, že součin byl v argumentu logaritmu. Zjistili jsme, že **logaritmus součinu je součet logaritmů**.

Už víme, že kdybychom uvedený součin měli v argumentu logaritmu, mohli bychom místo násobení sčítat. Vyjádřit číslo pomocí logaritmu však umíme. Využijeme **vztah mezi mocninou a logaritmem** z předchozí kapitoly: $10^{\log r} = r$. Proč je vhodné zvolit za základ mocniny i logaritmu číslo 10, **vysvětlíme později**.

To znamená, že součin $147,153 \cdot 45\,967,2$ lze převést na $10^{\log 147,153 \cdot 45\,967,2} = 10^{\log 147,153 + \log 45\,967,2}$.

Výpočet příkladu můžeme shrnout ve třech bodech (předpokládejme, že umíme bez kalkulačky určit dekadický logaritmus a mocninu libovolného čísla):

- Určíme dekadické logarimy obou čísel: $\log 147,153 \doteq 2,167\,8$; $\log 45\,967,2 \doteq 4,662\,4$.
- Logaritmy sečteme: $2,167\,8 + 4,662\,4 = 6,830\,2$.
- Vypočítáme mocninu s tímto exponentem: $10^{6,830\,2} \doteq 6\,763\,943,948$.

Pokud využijeme další **logaritmické věty**, můžeme snadno vypočítat podíl, mocninu nebo odmocninu velkých čísel pomocí vztahů:

$a \cdot b = 10^{\log a \cdot b} = 10^{\log a + \log b}$,

$a : b = 10^{\log a : b} = 10^{\log a - \log b}$,

$a^b = 10^{\log a^b} = 10^{b \cdot \log a}$,

$\sqrt[b]{a} = a^{\frac{1}{b}} = 10^{\log a^{\frac{1}{b}}} = 10^{\frac{1}{b} \cdot \log a}$.

NAHORU

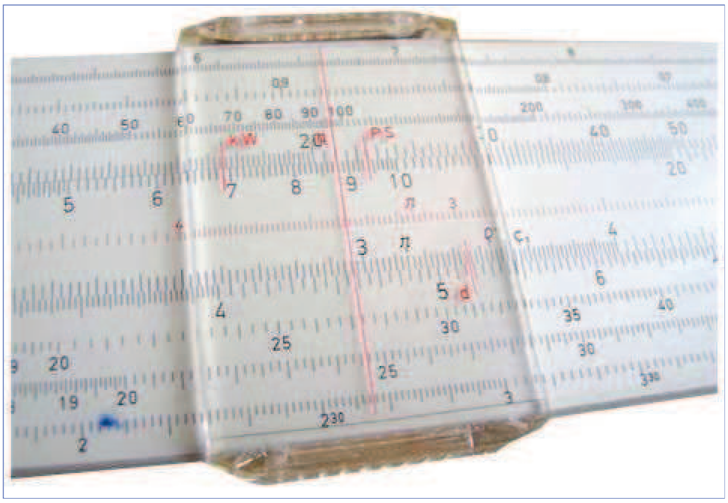
Logaritmické pravítko a tabulky

Doposud jsme neobjasnili následující:

1. Jak určit dekadické logaritmy a mocninu bez kalkulačky.
2. Proč jsme zvolili právě logaritmus a mocninu o základu 10.

Zatím umíme logaritmus a mocninu vypočítat na kalkulačce. Na začátku této kapitoly jsme ale předpokládali, že kalkulačku nemáme k dispozici. Ukážeme, že dekadické logaritmy i mocniny lze také určit pomocí logaritmického pravítka nebo z logaritmických tabulek.

Logaritmické pravítko je matematická pomůcka používaná v minulém století k přibližnému určování zejména technických výpočtů. Mimo jiné umožňuje určit přibližnou hodnotu dekadického logaritmu s argumentem z intervalu $< 1, 10)$ a naopak určit mocninu se základem 10 a s exponentem z intervalu $< 0, 1)$.



Logaritmické tabulky jsou určeny k přesným technickým výpočtům. Umožňují určit dekadické logaritmy s argumentem z intervalu $< 1, 10)$ s přesností až na 10 platných cifer (nebo obráceným způsobem mocninu). Část logaritmických tabulek je znázorněna na následujícím obrázku. Tato část tabulky umožňuje určit logaritmy čísel z intervalu 1,069 až 1,069 12 (pokud by byly k dispozici i zbylé sloupce).

1 069

		0	1	2	3	4	5
00	02897	77052	81115	85177	89240	93303	97365
01	02898	17678	21741	25803	29866	33928	37991
02	02898	58304	62366	66429	70491	74554	78616
03	02898	98929	902992	907054	911117	915179	919242
04	02899	39554	43616	47679	51741	55804	59866
05	02899	80179	84241	88303	92366	96428	000491
06	02900	20803	24865	28927	32990	37052	41115
07	02900	61426	65489	69551	73613	77676	81738
08	02901	02050	06112	10174	14237	18299	22361
09	02901	42673	46735	50797	54860	58922	62984
10	02901	83295	87358	91420	95482	99544	203607
11	02902	23918	27980	32042	36104	40167	44229

Logaritmické pravítko i logaritmické tabulky umožnily určit dekadické logaritmy s argumentem pouze z intervalu $< 1, 10)$. Abychom určili logaritmus libovolného čísla, využijeme jeho semilogaritmický (nebo též vědecký) zápis ve tvaru $x \cdot 10^y$, kde

$x \in < 1, 10)$ a $y \in Z$.

Logaritmus takového čísla určíme snadno:

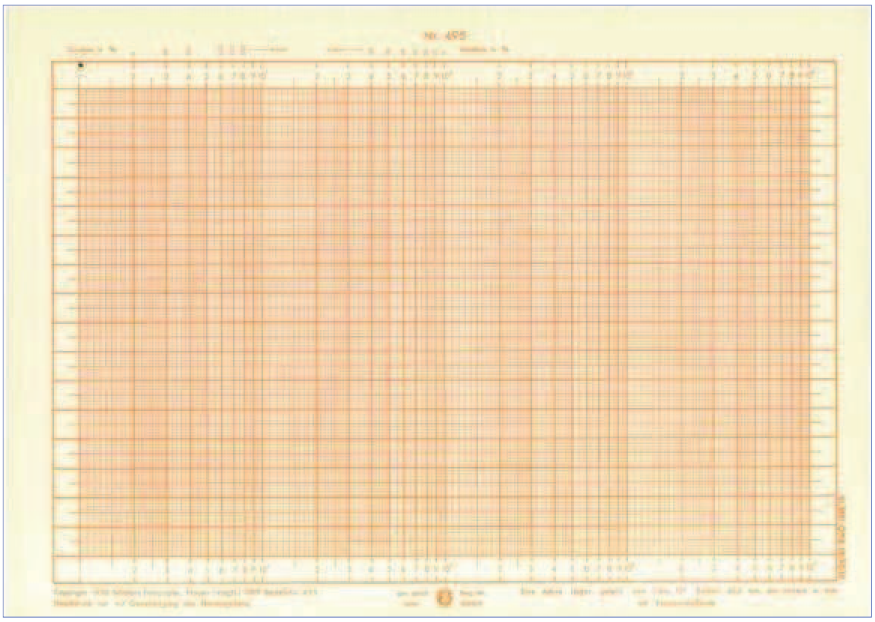
$\log x \cdot 10^y = \log x + \log 10^y = \log x + y$.

Určit exponent y jsme se učili na základní škole a $\log x$ určíme pomocí logaritmického pravítka nebo tabulek.

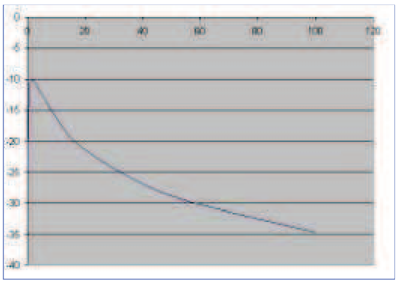
NAHORU

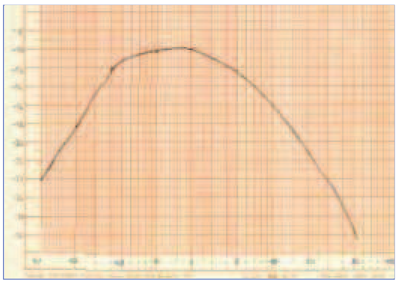
Logaritmická stupnice

V matematice a ve fyzice jsme zvyklí závislosti zakreslovat grafem v soustavě souřadnic. Pokud jedna z proměnných roste mnohem rychleji než druhá proměnná, zvolíme místo lineární stupnice stupnici logaritmickou (např. místo hodnot 1, 10, 100, 1000 budeme na osu vynášet dekadické logaritmy těchto hodnot 0, 1, 2, 3). Pro takové grafy s výhodou využijeme lagaritmický papír s logaritmickou stupnicí na ose x.



Nakonec ukážeme, jak vypadá graf (charakteristika) jedné elektronické součástky (Wienův článek) zakreslený v prvním případě v lineární soustavě souřadnic (graf vlevo) a v druhém případě v logaritmickém měřítku (graf vpravo). Porovnáním obou grafů můžeme snadno rozhodnout, že pravý graf v logaritmickém měřítku lépe vystihuje funkci této součástky.





NAHORU

Decibel

Decibel (zkratka dB) je jednotka, kterou možná znáte jako jednotku hladiny intenzity zvuku, ale můžete se s ní sektat i v elektronice a dalších oborech. Ve skutečnosti jde o podíl dvou hodnot, který je zlogaritmován (decibel lze chápat podobně jako např. procento, které také udává podíl dvou hodnot).

Vědci dokázali, že lidský organismus nevnímá podněty (zvuk, světlo) lineárně s jejich intenzitou, ale naopak logaritmicky. Proto je například u měření hladiny intenzity zvuku použito logaritmické měřítko a jednotka decibel. Platí, že zvýšení o 3 dB odpovídá přibližně dvojnásobné intenzitě podnětu. Protože se jedná o logaritmickou závislost, zvýšení o 30 dB odpovídá již přibližně tisíckrát zvětšené intenzitě podnětu.

dB	Příklady a vnímání člověkem
0	práh slyšitelnosti
20	hluboké ticho, bezvětří, akustické studio
30	šepot, velmi tichý byt či velmi tichá ulice
40	tlumený hovor, šum v bytě, tikot budíku
50	klid, tichá pracovna, obracení stránek novin
60	běžný hovor
70	mírný hluk, hlučná ulice, běžný poslech televize
80	velmi silná reprodukovaná hudba, vysavač v blízkosti
90	silný hluk, jedoucí vlak
100	sbíječka, přádelna, maximální hluk motoru
110	velmi silný hluk, živá rocková hudba, kovárna kotlů
120	startující proudové letadlo
130	práh bolestivosti
140	akustické trauma, 10 m od startujícího proudového letadla
170	zábleskový granát

Jednotka decibel se využívá také v elektronice. Zejména při popisu útlumu a zisku signálu. Zde je výhoda použití decibelu hned dvojí. Nejen, že výsledné hodnoty se lépe vyjadřují v logaritmickém měřítku, ale zároveň se s touto jednotkou lépe pracuje. Zisk i útlum se totiž počítají jako podíl výstupního ku vstupnímu výkonu elektronické součástky. Pokud bychom nepoužili decibel, museli bychom dva útlumy nebo zisky mezi sebou násobit. Díky jednotce decibel se však násobení, vzhledem k vlastnostem logaritmů, převádí na sčítání.

Abychom ukázali využití decibelů v praxi, uvažujme následující situaci. Na střeše máme anténu, která nám zajišťuje připojení na internet. Z antény nám vede 12 m dlouhý kabel do počítače, který je v jednom místě spojen oboustrannou spojkou. Z technické dokumentace víme, že anténa má zisk 9 dB, kabel má útmul 0,2 dB/m a spojka má útlum 3 dB. Úkolem je vypočítat celkový zisk signálu.

Celkový zisk signálu se počítá jako součet všech zisků v přenosové soustavě. Útlum signálu snadno převedeme na zisk záměnou znaménka (má-li spojka útlum 3 dB je její zisk -3 dB).

- Zisk antény je 9 dB.
- Celkový útlum kabelu je $12 \cdot 0,2 = 2,4$ dB, což odpovídá zisku -2,4 dB.
- Zisk spojky je -3 dB.
- Celkový zisk signálu je $9 - 2,4 - 3 = 3,6$ dB.

NAHORU

3. Funkce

3.1. Opakování

Jistě jste při řešení rovnic využívali znalost grafů různých funkcí. K řešení kvadratických rovnic a nerovnic jste využívali graf kvadratické funkce, při řešení rovnic a nerovnic s absolutní hodnotou jste využívali graf funkce s absolutní hodnotou. Při řešení logartimických a exponenciálních rovnic budeme zase využívat graf a vlastnosti exponenciální a logaritmické funkce.

Nejprve si připomeneme základní pojmy a vlastnosti funkcí, které budeme využívat. Pokud nebudete mít v těchto pojmech jasno, využijte webovou aplikaci věnovanou **výuce funkcí na střední škole**. V dalších dvou kapitolách se podrobněji podíváme na exponenciální a logaritmickou funkci.

Definice funkce

Funkce f na množině $D(f) \subset R$ je předpis, který každému reálnému číslu z množiny $D(f)$ přiřadí právě jedno reálné číslo.

Množinu $D(f)$ nazýváme **definiční obor** funkce f.
Prvek x z množiny $D(f)$ nazýváme **argumentem** funkce f.
Číslo, které funkce přiřadí konkrétnímu x nazýváme **funkční hodnota** a značíme ji $f(x)$.
Množinu $H(f)$, která obsahuje všechny funkční hodnoty, kterých funkce f nabývá, nazýváme **obor hodnot** funkce f.

Definici funkce si můžete podrobněji zopakovat na stránkách **věnovaným funkcím**. Následující vlastnosti funkcí jsou vztaženy k celému definičnímu oboru funkce.

NAHORU

Prostá funkce

Funkce f se nazývá **prostá**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D(f)$ platí:

Je-li $x_1 \neq x_2$, pak $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Více se o prosté funkci můžete dozvědět na **stránkách věnovaným výuce funkcí**.

Následující tvrzení nám poskytne silný nástroj při řešení rovnic.

Je-li funkce f prostá a $x_1, x_2 \in D(f)$, potom platí:

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Leftrightarrow\; x_1 = x_2.$$

Zjednodušeně si můžeme pamatovat:

Rovnají-li se funkční hodnoty prosté funkce, rovnají se i její argumenty.
Rovnají-li se argumenty prosté funkce, rovnají se i její funkční hodnoty.

Využití tohoto tvrzení ukážeme na konkrétním příkladu:

Příklad 3.1

Vyřešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$$\frac{1}{x-2} = \frac{1}{2x+3}$$

Řešení

Při řešení se pokusíme využít skutečnosti, že $f(x) = \frac{1}{x}$ je prostá funkce.

- Nejprve určíme definiční obor rovnice: $D = R - \{2, -\frac{3}{2}\}$
- Levá strana rovnice odpovídá zápisu funkce $f(x-2) = \frac{1}{x-2}$. Kde $\frac{1}{x-2}$ je funkční hodnota pro argument $x - 2$.
- Pravá strana rovnice odpovídá zápisu funkce $f(2x+3) = \frac{1}{2x+3}$. Kde $\frac{1}{2x+3}$ je funkční hodnota pro argument $2x + 3$.
- Nyní využijeme skutečnosti, že $f(x) = \frac{1}{x}$ je prostá funkce. Rovnají-li se její funkční hodnoty, musí se dle tvrzení rovnat i její argumenty: $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$.
- Porovnáním argumentů těchto funkcí získáme rovnici $x - 2 = 2x - 3$.
- Řešením této rovnice je číslo $x = -5$, které patří do definičního oboru rovnice. $K = \{-5\}$ je tedy množina všech kořenů rovnice.

Zápis řešení:

$$\frac{1}{x-2} = \frac{1}{2x+3} \qquad D = R - \left\{2, -\frac{3}{2}\right\}$$

Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je prostá.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-2} &= \frac{1}{2x+3} && / \text{ Porovnáme argumenty prosté funkce.} \\
x-2 &= 2x+3 && / -2x+2 \\
-x &= 5 && / \cdot(-1) \\
x &= -5 \\
K &= \{-5\}
\end{aligned}$$

NAHORU

Inverzní funkce

Inverzní funkce k prosté funkci f je funkce f^{-1}, pro kterou platí:

- $D(f^{-1}) = H(f)$ a zároveň
- každému $y \in D(f^{-1})$ je přiřazeno právě to $x \in D(f)$, pro které je $f(x) = y$.

Více se o inverzní funkci a jejím grafu můžete dozvědět na stránkách **o inverzních funkcích**.

Příklad 3.2

Určete inverzní funkci k funkci:

$$y = \frac{2}{x-3}$$

Řešení

Funkce $y = \frac{2}{x-3}$ je prostá na celém svém definičním oboru $D = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$. Můžeme tedy hledat její inverzní funkci.

- Ze vztahu $y = \frac{2}{x-3}$ vyjádříme proměnnou x:
  $x = \frac{2}{y} + 3$.
- Zaměníme proměnné x a y:
  $y = \frac{2}{x} + 3$.
- Tím jsme získali předpis funkce, která je inverzní k původní funkci.
- Funkce $y = \frac{2}{x} + 3$ je inverzní k funkci $y = \frac{2}{x-3}$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{2}{x-3} \quad D = R - \{3\} \\
&\qquad\qquad \text{Funkce } y \text{ je prostá na } D. \\
y &= \frac{2}{x-3} \quad / \cdot (x-3) \\
y(x-3) &= 2 \quad / : y \\
x-3 &= \frac{2}{y} \quad / + 3 \\
x &= \frac{2}{y} + 3 \quad / \text{ Zaměníme proměnné.} \\
y &= \frac{2}{x} + 3
\end{aligned}$$

Následující tvrzení budeme také využívat při řešení exponenciálních a logaritmických rovnic.

Pro každé $x \in D(f)$ platí:

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

Uvedeme příklad, kde je toto tvrzení využito k řešení rovnice.

Příklad 3.3

Vyřešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$$\sqrt[3]{7x-8} = x - 2$$

Řešení

Využijeme skutečnosti, že inverzní funkce k $f(x) = \sqrt[3]{x}$ je $f^{-1}(x) = x^3$.

- Definičím oborem této rovnice jsou všechna reálná čísla: $D = R$
- Levá strana rovnice odpovídá zápisu funkce $f(7x-8) = \sqrt[3]{7x-8}$, kde $\sqrt[3]{7x-8}$ je funkční hodnota pro argument $7x - 8$.
- Protože $f^{-1}(x) = x^3$ je prostá funkce, platí, že rovnají-li se její argumenty, rovnají se i její funkční hodnoty: $(\sqrt[3]{7x-8})^3 = (x-2)^3$. (Umocnili jsme pravou i levou stranu rovnice na třetí.)
- Levá strana rovnice má nyní tvar $(\sqrt[3]{7x-8})^3$. Dle tvrzení $f^{-1}(f(x)) = x$ je rovna argumentu funkce f, tedy výrazu $7x - 8$.
- Získáme rovnici $7x - 8 = (x-2)^3$, kterou vyřešíme.
- Využijeme ekvivalentí úpravy a získáme rovnici $x^3 - 6x^2 + 5x = 0$, kterou lze převést na součinový tvar $x(x-5)(x-1) = 0$.
- Množina všech kořenů rovnice $K = \{0, 1, 5\}$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{7x-8} &= x-2 \quad D=R \\
&\quad \text{Funkce } f^{-1}(x)=x^3 \text{ je inverzní k funkci } f(x)=\sqrt[3]{x}. \\
&\quad \text{Funkce } f(x),\ f^{-1}(x) \text{ jsou prosté.} \\
\sqrt[3]{7x-8} &= x-2 \quad /\ ^3 \\
(\sqrt[3]{7x-8})^3 &= (x-2)^3 \quad / f^{-1}(f(x))=x \\
7x-8 &= (x-2)^3 \\
7x-8 &= x^3-6x^2+12x-8 \quad / -7x+8 \\
0 &= x^3-6x^2+5x \\
x^3-6x^2+5x &= 0 \\
x(x^2-6x+5) &= 0 \\
x(x-5)(x-1) &= 0 \\
K &= \{0,1,5\}
\end{aligned}$$

NAHORU

Rostoucí a klesající funkce

Funkce f je **rostoucí**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D(f)$ platí:

Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkce f je **klesající**, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D(f)$ platí:

Je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) > f(x_2)$.

Podrobně jsou rostoucí a klesající funkce vysvětleny na stránkách věnované **výuce funkcí**.

Jeli funkce **rostoucí** (respektive **klesající**), potom je **prostá**.

Rostoucí a klesající funkce jsou speciálním případem prostých funkcí. To znamená, že každá rostoucí i každá klesající funkce je prostá. Naopak neplatí, že každá prostá funkce musí být rostoucí nebo klesající.

Následující dvě tvrzení využijeme při řešení nerovnic.

Jeli funkce f rostoucí a $x_1, x_2 \in D(f)$, potom

$$f(x_1) < f(x_2) \iff x_1 < x_2.$$

Jeli funkce f klesající a $x_1, x_2 \in D(f)$, potom

$$f(x_1) < f(x_2) \iff x_1 > x_2.$$

Tato dvě tvzení si můžeme zapamatovat ve zjednodušené formulaci:

Nerovnost mezi argumenty rostoucí funkce je stejná jako u funkčních hodnot. Nerovnost mezi argumenty klesající funkce je opačná než u funkčních hodnot.

Využití druhého tvrzení s klesající funkcí si ukážeme v následujícím příkladu. Podobně by se využilo první tvrzení v případě, že funkce je rostoucí.

Příklad 3.4

Vyřešte nerovnici s neznámou $x \in R$:

$$-x < -\sqrt{2}$$

Řešení

Při řešení využijeme skutečnost, že $f(x) = -x$ je klesající funkce.

- Definičím oborem této rovnice jsou všechna reálná čísla: $D = R$
- Levá strana rovnice odpovídá zápisu funkce $f(x) = -x$, kde $-x$ je funkční hodnota pro argument x.
- Pravá strana rovnice odpovídá zápisu funkce $f(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$, kde $-\sqrt{2}$ je funkční hodnota pro argument $\sqrt{2}$.
- Nyní využijeme skutečnosti, že $f(x) = -x$ je klesající funkce, a proto $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 > x_2$.
- Porovnáním argumentů této funkce získáme nerovnici $x > \sqrt{2}$.
- Množina všech kořenů rovnice $K = (\sqrt{2}, +\infty)$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned} -x &< -\sqrt{2} \quad D = R \\ & \qquad\qquad \text{Funkce } f(x) = -x \text{ je klesající.} \\ -x &< -\sqrt{2} \quad / \text{ Porovnáme argumenty klesající funkce.} \\ x &> \sqrt{2} \\ K &= \left(\sqrt{2}, +\infty\right) \end{aligned}$$

NAHORU

3.2. Exponenciální funkce

Zavedení a graf exponenciální funkce

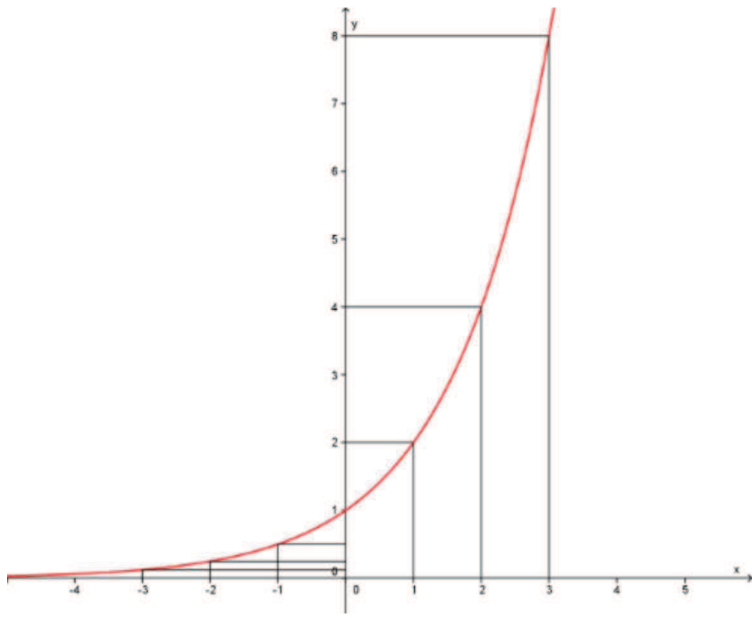
V kapitole o mocninách jsem vysvětlili, čemu říkáme **exponent**. Nyní zavedeme exponenciální funkci. Exponenciální funkce je taková funkce, v jejímž předpisu je proměnná x v exponentu.

> Exponenciální funkce o základu $a \in R^+ - \{1\}$ je každá funkce na množině R zapsaná ve tvaru
> $$y = a^x.$$

Nyní známe předpis exponenciální funkce. Zkusíme vypočítat několik funkčních hodnot a získat tak graf exponenciální funkce $y = 2^x$. Zkuste samostatně doplnit tabulku:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 2^x$	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	16

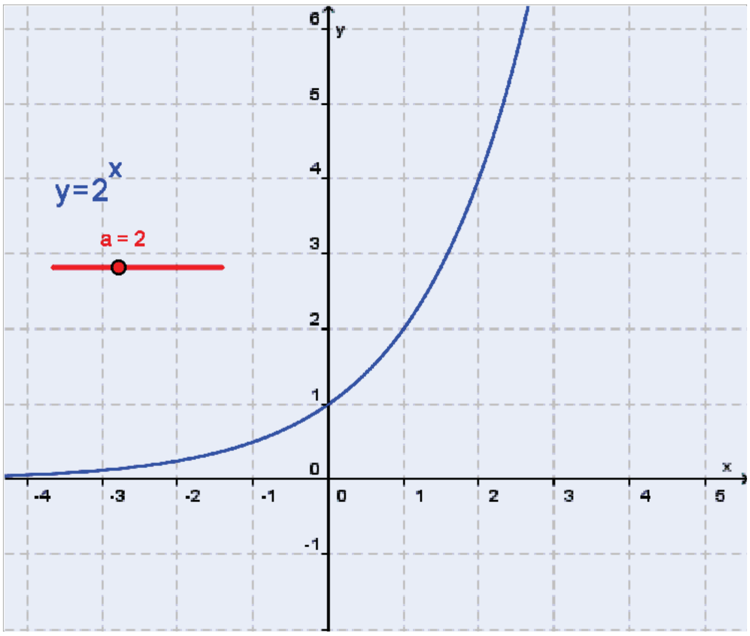
Nakreslíme graf této funkce:



NAHORU

Vliv základu na graf exponenciální funkce

V následujícím appletu měňte velikost základu a pozorujte, jak se mění graf exponenciální funkce (klikněte levým tlačítkem na červené kolečko a tažením myši změníte hodnotu základu a).



Na základě pozorování appletu doplňte:

- Funkční hodnoty exponenciální funkce jsou vždy větší než 0.
- Exponenciální funkce je rostoucí pro základ $a > 1$.
- Exponenciální funkce je klesající pro základ $a \in (0, 1)$.
- Graf funkce vždy prochází bodem $[0, 1]$ ležícím na ose y.
- Graf funkce prochází body $[1, a], [-1, \frac{1}{a}]$.

NAHORU

Vlastnosti exponenciální funkce

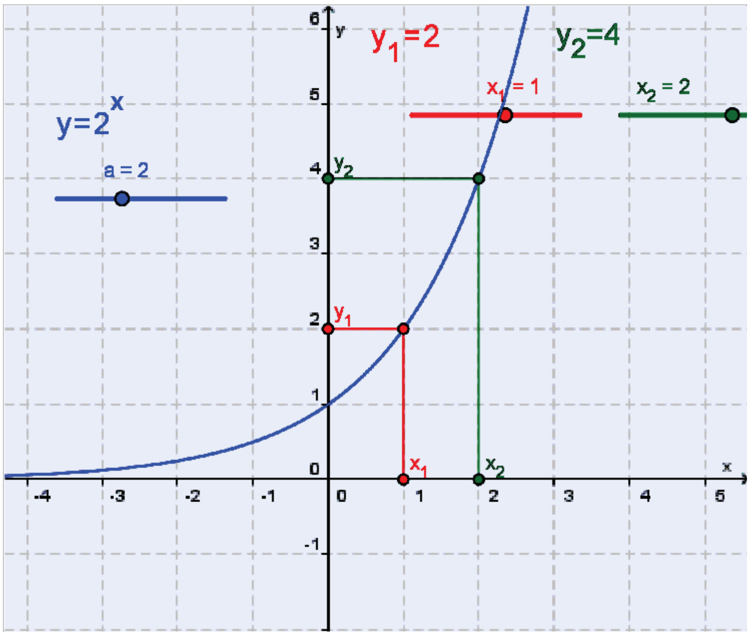
Exponenciální funkce $f : y = a^x, a > 0, a \neq 1$

Definiční obor	$D(f) = R$
Obor hodnot	$H(f) = (0, +\infty)$
Rostoucí	pro $a > 1$
Klesající	pro $a \in (0, 1)$
Prostá	pro všechny přípustné základy

NAHORU

Porovnání mocnin

Následující applet nám bude sloužit k porovnávání dvou mocnin o stejném kladném základu.



Poznámka

Hodnoty mocnin y_1, y_2 se v appletu počítají s přesností na dvě desetinná místa. Správně bychom v některých případech měli místo znaku $=$ použít znak $\doteq$, který však neuvádíme.

Skryj

Použití appletu si ukážeme na jednoduchém příkladu.

Příklad 3.5

Rozhodněte, která z mocnin je větší:

$$2^1 \; ? \; 2^2$$

Řešení

Využijeme applet:

- Na modrém posuvníku nastavíme hodnotu základu $a = 2$.
- Na červeném posuvníku nastavíme velikost prvního exponentu $x_1 = 1$. První mocnina $y_1 = 2^1 = 2$.
- Na zeleném posuvníku nastavíme velikost druhého exponentu $x_2 = 2$. Druhá mocnina $y_2 = 2^2 = 4$.
- Z grafu je vidět, že $y_1 < y_2$, proto $2^1 < 2^2$.

Zápis řešení:

$$2^1 \; ? \; 2^2 \longrightarrow 2^1 = 2, 2^2 = 4, \text{ proto } 2^1 < 2^2$$

Cvičení 3.5

Rozhodněte, která z mocnin je větší:

$0,5^{-1,5} \; ? \; 0,5^2$	$0,5^{-1,5} = 2,83$	$0,5^2 = 0,25$	$0,5^{-1,5} > 0,5^2$
$1,2^4 \; ? \; 1,2^{-2}$	$1,2^4 = 2,07$	$1,2^{-2} = 0,69$	$1,2^4 > 1,2^{-2}$
$3^{0,4} \; ? \; 3^{0,8}$	$3^{0,4} = 1,55$	$3^{0,8} = 2,41$	$3^{0,4} < 3^{0,8}$
$(\frac{1}{5})^{\frac{1}{2}} \; ? \; (\frac{1}{5})^{\frac{1}{5}}$	$0,2^{0,5} = 0,45$	$0,2^{0,2} = 0,72$	$(\frac{1}{5})^{\frac{1}{2}} < (\frac{1}{5})^{\frac{1}{5}}$

Při řešení předchozího cvičení jsme si mohli všimnout následujících zákonitostí při porovnání dvou mocnin se stejným základem (jde o **porovnání argumentů rostoucí a klesající funkce**, které jsme vysvětlili v předchozí kapitole).

Je-li základ mocniny

- $a \in (0, 1)$, potom když je
  - první exponent **menší** než druhý, je první mocnina **větší** než druhá.
  - první exponent **větší** než druhý, je první mocnina **menší** než druhá.
- $a > 1$, potom když je
  - první exponent **menší** než druhý, je první mocnina **menší** než druhá.
  - první exponent **větší** než druhý, je první mocnina **větší** než druhá.

NAHORU

3.3. Logaritmická funkce

Zavedení logaritmické funkce

V předchozí kapitole jsme si představili exponenciální funkci. Nyní se pokusíme najít funkci, která je **inverzní** k exponenciální funkci.

Budeme vycházet z předpisu pro exponenciální funkci a vyjádříme nezávislou proměnou x pomocí y, tím získáme předpis pro inverzní funkci. Stejný postup byl ukázán v **příkladu 3.2**.

Pomocí základních matematických operací, umocňování a odmocňování se nám nepovede z předpisu $y = a^x$ proměnnou x vyjádřit. Proto využijeme **definici logaritmu** pro přípustné hodnoty:

$$\log_a r = v \quad \Leftrightarrow \quad a^v = r,$$

pomocí které získáme předpis inverzní funkce k exponenciální funkci:

$$\begin{aligned} y &= a^x \qquad D = R \\ & \qquad\qquad \text{Funkce } y = a^x \text{ je prostá na } D. \\ y &= a^x \qquad / \text{ Využijeme definici logaritmu.} \\ \log_a y &= x \\ x &= \log_a y \qquad / \text{ Zaměníme proměnné.} \\ y &= \log_a x \end{aligned}$$

Tím jsme získali funkci $y = \log_a x$, která je inverzní k exponenciální funkci $y = a^x$. Tuto funkci budeme nazývat logaritmickou funkcí o základu a.

Logaritmická funkce o základu $a \in R^+ - \{1\}$ je každá funkce na množině R^+ zapsaná ve tvaru

$$y = \log_a x.$$

NAHORU

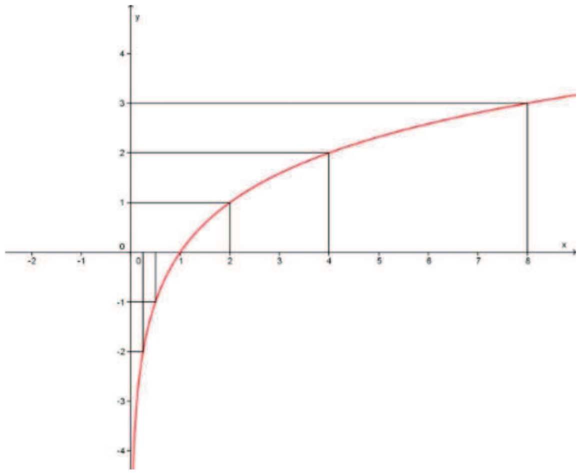
Graf logaritmické funkce

Z předpisu funkce $y = \log_2 x$ odvodíme, jak vypadá její graf. Samostatně dopočítejte funkční hodnoty v následující tabulce:

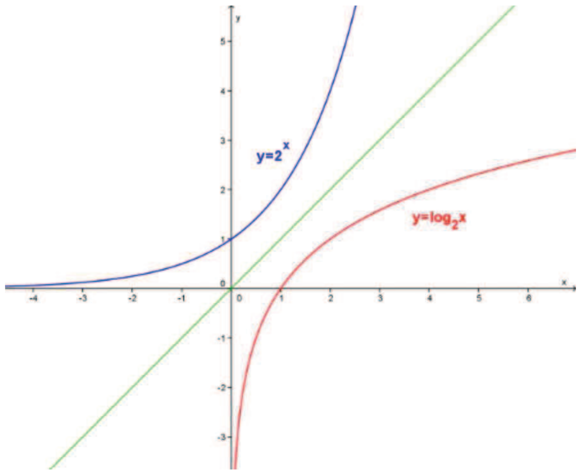
x	-1	0	0,25	0,5	1	2	4	8
$y = \log_2 x$	nelze	nelze	-2	-1	0	1	2	3

V kapitole **o logaritmech** jsme zjistili, že argument logaritmu musí být číslo větší než nula. Proto jsme nemohli určit první dvě funkční hodnoty v tabulce.

Nakreslíme graf funkce $y = \log_2 x$.



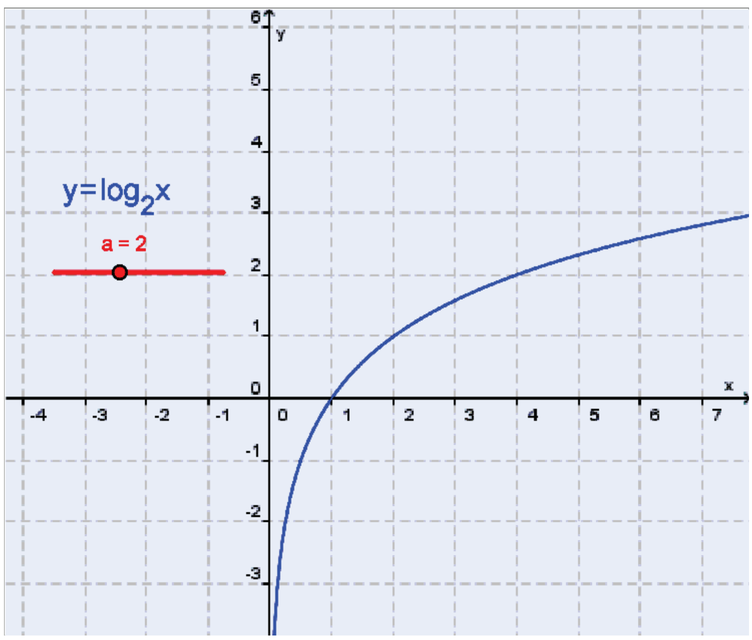
Logaritmická funkce je inverzní k funkci exponenciální, proto grafy funkcí $y = \log_2 x$ a $y = 2^x$ jsou osově souměrné podle osy $y = x$.



NAHORU

Vliv základu na graf logaritmické funkce

Nejprve v appletu opět zkuste **měnit velikost základu** a pozorujte, jak se mění graf logaritmické funkce:



Na základě pozorování appletu doplňte:

- Oborem hodnot logaritmické funkce jsou všechna reálná čísla.
- Logaritmická funkce je rostoucí pro základ $a > 1$.
- Logaritmická funkce je klesající pro základ $a \in (0, 1)$.
- Graf funkce vždy prochází bodem $[1, 0]$ ležícím na ose x.
- Graf funkce prochází body $[a, 1], [\frac{1}{a}, -1]$.

NAHORU

Vlastnosti logaritmické funkce

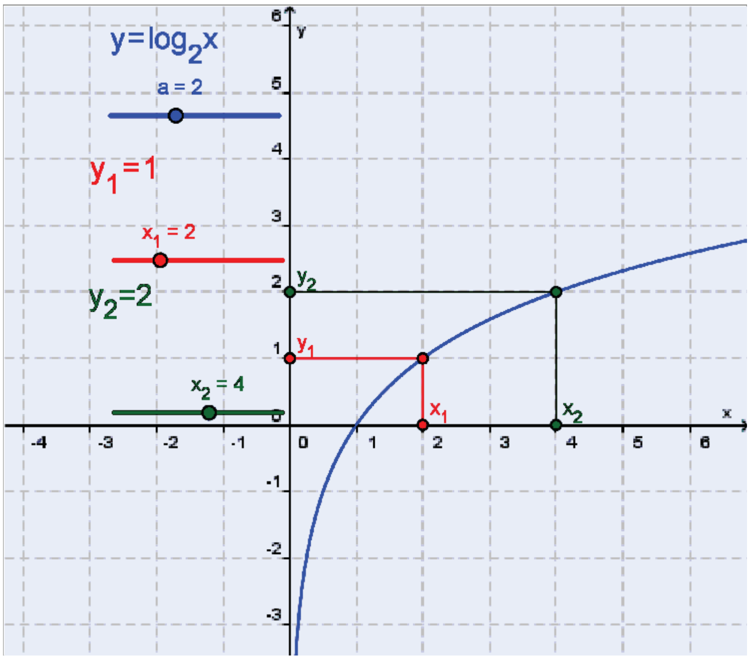
Logaritmická funkce $f: y = \log_a x,\ a > 0, a \neq 1$

Definiční obor	$D(f) = (0, +\infty)$
Obor hodnot	$H(f) = R$
Rostoucí	pro $a > 1$
Klesající	pro $a \in (0, 1)$
Prostá	pro všechny přípustné základy

NAHORU

Porovnání logaritmů

Následující applet nám bude sloužit k porovnávání dvou logaritmů o stejném základu.



Poznámka

Hodnoty logaritmů y_1, y_2 se v appletu počítají s přesností na dvě desetinná místa. Správně bychom v některých případech měli místo znaku $=$ použít znak $\doteq$, který však neuvádíme.

Skryj

Užití appletu si ukážeme na jednoduchém příkladu.

Příklad 3.6

Rozhodněte, který z následujících logaritmů je větší:

$$\log_2 2 \; ? \; \log_2 4$$

Řešení

Využijeme applet:

- Na modrém posuvníku nastavíme hodnotu základu $a = 2$.
- Na červeném posuvníku nastavíme velikost prvního argumentu $x_1 = 2$.
  První logaritmus $y_1 = \log_2 2 = 1$.
- Na zeleném posuvníku nastavíme velikost druhého argumentu $x_2 = 4$.
  Druhý logaritmus $y_2 = \log_2 4 = 2$.
- Z grafu je vidět, že $y_1 < y_2$, proto $\log_2 2 < \log_2 4$.

Zápis řešení:

$$\log_2 2 \; ? \; \log_2 4 \longrightarrow \log_2 2 = 1, \log_2 4 = 2 \text{ proto } \log_2 2 < \log_2 4$$

Cvičení 3.6

Rozhodněte, který z následujících logaritmů je větší:

$\log_{0,5} 0,8 \; ? \; \log_{0,5} 3$	$\log_{0,5} 0,8 = 0,32$	$\log_{0,5} 3 = -1,58$	$\log_{0,5} 0,8 > \log_{0,5} 3$
$\log_{1,7} 0,5 \; ? \; \log_{1,7} 6$	$\log_{1,7} 0,5 = -1,31$	$\log_{1,7} 6 = 3,38$	$\log_{1,7} 0,5 < \log_{1,7} 6$
$\log_4 0,7 \; ? \; \log_4 0,3$	$\log_4 0,7 = -0,26$	$\log_4 0,3 = 0,81$	$\log_4 0,7 > \log_4 0,3$
$\log_{0,3} 1,5 \; ? \; \log_{0,3} 4$	$\log_{0,3} 1,5 = -0,34$	$\log_{0,3} 4 = -1,15$	$\log_{0,3} 1,5 > \log_{0,3} 4$

Při řešení předchozího cvičení jsme si mohli všimnout následujících zákonitostí při porovnání dvou logaritmů se stejným základem (opět jde o **porovnání argumentů rostoucí a klesající funkce**).

Je-li základ logaritmu

- $a \in (0, 1)$, potom když je
  - první argument **menší** než druhý, je první logaritmus **větší** než druhý.
  - první argument **větší** než druhý, je první logaritmus **menší** než druhý.
- $a > 1$, potom když je
  - první argument **menší** než druhý, je první logaritmus **menší** než druhý.
  - první argument **větší** než druhý, je první logaritmus **větší** než druhý.

NAHORU

4. Exponenciální rovnice

4.1. Exponenciální rovnice

Exponenciální rovnicí nazýváme každou rovnici, ve které je neznámá v exponentu nějaké mocniny.

Nejprve si na příkladech vyjasníme pojem exponenciální rovnice.

Příklad 4.1

Rozhodněte, zda se jedná o exponenciální rovnici s neznámou $x \in R$:

a) $3^x - 9 = 5^x$
b) $3x - x^5 = 7$
c) $2^{x^2-3x+6} = 1$

Řešení:

Exponenciální rovnice musí mít neznámou v exponentu nějaké mocniny:

a) Rovnice $3^x - 9 = 5^x$ je exponenciální rovnicí. Neznámá x je v exponentu mocniny 3^x i 5^x.
b) Rovnice $3x - x^5 = 7$ není exponenciální rovnicí. Neznámá x totiž není v exponentu žádné mocniny.
c) Rovnice $2^{x^2-3x+6} = 1$ je exponenciální rovnicí. Neznámá x je v exponentu mocniny 2^{x^2-3x+6}.

U rovnice nás vždy zajímá její řešení. Proto si nyní připomeneme, co znamená vyřešit rovnici.

Vyřešit rovnici s neznámou $x \in R$ znamená určit **všechny hodnoty neznámé** x, pro které platí daná rovnost.

Důležité je, že musíme najít všechna řešení rovnice. Vezměme například kvadratickou rovnici $x^2 = 4$. Nestačí říct, že řešením rovnice je $x = 2$. Zapomněli jsme totiž na druhý kořen této rovnice $x = -2$. Řešením rovnice jsou tedy dvě čísla
$x_1 = 2, x_2 = -2$.

NAHORU

Postup při řešení rovnice

Nejprve připomeneme některé pojmy, které jste již využívali při řešení rovnic.

Obor řešení rovnice je množina, ve které hledáme řešení rovnice. Určíme ji snadno ze zadání. V naší práci se vždy jedná o reálná čísla, a proto tento bod budeme vynechávat. (Přesto je dobré si pamatovat, že můžeme hledat řešení na nějaké podmožině reálných čísel nebo v jiném číselném oboru.)

Definiční obor rovnice je podmnožina oboru řešení (v naší práci podmnožina reálných čísel) obsahující čísla, pro která jsou všechny výrazy v rovnici definovány. Vylučujeme tedy čísla, pro která je nějaký

- jmenovatel zlomku nulový,
- argument odmocniny záporný,
- argument logaritmu záporný nebo nulový a
- základ logaritmu záporný, nulový nebo roven jedné.

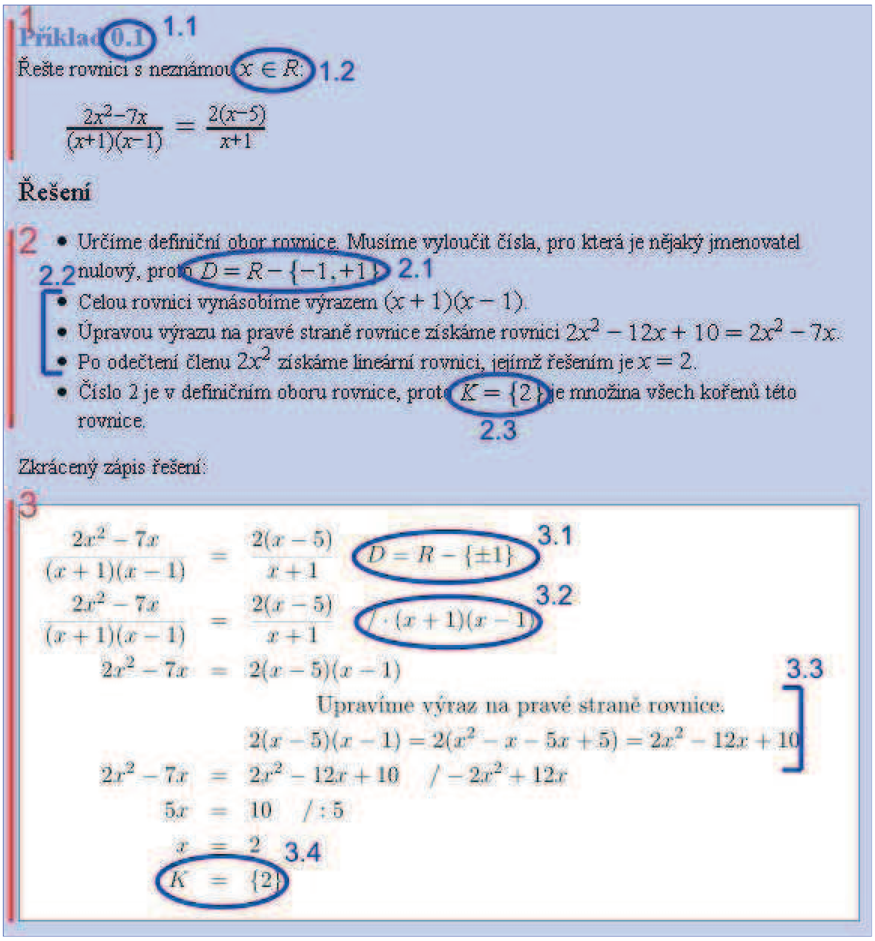
K samotnému **řešení** využíváme ekvivalentní a důsledkové úpravy, pomocí nichž upravujeme výrazy na levé a pravé straně rovnice. Na konci této fáze bychom měli získat jednoduchou rovnici, kterou dokážme "z hlavy" vyřešit. Některé ekvivalentní a důsledkové úpravy již známe a další zavedeme postupně v jednotlivých kapitolách.

Množina všech kořenů rovnice obsahuje ta řešení (získaná v předchozím kroku), která jsou v definičním oboru rovnice. Pokud při řešení používáme důsledkové úpravy nebo předem neurčíme definiční obor, musíme každé řešení ověřit zkouškou.

Dohodneme se na základních fázích řešení rovnice.

1. Určíme obor řešení rovnice O.
2. Určíme definiční obor rovnice D.
3. Pomocí ekvivalentních a důsledkových úprav zjednodušíme rovnici.
4. Určíme množinu všech kořenů rovnice K.

Ukážeme, jak v této práci budeme zapisovat řešení rovnic.



1 **Příklad 0.1** 1.1

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$. 1.2

$$\frac{2x^2-7x}{(x+1)(x-1)} = \frac{2(x-5)}{x+1}$$

Řešení

2
- Určíme definiční obor rovnice. Musíme vyloučit čísla, pro která je nějaký jmenovatel nulový, proto $D = R - \{-1,+1\}$. 2.1
- 2.2 Celou rovnici vynásobíme výrazem $(x+1)(x-1)$.
- Úpravou výrazu na pravé straně rovnice získáme rovnici $2x^2 - 12x + 10 = 2x^2 - 7x$.
- Po odečtení členu $2x^2$ získáme lineární rovnici, jejímž řešením je $x = 2$.
- Číslo 2 je v definičním oboru rovnice, proto $K = \{2\}$ je množina všech kořenů této rovnice. 2.3

Zkrácený zápis řešení:

3

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2-7x}{(x+1)(x-1)} &= \frac{2(x-5)}{x+1} \qquad D = R - \{\pm 1\} \quad 3.1\\
\frac{2x^2-7x}{(x+1)(x-1)} &= \frac{2(x-5)}{x+1} \qquad / \cdot (x+1)(x-1) \quad 3.2\\
2x^2-7x &= 2(x-5)(x-1) \quad 3.3
\end{aligned}$$

Upravíme výraz na pravé straně rovnice.

$$2(x-5)(x-1) = 2(x^2-x-5x+5) = 2x^2-12x+10$$

$$\begin{aligned}
2x^2-7x &= 2x^2-12x+10 \qquad / -2x^2+12x\\
5x &= 10 \qquad /:5\\
x &= 2 \quad 3.4\\
K &= \{2\}
\end{aligned}$$

1. Zadání příkladu
    1. Číslo příkladu. První číslo určuje kapitolu, druhé číslo pořadí příkladu v kapitole.
    2. Obor řešení rovnice O. V naší práci jsou to vždy reálná čísla.
2. Slovní popis řešení
    1. Určení definičního oboru rovnice D.
    2. Úpravy rovnice. Jsou zde obsaženy pouze hlavní kroky řešení.
    3. Určení množiny všech kořenů K. (Ověříme, zda řešení získaná v předchozím kroku patří do definičního oboru rovnice.)

3. Symbolický zápis řešení
    1. Definiční obor.
    2. Ekvivalentní úpravy. Zapisujeme je za lomítko.
    3. Pomocné úpravy. Zapisujeme je na pravou stranu stránky.
    4. Množina všech kořenů. Zapisujeme ji na poslední řádek. Mezi předposledním a posledním řádkem navíc ověřujeme, zda řešení, získaná v předchozím kroku, patří do definičního oboru rovnice.

NAHORU

Řešení exponenciální rovnice

U exponenciálních rovnic **nemáme žádný univerzální algoritmus, pomocí kterého bychom určili řešení každé exponenciální rovnice**. Naučíme se několik základních metod, které využijeme při řešení konkrétních typů exponenciálních rovnic:

- porovnání exponentů
- logaritmování
- substituce

Některé další typy exponenciálních rovnic lze vhodnými úpravami převést na tvar, který dokážeme vyřešit. Existují ale i exponenciální rovnice, které neumíme vyřešit. Můžeme jen určit přibližné řešení za pomoci numerických metod a počítačů, jak bude ukázáno na konci této kapitoly.

NAHORU

4.2. Porovnání exponentů

Základní úprava

Nejjednodušším typem exponenciální rovnice je rovnice ve tvaru $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ nebo rovnice, které lze ekvivalentními úpravami převést na tento tvar. Symboly $f(x), g(x)$ zastupují výrazy s neznámou x, které si můžeme přestavit jako předpisy nějakých funkcí. Protože je exponenciální funkce definovaná a prostá na celém definičním oboru, můžeme pouze porovnat argumenty funkcí stejným způsobem jako v **příkladu 3.1**. Porovnáním exponentů dostáváme rovnici $f(x) = g(x)$. Jedná se o ekvivalentní úpravu rovnice:

Rovnice $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ s neznámou $x \in R$ pro $a \in R^+ - \{1\}$ je ekvivalentní s rovnicí

$$f(x) = g(x).$$

Tuto ekvivalentní úpravu budeme nazývat **porovnání exponentů**.

Příklad 4.2

Řešte rovnice s neznámou $x, y \in R$:

a) $3^{x-1} = 3^2$
b) $5^y = \frac{1}{25}$

Řešení

a)
- Definiční obor rovnice $D = R$.
- Na levé i pravé straně rovnice je mocnina se stejným základem. Využijeme právě zavedenou ekvivalentní úpravu a porovnáme exponenty mocnin na pravé a levé straně rovnice.
- Získáme rovnici $x - 1 = 2$, jejímž řešením je $x = 3$.
- Množina všech kořenů $K = \{3\}$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned} 3^{x-1} &= 3^2 \quad D = R \\ 3^{x-1} &= 3^2 \quad /\text{porovnání exponentů} \\ x - 1 &= 2 \quad / + 1 \\ x &= 3 \\ K &= \{3\} \end{aligned}$$

b)
- Definiční obor rovnice $D = R$.
- Abychom mohli porovnat exponenty, musíme nejprve pravou stranu rovnice převést na mocninu se základem 5. Upravíme tedy výraz na pravé straně rovnice: $\frac{1}{25} = 5^{-2}$.
- Porovnáním exponentů vznikne rovnice $y = -2$.
- Množina všech kořenů $K = \{-2\}$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned} 5^y &= \frac{1}{25} \quad D = R \end{aligned}$$

Upravíme pravou stranu rovnice.

$$\frac{1}{25} = 5^{-2}$$

$$\begin{aligned} 5^y &= 5^{-2} \quad /\text{porovnání exponentů} \\ y &= -2 \\ K &= \{-2\} \end{aligned}$$

Cvičení 4.2

Řešte rovnice s neznámou $x, y \in R$:

$$3^y = \frac{1}{27}$$
$$D = R$$
$$3^y = 3^{-3}$$
$$y = -3$$
$$K = \{-3\}$$

$$2^{2x+1} = 1$$
$$D = R$$
$$2^{2x+1} = 2^0$$
$$2x + 1 = 0$$
$$x = -\frac{1}{2}$$
$$K = \{-\tfrac{1}{2}\}$$

NAHORU

Úprava mocnin

Často je potřeba využít několik ekvivalentních úprav, než se nám povede převést exponenciální rovnici na tvar $a^{f(x)} = a^{g(x)}$. Nejprve uvedeme příklady, kde využíváme **pravidla pro práci s racionálními exponenty**. Pokud v některých krocích nebudete mít jasno, zopakujte si **první kapitolu** věnovanou práci s mocninami.

Příklad 4.3

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$$5^x \cdot 2^x = 100^{x-2}$$

Řešení

- Definiční obor rovnice $D = R$.
- Abychom mohli porovnat exponenty, musíme nejprve výraz na pravé i levé straně rovnice převést na mocninu se stejným základem.
- Levou i pravou stranu rovnice snadno převedeme na mocninu se základem 10:
  $L(x) = 5^x \cdot 2^x = 10^x$,
  $P(x) = 100^{x-2} = 10^{2x-4}$.
- Porovnáním exponentů získáme rovnici $x = 2x - 4$, jejímž řešením je $x = 4$.
- Množina všech kořenů $K = \{4\}$.

Zápis řešení:

$$5^x \cdot 2^x = 100^{x-2} \qquad D = R$$

Převedeme všechny výrazy na mocniny o základu 10.

$$5^x \cdot 2^x = 10^x$$
$$100^{x-2} = (10^2)^{x-2} = 10^{2x-4}$$

$$\begin{aligned} 10^x &= 10^{2x-4} && /\text{porovnání exponentů} \\ x &= 2x - 4 && / -2x \\ -x &= -4 && / \cdot(-1) \\ x &= 4 \\ K &= \{4\} \end{aligned}$$

Příklad 4.4

Řešte rovnici s neznámou $y \in R$:

$$\sqrt[4]{4^y} \cdot \sqrt[3]{2^{y-3}} = \sqrt[6]{16}$$

Řešení

- Definiční obor rovnice $D = R$.
- Abychom mohli porovnat exponenty, musíme nejprve výraz na pravé i levé straně rovnice převést na mocninu se stejným základem.
- Každý výraz v rovnici lze převést na mocninu se základem 2:
  $\sqrt[4]{4^y} = 2^{\frac{y}{2}}$,
  $\sqrt[3]{2^{y-3}} = 2^{\frac{y-3}{3}}$,
  $\sqrt[6]{16} = 2^{\frac{4}{6}}$.
- Po úpravě výraz na levé straně rovnice odpovídá mocnině $L(x) = 2^{\frac{y}{2}+\frac{y-3}{3}}$.
- Porovnáním exponentů získáme rovnici $\frac{y}{2} + \frac{y-3}{3} = \frac{4}{6}$, jejímž řešením je $y = 2$.
- Množina všech kořenů $K = \{2\}$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned}
\sqrt[4]{4^y}\cdot\sqrt[3]{2^{y-3}} &= \sqrt[6]{16} \quad D = R\\
&\ \text{Převedeme všechny výrazy na mocniny o základu 2.}\\
&\qquad \sqrt[4]{4^y} = \sqrt[4]{2^{2y}} = 2^{\frac{2y}{4}} = 2^{\frac{y}{2}}\\
&\qquad \sqrt[3]{2^{y-3}} = 2^{\frac{y-3}{3}}\\
&\qquad \sqrt[6]{16} = \sqrt[6]{2^4} = 2^{\frac{4}{6}}\\
2^{\frac{y}{2}}\cdot 2^{\frac{y-3}{3}} &= 2^{\frac{4}{6}}\\
2^{\frac{y}{2}+\frac{y-3}{3}} &= 2^{\frac{4}{6}} \quad /\text{porovnání exponentů}\\
\frac{y}{2}+\frac{y-3}{3} &= \frac{4}{6}\\
\frac{3y+2y-6}{6} &= \frac{4}{6} \quad /\cdot 6\\
5y-6 &= 4 \quad /+6\\
5y &= 10 \quad /:5\\
y &= 2\\
K &= \{2\}
\end{aligned}$$

Příklad 4.5

Řešte rovnici s neznámou $z \in R$:

$$\frac{27}{8} = \left(\frac{2}{3}\right)^z \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{z+1}$$

Řešení

- Definiční obor rovnice $D = R$.
- Abychom mohli porovnat exponenty, musíme nejprve výraz na pravé i levé straně rovnice převést na mocninu se stejným základem.
- Každý výraz v rovnici lze snadno převést na mocninu se základem $\frac{2}{3}$ nebo $\frac{3}{2}$. Zvolíme například druhou možnost.
- Všechny výrazy převedeme na mocninu se základem $\frac{3}{2}$:
  $\frac{27}{8} = (\frac{3}{2})^3$,
  $(\frac{2}{3})^z = (\frac{3}{2})^{-z}$,
  $(\frac{9}{4})^{z+1} = (\frac{3}{2})^{2z+2}$
- Po úpravě výraz na pravé straně rovnice odpovídá mocnině $P(x) = (\frac{3}{2})^{-z+2z+2}$.
- Porovnáním exponentů získáme rovnici $3 = -z + 2z + 2$, jejímž řešením je $z = 1$.
- Množina všech kořenů $K = \{1\}$.

Zápis řešení:

$$
\begin{aligned}
\frac{27}{8} &= \left(\frac{2}{3}\right)^z \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{z+1} \qquad D = R \\
&\quad \text{Převedeme všechny výrazy na mocniny o základu } \frac{3}{2}. \\
&\qquad \frac{27}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \\
&\qquad \left(\frac{2}{3}\right)^z = \left(\frac{3}{2}\right)^{-z} \\
&\qquad \left(\frac{9}{4}\right)^{z+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2(z+1)} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2z+2} \\
\left(\frac{3}{2}\right)^3 &= \left(\frac{3}{2}\right)^{-z} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2z+2} \\
\left(\frac{3}{2}\right)^3 &= \left(\frac{3}{2}\right)^{-z+2z+2} \qquad /\text{porovnání exponentů} \\
3 &= -z + 2z + 2 \qquad / - 2 \\
1 &= z \\
z &= 1 \\
K &= \{1\}
\end{aligned}
$$

NAHORU

Vytýkání

Další úprava, která může převést exponenciální rovnici na tvar $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, je vytýkání. Tuto úpravu používáme, jestliže výraz na některé straně rovnice není v součinovém tvaru. Vytknutím vhodné mocniny pak často můžeme výraz převést na součinový tvar. Vytýkání mocnin z výrazů si můžete zopakovat ve **cvičení 1.5**.

Příklad 4.6

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$$3^x + 3^{x+2} = 90$$

Řešení

- Definiční obor rovnice $D = R$.
- Nejprve upravíme výraz na levé straně rovnice na součinový tvar.
- Z výrazů 3^x a 3^{x+2} můžeme vytknout 3^x. Levá strana rovnice má tvar: $L(x) = 3^x + 3^{x+2} = 10 \cdot 3^x$.
- Vydělíme rovnici číslem 10 a potom převedeme výraz na pravé straně rovnice na mocninu se základem 3.
- Získáme rovnici $3^x = 3^2$, ve které porovnáme exponenty: $x = 2$.
- Množina všech kořenů $K = \{2\}$.

Zápis řešení:

$$
\begin{aligned}
3^x + 3^{x+2} &= 90 \qquad D = R \\
&\quad \text{Vytkneme } 3^x \text{ z výrazu na levé straně rovnice.} \\
&\qquad 3^x + 3^{x+2} = 3^x + 9 \cdot 3^x = 3^x \cdot (1 + 9) = 10 \cdot 3^x \\
10 \cdot 3^x &= 90 \qquad / : 10 \\
3^x &= 9 \\
3^x &= 3^2 \qquad /\text{porovnání exponentů} \\
x &= 2 \\
K &= \{2\}
\end{aligned}
$$

Příklad 4.7

Řešte rovnici s neznámou $y \in R$:

$$2 \cdot 5^{y+2} - 5^{y+1} = 9$$

Řešení

- Definiční obor rovnice $D = R$.
- Opět nejprve převedeme výraz na levé straně rovnice na součinový tvar.
- Z výrazů $2 \cdot 5^{y+2}$ a 5^{y+1} můžeme určitě vytknout 5^y. Tím bychom ale získali zbytečně velká čísla. Proto vytkneme největší možnou mocninu z obou výrazů, což je 5^{y+1}.
- Levá strana rovnice tedy odpovídá výrazu:
  $L(x) = 2 \cdot 5^{y+2} - 5^{y+1} = 9 \cdot 5^{y+1}$.
- Vydělíme celou rovnici 9 a potom převedeme výraz na pravé straně rovnice na mocninu se základem 5.
- Získáme rovnici $5^{y+1} = 5^0$, ve které porovnáme exponenty: $y + 1 = 0$.
  Řešením poslední rovnice je $y = -1$.
- Množina všech kořenů $K = \{-1\}$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned}
2 \cdot 5^{y+2} - 5^{y+1} &= 9 \quad D = R \\
&\quad \text{Vytkneme } 5^{y+1} \text{ z výrazu na levé straně rovnice.} \\
&\quad 2 \cdot 5^{y+2} - 5^{y+1} = 10 \cdot 5^{y+1} - 5^{y+1} = 5^{y+1} \cdot (10 - 1) = 9 \cdot 5^{y+1} \\
9 \cdot 5^{y+1} &= 9 \quad / : 9 \\
5^{y+1} &= 1 \\
5^{y+1} &= 5^0 \quad /\text{porovnání exponentů} \\
y + 1 &= 0 \quad / - 1 \\
y &= -1 \\
K &= \{-1\}
\end{aligned}$$

NAHORU

4.3. Logaritmování

Základní tvar

Dalším typem exponenciálních rovnic, které budeme řešit, jsou rovnice ve tvaru $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, kde a, b jsou různé základy. Tento typ rovnice budeme řešit tzv. logaritmováním.

> Rovnice $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ s neznámou $x \in R$ pro $a, b \in R^{+} - \{1\}$ je ekvivalentní s rovnicí
>
> $$f(x) \cdot \log_c a = g(x) \cdot \log_c b \text{ pro libovolné } c \in R^{+} - \{1\}.$$
>
> Tuto ekvivalentní úpravu budeme nazývat **logaritmování**.

Rozmyslíme si, že tato úprava nám nezmění řešení rovnice. Ukážeme, že z rovnice $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ dokážeme pomocí ekvivalentích úprav získat rovnici $f(x) \cdot \log_c a = g(x) \cdot \log_c b$.

- Definiční obor funkce $y = \log_c x$ je $D = (0, +\infty)$.
- Výrazy $a^{f(x)}, b^{g(x)}$ nabývají pouze kladných hodnot, proto jsou i výrazy $\log_c a^{f(x)}, \log_c b^{g(x)}$ definovány.
- Funkce $y = \log_c x$ je prostá. **Rovnají-li se argumenty prosté funkce, rovnají se i její funkční hodnoty.**
- Rovnice $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ je tedy ekvivalentí s rovnicí $\log_c a^{f(x)} = \log_c b^{g(x)}$.
- Upravíme výraz na levé straně této rovnice pomocí **logaritmických vět**: $L(x) = \log_c a^{f(x)} = f(x) \cdot \log_c a$.
- Stejným způsobem upravíme i výraz na pravé straně rovnice: $P(x) = \log_c b^{g(x)} = g(x) \cdot \log_c b$.
- Získali jsme rovnici $f(x) \cdot \log_c a = g(x) \cdot \log_c b$, která je ekvivaletní s původní rovnicí.

Obecně jsme úpravu logaritmování definovali pro logaritmus s libovolným základem c. V praxi za c budeme volit přímo základ a nebo b, neboť potom jeden z výrazů $\log_c a$ nebo $\log_c b$ bude rovnen jedné a rovnice se nám výrazně zjednoduší.

Příklad 4.8

Řešte rovnice s neznámou $x, y \in R$:

a) $2^x = 10$
b) $7^y = 13^{y-1}$

Řešení

a)
- Definiční obor rovnice $D = R$.
- Využijeme právě zavedenou ekvivalentní úpravu logaritmování a logaritmujeme rovnici logaritmem o základu 2: $x \cdot \log_2 2 = \log_2 10$
- Protože $\log_2 2 = 1$, dostáváme přímo řešení rovnice $x = \log_2 10$.
- Množina všech kořenů $K = \{\log_2 10\}$.

Zápis řešení:

$$
\begin{aligned}
2^x &= 9 \quad D = R \\
2^x &= 9 \quad /\text{logaritmování} \\
x \cdot \log_2 2 &= \log_2 9 \\
x &= \log_2 9 \\
K &= \{\log_2 9\}
\end{aligned}
$$

b)
- Definiční obor rovnice $D = R$.
- Logaritmujeme rovnici logaritmem o základu 13:
  $y \cdot \log_{13} 7 = (y - 1) \cdot \log_{13} 13.$
- Pomocí ekvivalentích úprav vyjádříme neznámou $y = -\frac{1}{\log_{13} -1}$.
- Množina všech kořenů $K = \{-\frac{1}{\log_{13} -1}\}$.

Zápis řešení:

$$
\begin{aligned}
7^y &= 13^{y-1} \quad D = R \\
7^y &= 13^{y-1} \quad /\text{logaritmování} \\
y \cdot \log_{13} 7 &= (y-1) \cdot \log_{13} 13 \\
y \cdot \log_{13} 7 &= y - 1 \quad / -y \\
y \cdot \log_{13} 7 - y &= -1 \\
y(\log_{13} 7 - 1) &= -1 \quad / : (\log_{13} 7 - 1) \\
y &= -\frac{1}{\log_{13} 7 - 1} \\
K &= \left\{-\frac{1}{\log_{13} 7 - 1}\right\}
\end{aligned}
$$

Cvičení 4.8

Řešte rovnice s neznámou $x, y \in R$:

$$5^{x+2} = 8$$
$$D = R$$
$$(x+2) \cdot \log_5 5 = \log_5 8$$
$$x + 2 = \log_5 8$$
$$x = \log_5 8 - 2$$
$$K = \{\log_5 8 - 2\}$$

$$3^x = 16^{x+1}$$
$$D = R$$
$$x \cdot \log_{16} 3 = (x+1) \cdot \log_{16} 16$$
$$x \cdot \log_{16} 3 = x + 1$$
$$x \cdot \log_{16} 3 - x = 1$$
$$x(\log_{16} 3 - 1) = 1$$
$$x = \frac{1}{\log_{16} 3 - 1}$$
$$K = \{\frac{1}{\log_{16} 3 - 1}\}$$

NAHORU

Úprava na základní tvar

Logaritmováním budeme řešit i rovnice, které sice nejsou ve tvaru $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, ale ekvivalentními úpravami je na tento tvar můžeme převést. Stejně jako v předchozí kapitole budeme využívat **pravidla pro práci s mocninami** a **vytýkání** mocnin z výrazů, abychom rovnici upravili na základní tvar.

Příklad 4.9

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$$2^x \cdot 3^{x-1} = 4^{x+1}$$

Řešení

- Definiční obor rovnice $D = R$.
- V rovnici se vyskytují mocniny o třech různých základech. Abychom mohli použít logaritmování, musíme rovnici převést na tvar, ve kterém se vyskytují jen dva různé základy mocnin.
- Převedeme mocninu 4^{x+1} na mocninu o základu dva: $4^{x+1} = 2^{2x+2}$.
- Vydělíme celou rovnici mocninou 2^x, abychom získali tvar $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, který můžeme logaritmovat.
- Logaritmujeme rovnici $3^{x-1} = 2^{x+2}$ logaritmem o základu 2:
  $(x-1)\cdot\log_2 3 = (x+2)\cdot\log_2 2$
- Z této rovnice ekvivalentními úpravami vyjádříme neznámou $x = \frac{2+\log_2 3}{\log_2 3-1}$.
- Množina všech kořenů $K = \{\frac{2+\log_2 3}{\log_2 3-1}\}$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned}
2^x\cdot 3^{x-1} &= 4^{x+1} \quad D=R\\
2^x\cdot 3^{x-1} &= 2^{2x+2} \quad /:2^x\\
3^{x-1} &= 2^{2x+2-x}\\
3^{x-1} &= 2^{x+2} \quad /\text{logaritmování}\\
(x-1)\cdot\log_2 3 &= (x+2)\cdot\log_2 2\\
x\log_2 3-\log_2 3 &= x+2 \quad /+\log_2 3-x\\
x\log_2 3-x &= 2+\log_2 3\\
x(\log_2 3-1) &= 2+\log_2 3 \quad /:(\log_2 3-1)\\
x &= \frac{2+\log_2 3}{\log_2 3-1}\\
K &= \left\{\frac{2+\log_2 3}{\log_2 3-1}\right\}
\end{aligned}$$

Příklad 4.10

Řešte rovnici s neznámou $y \in R$:

$$3\cdot 7^y - 7^{y-1} = 60$$

Řešení

- Definiční obor rovnice $D = R$.
- Levá strana rovnice není v součinovém tvaru, který bychom potřebovali pro logaritmování. Na součinový tvar převedeme výraz na pravé straně vytknutím mocniny 7^{y-1}:
  $L(x) = 3\cdot 7^y - 7^{y-1} = 3\cdot 7\cdot 7^{y-1} - 7^{y-1} = 7^{y-1}\cdot(21-1) = 20\cdot 7^{y-1}$
- Vydělíme celou rovnici číslem 20, abychom jí upravili na tvar $a^{f(x)} = b^{g(x)}$.
- Logaritmujeme rovnici $7^{y-1} = 3$ logaritmem o základu 7:
  $(y-1)\cdot\log_7 7 = \log_7 3$
- Z této rovnice ekvivalentními úpravami vyjádříme neznámou $y = \log_7 3 + 1$.
- Množina všech kořenů $K = \{\log_7 3 + 1\}$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned}
3\cdot 7^y - 7^{y-1} &= 60 \quad D=R\\
&\qquad \text{Vytkneme } 7^y \text{ z výrazu na levé straně rovnice.}\\
&\quad 3\cdot 7^y - 7^{y-1} = 21\cdot 7^{y-1} - 7^{y-1} = 7^{y-1}\cdot(21-1) = 20\cdot 7^{y-1}\\
20\cdot 7^{y-1} &= 60 \quad /:20\\
7^{y-1} &= 3 \quad /\text{logaritmování}\\
(y-1)\cdot\log_7 7 &= \log_7 3\\
y-1 &= \log_7 3 \quad /+1\\
y &= \log_7 3+1\\
K &= \{\log_7 3+1\}
\end{aligned}$$

4.4. Substituce

Zavedení substituce

Při řešení rovnic jsme se již setkali s tzv. substitucí (např. při řešení bikvadratické rovnice).

- Nahradili jsme některý výraz v rovnici novou neznámou.
- Rovnici s novou neznámou jsme vyřešili.
- Řešení původní rovnice jsme získali prostřednictvím použité substituce.

Úpravě rovnice s neznámou $x \in R$, kde všechny výskyty výrazu $V(x)$ nahradíme neznámou a tak, že v nové rovnici se nevyskytuje neznámá x, budeme říkat **substituce výrazu $V(x)$ neznámou a**.

Tuto úpravu budeme značit: $[S : V(x) = a]$

Při řešení rovnic používáme substituci dvakrát. Nejprve nahradíme výraz $V(x)$ novou neznámou a. Tuto úpravu značíme $[S : V(x) = a]$. Po vyřešení rovnice s neznámou a, zpětně použijeme stejnou substituci. Tentokrát nahradíme neznámou a výrazem $V(x)$, abychom získali řešení původní rovnice. Tuto zpětnou substituci budeme v řešených příkladech značit $[S : a = V(x)]$.

Použití substituce nejlépe ukážeme na příkladech.

Příklad 4.11

Řešte rovnice s neznámou $x, y, z \in R$:

a) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$
b) $5^y + 2 = \frac{3}{5^y}$
c) $3^z + 3^{1-z} = 4$

Řešení

a)
- Definiční obor rovnice $D = R$.
- Abychom mohli zavést substituci, musíme mocninu 4^x upravit: $4^x = (2^x)^2$.
- V rovnici $(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$ nahradíme všechny výrazy 2^x novou neznámou a.
- Rovnici $a^2 - 5a + 4 = 0$ s neznámou $a \in R$ vyřešíme.
- Řešením rovnice jsou čísla $a_1 = 4, a_2 = 1$.
- Zpětně nahradíme neznámou a výrazem 2^x, tj. $a_1 = 2^{x_1}, a_2 = 2^{x_2}$.
- Rovnice $2^{x_1} = 4, 2^{x_2} = 1$ vyřešíme porovnáním exponentů.
- Řešením jsou čísla $x_1 = 2, x_2 = 0$.
- Množina všech kořenů $K = \{0, 2\}$.

Zápis řešení:

$$
\begin{array}{rcll}
4^x - 5 \cdot 2^x + 4 & = & 0 & D = R \\
(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 & = & 0 & /\text{substituce } [S : 2^x = a] \\
a^2 - 5a + 4 & = & 0 & \\
(a-4)(a-1) & = & 0 & \\
a_1 = 4 & \vee & a_2 = 1 & /[S : a = 2^x] \\
2^{x_1} = 4 & & 2^{x_2} = 1 & \\
2^{x_1} = 2^2 & & 2^{x_2} = 2^0 & /\text{porovnání exponentů} \\
x_1 = 2 & \vee & x_2 = 0 & \\
K & = & \{0, 2\} &
\end{array}
$$

b)
- Definiční obor rovnice $D = R$.
- V rovnici $5^y + 2 = \frac{3}{5^y}$ nahradíme všechny výrazy 5^y novou neznámou b.
- Získanou rovnici $b + 2 = \frac{3}{b}$ s neznámou $b \in R$ vyřešíme.
- Navíc můžeme celou rovnici násobit neznámou b, neboť víme, že není nikdy nulová. Výraz 5^y je totiž vždy kladný.
- Řešením rovnice jsou čísla $b_1 = -3, b_2 = 1$.
- Zpětně nahradíme neznámou b výrazem 5^y.
- Získáme rovnice $5^{y_1} = -3, 5^{y_2} = 1$.
- První rovnice $5^{y_1} = -3$ nemá řešení. Mocnina s kladným základem je vždy kladná, proto se nemůže rovnat -3.
- Druhou rovnici $5^{y_2} = 1$ vyřešíme porovnáním exponentů: $y_2 = 0$
- Množina všech kořenů $K = \{0\}$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned}
5^y + 2 &= \frac{3}{5^y} \quad D = R \\
5^y + 2 &= \frac{3}{5^y} \quad /\text{substituce } [S : 5^y = b] \\
b + 2 &= \frac{3}{b} \quad / \cdot b \\
b^2 + 2b &= 3 \quad / - 3 \\
b^2 + 2b - 3 &= 0 \\
(b+3)(b-1) &= 0 \\
b_1 = -3 &\vee \ b_2 = 1 \quad /[S : b = 5^y] \\
5^{y_1} = -3 & \quad 5^{y_2} = 1 \\
y_1 \in \emptyset & \quad 5^{y_2} = 5^0 /\text{porovnání exponentů} \\
& \quad y_2 = 0 \\
K &= \{0\}
\end{aligned}$$

c)
- Definiční obor rovnice $D = R$.
- Abychom mohli zavést substituci, musíme mocninu 3^{1-z} upravit: $3^{1-z} = 3 \cdot 3^{-z} = \frac{3}{3^z}$
- V rovnici $3^z + \frac{3}{3^z} = 4$ nahradíme všechny výrazy 3^z novou neznámou c.
- Rovnici $c + \frac{3}{c} = 4$ s neznámou $c \in R$ vyřešíme. Opět máme zajištěno, že $c \neq 0$.
- Řešením jsou čísla $c_1 = 3, c_2 = 1$.
- Zpětně nahradíme neznámou c výrazem 3^z a získané rovnice řešíme porovnáním exponentů.
- Řešením jsou čísla $z_1 = 1, z_2 = 0$.
- Množina všech kořenů $K = \{0, 1\}$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned}
3^z + 3^{1-z} &= 4 \quad D = R \\
3^z + \frac{3}{3^z} &= 4 \quad /\text{substituce } [S : 3^z = c] \\
c + \frac{3}{c} &= 4 \quad / \cdot c \\
c^2 + 3 &= 4c \quad / - 4c \\
c^2 - 4c + 3 &= 0 \\
(c-3)(c-1) &= 0 \\
c_1 = 3 &\vee \ c_2 = 1 \quad /[S : c = 3^z] \\
3^{z_1} = 3 & \quad 3^{z_2} = 1 \\
3^{z_1} = 3^1 & \quad 3^{z_2} = 3^0 \quad /\text{porovnání exponentů} \\
z_1 = 1 &\vee \ z_2 = 0 \\
K &= \{0, 1\}
\end{aligned}$$

Cvičení 4.11

Řešte rovnice s neznámou $x, y \in R$:

$$9^x - 80 \cdot 3^x = 81$$
$$D = R$$
$$(3^x)^2 - 80 \cdot 3^x = 81$$
$$a^2 - 80a = 81$$
$$a^2 - 80a - 81 = 0$$
$$(a - 81)(a + 1) = 0$$
$$a_1 = 81, \quad a_2 = -1$$
$$3^{x_1} = 81, \quad 3^{x_2} = -1$$
$$3^{x_1} = 3^4, \quad x_2 \in \emptyset$$
$$x_1 = 4$$
$$K = \{4\}$$

$$6^{z+1} + 6^{1-z} = 37$$
$$D = R$$
$$6 \cdot 6^z + \tfrac{6}{6^z} = 37$$
$$6a + \tfrac{6}{a} = 37$$
$$6a^2 - 37a + 6 = 0$$
$$(a - 6)(6a - 1) = 0$$
$$a_1 = 6, \quad a_2 = \tfrac{1}{6}$$
$$6^{z_1} = 6, \quad 6^{z_2} = \tfrac{1}{6}$$
$$6^{z_1} = 6^1, \quad 6^{z_2} = 6^{-1}$$
$$z_1 = 1, \quad z_2 = -1$$
$$K = \{-1, 1\}$$

NAHORU

Rovnice, které lze řešit substitucí

Neexistuje univerzální návod, pomocí kterého bychom určili, jaký výraz máme nahradit novou neznámou. Záleží zejména na naší početní praxi a předvídavosti. V následujících příkladech ukážeme další rovnice, které lze řešit vhodnou substitucí. Než si projdete řešení, rozmyslete si, který výraz byste nahradili novou neznámou.

Příklad 4.12

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$$16^{x-0,5} + 16^{0,5-x} = \frac{17}{4}$$

Řešení

- Definiční obor rovnice $D = R$.
- Upravíme výraz $16^{0,5-x}$, abychom mohli zavést substituci: $16^{0,5-x} = 16^{-1\cdot(x-0,5)} = \frac{1}{16^{x-0,5}}$.
- Všechny výrazy $16^{x-0,5}$ nahradíme novou neznámou a.
- Rovnici $a + \frac{1}{a} = \frac{17}{4}$ s neznámou $a \in R$ vyřešíme.
- Řešením rovnice jsou čísla $a_1 = 4, a_2 = \frac{1}{4}$.
- Zpětně nahradíme neznámou a výrazem $16^{x-0,5}$ a vzniklé rovnice vyřešíme porovnáním exponentů.
- Řešením jsou čísla $x_1 = 1, x_2 = 0$.
- Množina všech kořenů $K = \{0, 1\}$.

$$
\begin{aligned}
16^{x-0,5}+16^{0,5-x} &= \frac{17}{4} \quad D=R\\
&\quad \text{Upravíme výraz } 16^{0,5-x}.\\
&\quad 16^{0,5-x}=16^{-1\cdot(x-0,5)}=\frac{1}{16^{x-0,5}}\\
16^{x-0,5}+\frac{1}{16^{x-0,5}} &= \frac{17}{4} \quad /\text{substituce } [S:16^{x-0,5}=a]\\
a+\frac{1}{a} &= \frac{17}{4} \quad /\cdot 4a\\
4a^2+4 &= 17a \quad /\cdot -17a\\
4a^2-17a+4 &= 0\\
(4a-1)(a-4) &= 0\\
a_1=\frac{1}{4} &\vee \quad a_2=4 \quad /[S:a=16^{x-0,5}]\\
16^{x_1-0,5}=\frac{1}{4} & \quad\;\; 16^{x_2-0,5}=4\\
16^{x_1-0,5}=16^{-\frac{1}{2}} & \quad\;\; 16^{x_2-0,5}=16^{\frac{1}{2}} \quad /\text{porovnání exponentů}\\
x_1-0,5=-\frac{1}{2} & \quad\;\; x_2-0,5=\frac{1}{2} \quad /+0,5\\
x_1=0 &\vee \quad x_2=1\\
K &= \{0,1\}
\end{aligned}
$$

Příklad 4.13

Řešte rovnici s neznámou $y \in R$:

$$2\cdot(\tfrac{1}{4})^y-3(\tfrac{1}{2})^y=[1+(\tfrac{1}{2})^y]\cdot(\tfrac{1}{4})^{-1}$$

Řešení

- Definiční obor rovnice $D=R$.
- Upravíme výraz $(\frac{1}{4})^y$, abychom mohli zavést substituci: $(\frac{1}{4})^y=(\frac{1}{2})^{2y}$.
- Všechny výrazy $(\frac{1}{2})^y$ nahradíme novou neznámou b.
- Rovnici $2b^2-3b=[1+b]\cdot 4$ s neznámou $b\in R$ vyřešíme.
- Řešením rovnice jsou čísla $b_1=-\frac{1}{2}, b_2=4$.
- Zpětně nahradíme neznámou b výrazem $(\frac{1}{2})^y$ a vzniklé rovnice vyřešíme porovnáním exponentů.
- První rovnice nemá řešení a řešením druhé rovnice je číslo $y_2=-2$.
- Množina všech kořenů $K=\{-2\}$.

Zápis řešení:

$$
\begin{aligned}
2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^y-3\left(\frac{1}{2}\right)^y &= \left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^y\right]\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \quad D=R\\
2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2y}-3\left(\frac{1}{2}\right)^y &= \left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^y\right]\cdot 4 \quad /\text{substituce } \left[S:\left(\frac{1}{2}\right)^y=b\right]\\
2b^2-3b &= [1+b]\cdot 4\\
2b^2-3b &= 4+4b/\cdot -4-4b\\
2b^2-7b-4 &= 0\\
(2b+1)(b-4) &= 0\\
b_1=-\frac{1}{2} &\vee \quad b_2=4 \quad /\left[S:b=\left(\frac{1}{2}\right)^y\right]\\
\left(\frac{1}{2}\right)^{y_1}=-\frac{1}{2} & \quad\;\; \left(\frac{1}{2}\right)^{y_2}=4\\
y_1\in\emptyset & \quad\;\; \left(\frac{1}{2}\right)^{y_2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \quad /\text{porovnání exponentů}\\
& \quad\;\; y_2=-2\\
K &= \{-2\}
\end{aligned}
$$

4.5. Speciální případy exponenciálních rovnic

V této kapitole nebudeme zavádět žádné další metody řešení exponenciálních rovnic. Všechny příklady, které uvedeme, lze řešit pomocí metod, které již známe. Jsou to ale příklady, ve kterých je nutno provést úpravu, která není zcela běžná a nemusela by nás napadnout.

V prvním příkladu ukážeme, jak upravit rovnici, ve které se vyskytují mocniny o třech různých základech, na mocniny o stejném základu. Musí to být ovšem základy, které mají další speciální vlastnosti.

Příklad 4.14

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$$9^x + 15^x = 25^x$$

Řešení

- Definiční obor rovnice $D = R$.
- Rovnice obsahuje mocniny o třech různých základech, a proto zatím nemůžeme použít žádnou z probíraných metod. Musíme nejdříve rovnici upravit.
- Všimněme si, že rozklad základů mocnin na součin prvočísel je něčím zvláštní:
  $9 = 3 \cdot 3,\ 15 = 3 \cdot 5,\ 25 = 5 \cdot 5$
- Vydělíme-li celou rovnici libovolnou z těchto tří mocnin, dokážeme zkrátit některé výrazy. Ukážeme, co se stane, když dělíme např. mocninou 25^x.
  $9^x : 25^x = (\frac{9}{25})^x = (\frac{3}{5})^{2x}$
  $15^x : 25^x = (\frac{15}{25})^x = (\frac{3}{5})^x$
  $25^x : 25^x = 1$
- Po této úpravě vznikne rovnice $(\frac{3}{5})^{2x} + (\frac{3}{5})^x = 1$, kterou lze řešit substitucí $S : (\frac{3}{5})^x = a$.
- Rovnici $a^2 + a = 1$ vyřešíme pomocí diskriminantu: $a_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, a_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
- Zpětně nahradíme za neznámou a výraz $(\frac{3}{5})^x$.
- První rovnice $(\frac{3}{5})^{x_1} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ nemá řešení, protože na pravé straně rovnice je záporné číslo.
- Druhou rovnici $(\frac{3}{5})^{x_2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ vyřešíme logaritmováním. $x_2 = \log(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}) : \log(\frac{3}{5})$
- Množina všech kořenů $K = \{\log(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}) : \log(\frac{3}{5})\}$.

Zápis řešení:

$$
\begin{aligned}
9^x + 15^x &= 25^x \quad D = R\\
9^x + 15^x &= 25^x \quad / : 25^x\\
\frac{9^x}{25^x} + \frac{15^x}{25^x} &= 1\\
\left(\frac{9}{25}\right)^x + \left(\frac{15}{25}\right)^x &= 1\\
\left(\frac{3}{5}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{5}\right)^x &= 1 \quad \text{/substituce } [S : \left(\frac{3}{5}\right)^x = a]\\
a^2 + a &= 1 \quad / - 1\\
a^2 + a - 1 &= 0
\end{aligned}
$$

Vyřešíme kvadratickou rovnici.

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5$$

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & \vee \quad a_2 &= \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad /[S : a = \left(\frac{3}{5}\right)^x]\\
\left(\frac{3}{5}\right)^{x_1} &= \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & \left(\frac{3}{5}\right)^{x_2} &= \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{/logaritmování}\\
x_1 &\in \emptyset & x_2 \cdot \log\frac{3}{5} &= \log\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad / : \log\frac{3}{5}\\
& & x_2 &= \frac{\log\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{\log\frac{3}{5}}\\
& & x_2 &\doteq 0,942
\end{aligned}
$$

$$K = \left\{ \frac{\log\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{\log\frac{3}{5}} \right\}$$

NAHORU

Poslední exponenciální rovnice, jejíž řeší ukážeme, má opět speciální tvar. Obsahuje dvě mocniny s různými základy, pro které platí, že jejich součin je roven 1.

Příklad 4.15

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$$(3 + \sqrt{8})^x + (3 - \sqrt{8})^x = 34$$

Řešení

- Abychom mohli určit definiční obor této rovnice, musíme ověřit, že základy všech mocnin jsou kladná čísla různá od 1. Oba základy v naší rovnici to splňují, proto $D = R$.
- Dále si můžeme všimnout, že součin základů mocnin v rovnici je jedna: $(3 + \sqrt{8})(3 - \sqrt{8}) = 3^2 - (\sqrt{8})^2 = 9 - 8 = 1$
- Pokud vynásobíme celou rovnici jednou z těchto mocnin, rovnice se nám zjednoduší, protože $(3 - \sqrt{8})^x \cdot (3 + \sqrt{8})^x = [(3 - \sqrt{8}) \cdot (3 + \sqrt{8})]^x = [1]^x = 1$.
  Po úpravě se v rovnici budou vyskytovat jen mocniny se stejným základem.
- Po vynásobení rovnice výrazem $(3 + \sqrt{8})^x$ vznikne rovnice $(3 + \sqrt{8})^{2x} + 1 = 34 \cdot (3 + \sqrt{8})$, kterou vyřešíme substitucí $S : (3 + \sqrt{8})^x = a$.
- Kořeny rovnice $a^2 + 1 = 34a$ jsou $a_{1,2} = 17 \pm \sqrt{288}$.
- Po zpětné substituci vyřešíme rovnici $(3 + \sqrt{8})^{x_{1,2}} = 17 \pm \sqrt{288}$ logaritmováním.
- Rovnici řeší $x_{1,2} = \log(17 \pm \sqrt{288}) : \log(3 + \sqrt{8})$
- Podle kalkulačky je přibližná hodnota řešení $x_{1,2} \doteq \pm 2$. V poznámce je ukázáno, že se jedná o přesnou hodnotu řešení.
- Množina všech kořenů $K = \{-2, 2\}$.

Poznámka

Někoho možná překvapilo, že vyšla dvě celá čísla a možná si položil otázku, zda se na tato čísla nedá přijít vhodnou úpravou, aniž by bylo potřeba použít kalkulačku. Pokusíme se nyní ukázat, jak na to.

$(3+\sqrt{8})^x = 17+\sqrt{288}$

$(3+\sqrt{8})^x = 17+6\sqrt{8}$

$(3+\sqrt{8})^x = 9+6\sqrt{8}+8$

$(3+\sqrt{8})^x = (3+\sqrt{8})^2$

$x = 2$

Druhý kořen získáme, když si uvědomíme, že $(3+\sqrt{8})^x = (3-\sqrt{8})^{-x}$.

Skryj

Zápis řešení:

$$\begin{aligned}
(3+\sqrt{8})^x+(3-\sqrt{8})^x &= 34 \qquad D=R \\
(3+\sqrt{8})^x+(3-\sqrt{8})^x &= 34 \qquad /\cdot(3+\sqrt{8})^x \\
(3+\sqrt{8})^{2x}+(3-\sqrt{8})^x\cdot(3+\sqrt{8})^x &= 34\cdot(3+\sqrt{8})^x
\end{aligned}$$

Upravíme druhý člen na levé straně rovnice.

$$(3-\sqrt{8})^x\cdot(3+\sqrt{8})^x = \left[(3-\sqrt{8})\cdot(3+\sqrt{8})\right]^x = (9-8)^x = 1$$

$$\begin{aligned}
(3+\sqrt{8})^{2x}+1 &= 34\cdot(3+\sqrt{8})^x \qquad /\text{substituce } [S:(3+\sqrt{8})^x=a] \\
a^2+1 &= 34a \qquad /-34a \\
a^2-34a+1 &= 0
\end{aligned}$$

Vyřešíme kvadratickou rovnici.

$$D = 34^2-4\cdot1\cdot1 = 1156-4 = 1152$$

$$a_{1,2} = \frac{34\pm\sqrt{1152}}{2} = \frac{34\pm2\sqrt{288}}{2} = 17\pm\sqrt{288}$$

$$\begin{aligned}
a_{1,2} &= 17\pm\sqrt{288} \qquad /[S:a=(3+\sqrt{8})^x] \\
(3+\sqrt{8})^{x_{1,2}} &= 17\pm\sqrt{288} \qquad /\text{logaritmování} \\
x_{1,2}\log(3+\sqrt{8}) &= \log(17\pm\sqrt{288}) \qquad /:\log(3+\sqrt{8}) \\
x_{1,2} &= \frac{\log(17\pm\sqrt{288})}{\log(3+\sqrt{8})} \\
x_1=2 &\vee x_2=-2 \\
K &= \{\pm2\}
\end{aligned}$$

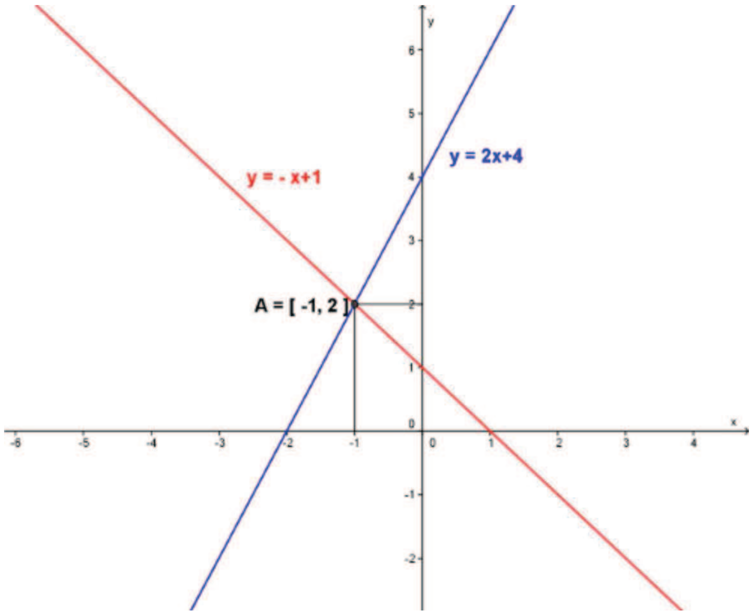
NAHORU

4.6. Grafické řešení exponenciálních rovnic

U exponenciálních rovnic nemáme žádný univerzální algoritmus, pomocí kterého bychom určili řešení každé exponenciální rovnice. Některé exponenciální rovnice jsme se naučili řešit v předchozích kapitolách. Další rovnice můžeme řešit přibližně pomocí numerických metod a počítačů. V této kapitole ukážeme, jak přibližně řešit takové exponenciální rovnice za pomoci grafu funkce.

Vztah mezi rovnicí a grafem funkce

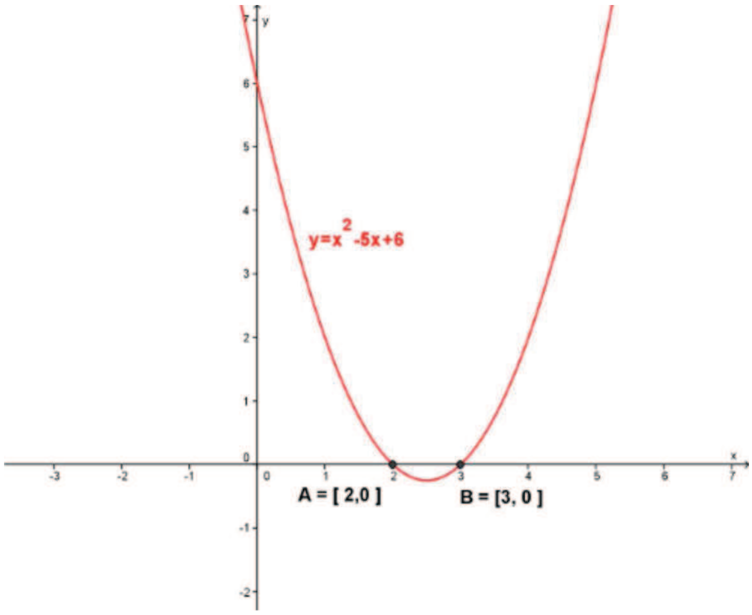
Často lze při řešení rovnic využít grafy funkcí. Připomeneme, jak lze graficky řešit lineární rovnici $2x + 4 = -x + 1$. Výraz na levé straně rovnice si představíme jako předpis funkce $y = 2x + 4$ a výraz na pravé straně rovnice jako předpis funkce $y = -x + 1$. Řešením této rovnice je x-ová souřadnice průsečíků grafů těchto funkcí.



Grafy funkcí $y = 2x + 4$ a $y = -x + 1$ vidíte na obrázku. Průsečíkem grafů je bod $A = [-1, 2]$. Řešením rovnice $2x + 4 = -x + 1$ je tedy číslo $x = -1$.

Jindy je výhodnější, když všechny výrazy v rovnici převedeme na levou stranu rovnice a na pravé straně rovnice nám zbyde pouze 0. Řešením takové rovnice jsou potom x-ové souřadnice průsečíků grafu funkce s osou x, protože grafem funkce $y = 0$ je přímka totožná s osou x.

Ukážeme, jak graficky vyřešit rovnici $x^2 = 5x - 6$. Převedeme všechny výrazy na levou stranu rovnice a získáme rovnici $x^2 - 5x + 6 = 0$. Nakreslíme graf funkce $y = x^2 - 5x + 6$ a najdeme jeho průsečíky s osou x.



Graf funkce $y = x^2 - 5x + 6$ vidíte na obrázku. Protíná osu x v bodech $A = [2, 0]$ a $B = [3, 0]$. Řešením rovnice $x^2 = 5x - 6$ jsou tedy čísla $x_1 = 2, x_2 = 3$.

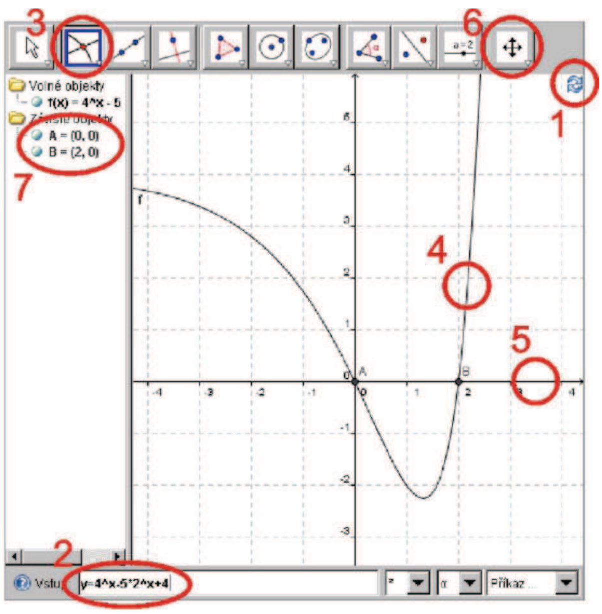
NAHORU

Využití appletu a jeho ovládání

Ke grafickému řešení rovnice využijeme program, který umí vykreslit graf funkce a zjistit jeho průsečíky s osou x. K takovým programům patří **GEOGEBRA**.

Na těchto stránkách je vystaven Java applet, pomocí kterého můžeme řešit exponenciální rovnice, aniž bychom museli mít tento program nainstalovaný. Přesný popis ovládání Java appletu nyní představíme. Samotný **applet najdete na konci této kapitoly**.

Java applet, který máme k dispozici, lze použít k mnoha účelům (např. k dynamickým konstrukcím). My ukážeme jeho využití při řešení rovnic. Všechny důležité prvky, které budeme potřebovat, jsou vyznačeny na následujícím obrázku a jsou očíslovány dle pořadí, ve kterém je budeme využívat.



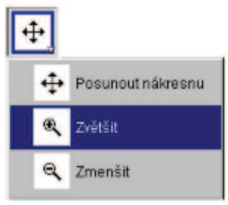
Nyní popíšeme jednotlivé prvky, které jsme zvýraznili v předchozím obrázku.

1. Tlačítko k obnovení appletu.
2. Vstupní pole pro předpis funkce.
3. Nástroj k určení průsečíku.
4. Graf funkce - první objekt k určení průsečíku.
5. Osa x - druhý objekt k určení průsečíku.
6. Nástroje pro posunutí, přiblížení a oddálení.
7. Souřadnice průsečíků.

Podrobnosti

1. Toto tlačítko slouží k obnovení appletu. Využijete ho na začátku příkladu, abyste smazali předchozí řešení. Pokud v průběhu řešení uděláte chybu, kterou nebudete umět napravit, smažete tímto tlačítkem obsah appletu, abyste mohli začít znovu.
2. Vstupní pole slouží k zadání funkce. Klikněte na bílé pole a z klávesnice zadejte předpis funkce, jejíž graf chcete vykreslit. Zadávání předpisu funkce bude vysvětleno v následujícím odstavci.
3. Tento nástroj slouží k určení průsečíku. Pokud nemáte tento násroj v nabídce, zvolte ho pomocí rozbalovacího menu. Potom klikněte na ikonu s průsečíkem. Než přistoupíte k bodům 4 a 5 je nutné mít tento nástroj aktivní. To poznáte tak, že okolo tohoto nástoje je modrý rámeček.

4. Klikněte na graf funkce, který se vykreslil. Tím zvolíte první objek k určení průsečíku.
5. Klikněte na osu x. Tím zvolíte druhý objekt k určení průsečíku. V ten okamžik se Vám na průsečíku grafu s osou x objeví bod, který se pojmenuje podle prvního volného písmenka v abecedě.
6. V bodě 4 a 5 jste určili jeden z průsečíků grafu s osou x. Je ale možné, že průsečíků s osou x je více. Pokud přímo vidíte, že nějaký průsečík s osou x existuje a program ho nenašel, určíte tento průsečík jako v bodě 4 a 5. Tentokrát klikněte na graf i osu poblíž průsečíku, který chcete určit. Pokud tušíte, že existuje průsečík gafu s osou x mimo Vaši obrazovku, použijte nástroje pro posunutí, zmenšení a zvětšení grafu.



7. Nakonec odečtěte přibližné řešení rovnice. Jsou to x-ové souřadnice průsečíků s osou x.

Skryj

Zbývá ukázat, jak z klávesnice zadat předpis funkce (bod 2 v našem postupu). Do příkazové řádky napíšeme " $y =$ " a následuje výraz s jedinou neznámou x. Pravidla při psaní výrazů jsou shrnuty v následující tabulce.

Operace	**Matematický zápis**	**Vstup appletu**
Aritmetické operace	$+, -, \cdot, :$	+,-,*,/
Obecná mocnina	a^b	a^(b)
Obecná odmocnina	$\sqrt[b]{a}$	a^(1/b)
Absolutní hodnota	$\lvert x \rvert$	abs(x)
Goniometrické funkce	sin x, cos x tg x, cotg x	sin(x), cos(x) tan(x), 1/(tan(x))

Místo desetinné čárky je nutné psát tečku!
Je lepší psát * pro každou operaci násobení, přestože jí často v matematickém zápisu vynecháváme!

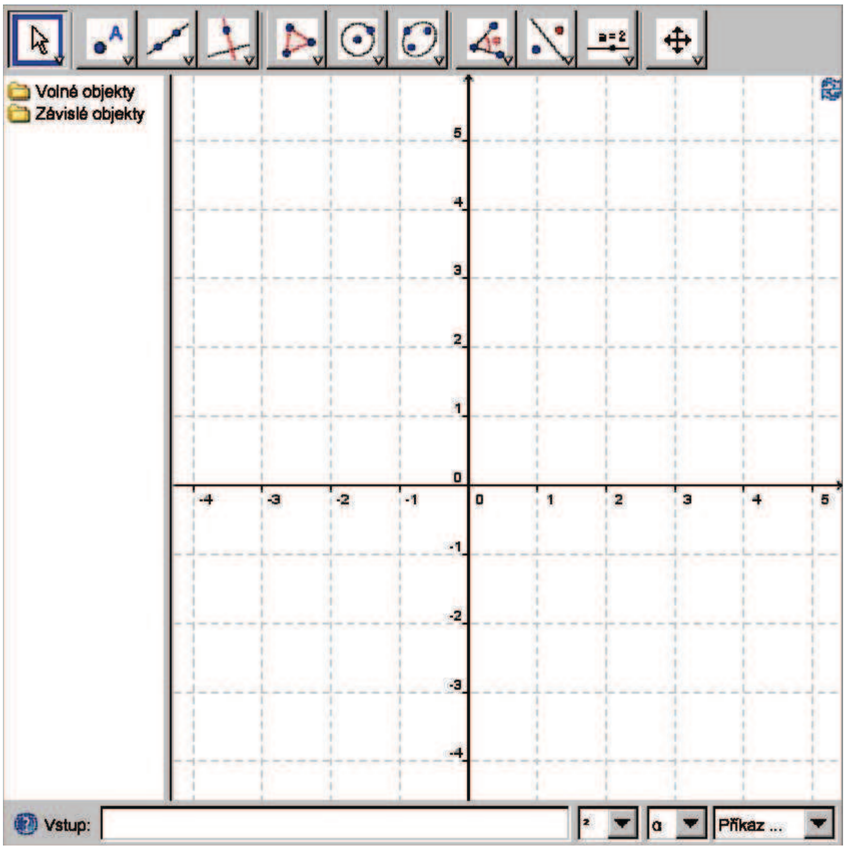
Na závěr této části uvedeme, jak bychom zadali předpisy některých funkcí do Java appletu.

Matematický zápis	Vstup appletu
$y = x^2 - 4x + 5$	y=x^2-4*x+5
$y = \sqrt{x+3} + 1$	y=(x+3)^(1/2)+1
$y = \lvert\lvert x-1\rvert - 2\rvert - 3$	y=abs(abs(x-1)-2)-3
$y = 3^{x+2} - 27$	y=3^(x+2)-27
$y = 2^{x^2-3x+1} - 5$	y=2^(x^2-3*x+1)-5

NAHORU

Grafické řešení rovnic

Následující applet nám bude sloužit ke grafickému řešení exponenciálních rovnic.



Příklad 4.16

Řešte graficky s využitím appletu rovnici s neznámou $x \in R$:

$$4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$$

Řešení

Budeme postupovat přesně dle **instrukcí**, popsaných v předchozí části.

- Do vstupního pole zadáme předpis funkce y=4^x-5*2^x+4 .
- Najdeme průsečíky grafu funkce s osou x.
- Jsou jím body $[0, 0]$, $[2, 0]$.
- Řešením této rovnice jsou tedy x-ové souřadnice těchto bodů.
- $K = \{0, 2\}$

Tento příklad byl použit při popisu ovládání appletu. Jeho řešení tedy odpovídá **tomuto obrázku**.

Tuto rovnici jsme již řešili v **příkladu 4.11** pomocí substituce a můžeme ověřit, že jejím řešením jsou stejná čísla.

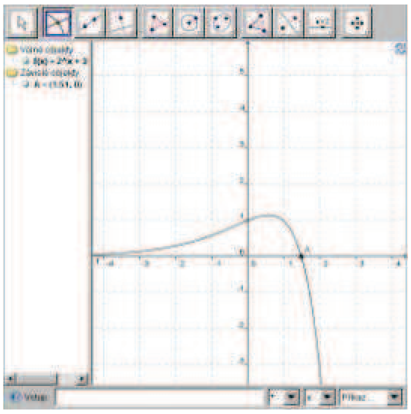
Cvičení 4.16

Řešte graficky s využitím appletu rovnice s neznámou $x \in R$:

$$2^x + 3^x = 4^x$$

$$2^x + 3^x - 4^x = 0$$

y=2^x+3^x-4^x

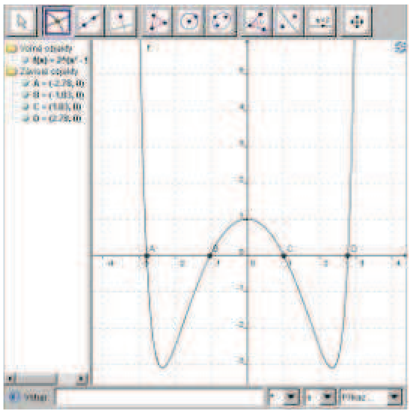


$$K = \{1, 51\}$$

$$2^{x^2-5} = x^2 - 1$$

$$2^{x^2-5} - x^2 + 1 = 0$$

y=2^(x^2-5)-x^2+1



$$K = \{\pm 1, 03; \pm 2, 78\}$$

NAHORU

5. Logartimické rovnice

5.1. Logartimická rovnice

Logaritmickou rovnicí nazýváme každou rovnici, ve které je neznámá v argumentu nebo v základu nějakého logaritmu.

Nejprve opět upřesníme pojem logaritmické rovnice.

Příklad 5.1
Rozhodněte, zda se jedná o logaritmickou rovnici s neznámou $x \in R$:

a) $\log_6 (x^2 - 4x + 7) = 2$
b) $\log_3 9 = 4x$
c) $\log_x 16 = \log_2 x$

Řešení:
Logaritmická rovnice musí mít neznámou v argumentu nebo v základu nějakého logaritmu:

a) Rovnice $\log_6 (x^2 - 4x + 7) = 2$ je logaritmickou rovnicí. Neznámá x je v argumentu logaritmu $\log_6 (x^2 - 4x + 7)$.
b) Rovnice $\log_3 9 = 4x$ není logaritmickou rovnicí. Neznámá x není v argumentu ani základu žádného logaritmu. Protože $\log_3 9 = 2$, jedná se o lineární rovnici $2 = 4x$.
c) Rovnice $\log_x 16 = \log_2 x$ je logaritmickou rovnicí. Neznámá x je v základu logaritmu $\log_x 16$ i v argumentu logaritmu $\log_2 x$.

Co znamená **vyřešit** rovnici a **postup při řešení** rovnic jsme si již připomněli v kapitole o **exponenciálních rovnicích.**

NAHORU

Definiční obor

Před samotným řešením rovnice nejprve určujeme její **definiční obor**. U exponenciálních rovnic bylo určení definičního oboru snadné, protože v exponentu mocniny může být libovolné reálné číslo. Logaritmus je však definován pouze pro **argumenty větší než** nula a pro **kladné základy různé od jedné** (podobně jako druhá odmocnina je definovaná pouze pro čísla větší nebo rovna nule). Do definičního oboru tedy patří čísla, pro která je :

- argument logaritmu větší než nula,
- základ logaritmu větší než nula a různý od jedné.

Definiční obor rovnice je někdy obtížné určit. Může se dokonce stát, že určení definičního oboru je náročnější než samotné řešení rovnice. V tomto případě **definiční obor určovat nebudeme**, ale na konci řešení musíme pro **každý případný kořen provést zkoušku**.

Určení definičního oboru ukážeme na příkladě. Jedná se vždy o řešení nerovnic.

Příklad 5.2

Určete definiční obory rovnic s neznámou $x, y \in R$:

a) $\log_5 (3x + 2) - 5 = 0$

b) $\log_{y+2} 8 = \frac{1}{2}$

Řešení:

a)
- Argument logaritmu musí být kladný. Řešíme tedy nerovnici $(3x + 2) > 0$.
- Převedeme číslo 2 na pravou stranu nerovnice a celou nerovnici vydělíme číslem 3.
- Získáme nerovnici $x > -\frac{2}{3}$, jejímž řešením jsou $x \in (-\frac{2}{3}, \infty)$.
- Definiční obor rovnice je $D = (-\frac{2}{3}, \infty)$.

b)
- Základ logaritmu musí být kladný a různý od jedné.
- Nejprve tedy vyřešíme nerovnici $y + 2 > 0$, jejímž řešením jsou $y \in (-2, \infty)$.
- Dále přidáme podmínku $y + 2 \neq 1$, tedy $y \neq -1$.
- V definičním oboru jsou čísla, pro která platí obě podmínky: $D = (-2, -1) \cup (-1, \infty)$.

Protože se v této práci předpokládá, že již ovládáte řešení základních typů nerovnic, nebudeme dále popisovat, jak určit definiční obor logaritmické rovnice. Pokud Vám toto téma činí problémy, využijte webovou aplikaci věnovanou **řešení rovnic a nerovnic**.

NAHORU

Typy logaritmických rovnic

Opět nemáme žádný univerzální algoritmus, pomocí kterého bychom nalezli řešení každé logaritmické rovnice. Naučíme se několik základních metod, které využijeme při řešení konkrétních typů logaritmických rovnic. Tyto metody si nazveme:

- porovnání argumentů včetně převodu čísla na logaritmus
- aplikace logaritmických vět - sčítání, odčítání a násobky logaritmů
- substituce
- úpravy rovnic - logaritmování, převod neznámé ze základu do argumentu logaritmu

Na konci této kapitoly ukážeme, jak lze další typy logaritmických rovnic řešit pomocí numerických metod a počítačů.

NAHORU

5.2. Porovnání argumentů

Základní úprava

Nejjednodušším typem logaritmické rovnice je rovnice ve tvaru $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ nebo rovnice, které lze ekvivalentními úpravami převést na tento tvar.

Protože je logaritmická funkce prostá, platí: rovnají-li se funkční hodnoty logaritmické funkce, rovnají se i její argumenty. V rovnici $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ porovnáme argumenty a získáme rovnici $f(x) = g(x)$. Získali jsme tak další ekvivalentní úpravu rovnice:

Rovnice $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ s neznámou $x \in R$ pro $a \in R^+ - \{1\}$ je ekvivalentní s rovnicí

$$f(x) = g(x)$$

za předpokladu, že $f(x) > 0$ a $g(x) > 0$.
Tuto ekvivalentní úpravu budeme nazývat **porovnání argumentů**.

Příklad 5.3

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$$\log_4 (x+2) = \log_4 (4-x)$$

Řešení

- Do definičního oboru rovnice patří všechna reálná čísla, pro která je argument logaritmu větší než nula.
- Řešíme tedy soustavu dvou nerovnic $x+2 > 0$ a $4-x > 0$.
- První nerovnici řeší $x \in (-2, +\infty)$ a druhou nerovnici $x \in (-\infty, 4)$.
- Do definičního oboru patří čísla, která leží v obou intervalech: $D = (-2, 4)$.
- Na levé i pravé straně rovnice se nachází logaritmus se stejným základem. Použijeme právě zavedenou ekvivalentí úpravu a porovnáme argumenty logaritmů na obou stranách rovnice.
- Získáme rovnici $x+2 = 4-x$, jejímž řešením je $x = 1$.
- Číslo 1 leží v definičním oboru rovnice, proto $K = \{1\}$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned}
x+2 &> 0 \qquad x \in (-2, +\infty) \\
4-x &> 0 \qquad x \in (-\infty, 4) \\
D &= (-2, 4) \\
\log_4(x+2) &= \log_4(4-x) \quad /\text{porovnání argumentů} \\
x+2 &= 4-x \quad /+x-2 \\
2x &= 2 \quad /:2 \\
x &= 1 \\
K &= \{1\}
\end{aligned}$$

Cvičení 5.3

Řešte rovnice s neznámou $x, y \in R$:

$\log_2(2x+5) = \log_2 1$	$\log(2y+3) = \log(y-2)$
$D = (-\frac{2}{5}, +\infty)$	$D = (2, +\infty)$
$2x+5 = 1$	$2y+3 = y-2$
$x = -2$	$y = -5$
$-2 \in D$	$-5 \notin D$
$K = \{-2\}$	$K = \emptyset$

NAHORU

Převod čísla na logaritmus

Může se stát, že na jedné straně rovnice se místo logaritmu nachází číslo. Potom musíme nejprve toto **číslo převést na logaritmus** o základu, který se vyskytuje na druhé straně rovnice. Podrobný popis řešení takových rovnic je uveden v následujícím příkladu.

Příklad 5.4

Řešte rovnice s neznámou $x \in R$:

a) $\log_3(2x+1) = 3$
b) $\log_{\frac{1}{2}}(2-x) = -2$

Řešení

a)
- Definiční obor rovnice $D = (-\frac{1}{2}, +\infty)$.
- Číslo 3 na pravé straně rovnice převedeme na logaritmus se základem 3: $3 = \log_3 27$.
- Po dosazení logaritmu za číslo 3 získáme rovnici $\log_3(2x+1) = \log_3 27$, ve které můžeme porovnat agrumenty.
- Získáme ekvivalentí rovnici $2x+1 = 27$, jejímž řešením je $x = 13$.
- Číslo 13 leží v definičním oboru rovnice, proto $K = \{13\}$.

Zápis řešení:

$$2x+1 > 0 \qquad x \in (-\frac{1}{2}, +\infty)$$
$$D = (-\frac{1}{2}, +\infty)$$

$$
\begin{aligned}
\log_3(2x+1) &= 3 \\
& \text{Převedeme číslo 3 na logaritmus o základu 3.} \\
& \quad 3 = \log_3 27 \\
\log_3(2x+1) &= \log_3 27 \quad /\text{porovnání argumentů} \\
2x+1 &= 27 \quad /-1 \\
2x &= 26 \quad /:2 \\
x &= 13 \\
K &= \{13\}
\end{aligned}
$$

b)
- Definiční obor rovnice $D = (-\infty, 2)$.
- Číslo -2 na pravé straně rovnice převedeme na logaritmus se základem $\frac{1}{2}$: $-2 = \log_{\frac{1}{2}} 4$.
- Po dosazení logaritmu za číslo -2 získáme rovnici $\log_{\frac{1}{2}}(2-x) = \log_{\frac{1}{2}} 4$, ve které můžeme porovnat agrumenty.
- Získáme rovnici $2-x = 4$, jejímž řešením je $x = -2$.
- Číslo -2 leží v definičním oboru rovnice, proto $K = \{-2\}$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned} 2-x &> 0 \qquad x \in (-\infty, 2) \\ D &= (-\infty, 2) \end{aligned}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(2-x) = -2$$

Převedeme číslo -2 na logaritmus o základu $\frac{1}{2}$.

$$-2 = \log_{\frac{1}{2}} 4$$

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{2}}(2-x) &= \log_{\frac{1}{2}} 4 \quad \text{/porovnání argumentů} \\ 2-x &= 4 \quad /-2 \\ -x &= 2 \quad /\cdot(-1) \\ x &= -2 \\ K &= \{-2\} \end{aligned}$$

Cvičení 5.4

Řešte rovnice s neznámou $x, y \in R$:

$$\log_7(x+30) = 2$$
$$D = (-30, +\infty)$$
$$\log_7(x+30) = \log_7 49$$
$$x + 30 = 49$$
$$x = 19$$
$$19 \in D$$
$$K = \{19\}$$

$$\log_2(y+1) = -1$$
$$D = (-1, +\infty)$$
$$\log_2(y+1) = \log_2 \tfrac{1}{2}$$
$$y + 1 = \tfrac{1}{2}$$
$$y = -\tfrac{1}{2}$$
$$-\tfrac{1}{2} \in D$$
$$K = \{-\tfrac{1}{2}\}$$

NAHORU

Vícenásobné logaritmy

Úpravu **porovnání argumentů** můžeme během řešení rovnice použít vícekrát. Zpravidla se používá v případě, že argument logaritmu obsahuje další logaritmus. U těchto příkladů je obtížné určit definiční obor rovnice. Museli bychom totiž řešit logaritmickou nerovnici, což je často složitější než samotné řešení rovnice. Proto budeme určování definičního oboru vynechávat. V tom případě ale musíme na konci příkladu provést zkoušku.

Příklad 5.5

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$$\log_4(6 + 5\log_3 x) = 2$$

Řešení

- Definiční obor rovnice nebudeme určovat.
- Číslo 2 na pravé straně rovnice převedeme na logaritmus se základem 4:
  $2 = \log_4 16$.
- Získáme rovnici $\log_4(6+5\log_3 x) = \log_4 16$, ve které porovnáme argumenty.
- Rovnici $6 + 5\log_3 x = 16$ upravíme tak, aby na levé straně rovnice zbyl jen logaritmus.
- V upravené rovnici $\log_3 x = 2$ převedeme číslo 2 na logaritmus se základem 3:
  $2 = \log_3 9$.
- Získáme rovnici $\log_3 x = \log_3 9$, ve které porovnáme argumenty: $x = 9$.
- Pro $x = 9$ uděláme zkoušku:
  $L(9) = \log_4(6+5\log_3 9) = \log_4(6+5\cdot 2) = \log_4 16 = 2$
  $P(9) = 2$
- $L(9) = P(9)$, proto $x = 9$ je řešením původní rovnice: $K = \{9\}$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned}
\log_4(6+5\log_3 x) &= 2 \quad \text{Definiční obor neurčíme.}\\
&\quad \text{Převedeme číslo 2 na logaritmus o základu 4.}\\
&\quad 2=\log_4 16\\
\log_4(6+5\log_3 x) &= \log_4 16 \quad \text{/porovnání argumentů}\\
6+5\log_3 x &= 16 \quad /-6\\
5\log_3 x &= 10 \quad /:5\\
\log_3 x &= 2\\
&\quad \text{Převedeme číslo 2 na logaritmus o základu 3.}\\
&\quad 2=\log_3 9\\
\log_3 x &= \log_3 9 \quad \text{/porovnání argumentů}\\
x &= 9
\end{aligned}$$

$$L(9)=\log_4(6+5\log_3 9)=\log_4(6+5\cdot 2)=\log_4 16=2$$

$$P(9)=2$$

$$L(9)=P(9)$$

$$K=\{9\}$$

NAHORU

Složitější argument

Zatím jsme po **porovnání argumentů** řešili vždy lineární rovnici. Pokud v argumentu logaritmu bude složitější výraz, můžeme dostat i jiné druhy rovnic. Následující příklad vede po porovnání argumentů na kvadratickou rovnici.

Příklad 5.6

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$$\log_5 \frac{x^2+1}{x-1} = 1$$

Řešení

- Do definičního oboru patří čísla, pro která je zlomek $\frac{x^2+1}{x-1}$ větší než nula.
- Čitatel tohoto zlomku je vždy kladný, proto stačí, je-li $x-1>0$.
- Definiční obor rovnice $D=(1,+\infty)$.
- Číslo 1 na pravé straně rovnice převedeme na logaritmus se základem 5:
  $1=\log_5 5$
- Získáme rovnici $\log_5 \frac{x^2+1}{x-1} = \log_5 5$, ve které porovnáme argumenty.
- Rovnici $\frac{x^2+1}{x-1} = 5$ vynásobíme jmenovatelem zlomku a upravíme.
- Vznikne nám kvadratická rovnice $x^2-5x+6=0$, jejímž řešením je $x_1=3, x_2=2$.
- Obě čísla patří do definičního oboru rovnice, proto $K=\{2,3\}$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned} \frac{x^2+1}{x-1} &> 0 \qquad \text{Čitatel je vždy kladný.} \\ x-1 &> 0 \qquad x \in (1,+\infty) \\ D &= (1,+\infty) \end{aligned}$$

$$\log_5 \frac{x^2+1}{x-1} = 1$$

Převedeme číslo 1 na logaritmus o základu 5.

$$1 = \log_5 5$$

$$\begin{aligned} \log_5 \frac{x^2+1}{x-1} &= \log_5 5 \quad \text{/porovnání argumentů} \\ \frac{x^2+1}{x-1} &= 5 \quad / \cdot (x-1) \\ x^2+1 &= 5x-5 \quad / -5x+5 \\ x^2-5x+6 &= 0 \\ (x-3)(x-2) &= 0 \\ x_1 = 3 &\vee x_2 = 2 \\ K &= \{2,3\} \end{aligned}$$

NAHORU

5.3. Aplikace logaritmických vět

Nebudeme nyní zavádět žádné další ekvivalentní úpravy. Stejně jako v předchozí kapitole budeme rovnice řešit **porovnáním argumentů**. V jednotlivých odstavcích ukážeme, jak lze **upravit výrazy v logaritmické rovnici**, aby ji bylo možné řešit porovnáním argumentů.

Logaritmické rovnice budeme upravovat pomocí **vět o logaritmech**, které souhrnně připomeneme v následujícím rámečku. Tentokrát v argumentech logaritmu nebudou jen čísla, ale výrazy s neznámou, které symbolicky zapisujeme $f(x), g(x)$.

Za předpokladu, že $a \in R^+ - \{1\}, f(x) > 0$ a $g(x) > 0$ platí:

$$\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a (f(x) \cdot g(x))$$
$$\log_a f(x) - \log_a g(x) = \log_a \frac{f(x)}{g(x)}$$
$$g(x) \log_a f(x) = \log_a f(x)^{g(x)}$$

Součet a rozdíl logaritmů

Nejprve ukážeme, jak řešíme rovnice, kde se vyskytuje součet a rozdíl několika logaritmů, které mají stejný základ. V těchto příkladech využíváme poučku, že **součet logaritmů je logaritmus součinu** a **rozdíl logaritmů je logaritmus podílu** za předpokladu, že všechny výrazy jsou definovány.

Příklad 5.7

Řešte rovnice s neznámou $x \in R$:

a) $\log_3(x+7) - \log_3 2x = \log_3 4$

b) $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) - 3 = \log_2(x-2)$

Řešení

a)
- Výrazy v rovnici jsou definovány, pokud jsou splněny podmínky $x + 7 > 0$ a $2x > 0$.
- Definiční obor rovnice $D = (0, +\infty)$.
- Výraz na levé straně rovnice obsahuje rozdíl dvou logaritmů se stejným základem. Rozdíl logaritmů je logaritmus podílu:
  $L(x) = \log_3(x+7) - \log_3 2x = \log_3 \frac{x+7}{2x}$.
- Rovnici $\log_3 \frac{x+7}{2x} = \log_3 4$ vyřešíme porovnáním argumentů.
- Získáme ekvivalentní rovnici $\frac{x+7}{2x} = 4$, jejímž řešením je $x = 1$.
- Číslo 1 leží v definičním oboru rovnice, proto $K = \{1\}$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned} x+7 &> 0 \qquad x \in (-7, +\infty) \\ 2x &> 0 \qquad x \in (0, +\infty) \\ D &= (0, +\infty) \\ \log_3(x+7) - \log_3 2x &= \log_3 4 \\ \log_3 \frac{x+7}{2x} &= \log_3 4 \quad /\text{porovnání argumentů} \\ \frac{x+7}{2x} &= 4 \quad / \cdot 2x \\ x+7 &= 8x \quad / -x \\ 7 &= 7x \quad / :7 \\ x &= 1 \\ K &= \{1\} \end{aligned}$$

b)
- Výrazy v rovnici jsou definovány, pokud jsou splněny podmínky $x+1>0$, $x-1>0$ a $x-2>0$.
- Definiční obor rovnice $D=(2,+\infty)$.
- Výraz na levé straně rovnice obsahuje kromě logaritmů i číslo 3. Abychom mohli použít věty o logaritmech, musíme nejprve převést číslo 3 na logaritmus o základu 2: $3=\log_2 8$.
- Na levou stranu rovnice aplikujeme věty o logaritmech součtu a rozdílu: $L(x)=\log_2(x+1)+\log_2(x-1)-\log_2 8=\log_2\frac{(x+1)(x-1)}{8}$.
- Rovnici $\log_2\frac{(x+1)(x-1)}{8}=\log_2(x-2)$ vyřešíme porovnáním argumentů.
- Získáme ekvivalentní rovnici $\frac{(x+1)(x-1)}{8}=x-2$, která po úpravě vede na kvadratickou rovnici, jejímž řešením jsou čísla $x_1=3$ a $x_2=5$.
- Číslo 3 i 5 leží v definičním oboru rovnice, proto $K=\{3,5\}$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned}
x+1 &> 0 \qquad x\in(-1,+\infty)\\
x-1 &> 0 \qquad x\in(1,+\infty)\\
x-2 &> 0 \qquad x\in(2,+\infty)\\
D &= (2,+\infty)\\
\log_2(x+1)+\log_2(x-1)-3 &= \log_2(x-2) \qquad /3=\log_2 8\\
\log_2(x+1)+\log_2(x-1)-\log_2 8 &= \log_2(x-2)\\
\log_2\frac{(x+1)(x-1)}{8} &= \log_2(x-2) \qquad /\text{porovnání argumentů}\\
\frac{x^2-1}{8} &= x-2 \qquad /\cdot 8\\
x^2-1 &= 8x-16 \qquad /-8x+16\\
x^2-8x+15 &= 0\\
(x-5)(x-3) &= 0\\
x_1=5 &\vee x_2=3\\
K &= \{3,5\}
\end{aligned}$$

Cvičení 5.7

Řešte rovnice s neznámou $x, y\in R$:

$$\begin{aligned}
\log_5 x+\log_5(x-3)&=\log_5 4\\
D&=(3,+\infty)\\
\log_5 x(x-3)&=\log_5 4\\
x(x-3)&=4\\
x^2-3x-4&=0\\
(x-4)(x+1)&=0\\
x_1=4 \quad x_2&=-1\\
4\in D,\quad -1&\notin D\\
K&=\{4\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log_3(4y+1)-2&=\log_3(y-1)\\
D&=(1,+\infty)\\
\log_3(4y+1)-\log_3 9&=\log_3(y-1)\\
\log_3\tfrac{4y+1}{9}&=\log_3(y-1)\\
\tfrac{4y+1}{9}&=(y-1)\\
4y+1&=9y-9\\
10&=5y\\
y&=2\\
2&\in D\\
K&=\{2\}
\end{aligned}$$

NAHORU

Násobek logaritmu

Další věta o logaritmech nám umožňuje převést násobek před logaritmem do argumentu logaritmu. V kapitole o logaritmických větách jsme zjednodušeně říkali, že **násobek logaritmu je logaritmus mocniny**.

Příklad 5.8

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$$\log_8(6x-2) = 2\log_8(x-3)$$

Řešení

- Výrazy v rovnici jsou definovány, pokud jsou splněny podmínky $6x-2 > 0$ a $x-3 > 0$.
- Definiční obor rovnice $D = (3, +\infty)$.
- Logaritmus na pravé straně rovnice je vynásoben číslem 2. Převedeme toto číslo do argumentu logaritmu: $P(x) = 2\log_8(x-3) = \log_8(x-3)^2$.
- Rovnici $\log_8(6x-2) = \log_8(x-3)^2$ vyřešíme porovnáním argumentů.
- Získáme ekvivalentní rovnici $6x-2 = (x-3)^2$, která po úpravě vede na kvadratickou rovnici, jejímž řešením jsou čísla $x_1 = 1$ a $x_2 = 11$.
- Číslo 11 leží v definičním oboru rovnice, ale číslo 1 neleží v definičním oboru rovnice, proto $K = \{11\}$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned} 6x-2 &> 0 \qquad x \in \left(\frac{1}{3}, +\infty\right) \\ x-3 &> 0 \qquad x \in (3, +\infty) \\ D &= (3, +\infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_8(6x-2) &= 2\log_8(x-3) \\ \log_8(6x-2) &= \log_8(x-3)^2 \quad \text{/porovnání argumentů} \\ 6x-2 &= (x-3)^2 \\ 6x-2 &= x^2-6x+9 \quad /-6x+2 \\ 0 &= x^2-12x+11 \\ x^2-12x+11 &= 0 \\ (x-1)(x-11) &= 0 \\ x_1 = 1 &\vee x_2 = 11 \\ K &= \{11\} \end{aligned}$$

Příklad 5.9

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$$2\log(x+1) = \log(x+4) + \log x$$

Řešení

- Výrazy v rovnici jsou definovány, pokud jsou splněny podmínky $x+1 > 0$, $x+4 > 0$ a $x > 0$.
- Definiční obor rovnice $D = (0, +\infty)$.
- Na levé straně rovnice upravíme výraz pomocí vět o logaritmech: $L(x) = 2\log(x+1) = \log(x+1)^2$.
- Na pravé straně rovnice také upravíme výraz pomocí vět o logaritmech: $P(x) = \log(x+4) + \log x = \log x(x+4)$.
- Rovnici $\log(x+1)^2 = \log x(x+4)$ vyřešíme porovnáním argumentů.
- Získáme ekvivalentní rovnici $(x+1)^2 = x(x+4)$, která po úpravě vede na lineární rovnici, jejímž řešením je $x = \frac{1}{2}$.
- Číslo $\frac{1}{2}$ leží v definičním oboru rovnice, proto $K = \{\frac{1}{2}\}$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned} x+1 &> 0 \qquad x \in (-1,+\infty) \\ x+4 &> 0 \qquad x \in (-4,+\infty) \\ x &> 0 \qquad x \in (0,+\infty) \\ D &= (0,+\infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\log(x+1) &= \log(x+4) + \log x \\ \log(x+1)^2 &= \log x(x+4) \quad \text{/porovnání argumentů} \\ (x+1)^2 &= x(x+4) \\ x^2+2x+1 &= x^2+4x \quad / - x^2 - 4x - 1 \\ -2x &= -1 \quad / : (-2) \\ x &= \frac{1}{2} \\ K &= \left\{\frac{1}{2}\right\} \end{aligned}$$

NAHORU

5.4. Substituce

Některé logaritmické rovnice nelze vyřešit porovnáním argumentů. Takové rovnice se snažíme vhodnou substitucí převést na rovnice, které už umíme vyřešit.

Pojem **substituce** jsme již zavedli při řešení exponenciálních rovnic. Postup řešení i použité značení tedy bude stejné.

Substituce za logaritmus

Nejjednoduššími příklady budou rovnice, kde přímo můžeme substituovat výraz s logaritmem a vznikne nám například lineární nebo kvadratická rovnice.

Příklad 5.10

Řešte rovnice s neznámou $x \in R$:

$$2\log_2^2 x + 7\log_2 x - 4 = 0$$

Řešení

- Výrazy v rovnici jsou definovány, pokud je splněna podmínka $x > 0$.
- Definiční obor rovnice $D = (0, +\infty)$.
- V rovnici nahradíme všechny výrazy $\log_2 x$ novou neznámou a.
- Vznikne kvadratická rovnice $2a^2 + 7a - 4 = 0$ jejímž řešením jsou čísla $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = -4$.
- Zpětně nahradíme neznámou a výrazem $\log_2 x$, tj. $a_1 = \log_2 x_1, a_2 = \log_2 x_2$.
- Rovnice $\log_2 x_1 = \frac{1}{2}, \log_2 x_2 = -4$ vyřešíme:
  Nejprve převedeme čísla $\frac{1}{2}, -4$ na logaritmus o základu 2 a potom porovnáme argumenty.
- Řešením jsou čísla $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \frac{1}{16}$.
- Obě čísla leží v definičním oboru rovnice, proto $K = \{\sqrt{2}, \frac{1}{16}\}$.

Zápis řešení:

$$\begin{array}{rcll}
x & > & 0 & x \in (0, +\infty) \\
D & = & (0, +\infty) & \\
2\log_2^2 x + 7\log_2 x - 4 & = & 0 & /\text{substituce } [S : \log_2 x = a] \\
2a^2 + 7a - 4 & = & 0 & \\
(2a-1)(a+4) & = & 0 & \\
a_1 = \dfrac{1}{2} & \vee & a_2 = -4 & /[S : a = \log_2 x] \\
\log_2 x_1 = \dfrac{1}{2} & & \log_2 x_2 = -4 & \\
\log_2 x_1 = \log_2 \sqrt{2} & & \log_2 x_2 = \log_2 \dfrac{1}{16} & /\text{porovnání argumentů} \\
x_1 = \sqrt{2} & \vee & x_2 = \dfrac{1}{16} & \\
K & = & \left\{\sqrt{2}, \dfrac{1}{16}\right\} &
\end{array}$$

Cvičení 5.10

Řešte rovnice s neznámou $x, y \in R$:

$$2\log_4^2 x + 3\log_4 x - 2 = 0$$
$$D = (0, +\infty)$$
$$2a^2 + 3a - 2 = 0$$
$$(2a-1)(a+2) = 0$$
$$a_1 = \tfrac{1}{2}, \quad a_2 = -2$$
$$\log_4 x_1 = \tfrac{1}{2}, \quad \log_4 x_2 = -2$$
$$\log_4 x_1 = \log_4 2, \quad \log_4 x_2 = \log_4 \tfrac{1}{16}$$
$$x_1 = 2, \quad x_2 = \tfrac{1}{16}$$
$$2 \in D \quad \tfrac{1}{16} \in D$$
$$K = \{2, \tfrac{1}{16}\}$$

$$3\log_5 y + \tfrac{1}{\log_5 y} = 4$$
$$D = (0, 1) \cup (1, +\infty)$$
$$3a + \tfrac{1}{a} = 4$$
$$3a^2 - 4a + 1 = 0$$
$$(3a-1)(a-1) = 0$$
$$a_1 = \tfrac{1}{3}, \quad a_2 = 1$$
$$\log_5 x_1 = \tfrac{1}{3}, \quad \log_5 x_2 = 1$$
$$\log_5 x_1 = \log_5 \sqrt[3]{5}, \quad \log_5 x_2 = \log_5 5$$
$$x_1 = \sqrt[3]{5}, \quad x_2 = 5$$
$$\sqrt[3]{5} \in D \quad 5 \in D$$
$$K = \{\sqrt[3]{5}, 5\}$$

NAHORU

Úprava na substituci

Často je nutné před zavedením substituce upravit rovnici pomocí vět o logaritmech. V příkladu 5.11 se snažíme **odstranit mocninu v argumentu logaritmu**, v příkladu 5.12 upravujeme argument logaritmu pomocí **věty o logaritmu součinu**.

Příklad 5.11

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$$\frac{20}{\log x^2} - 1 = \log x^3$$

Řešení

- Výrazy v rovnici jsou definovány, pokud jsou splněny podmínky $x^3 > 0, x^2 > 0$ a $\log x^2 \neq 0$.
- Definiční obor rovnice $D = (0, 1) \cup (1, +\infty)$.
- Abychom mohli zavést substituci za $\log x$, musíme nejprve pomocí vět o logaritmech odstranit mocninu v argumentech logaritmů: $\log x^2 = 2\log x$, $\log x^3 = 3\log x$.
- V rovnici $\frac{20}{2\log x} - 1 = 3\log x$ nahradíme všechny výrazy $\log x$ novou neznámou a.
- Rovnici $\frac{20}{2a} - 1 = 3a$ s neznámou $a \in R$ vyřešíme.
- Řešením rovnice jsou čísla $a_1 = \frac{5}{3}, a_2 = -2$.
- Zpětně nahradíme neznámou a výrazem $\log x$.
- Rovnice $\log x_1 = \frac{5}{3}, \log x_2 = -2$ vyřešíme porovnáním argumentů.
- Řešením jsou čísla $x_1 = 10^{\frac{5}{3}} = 10\sqrt[3]{100}, x_2 = 10^{-2} = \frac{1}{100}$.
- Obě čísla leží v definičním oboru rovnice, proto $K = \{10\sqrt[3]{100}, \frac{1}{100}\}$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned} x^3 &> 0 \qquad x \in (0,+\infty) \\ x^2 &> 0 \qquad x \neq 0 \\ \log x^2 &\neq 0 \qquad x \neq \pm 1 \\ D &= (0,1) \cup (1,+\infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{20}{\log x^2} - 1 &= \log x^3 \\ \frac{20}{2\log x} - 1 &= 3\log x \quad /\text{substituce } [S : \log x = a] \\ \frac{20}{2a} - 1 &= 3a \quad / \cdot a \\ 10 - a &= 3a^2 \quad / - 3a^2 \\ -3a^2 - a + 10 &= 0 \\ 3a^2 + a - 10 &= 0 \\ (3a-5)(a+2) &= 0 \\ a_1 = \frac{5}{3} \quad &\vee \quad a_2 = -2 \quad /[S : a = \log x] \\ \log x_1 = \frac{5}{3} \quad & \quad \log x_2 = -2 \\ \log x_1 = \log 10^{\frac{5}{3}} \quad & \quad \log x_2 = \log 10^{-2} \quad /\text{porovnání argumentů} \\ x_1 = 10^{\frac{5}{3}} \quad & \quad x_2 = 10^{-2} \\ x_1 = 10\sqrt[3]{100} \quad &\vee \quad x_2 = \frac{1}{100} \\ K &= \left\{10\sqrt[3]{100}, \frac{1}{100}\right\} \end{aligned}$$

Příklad 5.12

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$$\log_5^2 5x + \log_5 25x = 7$$

Řešení

- Výrazy v rovnici jsou definovány, pokud jsou splněny podmínky $5x > 0$ a $25x > 0$.
- Definiční obor rovnice $D = (0, +\infty)$.
- Abychom mohli zavést substituci za $\log_5 5x$, musíme nejprve upravit výraz $\log_5 25x$: $\log_5 25x = \log_5 5 \cdot 5x = \log_5 5 + \log_5 5x = 1 + \log_5 5x$.
- V rovnici $\log_5^2 5x + 1 + \log_5 5x = 7$ nahradíme všechny výrazy $\log_5 5x$ novou neznámou a.
- Rovnici $a^2 + 1 + a = 7$ s neznámou $a \in R$ vyřešíme.
- Řešením rovnice jsou čísla $a_1 = 2, a_2 = -3$.
- Zpětně nahradíme neznámou a výrazem $\log_5 5x$.
- Rovnice $\log 5x_1 = 2, \log 5x_2 = -3$ vyřešíme porovnáním argumentů.
- Řešením jsou čísla $x_1 = 5, x_2 = \frac{1}{625}$.
- Obě čísla leží v definičním oboru rovnice, proto $K = \{5, \frac{1}{625}\}$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned} 5x &> 0 \qquad x \in (0, +\infty) \\ 25x &> 0 \qquad x \in (0, +\infty) \\ D &= (0, +\infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_5^2 5x + \log_5 25x &= 7 \\ \log_5^2 5x + \log_5(5 \cdot 5x) &= 7 \\ \log_5^2 5x + \log_5 5 + \log_5 5x &= 7 \\ \log_5^2 5x + 1 + \log_5 5x &= 7 \quad /\text{substituce } [S : \log_5 5x = a] \\ a^2 + 1 + a &= 7 \quad / - 7 \\ a^2 + a - 6 &= 0 \\ (a-2)(a+3) &= 0 \\ a_1 = 2 \quad &\vee \quad a_2 = -3 \quad /[S : a = \log_5 5x] \\ \log_5 5x_1 = 2 \quad & \quad \log_5 5x_2 = -3 \\ \log_5 5x_1 = \log_5 25 \quad & \quad \log_5 5x_2 = \log_5 \frac{1}{125} \quad /\text{porovnání argumentů} \\ 5x_1 = 25 \quad & \quad 5x_2 = \frac{1}{125} \\ x_1 = 5 \quad &\vee \quad x_2 = \frac{1}{625} \\ K &= \left\{5, \frac{1}{625}\right\} \end{aligned}$$

NAHORU

5.5. Úpravy rovnic

V této kapitole ukážeme další úpravy, které lze využít při řešení logaritmických rovnic. Využijeme další věty o logaritmech a připomeneme si úpravu **logaritmování**, kterou jsme využívali při řešení exponenciálních rovnic.

Převod neznámé na logaritmus

U některých rovnic je nutné převést neznámou do argumentu logaritmu, abychom následně mohli porovnat argumenty. K tomu využijeme vztah mezi exponenciální a logaritmickou funkcí. Víme, že logaritmická funkce je inverzní funkcí k exponenciální funkci. Pro přípustné hodnoty základu a platí, že $x = \log_a a^x$.

Tuto úpravu využijeme v následujícím příkladu. Jedná se o rovnici, ve které se vyskytuje neznámá zároveň v argumentu logaritmu i v exponentu mocniny.

Příklad 5.13

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$$\log_3(10 \cdot 3^x - 3) - 1 = 2x$$

Řešení

- K určení definičního oboru bychom museli řešit exponenciální nerovnici. Proto definiční obor neurčíme a na konci příkladu uděláme zkoušku.
- Abychom mohli porovnat exponenty, musíme všechny výrazy v rovnici převést na logaritmus o základu 3:
  $1 = \log_3 3$,
  $2x = 2\log_3 3^x = \log_3 3^{2x}$.
- V rovnici $\log_3(10 \cdot 3^x - 3) - \log_3 3 = \log_3 3^{2x}$ upravíme výraz na levé straně rovnice pomocí věty o logaritmu podílu.
- Získáme rovnici $\log_3 \frac{10 \cdot 3^x - 3}{3} = \log_3 3^{2x}$, ve které porovnáme argumenty.
- Ekvivalentní rovnici $\frac{10 \cdot 3^x - 3}{3} = 3^{2x}$ řešíme pomocí substituce $3^x = a$.
- Rovnici $\frac{10a - 3}{3} = a^2$ s neznámou $a \in R$ vyřešíme.
- Řešením rovnice jsou čísla $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = 3$.
- Zpětně nahradíme neznámou a výrazem 3^x.
- Rovnice $3^{x_1} = \frac{1}{3}, 3^{x_2} = 3$ vyřešíme porovnáním exponentů.
- Řešením jsou čísla $x_1 = -1, x_2 = 1$, pro která musíme udělat zkoušku:
  $L(-1) = \log_3(\frac{10}{3} - 3) - 1 = \log_3 \frac{1}{3} - 1 = -1 - 1 = -2$
  $P(-1) = -2$
  $L(1) = \log_3(30 - 3) - 1 = \log_3 27 - 1 = 2 - 1 = 2$
  $P(1) = 2$
- $L(-1) = P(-1)$ a $L(1) = P(1)$, proto $K = \{-1, 1\}$.

Zápis řešení:

$$
\begin{aligned}
\log_3(10\cdot 3^x-3)-1 &= 2x \quad \text{Definiční obor neurčíme.}\\
\log_3(10\cdot 3^x-3)-\log_3 3 &= 2\log_3 3^x\\
\log_3\left(\frac{10\cdot 3^x-3}{3}\right) &= \log_3 3^{2x} \quad /\text{porovnání argumentů}\\
\frac{10\cdot 3^x-3}{3} &= 3^{2x} \quad /\text{substituce } [S: 3^x=a]\\
\frac{10a-3}{3} &= a^2 \quad /\cdot 3\\
10a-3 &= 3a^2 \quad /-3a^2\\
-3a^2+10a-3 &= 0\\
3a^2-10a+3 &= 0\\
(3a-1)(a-3) &= 0\\
a_1=\frac{1}{3} &\vee a_2=3 \quad /[S: a=3^x]\\
3^{x_1}=\frac{1}{3} & \quad 3^{x_1}=3\\
3^{x_1}=3^{-1} & \quad 3^{x_1}=3^1 \quad /\text{porovnání exponentů}\\
x_1=-1 &\vee x_2=1\\
& L(1)=\log_3(10\cdot 3-3)-1=\log_3 27-1=3-1=2\\
& P(1)=2\\
& L(1)=P(1)\\
& L(-1)=\log_3\left(\frac{10}{3}-3\right)-1=\log_3\frac{1}{3}-1=-1-1=-2\\
& P(-1)=-2\\
& L(-1)=P(-1)\\
K &= \{-1,1\}
\end{aligned}
$$

NAHORU

Rovnice s různými základy logaritmů

Zatím jsme řešili rovnice, ve kterých byl základ všech logaritmů stejný. Může se ale stát, že se v rovnici vyskytují logaritmy s různými základy. Při řešení takových rovnic musíme nejprve převést všechny logaritmy na stejný základ. Využijeme **větu o podílu logaritmů**: Pro přípustně hodnoty základu a a argumenty r, s je

$\log_s r = \frac{\log_a r}{\log_a s}$.

Základ logaritmu a může být libovolný přípustný. Volíme ho tak, abychom touto úpravou rovnici co nejvíce zjednodušili.

Příklad 5.14

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$$\log_2 x - 2\log_{\frac{1}{2}} x = 9$$

Řešení

- Výrazy v rovnici jsou definovány, pokud je splněna podmínka $x > 0$.
- Definiční obor rovnice $D = (0, +\infty)$.
- Nejprve převedeme výraz $\log_{\frac{1}{2}} x$ na logaritmus o základu 2:

  $\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = \frac{\log_2 x}{-1} = -\log_2 x.$
- Rovnici $\log_2 x + 2\log_2 x = 9$ upravíme a vyřešíme porovnáním argumentů.
- Řešením je $x = 8$.
- Číslo 8 leží v definičním oboru rovnice, proto $K = \{8\}$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned} x &> 0 \qquad x \in (0, +\infty) \\ D &= (0, +\infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_2 x - 2\log_{\frac{1}{2}} x &= 9 \\ \log_2 x - \frac{2\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} &= 9 \\ \log_2 x - \frac{2\log_2 x}{-1} &= 9 \\ \log_2 x + 2\log_2 x &= 9 \\ 3\log_2 x &= 9 \quad /:3 \\ \log_2 x &= 3 \\ \log_2 x &= \log_2 8 \quad /\text{porovnání argumentů} \\ x &= 8 \\ K &= \{8\} \end{aligned}$$

NAHORU

Rovnice s neznámou v základu logaritmu

Stejné tvrzení jako v předchozím odstavci využijeme při řešení rovnic, kde se neznámá vyskytuje v základu nějakého logaritmu.

Příklad 5.15

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$$\log_{x-2} 9 = 2$$

Řešení

- Výrazy v rovnici jsou definovány, pokud jsou splněny podmínky $x-2>0$ a $x-2 \neq 1$.
- Definiční obor rovnice $D = (2,3) \cup (3,+\infty)$.
- Nejprve převedeme neznámou ze základu logaritmu $\log_{x-2} 9$ do argumentu: $\log_{x-2} 9 = \frac{\log_3 9}{\log_3(x-2)} = \frac{2}{\log_3(x-2)}$.
- Rovnici $\frac{2}{\log_3(x-2)} = 2$ upravíme a vyřešíme porovnáním argumentů.
- Řešením je $x = 5$.
- Číslo 5 leží v definičním oboru rovnice, proto $K = \{5\}$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned} x-2 &> 0 \qquad x \in (2, +\infty) \\ x-2 &\neq 1 \qquad x \neq 3 \\ D &= (2,3) \cup (3, +\infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_{x-2} 9 &= 2 \\ \frac{\log_3 9}{\log_3(x-2)} &= 2 \\ \frac{2}{\log_3(x-2)} &= 2 \quad /:2 \\ \frac{1}{\log_3(x-2)} &= 1 \quad /\cdot \log_3(x-2) \\ 1 &= \log_3(x-2) \\ \log_3(x-2) &= 1 \\ \log_3(x-2) &= \log_3 3 \quad /\text{porovnání argumentů} \\ x-2 &= 3 \quad /+2 \\ x &= 5 \\ K &= \{5\} \end{aligned}$$

Příklad 5.16

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$$\log_4 x - \log_x 2 = \frac{7}{6}$$

Řešení

- Výrazy v rovnici jsou definovány, pokud jsou splněny podmínky $x > 0$ a $x \neq 1$.
- Definiční obor rovnice $D = (0, 1) \cup (1, +\infty)$.
- Nejprve převedeme neznámou ze základu logaritmu $\log_x 2$ do argumentu: $\log_x 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 x} = \frac{1}{\log_2 x}$.
- Dále převedeme $\log_4 x$ na logaritmus se základem 2: $\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2}$.
- V rovnici $\frac{\log_2 x}{2} - \frac{1}{\log_2 x} = \frac{7}{6}$ nahradíme všechny výrazy $\log_2 x$ novou neznámou a.
- Rovnici $\frac{a}{2} - \frac{1}{a} = \frac{7}{6}$ s neznámou $a \in R$ vyřešíme.
- Řešením rovnice jsou čísla $a_1 = -\frac{2}{3}, a_2 = 3$.
- Zpětně nahradíme neznámou a výrazem $\log_2 x$.
- Rovnice $\log_2 x_1 = -\frac{2}{3}, \log_2 x_2 = 3$ vyřešíme porovnáním argumentů.
- Řešením jsou čísla $x_1 = 2^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, x_2 = 8$.
- Obě čísla leží v definičním oboru rovnice, proto $K = \{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, 8\}$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned} x &> 0 \qquad x \in (0, +\infty) \\ x &\neq 1 \\ D &= (0,1) \cup (1, +\infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log_4 x - \log_x 2 &= \frac{7}{6} \\
\frac{\log_2 x}{\log_2 4} - \frac{\log_2 2}{\log_2 x} &= \frac{7}{6} \\
\frac{\log_2 x}{2} - \frac{1}{\log_2 x} &= \frac{7}{6} \quad /\text{substituce } [S : \log_2 x = a] \\
\frac{a}{2} - \frac{1}{a} &= \frac{7}{6} \quad / \cdot 6a \\
3a^2 - 6 &= 7a \quad / - 7a \\
3a^2 - 7a - 6 &= 0 \\
(3a + 2)(a - 3) &= 0 \\
a_1 = -\frac{2}{3} &\vee \; a_2 = 3 \quad /[S : a = \log_2 x] \\
\log_2 x_1 = -\frac{2}{3} & \quad \log_2 x_2 = 3 \\
\log_2 x_1 = \log_2 2^{-\frac{2}{3}} & \quad \log_2 x_2 = \log_2 8 \quad /\text{porovnání argumentů} \\
x_1 = 2^{-\frac{2}{3}} & \quad x_2 = 8 \\
x_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} &\vee \; x_2 = 8 \\
K &= \left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, 8 \right\}
\end{aligned}$$

NAHORU

Logaritmování

Poslední úprava, kterou budeme využívat, je **logaritmování**. Jedná se o stejnou úpravu jako v případě exponenciálních rovnic. Některé složitější rovnice lze totiž logaritmováním převést na tvar, který umíme vyřešit.

Příklad 5.17

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$$x^{\log_3 x} = 9x$$

Řešení

- Výrazy v rovnici jsou definovány, pokud je splněna podmínka $x > 0$.
- Definiční obor rovnice $D = (0, +\infty)$.
- Logaritmujeme rovnici $x^{\log_3 x} = 9x$ logaritmem o základu 3:
  $\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 9x$.
- Upravíme výrazy na obou stranách rovnice:
  $L(x) = \log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 x \cdot \log_3 x = \log_3^2 x$,
  $P(x) = \log_3 9x = \log_3 9 + \log_3 x = 2 + \log_3 x$.
- V rovnici $\log_3^2 x = 2 + \log_3 x$ nahradíme všechny výrazy $\log_3 x$ novou neznámou a.
- Rovnici $a^2 = 2 + a$ s neznámou $a \in R$ vyřešíme.
- Řešením rovnice jsou čísla $a_1 = 2, a_2 = -1$.
- Zpětně nahradíme neznámou a výrazem $\log_3 x$.
- Rovnice $\log_3 x_1 = 2, \log_3 x_2 = -1$ vyřešíme porovnáním argumentů.
- Řešením jsou čísla $x_1 = 9, x_2 = \frac{1}{3}$.
- Obě čísla leží v definičním oboru rovnice, proto $K = \{9, \frac{1}{3}\}$.

Zápis řešení:

$$\begin{array}{rcl}
 & & x > 0 \qquad x \in (0, +\infty) \\
 & & D = (0, +\infty) \\
x^{\log_3 x} & = & 9x \quad /\text{logaritmování} \\
\log_3 x^{\log_3 x} & = & \log_3 9x \\
\log_3 x \cdot \log_3 x & = & \log_3 9 + \log_3 x \\
\log_3^2 x & = & 2 + \log_3 x \quad /\text{substituce } [S : \log_3 x = a] \\
a^2 & = & 2 + a \quad / - 2 - a \\
a^2 - a - 2 & = & 0 \\
(a-2)(a+1) & = & 0 \\
a_1 = 2 & \vee & a_2 = -1 \quad /[S : a = \log_3 x] \\
\log_3 x_1 = 2 & & \log_3 x_2 = -1 \\
\log_3 x_1 = \log_3 9 & & \log_3 x_2 = \log_3 \dfrac{1}{3} \quad /\text{porovnání argumentů} \\
x_1 = 9 & \vee & x_2 = \dfrac{1}{3} \\
K & = & \left\{9, \dfrac{1}{3}\right\}
\end{array}$$

NAHORU

5.6. Speciální případy logaritmických rovnic

V této kapitole ukážeme, jak řešit složitější typy logaritmických rovnic. Nebudeme zavádět žádné další metody řešení logaritmických rovnic. Budeme kombinovat několik úprav, které jsme zavedli v předchozích kapitolách, až získáme rovnici, kterou umíme vyřešit.

První příklad obsahuje další rovnici, ve které se vyskytuje neznámá v argumentu logaritmu i v exponentu mocniny.

Příklad 5.18

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$$3^{\log_5 x} + 45 = 2 \cdot 3^{\log_5 x+1}$$

Řešení

- Výrazy v rovnici jsou definovány, pokud jsou splněny podmínky $x > 0$.
- Definiční obor rovnice $D = (0, +\infty)$.
- Tento příklad budeme řešit vhodnou substitucí. Pokusíme se rovnici upravit tak, abychom mohli substituovat výraz $3^{\log_5 x}$. Upravíme výraz na pravé straně rovnice: $3^{\log_5 x+1} = 3^{\log_5 x} \cdot 3^1 = 3 \cdot 3^{\log_5 x}$.
- V rovnici $3^{\log_5 x} + 45 = 2 \cdot 3 \cdot 3^{\log_5 x}$ nahradíme všechny výrazy $3^{\log_5 x}$ novou neznámou a.
- Rovnici $a + 45 = 6a$ s neznámou $a \in R$ vyřešíme.
- Řešením rovnice je $a = 9$.
- Zpětně nahradíme neznámou a výrazem $3^{\log_5 x}$.
- Rovnici $3^{\log_5 x} = 9$ vyřešíme.
- Nejprve porovnáme exponenty v rovnici $3^{\log_5 x} = 3^2$.
- Nakonec rovnici $\log_5 x = 2$ vyřešíme porovnáním argumentů.
- Řešením je $x = 25$.
- Číslo 25 leží v definičním oboru rovnice, proto $K = \{25\}$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned} x &> 0 \qquad x \in (0, +\infty) \\ D &= (0, +\infty) \\ 3^{\log_5 x} + 45 &= 2 \cdot 3^{\log_5 x+1} \\ 3^{\log_5 x} + 45 &= 2 \cdot 3 \cdot 3^{\log_5 x} \quad /\text{substituce } [S : 3^{\log_5 x} = a] \\ a + 45 &= 6a \quad / - 6a - 45 \\ -5a &= -45 \quad / : (-5) \\ a &= 9 \quad /[S : a = 3^{\log_5 x}] \\ 3^{\log_5 x} &= 9 \\ 3^{\log_5 x} &= 3^2 \quad /\text{porovnání exponentů} \\ \log_5 x &= 2 \\ \log_5 x &= \log_5 25 \quad /\text{porovnání argumentů} \\ x &= 25 \\ K &= \{25\} \end{aligned}$$

NAHORU

V dalším příkladu budeme převádět všechny logaritmy na vhodný základ. Stačí ve vhodném pořadí aplikovat věty o logaritmech, a tím rovnici zjednodušit.

Příklad 5.19

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$$\log_x 125x \cdot \log_{25}^2 x = 1$$

Řešení

- Výrazy v rovnici jsou definovány, pokud jsou splněny podmínky $125x > 0$, $x > 0$ a $x \neq 1$.
- Definiční obor rovnice $D = (0,1) \cup (1,+\infty)$.
- Nejprve se pokusíme oba logaritmy na levé straně rovnice zjednodušit. Protože všechna čísla obsažená v argumentech i základech logaritmu jsou mocniny čísla 5, převedeme oba logaritmy na logaritmy o základu 5:
  $L(x) = \log_x 125x \cdot \log_{25}^2 x = \frac{\log_5 125x}{\log_5 x} \cdot \frac{(\log_5 x)^2}{(\log_5 25)^2}$.
- Vidíme, že jmenovatel prvního zlomku lze krátit s čitatelem druhého zlomku:
  $L(x) = \frac{\log_5 125x}{\log_5 x} \cdot \frac{(\log_5 x)^2}{(\log_5 25)^2} = \frac{\log_5 125x}{1} \cdot \frac{\log_5 x}{(\log_5 25)^2}$.
- Na první čitatel zlomku aplikujeme větu o logaritmu součinu a určíme logaritmy, které neobsahují neznámou:
  $L(x) = \frac{\log_5 125x}{1} \cdot \frac{\log_5 x}{(\log_5 25)^2} = (\log_5 125 + \log_5 x) \cdot \frac{\log_5 x}{2^2} = (3 + \log_5 x) \cdot \frac{\log_5 x}{4}$.
- V rovnici $(3 + \log_5 x) \cdot \frac{\log_5 x}{4} = 1$ nahradíme všechny výrazy $\log_5 x$ novou neznámou a.
- Rovnici $(3 + a)\frac{a}{4} = 1$ s neznámou $a \in R$ vyřešíme.
- Řešením rovnice jsou čísla $a_1 = -4$, $a_2 = 1$.
- Zpětně nahradíme neznámou a výrazem $\log_5 x$.
- Rovnice $\log_5 x_1 = -4$, $\log_5 x_2 = 1$ vyřešíme porovnáním argumentů.
- Řešením jsou čísla $x_1 = \frac{1}{5^4}$, $x_2 = 5$.
- Obě čísla leží v definičním oboru rovnice, proto $K = \left\{\frac{1}{5^4}, 5\right\}$.

Zápis řešení:

$$\begin{array}{rcll} 125x & > & 0 & x \in (0,+\infty) \\ x & > & 0 & x \in (0,+\infty) \\ x & \neq & 1 & \\ D & = & (0,1)(1,+\infty) & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \log_x 125x \cdot \log_{25}^2 x & = & 1 \\ \frac{\log_5 125x}{\log_5 x} \cdot \frac{(\log_5 x)^2}{(\log_5 25)^2} & = & 1 \\ \frac{\log_5 125 + \log_5 x}{1} \cdot \frac{\log_5 x}{2^2} & = & 1 \\ (3 + \log_5 x) \cdot \frac{\log_5 x}{4} & = & 1 \quad /\text{substituce } [S : \log_5 x = a] \\ (3+a)\frac{a}{4} & = & 1 \quad / \cdot 4 \\ 3a + a^2 & = & 4 \quad / - 4 \\ a^2 + 3a - 4 & = & 0 \\ (a+4)(a-1) & = & 0 \\ a_1 = -4 & \vee & a_2 = 1 \quad /[S : a = \log_5 x] \\ \log_5 x_1 = -4 & & \log_5 x_2 = 1 \\ \log_5 x_1 = \log_5 \frac{1}{5^4} & & \log_5 x_2 = \log_5 5 \quad /\text{porovnání argumentů} \\ x_1 = \frac{1}{5^4} & \vee & x_2 = 5 \\ K & = & \left\{\frac{1}{5^4}, 5\right\} \end{array}$$

NAHORU

Poslední příklad, jehož řešení si ukážeme, obsahuje dva logaritmy, v jejichž argumentu se vyskytuje další logaritmus. Opět je nutné aplikovat věty o logaritmech a ve vhodný okamžik použít substituci.

Příklad 5.20

Řešte rovnici s neznámou $x \in R$:

$$2\log_2 \log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} \log_2 2\sqrt{2}x = 1$$

Řešení

- Abychom určili definiční obor této tovnice, museli bychom řešit logaritmické nerovnice. Proto definiční obor určovat nebudeme a na konci příkladu uděláme zkoušku.
- V tomto příkladu se musíme vypořádat s "dvojitými logaritmy". Jedna z možností je substituovat vnitřní logaritmus novou neznámou. Upravíme proto výraz $\log_{\frac{1}{2}} \log_2 2\sqrt{2}x$ tak, abychom mohli substituovat výraz $\log_2 x$:
  $\log_{\frac{1}{2}} \log_2 2\sqrt{2}x = \log_{\frac{1}{2}}(\log_2 2\sqrt{2} + \log_2 x)$.
- V rovnici $2\log_2 \log_2 x + \log_{\frac{1}{2}}(\log_2 2\sqrt{2} + \log_2 x) = 1$ již můžeme substituovat výraz $\log_2 x$ novou neznámou a.
- Získáme novou logaritmickou rovnici $2\log_2 a + \log_{\frac{1}{2}}(\log_2 2\sqrt{2} + a) = 1$ s neznámou $a \in R$.
- Převedeme logaritmus se základem $\frac{1}{2}$ na logaritmus o základu 2 a výraz upravíme:
  $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 2\sqrt{2} + a) = \frac{\log_2(\frac{3}{2}+a)}{\log_2 \frac{1}{2}} = \frac{\log_2(\frac{3}{2}+a)}{-1} = -\log_2(\frac{3}{2} + a)$.
- Výraz na levé straně rovnice upravíme pomocí věty o logaritmu součinu:
  $L(x) = 2\log_2 a - \log_2(\frac{3}{2} + a) = \log_2 \frac{a^2}{\frac{3}{2}+a}$.
- V rovnici $\log_2 \frac{a^2}{\frac{3}{2}+a} = 1$ porovnáme argumenty.
- Získáme rovnici $\frac{a^2}{\frac{3}{2}+a} = 2$, kterou vyřešíme.
- Řešením rovnice jsou čísla $a_1 = 3, a_2 = -1$.
- Zpětně nahradíme neznámou a výrazem $\log_2 x$.
- Rovnice $\log_2 x_1 = 3, \log_2 x_2 = -1$ vyřešíme porovnáním argumentů.
- Řešením jsou čísla $x_1 = 8, x_2 = \frac{1}{2}$, pro která musíme udělat zkoušku:
  $L(8) = 2\log_2 \log_2 8 + \log_{\frac{1}{2}} \log_2 4\sqrt{2} = 2\log_2 3 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{9}{2} =$
  $= \log_2 9 - \log_2 \frac{9}{2} = \log_2 \frac{9 \cdot 2}{9} = 1.$
  $P(8) = 1$
  $L(\frac{1}{2}) = 2\log_2 \log_2 \frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{2}} \log_2 \sqrt{2} = 2\log_2(-1) + \ldots$ Nedefinovaný výraz.
- $L(8) = P(8)$, proto číslo 8 je řešením rovnice. $L(\frac{1}{2})$ je nedefinovaný výraz, proto číslo $\frac{1}{2}$ není řešením rovnice. Množina všech kořenů $K = \{8\}$.

Zápis řešení:

$$
\begin{aligned}
2\log_2 \log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} \log_2 2\sqrt{2}x &= 1 \quad \text{Definiční obor neurčíme.}\\
2\log_2 \log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} (\log_2 2\sqrt{2} + \log_2 x) &= 1 \quad \text{/substituce } [S : \log_2 x = a]\\
2\log_2 a + \log_{\frac{1}{2}} (\log_2 2\sqrt{2} + a) &= 1\\
\log_2 a^2 + \log_{\frac{1}{2}} (\frac{3}{2} + a) &= 1\\
\log_2 a^2 + \frac{\log_2 (\frac{3}{2} + a)}{\frac{1}{2}} &= 1\\
\log_2 a^2 + \frac{\log_2 (\frac{3}{2} + a)}{-1} &= 1\\
\log_2 a^2 - \log_2 (\frac{3}{2} + a) &= 1\\
\log_2 \frac{a^2}{\frac{3}{2} + a} &= \log_2 2 \quad \text{/porovnání argumentů}\\
\frac{a^2}{\frac{3}{2} + a} &= 2 \quad / \cdot (\frac{3}{2} + a)\\
a^2 &= 3 + 2a \quad / - 3 - 2a\\
a^2 - 2a - 3 &= 0\\
(a - 3)(a + 1) &= 0\\
a_1 = 3 \quad &\vee \quad a_2 = -1 \quad /[S : a = \log_2 x]\\
\log_2 x_1 = 3 \quad & \quad \log_2 x_2 = -1\\
\log_2 x_1 = \log_2 8 \quad & \quad \log_2 x_2 = \log_2 \frac{1}{2} \quad \text{/porovnání argumentů}\\
x_1 = 8 \quad &\vee \quad x_2 = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$L(8) = 2\log_2 \log_2 8 + \log_{\frac{1}{2}} \log_2 16\sqrt{2} = 2\log_2 3 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{9}{2} =$

$= \log_2 9 - \log_2 \frac{9}{2} = \log_2 \frac{9 \cdot 2}{9} = \log_2 2 = 1$

$P(8) = 1$

$L(8) = P(8)$

$L\left(\frac{1}{2}\right) = 2\log_2 \log_2 \frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{2}} \log_2 \sqrt{2} = 2\log_2(-1) + \ldots$ Nedefinovaný výraz

$$K = \{8\}$$

NAHORU

5.7. Grafické řešení logaritmických rovnic

Na konci kapitoly o exponenciálních rovnicích jsme se naučili řešit exponenciální rovnice, které nešly řešit žádnou nám známou metodou. Nyní se naučíme řešit logaritmické rovnice, které nelze řešit žádnou metodu zmiňovanou v předchozích kapitolách. Půjde o grafické řešení logaritmických rovnic.

Java applet - připomenutí

Nejprve shrneme, co jsme se naučili v kapitole **Grafické řešení exponenciálních rovnic:**

- **Řešením rovnice $f(x) = 0$ jsou x-ové souřadnice průsečíků grafu funkce $y = f(x)$ s osou x.**
- **Ke grafickému řešení rovnic využijeme program GEOGEBRA, který umí vykreslit graf funkce a určit jeho průsečíky s osou x.**
- **Naučili jsme se ovládat Java applet.**
- **Naučili jsme se zadat předpis funkce do Java appletu.**

Zbývá nám tedy ukázat, jak zadat předpis logaritmické funkce do Java appletu. Do programu GEOGEBRA lze zadat pouze funkce **přirozený a dekadický logaritmus**. Logaritmy dalších základů zadáváme jako **podíl dvou logaritmů**.

Operace	Matematický zápis	Vstup appletu
Dekadický logaritmus	$\log x$	lg(x)
Přirozený logaritmus	$\ln x$	ln(x)
Obecný logaritmus	$\log_a x$	lg(x)/lg(a)

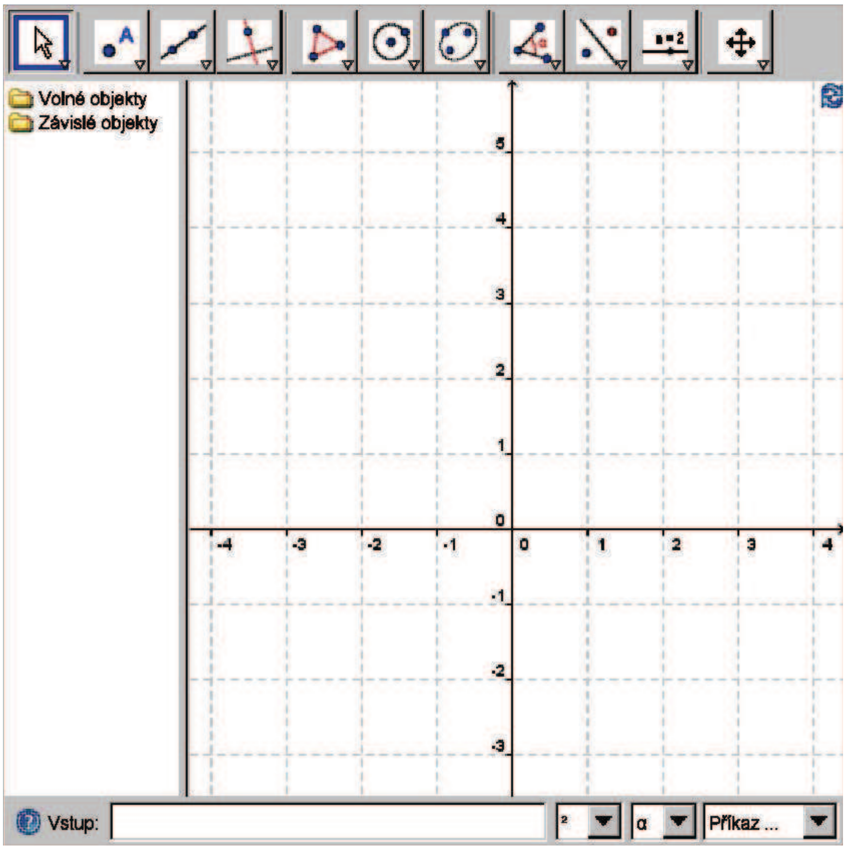
Ještě si ukážeme, jak lze zadat předpisy funkcí s logaritmy do Java appletu:

Matematický zápis	Vstup appletu
$y = \log_5(x+3)$	y=lg(x + 3) / lg(5)
$y = \log_{x+1} 2$	y= lg(2) / lg(x + 1)
$y = \log^2 5x - \log 5x$	y=(lg(5 x))² - lg(5 x)
$y = \log_5 \frac{x^2+1}{x-1} - 1$	y=lg((x² + 1) / (x - 1)) / lg(5) - 1

NAHORU

Grafické řešení rovnic

Pomocí následujícího appletu budeme graficky řešit logaritmické rovnice.



Využití appletu si ukážeme na jednoduchém příkladu.

Příklad 5.21

Řešte graficky s využitím appletu rovnici s neznámou $x \in R$:

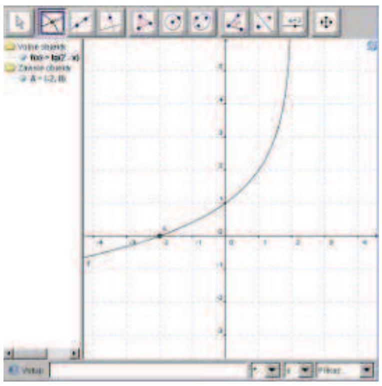
$$\log_{\frac{1}{2}}(2-x) = -2$$

Řešení

Budeme postupovat přesně dle **instrukcí**, popsaných v kapitole o grafickém řešení exponenciálních rovnic.

- Převedeme všechny výrazy v rovnici na levou stranu:
  $\log_{\frac{1}{2}}(2-x) + 2 = 0.$
- Do vstupního pole zadáme předpis funkce y=lg(2-x)/lg(1/2)+2 .
- Najdeme průsečíky grafu funkce s osou x.
- Je jím bod $[-2, 0]$.
- Řešením této rovnice je tedy x-ová souřadnice tohoto bodu.
- $K = \{-2\}$.

Tuto rovnici jsme již řešili v **příkladu 5.4** porovnáním argumentů. Vidíme, že jsme jinou metodou dosáhli stejného výsledku.

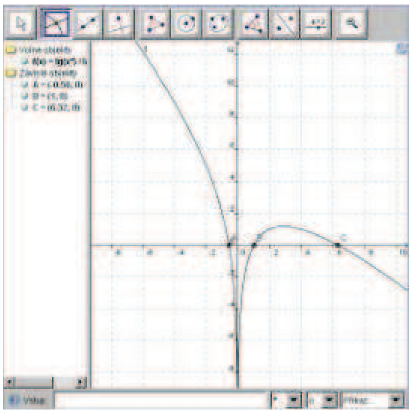


Cvičení 5.21

Řešte graficky s využitím appletu rovnice s neznámou $x \in R$:

$$\log_2 x^2 = x - 1$$
$$\log_2 x^2 - x + 1 = 0$$

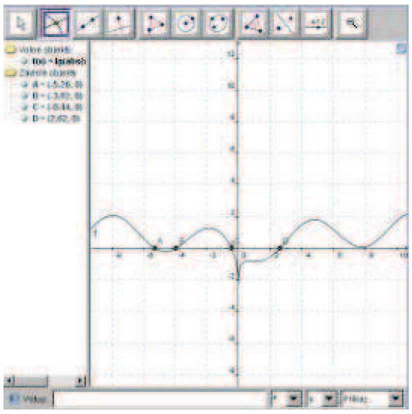
y=lg(x^2)/lg(2)-x+1



$$K = \{-0,58; 1; 6,23\}$$

$$\log_7 |x| = \sin x$$
$$\log_7 |x| - \sin x = 0$$

y=lg(abs(x))/lg(7)-sin(x)



$$K = \{-5,26; -3,92; -0,44; 2,62\}$$

NAHORU

6. Exponenciální nerovnice

6.1. Exponenciální nerovnice

Exponenciální nerovnicí nazýváme každou nerovnici, ve které je neznámá v exponentu nějaké mocniny.

Na exponenciální nerovnice lze nahlížet i jinak. Exponenciální nerovnice vznikne z exponenciální rovnice nahrazením symbolu rovnosti $=$ jedním ze symbolů nerovnosti $<, >, \leq, \geq$.

Připomeneme si , co znamená vyřešit nerovnici.

Vyřešit nerovnici s neznámou $x \in R$ znamená určit **všechny hodnoty neznámé** x, pro které platí daná nerovnost.

Při řešení nerovnice mohou nastat různé případy při určování množiny všech kořenů. Často půjde o nekonečně mnoho čísel, které zapisujeme pomocí **intervalu či jejich sjednocení**. Např. nerovnici $x < 5$ s neznámou $x \in R$ vyhovují čísla z intervalu $(-\infty, 5)$. Množina všech kořenů této nerovnice je tedy $K = (-\infty, 5)$.

NAHORU

Postup při řešení nerovnice

Postup při řešení nerovnic se bude skládat ze stejných kroků jako postup při **řešení rovnic**:

1. Určíme **obor řešení** nerovnice O.
2. Určíme **definiční obor** nerovnice D .
3. **Řešíme** nerovnici s využitím ekvivalentních úprav.
4. Určíme **množinu všech kořenů** nerovnice K.

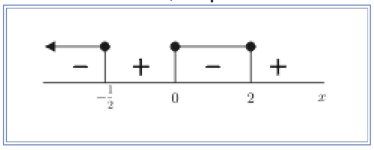
Upozorníme na několik drobností, ve kterých se liší řešení rovnic a nerovnic.

Liší se **ekvivalentí úpravy rovnic a nerovnic**:

- Při násobení nerovnice záporným číslem **otáčíme znak nerovnosti**.
- Nesmíme násobit nerovnici výrazem, který může nabývat kladných i záporných hodnot (pokud si nejste jisti, vyvarujte se násobení výrazem s neznámou).
- Liší se použití ekvivalentních úprav zavedených v této práci (porovnání exponentů, logaritmování a porovnání argumentů). Jednotlivými úpravami se budeme zabývat v následujících kapitolách.

Ekvivalentními úpravami nerovnici upravíme na **tvar, ze kterého můžeme určit řešení**. Mezi takové jednoduché tvary patří:

- Nerovnice, které přímo dávají podmínku pro neznámou x, např. nerovnice $x > 2$.
- Nerovnice v součinovém tvaru, např. nerovnice $x(x-2)(2x+1) \leq 0$. K řešení takové nerovnice použijeme číselnou osu, jak je vidět na obrázku.



- Kvadratické nerovnice, které převedeme na součinový tvar a řešíme jako v předchozím bodě. Např. nerovnici $2x^2 + x - 3 > 0$ převedeme na nerovnici $(2x+3)(x-1) > 0$, která je již v součinovém tvaru.

Zbývá určit množinu všech kořenů K. Do množiny všech kořenů patří takové hodnoty neznámé x získané v předchozím kroku, které leží v definičním oboru nerovnice. Pokud jsou definičním oborem všechna reálná čísla, potom je množina všech řešení K rovna řešení, získanému ekvivalentními úpravami nerovnice (typické pro exponenciální nerovnice a zcela výjimečné pro logaritmické nerovnice).

NAHORU

6.2. Porovnání exponentů

Základní úprava

Nejjednodušším typem exponenciální nerovnice je nerovnice ve tvaru $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ nebo nerovnice, které lze ekvivalentními úpravami převést na tento tvar. Řešení takové nerovnice využívá zákonitostí, které jsme odvodili při **porovnávání dvou mocnin**.

Při řešení takové nerovnice musíme rozlišit dva případy.

- Je-li $a > 1$, potom je nerovnice $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ ekvivalentní s nerovnicí $f(x) < g(x)$, neboť se jedná o porovnání argumentů rostoucí funkce.
- Je-li $a \in (0, 1)$, potom je nerovnice $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ ekvivalentní s nerovnicí $f(x) > g(x)$, neboť se jedná o porovnání argumentů klesající funkce.

Podrobně je **porovnání argumentů rostoucí a klesající funkce** vysvětleno v kapitole o funkcích. Shrneme:

Nerovnice $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ s neznámou $x \in R$ je ekvivalentní s nerovnicí

- $f(x) < g(x)$, pro $a > 1$,
- $f(x) > g(x)$, pro $a \in (0, 1)$.

Tuto ekvivalentní úpravu budeme nazývat **porovnání exponentů**.

Zatím jsme zmínili pouze nerovnice, kde byl použit znak nerovnosti $<$. Stejným způsobem se řeší i nerovnice, kde jsou použity znaky nerovnosti $>, \leq, \geq$. Při porovnání exponentů platí:

Porovnáváme-li exponenty mocnin se základem $a > 1$,
neotáčíme znaménko nerovnosti.
Porovnáváme-li exponenty mocnin se základem $a \in (0, 1)$,
otáčíme znaménko nerovnosti.

Příklad 6.1

Řešte nerovnice s neznámou $x \in R$:

a) $3^{x+1} \leq 27$
b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} > 3$

Řešení

a)
- Definiční obor nerovnice $D = R$.
- Nejprve převedeme výraz na pravé straně nerovnice na mocninu se základem 3, abychom mohli porovnat exponenty:
  $27 = 3^3$.
- Porovnáme exponenty mocnin na obou stranách nerovnice. Protože je základ mocniny **větší než jedna, neotáčíme znak nerovnosti**.
- Získáme nerovnici $x + 1 \leq 3$, která je ekvivalentní s nerovnicí $x \leq 2$.
- Množina všech kořenů $K = (-\infty, 2>$.

$$\begin{aligned} 3^{x+1} &\leq 27 \quad D = R \\ 3^{x+1} &\leq 3^3 \quad \text{/porovnání exponentů} \\ x+1 &\leq 3 \quad / -1 \\ x &\leq 2 \\ K &= (-\infty, 2\rangle \end{aligned}$$

b)
- Definiční obor nerovnice $D = R$.
- Nejprve převedeme výraz na pravé straně nerovnice na mocninu se základem $\frac{1}{3}$, abychom mohli porovnat exponenty:
  $3 = (\frac{1}{3})^{-1}$.
- Porovnáme exponenty mocnin na obou stranách nerovnice. Protože je základ mocniny **menší než jedna, otáčíme znak nerovnosti**.
- Získáme nerovnici $x - 2 < -1$, která je ekvivalentní s nerovnicí $x < 1$.
- Množina všech kořenů $K = (-\infty, 1)$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} &> 3 \quad D = R \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} &> \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \quad \text{/porovnání exponentů} \\ x-2 &< -1 \quad / +2 \\ x &< 1 \\ K &= (-\infty, 1) \end{aligned}$$

Cvičení 6.1

Řešte nerovnice s neznámou $x, y \in R$:

$7^{3x-3} \geq 1$	$(\frac{1}{2})^{2y+1} \leq \frac{1}{4}$
$D = R$	$D = R$
$7^{3x-3} \geq 7^0$	$(\frac{1}{2})^{2y+1} \leq (\frac{1}{2})^2$
$3x - 3 \geq 0$	$2y + 1 \geq 2$
$3x \geq 3$	$2y \geq 1$
$x \geq 1$	$y \geq \frac{1}{2}$
$K =< 1, +\infty)$	$K =< \frac{1}{2}, +\infty)$

NAHORU

Úprava na základní tvar

Nyní ukážeme několik nerovnic, které lze vhodnými úpravami převést na tvar, ve kterém je možné porovnat exponenty mocnin.

V prvním příkladu je nutné všechny výrazy v nerovnici převést na mocniny se stejným základem.

Příklad 6.2

Řešte nerovnici s neznámou $x \in R$:

$$2^{x-1} < 4^{x+1} \cdot (\tfrac{1}{2})^x$$

Řešení

- Definiční obor nerovnice $D = R$.
- Abychom mohli porovnat exponenty mocnin, musíme nejprve výraz na pravé straně rovnice převést na mocninu se základem 2:

$P(x) = 4^{x+1} \cdot (\frac{1}{2})^x = 2^{2x+2} \cdot 2^{-x} = 2^{2x+2-x} = 2^{x+2}$.

- Porovnáme exponenty mocnin na obou stranách nerovnice. Protože je základ mocniny **větší než jedna, neotáčíme znak nerovnosti**.
- Získáme nerovnici $x - 1 < x + 2$, která je ekvivalentní s nerovnicí $-1 < 2$.
- Nerovnost $-1 < 2$ je pravdivá, proto jsou řešením všechna reálná čísla.
- Množina všech kořenů $K = R$.

Zápis řešení:

$$2^{x-1} < 4^{x+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \qquad D = R$$

Převedeme výraz na pravé straně rovnice na mocninu o základu 2.

$$4^{x+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{2x+2} \cdot 2^{-x} = 2^{2x+2-x} = 2^{x+2}$$

$$\begin{aligned} 2^{x-1} &< 2^{x+2} \quad /\text{porovnání exponentů} \\ x-1 &< x+2 \quad / -x \\ -1 &< 2 \\ K &= R \end{aligned}$$

Nerovnici v dalším příkladu je opět nutné upravit pomocí pravidel pro počítání s mocninami. Navíc nám po porovnání exponentů vznikne kvadratická nerovnice, kterou řešíme s pomocí číselné osy.

Příklad 6.3

Řešte nerovnici s neznámou $x \in R$:

$$3^{x^2-2} \cdot 2^{x^2-2} < 36$$

Řešení

- Definiční obor nerovnice $D = R$.
- Abychom mohli porovnat exponenty mocnin, musíme nejprve výrazy na levé i pravé straně rovnice převést na mocninu se základem 6:
  $L(x) = 3^{x^2-2} \cdot 2^{x^2-2} = (3 \cdot 2)^{x^2-2} = 6^{x^2-2}$,
  $P(x) = 36 = 6^2$.
- Porovnáme exponenty mocnin na obou stranách nerovnice. Protože je základ mocniny **větší než jedna, neotáčíme znak nerovnosti**.
- Získáme nerovnici $x^2 - 2 < 2$, která je ekvivalentní s nerovnicí $x^2 - 4 < 0$.
- Nerovnici $x^2 - 4 < 0$ řešíme s pomocí číselné osy:
  Upravíme nerovnici na součinový tvar: $(x-2)(x+2) < 0$.
  Určíme nulové body výrazů v závorkách: 2, -2.
  Zaneseme nulové body na osu a určíme, ve který intervalech je výraz kladný a záporný.
  Výraz je záporný pro čísla z intervalu $(-2, 2)$.
- Množina všech kořenů $K = (-2, 2)$.

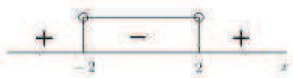
Zápis řešení:

$$3^{x^2-2} \cdot 2^{x^2-2} < 36 \qquad D = R$$

Převedeme výraz na levé straně rovnice na mocninu o základu 6.

$$3^{x^2-2} \cdot 2^{x^2-2} = 6^{x^2-2}$$

$$\begin{aligned} 6^{x^2-2} &< 6^2 \quad /\text{porovnání exponentů} \\ x^2-2 &< 2 \quad / -2 \\ x^2-4 &< 0 \\ (x-2)(x+2) &< 0 \end{aligned}$$



$$K = (-2, 2)$$

Posledním příkladem, který uvádíme v této kapitole, je nerovnice, kde výraz na levé straně nerovnice obsahuje součet dvou jednočlenů. Abychom převedli součet na součin, využijeme vytýkání.

Příklad 6.4

Řešte nerovnici s neznámou $x \in R$:

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^{x-1} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{x-2} \geq 12$$

Řešení

- Definiční obor nerovnice $D = R$.
- Nejprve upravíme výraz na levé straně rovnice na součinový tvar: $L(x) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{x-1} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{x-2} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{x-1} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{x-1} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-1} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{x-1} \cdot (1+2) = 3 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{x-1}$.
- Následně vydělíme nerovnici číslem 3 a vznikne nám nerovnice $\left(\tfrac{1}{2}\right)^{x-1} \geq 4$.
- Abychom mohli porovnat exponenty mocnin, musíme nejprve výraz na pravé straně nerovnice převést na mocninu se základem $\tfrac{1}{2}$: $4 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-2}$.
- Porovnáme exponenty mocnin na obou stranách nerovnice. Protože je základ mocniny **menší než jedna, otáčíme znak nerovnosti**.
- Získáme nerovnici $x - 1 \leq -2$, která je ekvivalentní s nerovnicí $x \leq -1$.
- Množina všech kořenů $K = (-\infty, -1 >$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} &\geq 12 \qquad D = R \\
&\text{Vytkneme } \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \text{ z výrazu na levé straně rovnice.} \\
&\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \cdot (1+2) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \\
3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} &\geq 12 \quad /:3 \\
\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} &\geq 4 \\
\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} &\geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \quad \text{/porovnání exponentů} \\
x - 1 &\leq -2 \quad / + 1 \\
x &\leq -1 \\
K &= \langle -\infty, -1 \rangle
\end{aligned}$$

NAHORU

6.3. Logaritmování

Základní tvar

Dalším typem exponenciálních nerovnic, které budeme řešit, jsou nerovnice ve tvaru $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, kde a, b jsou různé základy. Tento typ nerovnic budeme opět řešit tzv. **logaritmováním**, které jsme již zavedli při řešení exponenciálních rovnic.

Nerovnice $a^{f(x)} < b^{g(x)}$ s neznámou $x \in R$ pro $a, b \in R^{+} - \{1\}$ je ekvivalentní s nerovnicí

- $f(x) \cdot \log_c a < g(x) \cdot \log_c b$, pro $c > 1$,
- $f(x) \cdot \log_c a > g(x) \cdot \log_c b$, pro $c \in (0, 1)$,

Tuto ekvivalentní úpravu budeme nazývat **logaritmování**.

Obecně jsme úpravu logaritmování definovali pro logaritmus s libovolným základem c. V praxi za hodnotu c budeme volit přímo základ a nebo b, neboť potom jeden z výrazů $\log_c a$ nebo $\log_c b$ bude rovnen jedné a nerovnice se nám výrazně zjednoduší.

Zatím jsme opět zmínili pouze nerovnice, kde byl použit znak nerovnosti $<$. Stejným způsobem se řeší i nerovnice, kde jsou použity znaky nerovnosti $>, \leq, \geq$. Při logaritmování nerovnic platí:

Logaritmujeme-li nerovnici logaritmem se základem $a > 1$,
neotáčíme znaménko nerovnosti.
Logaritmujeme-li nerovnici logaritmem se základem $a \in (0, 1)$,
otáčíme znaménko nerovnosti.

Příklad 6.5

Řešte nerovnice s neznámou $x \in R$:

a) $2^x \leq 7$
b) $0,3^x < 5$

Řešení

a)
- Definiční obor nerovnice $D = R$.
- Logaritmujeme nerovnici logaritmem o základu 2. Protože je základ logaritmu **větší než jedna, neotáčíme znak nerovnosti**.
- Získáme nerovnici $x \log_2 2 \leq \log_2 7$, která je ekvivalentní s nerovnicí $x \leq \log_2 7$, neboť $\log_2 2 = 1$.
- Množina všech kořenů $K = (-\infty, \log_2 7 >$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned} 2^x &\leq 7 \quad D = R \\ 2^x &\leq 7 \quad /\text{logaritmování} \\ x \log_2 2 &\leq \log_2 7 \\ x &\leq \log_2 7 \\ K &= (-\infty, \log_2 7\rangle \end{aligned}$$

b) • Definiční obor nerovnice $D = R$.
• Logaritmujeme nerovnici logaritmem o základu 0,3. Protože je základ logaritmu **menší než jedna, otáčíme znak nerovnosti**.
• Získáme nerovnici $x \log_{0,3} 0,3 > \log_{0,3} 5$, která je ekvivalentní s nerovnicí $x > \log_{0,3} 5$.
• Množina všech kořenů $K = (\log_{0,3} 5, +\infty)$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned} 0,3^x &< 5 \quad D = R \\ 0,3^x &< 5 \quad /\text{logaritmování} \\ x\log_{0,3} 0,3 &> \log_{0,3} 5 \\ x &> \log_{0,3} 5 \\ K &= (\log_{0,3} 5, +\infty) \end{aligned}$$

Cvičení 6.5

Řešte nerovnice s neznámou $x, y \in R$:

$$\begin{aligned} (\tfrac{1}{2})^x &> 3 \\ D &= R \\ x\log_{\frac{1}{2}} \tfrac{1}{2} &< \log_{\frac{1}{2}} 3 \\ x &< \log_{\frac{1}{2}} 3 \\ K &= (-\infty, \log_{\frac{1}{2}} 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4^{x+2} &\leq 5 \\ D &= R \\ (x+2)\log_4 4 &\leq \log_4 5 \\ x+2 &\leq \log_4 5 \\ x &\leq \log_4 5 - 2 \\ K &= (-\infty, \log_4 5 - 2 > \end{aligned}$$

NAHORU

Úprava na základní tvar

Tuto kapitolu uzavřeme příkladem, ve kterém je nutné nejprve pomocí pravidel pro práci s mocninami převést nerovnici na tvar, který můžeme logaritmovat. Zároveň upozorníme na jednu nepříjemnost, na kterou můžeme narazit při řešení nerovnic logaritmováním.

Příklad 6.6

Řešte nerovnici s neznámou $x \in R$:

$$4^x \cdot 3^x > 14^{x-1}$$

Řešení

• Definiční obor nerovnice $D = R$.
• Abychom mohli logaritmovat, musíme nejprve výraz na levé straně rovnice převést na jednu mocninu:
$L(x) = 4^x \cdot 3^x = (4 \cdot 3)^x = 12^x$.
• Logaritmujeme nerovnici logaritmem o základu 12. Protože je základ logaritmu **větší než jedna, neotáčíme znak nerovnosti**.
• Získáme nerovnici $x \log_{12} 12 > (x-1)\log_{12} 14$, která je ekvivalentní s nerovnicí $x > x\log_{12} 14 - \log_{12} 14$.
• Převedeme všechny výrazy s neznámou na levou stranu nerovnice a neznámou vytkneme:
$x(1 - \log_{12} 14) > -\log_{12} 14$.
• Abychom osamostatnili neznámou x, musíme rovnici vydělit výrazem $(1 - \log_{12} 14)$.
Protože je $\log_{12} 14$ číslo větší než 1, je celý **výraz** $(1 - \log_{12} 14)$ **záporný a musíme tedy otočit znak nerovnosti!**
• V nerovnici $x < \frac{-\log_{12} 14}{1-\log_{12} 14}$ rozšíříme zlomek číslem -1:
$x < \frac{\log_{12} 14}{\log_{12} 14 - 1}$.
• Množina všech kořenů $K = (-\infty, \frac{\log_{12} 14}{\log_{12} 14 - 1})$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned}
4^x \cdot 3^x &> 14^{x-1} \quad D = R \\
12^x &> 14^{x-1} \quad /\text{logaritmování} \\
x \log_{12} 12 &> (x-1) \log_{12} 14 \\
x &> x \log_{12} 14 - \log_{12} 14 \quad / - x \log_{12} 14 \\
x - x \log_{12} 14 &> -\log_{12} 14 \\
x(1 - \log_{12} 14) &> -\log_{12} 14 \quad / : (1 - \log_{12} 14) \\
x &< \frac{-\log_{12} 14}{1 - \log_{12} 14} \\
x &< \frac{\log_{12} 14}{\log_{12} 14 - 1} \\
K &= \left(-\infty, \frac{\log_{12} 14}{\log_{12} 14 - 1}\right)
\end{aligned}$$

NAHORU

6.4. Substituce

Některé exponenciální nerovnice nelze vyřešit porovnáním exponentů ani logaritmováním. Takové nerovnice se snažíme vhodnou substitucí převést na nerovnice, které už umíme vyřešit.

Pojem **substituce** jsme již zavedli při řešení exponenciálních rovnic. Zápis řešení i použité značení jsou tedy stejné.

Substituce za mocninu

Příklady, které ukážeme v této kapitole, se dají vždy řešit vhodnou substitucí nové neznámé za mocninu. V jednotlivých příkladech ukážeme, jak z řešení nerovnice s novou neznámou získáme původní řešení nerovnice.

Příklad 6.7

Řešte nerovnici s neznámou $x \in R$:

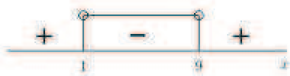
$$9^x - 10 \cdot 3^x + 9 < 0$$

Řešení

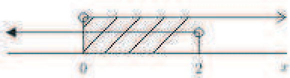
- Definiční obor nerovnice $D = R$.
- Abychom mohli zavést substituci, musíme mocninu 9^x upravit: $9^x = (3^x)^2$.
- V nerovnici $(3^x)^2 - 10 \cdot 3^x + 9 < 0$ nahradíme všechny výrazy 3^x novou neznámou a.
- Nerovnici $a^2 - 10a + 9 < 0$ s neznámou $a \in R$ vyřešíme.
- Nerovnici převedeme na součinový tvar $(a-1)(a-9) < 0$ a vyřešíme s pomocí číselné osy. Řešením je interval $(1, 9)$.
- Pro neznámou a tak dostáváme podmínky:
  $a > 1$ **a zároveň** $a < 9$.
- Zpětně nahradíme neznámou a výrazem 3^x .
- Pro neznámou x dostáváme podmínky:
  $3^x > 1$ **a zároveň** $3^x < 9$.
- Nerovnice vyřešíme porovnáním exponentů:
  $x > 0$ **a zároveň** $x < 2$.
- Množinu kořenů určíme s pomocí číselné osy: $K = (0, 2)$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned} 9^x - 10 \cdot 3^x + 9 &< 0 \quad D = R \\ (3^x)^2 - 10 \cdot 3^x + 9 &< 0 \quad /\text{substituce } [S : 3^x = a] \\ a^2 - 10a + 9 &< 0 \\ (a-1)(a-9) &< 0 \end{aligned}$$



$$\begin{array}{lcll} a > 1 & \wedge & a < 9 & /[S : a = 3^x] \\ 3^x > 1 & & 3^x < 9 & \\ 3^x > 3^0 & & 3^x < 3^2 & /\text{porovnání exponentů} \\ x > 0 & \wedge & x < 2 & \end{array}$$



$$K = (0, 2)$$

NAHORU

Příklad 6.8

Řešte nerovnici s neznámou $x \in R$:

$$16^x - 2 \cdot 4^x - 8 \geq 0$$

Řešení

- Definiční obor nerovnice $D = R$.
- Abychom mohli zavést substituci, musíme mocninu 16^x upravit: $16^x = (4^x)^2$.
- V nerovnici $(4^x)^2 - 2 \cdot 4^x - 8 \geq 0$ nahradíme všechny výrazy 4^x novou neznámou a.
- Nerovnici $a^2 - 2a - 8 \geq 0$ s neznámou $a \in R$ vyřešíme.
- Nerovnici převedeme na součinový tvar $(a+2)(a-4) \geq 0$ a vyřešíme s pomocí číselné osy. Řešením je sjednocení intervalů $(-\infty, -2 > \cup < 4, +\infty)$.
- Pro neznámou a tak dostáváme podmínky:
  $a \leq -2$ **nebo** $a \geq 4$.
- Zpětně nahradíme neznámou a výrazem 4^x.
- Pro neznámou x dostáváme podmínky:
  $4^x \leq -2$ **nebo** $4^x \geq 4$.
- Nerovnice vyřešíme porovnáním exponentů:
  $x \in \emptyset$ **nebo** $x \geq 1$.
- Množina všech kořenů $K =< 1, +\infty)$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned} 16^x - 2 \cdot 4^x - 8 &\geq 0 \quad D = R \\ (4^x)^2 - 2 \cdot 4^x - 8 &\geq 0 \quad /\text{substituce } [S : 4^x = a] \\ a^2 - 2a - 8 &\geq 0 \\ (a+2)(a-4) &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \leq -2 \quad &\vee \quad a \geq 4 \quad /[S : a = 4^x] \\ 4^x \leq -2 \quad & \quad\;\; 4^x \geq 4 \quad /\text{porovnání exponentů} \\ x \in \emptyset \quad &\vee \quad x \geq 1 \\ K &= \langle 1, +\infty) \end{aligned}$$

NAHORU

Příklad 6.9

Řešte nerovnici s neznámou $x \in R$:

$$2 \cdot (\tfrac{1}{4})^x - 9 \cdot (\tfrac{1}{2})^x + 4 > 0$$

Řešení

- Definiční obor nerovnice $D = R$.
- Abychom mohli zavést substituci, musíme mocninu $(\frac{1}{4})^x$ upravit: $(\frac{1}{4})^x = (\frac{1}{2})^{2x}$.
- V nerovnici $2 \cdot (\frac{1}{2})^{2x} - 9 \cdot (\frac{1}{2})^x + 4 > 0$ nahradíme všechny výrazy $(\frac{1}{2})^x$ novou neznámou a.
- Nerovnici $2a^2 - 9a + 4 < 0$ s neznámou $a \in R$ vyřešíme.
- Nerovnici převedeme na součinový tvar $(2a-1)(a-4) > 0$ a vyřešíme s pomocí číselné osy. Řešením je sjednocení intervalů $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (4, +\infty)$.
- Pro neznámou a tak dostáváme podmínky:
  $a < \frac{1}{2}$ **nebo** $a > 4$.
- Zpětně nahradíme neznámou a výrazem $(\frac{1}{2})^x$.
- Pro neznámou x dostáváme podmínky:
  $(\frac{1}{2})^x < \frac{1}{2}$ **nebo** $(\frac{1}{2})^x > 4$.
- Nerovnice vyřešíme porovnáním exponentů:
  $x > 1$ **nebo** $x < -2$.

- Množinu kořenů určíme s pomocí číselné osy: $K = (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned}
2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x - 9\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x + 4 &> 0 \quad D = R \\
2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - 9\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x + 4 &> 0 \quad /\text{substituce } \left[S: \left(\frac{1}{2}\right)^x = a\right] \\
2a^2 - 9a + 4 &> 0 \\
(2a-1)(a-4) &> 0
\end{aligned}$$

$$a < \frac{1}{2} \quad \vee \quad a > 4 \quad /\left[S: a = \left(\frac{1}{2}\right)^x\right]$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x < \frac{1}{2} \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \quad /\text{porovnání exponentů}$$

$$x > 1 \quad \vee \quad x < -2$$

$$K = (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$$

NAHORU

7. Logaritmické nerovnice

7.1. Logaritmická nerovnice

Logaritmickou nerovnicí nazýváme každou nerovnici, ve které je neznámá v argumentu nebo základu nějakého logaritmu.

Na logaritmické nerovnice lze opět nahlížet i jinak. Logaritmická nerovnice vznikne z logaritmické rovnice nahrazením symbolu rovnosti $=$ jedním ze symbolů nerovnosti $<, >, \leq, \geq$.

Co znamená **vyřešit nerovnici** jsme již připomněli v kapitole o **exponenciálních nerovnicích**.

Postup při řešení nerovnice jsme již vysvětlili v kapitole o exponenciálních nerovnicích. Na rozdíl od exponenciálních nerovnic je potřeba si dávat pozor na určování definičního oboru logaritmické nerovnice.

NAHORU

Definiční obor

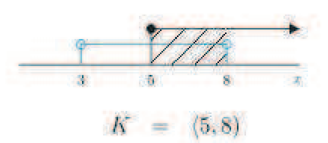
Postup při určování definčního oboru logaritmické nerovnice je stejný, jako **určování definičního oboru logaritmických rovnic**. Připomeňme si, že do definičního oboru logaritmické nerovnice patří čísla, pro která je:

- argument logaritmu větší než nula,
- základ logaritmu větší než nula a různý od jedné.

Zbývá ukázat, jak určíme množinu všech kořenů K. Předpokládejme, že chceme určit řešení nerovnice, jejíž definiční obor $D = (3, 8)$ a úpravami původní nerovnice vznikne nerovnice $x \geq 5$.

Dohodneme se na následujícím postupu:

- Na číselné ose vyznačíme definiční obor nerovnice $D = (3, 8)$. Pro přehlednost ho zakreslíme modrou barvou.
- Následně na číselnou osu zakreslíme hodnoty, pro které je splněna nerovnost $x \geq 5$. Jedná se o interval $< 5, +\infty)$. Pro přehlednost ho zakreslíme černou barvou.
- Určíme průnik těchto intervalů, které na číslené ose vyznačíme šrafováním. Je jím interval $< 5, 8)$.
- Hodnoty neznámých z tohoto intervalu jsou řešením původní nerovnice, proto množina všech kořenů $K =< 5, 8)$.



NAHORU

7.2. Porovnání argumentů

Základní úprava

Nejjednodušším typem logaritmické nerovnice je nerovnice ve tvaru $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ nebo nerovnice, které lze ekvivalentními úpravami převést na tento tvar. Řešení takové nerovnice využívá zákonitostí, které jsme odvodili při **porovnávání dvou logaritmů**.

Při řešení takové nerovnice musíme rozlišit dva případy.

- Je-li $a > 1$, potom je nerovnice $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ ekvivalentní s nerovnicí $f(x) < g(x)$, neboť se jedná o porovnání argumentů rostoucí funkce.
- Je-li $a \in (0, 1)$, potom je nerovnice $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ ekvivalentní s nerovnicí $f(x) > g(x)$, neboť se jedná o porovnání argumentů klesající funkce.

Podrobně je **porovnání argumentů rostoucí a klesající funkce** vysvětleno v kapitole o funkcích.

Nerovnice $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ s neznámou $x \in R$ je ekvivalentní s nerovnicí

- $f(x) < g(x)$, pro $a > 1$,
- $f(x) > g(x)$, pro $a \in (0, 1)$.

Tuto ekvivalentní úpravu budeme nazývat **porovnání argumentů**.

Zatím jsme zmínili pouze logaritmické nerovnice, kde byl použit znak nerovnosti $<$. Stejným způsobem se řeší i nerovnice, kde jsou použity znaky nerovnosti $>, \leq, \geq$. Při porovnání argumentů platí:

Porovnáváme-li argumenty logaritmů se základem $a > 1$,
neotáčíme znaménko nerovnosti.
Porovnáváme-li argumenty logaritmů se základem $a \in (0, 1)$,
otáčíme znaménko nerovnosti.

Příklad 7.1

Řešte nerovnice s neznámou $x \in R$:

a) $\log_2(2x+1) > \log_2(x+7)$
b) $\log_{\frac{1}{3}}(x+5) \leq \log_{\frac{1}{3}}(5x-3)$

Řešení

a)
- Výrazy v nerovnici jsou definovány, pokud jsou splněny podmínky $2x+1 > 0$ a $x+7 > 0$.
- Definiční obor nerovnice $D = (-\frac{1}{2}, +\infty)$.
- Porovnáme argumenty logaritmů na obou stranách nerovnice. Protože je základ logaritmu **větší než jedna, neotáčíme znak nerovnosti**.
- Získáme nerovnici $2x+1 > x+7$, která je ekvivalentní s nerovnicí $x > 6$.
- Na číselné ose určíme průnik definičního oboru a řešení předchozí nerovnice.
- Množina všech kořenů původní nerovnice $K = (6, +\infty)$.

Zápis řešení:

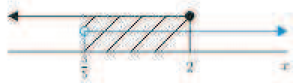
$$\begin{aligned} 2x+1 &> 0 \qquad x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \\ x+7 &> 0 \qquad x \in (-7, +\infty) \\ D &= \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \\ \log_2(2x+1) &> \log_2(x+7) \quad \text{/porovnání argumentů} \\ 2x+1 &> x+7 \quad / -x-1 \\ x &> 6 \end{aligned}$$

$$K = (6, +\infty)$$

b) - Výrazy v nerovnici jsou definovány, pokud jsou splněny podmínky $x+5 > 0$ a $5x-3 > 0$.
- Definiční obor nerovnice $D = (\frac{3}{5}, +\infty)$.
- Porovnáme argumenty logaritmů na obou stranách nerovnice. Protože je základ logaritmu **menší než jedna, otáčíme znak nerovnosti**.
- Získáme nerovnici $x + 5 \geq 5x - 3$, která je ekvivalentní s nerovnicí $x \leq 2$.
- Na číselné ose určíme průnik definičního oboru a řešení předchozí nerovnice.
- Množina všech kořenů původní nerovnice $K = (\frac{3}{5}, 2 >$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned} x+5 &> 0 \qquad x \in (-5, +\infty) \\ 5x-3 &> 0 \qquad x \in \left(\frac{3}{5}, +\infty\right) \\ D &= \left(\frac{3}{5}, +\infty\right) \\ \log_{\frac{1}{3}}(x+5) &\leq \log_{\frac{1}{3}}(5x-3) \quad \text{/porovnání argumentů} \\ x+5 &\geq 5x-3 \quad / -5x-5 \\ -4x &\geq -8 \quad / : (-2) \\ x &\leq 2 \end{aligned}$$



$$K = \left(\frac{3}{5}, 2\right\rangle$$

Cvičení 7.1

Řešte nerovnice s neznámou $x, y \in R$:

$\log_{\frac{1}{2}}(3x+4) \geq \log_{\frac{1}{2}}(x+8)$	$\log_3(2y-2) \geq \log_3(4y+2)$
$D = (-\frac{4}{3}, +\infty)$	$D = (1, +\infty)$
$3x+4 \leq x+8$	$2y-2 \geq 4y+2$
$2x \leq 4$	$-2y \geq 4$
$x \leq 2$	$y \leq -2$
$K = (-\frac{4}{3}, 2)$	$K = \emptyset$

NAHORU

Převod čísla na logaritmus

Opět se může stát, že na jedné straně nerovnice se místo logaritmu nachází číslo. Potom musíme toto číslo nejprve převést na logaritmus o základu, který se vyskytuje v nerovnici. Řešení takové nerovnice ukážeme v následujícím příkladu.

Příklad 7.2

Řešte nerovnici s neznámou $x \in R$:

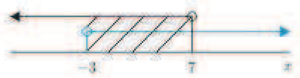
$$\log_{\frac{1}{10}}(x+3) > -1$$

Řešení

- Výrazy v nerovnici jsou definovány, pokud je splněna podmínka $x+3>0$.
- Definiční obor nerovnice $D = (-3, +\infty)$.
- Nejprve převedeme výraz na pravé straně nerovnice na logaritmus o základu $\frac{1}{10}$, abychom mohli porovnat argumenty:
  $-1 = \log_{\frac{1}{10}} 10.$
- Porovnáme argumenty logaritmů na obou stranách nerovnice. Protože je základ logaritmu **menší než jedna, otáčíme znak nerovnosti**.
- Získáme nerovnici $x+3<10$, která je ekvivalentní s nerovnicí $x<7$.
- Na číselné ose určíme průnik definičního oboru a řešení předchozí nerovnice.
- Množina všech kořenů původní nerovnice $K = (-3, 7)$.

Zápis řešení:

$$x+3 > 0 \qquad x \in (-3, +\infty)$$
$$D = (-3, +\infty)$$
$$\log_{\frac{1}{10}}(x+3) > -1$$
$$\log_{\frac{1}{10}}(x+3) > \log_{\frac{1}{10}} 10 \quad \text{/porovnání argumentů}$$
$$x+3 < 10 \quad /-3$$
$$x < 7$$



$$K = (-3, 7)$$

Cvičení 7.2

Řešte nerovnice s neznámou $x, y \in R$:

$$\log_3(x+2) \leq 3$$
$$D = (-2, +\infty)$$
$$\log_3(x+2) \leq \log_3 27$$
$$x+2 \leq 27$$
$$x \leq 25$$
$$K = (-2, 25>$$

$$\log_{\frac{4}{7}}(5-y) > 0$$
$$D = (-\infty, 5)$$
$$\log_{\frac{4}{7}}(5-y) > \log_{\frac{4}{7}} 1$$
$$5-y < 1$$
$$-y < -4$$
$$y > 4$$
$$K = (4, 5)$$

NAHORU

Složitější argument

Zatím se v argumentech logaritmů vyskytovala neznámá pouze v první mocnině a po porovnání argumentů vznikla lineární nerovnice. V dalším příkladu ukážeme, že stejným způsobem se řeší i logaritmické nerovnice, kde je v argumentu logaritmu složitější výraz. Musíme si však dát pozor na určování definičního oboru a určování množiny všech kořenů.

Příklad 7.3

Řešte nerovnici s neznámou $x \in R$:

$$\log_6(x^2 - 3x + 2) \leq 1$$

Řešení

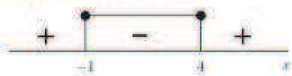
- Výrazy v nerovnici jsou definovány, pokud je splněna podmínka $x^2 - 3x + 2 > 0$.
- Podmínku převedeme na součinový tvar $(x-1)(x-2) > 0$ a vyřešíme s pomocí číselné osy.
- Definiční obor nerovnice $D = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.
- Nejprve převedeme výraz na pravé straně nerovnice na logaritmus o základu 6, abychom mohli porovnat argumenty:
  $1 = \log_6 6$.
- Porovnáme argumenty logaritmů na obou stranách nerovnice. Protože je základ logaritmu **větší než jedna, neotáčíme znak nerovnosti**.
- Získáme nerovnici $x^2 - 3x + 2 \leq 6$, která je ekvivalentní s nerovnicí $x^2 - 3x - 4 \leq 0$.
- Nerovnici převedeme na součinový tvar $(x+1)(x-4) \leq 0$ a vyřešíme na číselné ose.
  Řešením je interval $\langle -1, 4\rangle$.
- Na číselné ose určíme průnik definičního oboru a řešení předchozí nerovnice.
- Množina všech kořenů původní nerovnice $K = \langle -1, 1) \cup (2, 4\rangle$.

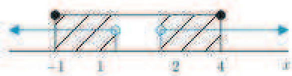
Zápis řešení:

$$
\begin{aligned}
x^2 - 3x + 2 &> 0 \\
(x-1)(x-2) &> 0
\end{aligned}
$$

$$D = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$

$$
\begin{aligned}
\log_6(x^2 - 3x + 2) &\leq 1 \\
\log_6(x^2 - 3x + 2) &\leq \log_6 6 \quad \text{/porovnání argumentů} \\
x^2 - 3x + 2 &\leq 6 \quad / -6 \\
x^2 - 3x - 4 &\leq 0 \\
(x+1)(x-4) &\leq 0
\end{aligned}
$$





$$K = \langle -1, 1) \cup (2, 4\rangle$$

Vícenásobné logaritmy

Stejně jako při řešení logaritmický rovnic můžeme řešit i logaritmické nerovnice, kde se v argumentech logaritmu nachází další logaritmus. U takové rovnice jsme neurčovali její definiční obor a na závěr příkladu jsme udělali zkoušku. U nerovnic takovou možnost nemáme a definiční obor určit musíme. Určit definiční obor ovšem znamená řešit další logaritmickou nerovnici, jak je vidět v následujícím příkladu.

Příklad 7.4

Řešte nerovnici s neznámou $x \in R$:

$$\log_3[1 - \log_2(2x - 1)] \geq 0$$

Řešení

- Výrazy v nerovnici jsou definovány, pokud jsou splněny podmínky

$2x-1>0$ a $1-\log_2(2x-1)>0$.

- První podmínka je splněna pro $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$.
- Nerovnici $1-\log_2(2x-1)>0$ řešíme porovnáním argumentů.
- Logaritmus převedeme na pravou stranu rovnice a číslo 1 převedeme na logaritmus o základu 2, abychom mohli porovnat argumenty:
  $1 = \log_2 2$.
- V nerovnici $\log_2 2 > \log_2(2x-1)$ porovnáme argumenty logaritmů na obou stranách nerovnice. Protože je základ logaritmu **větší než jedna, neotáčíme znak nerovnosti**.
- Získáme nerovnici $2 > 2x-1$, která je ekvivalentní s nerovnicí $x < \frac{3}{2}$.
- Druhá podmínka je splněna pro $x \in (-\infty, \frac{3}{2})$.
- Obě podmínky jsou splněny pro $x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ (průnik intervalů). Definiční obor nerovnice $D = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.
- Nyní přistoupíme k řešení samotné nerovnice. Nejprve převedeme číslo 0 na logaritmus o základu 3, abychom mohli porovnat argumenty:
  $0 = \log_3 1$.
- Porovnáme argumenty logaritmů na obou stranách nerovnice. Protože je základ logaritmu **větší než jedna, neotáčíme znak nerovnosti**.
- Získáme nerovnici $1-\log_2(2x-1) \geq 3$, která je ekvivalentní s nerovnicí $\log_2(2x-1) \leq -2$.
- Převedeme číslo -2 na logaritmus o základu 2, abychom mohli znovu porovnat argumenty:
  $-2 = \log_2 \frac{1}{4}$.
- Porovnáme argumenty logaritmů na obou stranách nerovnice. Protože je základ logaritmu **větší než jedna, neotáčíme znak nerovnosti**.
- Získáme nerovnici $2x-1 \leq \frac{1}{4}$, která je ekvivalentní s nerovnicí $x \leq \frac{5}{8}$.
- Na číselné ose určíme průnik definičního oboru a řešení předchozí nerovnice.
- Množina všech kořenů původní nerovnice $K = (\frac{1}{2}, \frac{5}{8} >$.

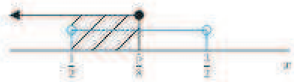
Zápis řešení:

$$2x-1 > 0 \qquad x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

$$\begin{aligned}
1-\log_2(2x-1) &> 0 \quad / + \log_2(2x-1) \\
1 &> \log_2(2x-1) \\
\log_2 2 &> \log_2(2x-1) \quad /\text{porovnání argumentů} \\
2 &> 2x-1 \quad / - 2x - 2 \\
-2x &> -3 \quad / : (-2) \\
x &< \frac{3}{2} \qquad x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \wedge x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow D = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
\log_3\left[1-\log_2(2x-1)\right] &\geq 0 \\
\log_3\left[1-\log_2(2x-1)\right] &\geq \log_3 3 \quad /\text{porovnání argumentů} \\
1-\log_2(2x-1) &\geq 3 \quad / -1 \\
-\log_2(2x-1) &\geq 2 \quad / \cdot (-1) \\
\log_2(2x-1) &\leq -2 \\
\log_2(2x-1) &\leq \log_2 \frac{1}{4} \quad /\text{porovnání argumentů} \\
2x-1 &\leq \frac{1}{4} \quad / + 1 \\
2x &\leq \frac{5}{4} \quad / : 2 \\
x &\leq \frac{5}{8}
\end{aligned}$$



$$K = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right\rangle$$

7.3. Aplikace logaritmických vět

Další logaritmické nerovnice nejrve upravíme pomocí **logaritmických vět** a následně je budeme řešit porovnáním argumentů. Stejný postup jsme zvolili při řešení **logaritmických rovnic**.

Součet a rozdíl logaritmů

V prvních dvou příkladech ukážeme, jak se řeší logaritmické nerovnice, ve kterých se vyskytuje součet nebo rozdíl několika logaritmů. V těchto příkladech využíváme poučku, že **součet logaritmů je logaritmus součinu** a **rozdíl logaritmů je logaritmus podílu** za předpokladu, že všechny výrazy jsou definovány.

Příklad 7.5

Řešte nerovnici s neznámou $x \in R$:

$$\log_{\frac{1}{6}}(x^2+6) \leq \log_{\frac{1}{6}} x + \log_{\frac{1}{6}} 5$$

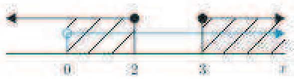
Řešení

- Výrazy v nerovnici jsou definovány, pokud jsou splněny podmínky $x^2+6>0$ a $x>0$.
- Definiční obor nerovnice $D=(0,+\infty)$.
- Výraz na pravé straně nerovnice obsahuje součet dvou logaritmů se stejným základem. Součet logaritmů je logaritmus součinu:
  $P(x) = \log_{\frac{1}{6}} x + \log_{\frac{1}{6}} 5 = \log_{\frac{1}{6}} 5x$.
- Nerovnici $\log_{\frac{1}{6}}(x^2+6) \leq \log_{\frac{1}{6}} 5x$ řešíme porovnáním argumentů. Protože je základ logaritmu **menší než jedna, otáčíme znak nerovnosti.**
- Získáme nerovnici $x^2+6 \geq 5x$, která je ekvivalentní s nerovnicí $x^2-5x+6 \geq 0$.
- Nerovnici převedeme na součinový tvar $(x-2)(x-3) \geq 0$ a vyřešíme s pomocí číselné osy. Řešením je sjednocení intervalů $(-\infty, 2 > \cup < 3, +\infty)$.
- Na číselné ose určíme průnik definičního oboru a řešení předchozí nerovnice.
- Množina všech kořenů původní nerovnice $K=(0,2>\cup<2,+\infty)$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned} x^2+6 &> 0 \quad x \in R \\ x &> 0 \quad x \in (0,+\infty) \\ D &= (0,+\infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{6}}(x^2+6) &\leq \log_{\frac{1}{6}} x + \log_{\frac{1}{6}} 5 \\ \log_{\frac{1}{6}}(x^2+6) &\leq \log_{\frac{1}{6}} 5x \quad \text{/porovnání argumentů} \\ x^2+6 &\geq 5x \quad /-5x \\ x^2-5x+6 &\geq 0 \\ (x-2)(x-3) &\geq 0 \end{aligned}$$



$$K = (0,2\rangle \cup \langle 3,+\infty)$$

Příklad 7.6

Řešte nerovnici s neznámou $x \in R$:

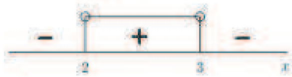
$$\log_7(x+5) - \log_7(3-x) > 1$$

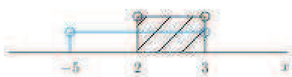
Řešení

- Výrazy v nerovnici jsou definovány, pokud jsou splněny podmínky $x+5 > 0$ a $3-x > 0$.
- Definiční obor nerovnice $D = (-5, 3)$.
- Nejprve převedeme číslo 1 na logaritmus o základu 7:
  $P(x) = 1 = \log_7 7$.
- Výraz na levé straně nerovnice obsahuje rozdíl dvou logaritmů se stejným základem. Rozdíl logaritmů je logaritmus podílu:
  $L(x) = \log_7(x+5) - \log_7(3-x) = \log_7 \frac{x+5}{-3-x}$.
- Nerovnici $\log_7 \frac{x+5}{-3-x} > \log_7 7$ řešíme porovnáním argumentů. Protože je základ logaritmu **větší než jedna, neotáčíme znak nerovnosti.**
- Získáme nerovnici $\frac{x+5}{-3-x} > 7$, kterou vyřešíme.
- Od obou stran nerovnice odečteme číslo 7, abychom porovnávali výraz na levé straně nerovnice s nulou. Následně převedeme výraz na levé straně nerovnice na společného jmenovatele a získáme podílový tvar nerovnice:
  $\frac{8x-16}{3-x} > 0$, který vyřešíme pomocí číselné osy.
- Řešením je interval $(2, 3)$.
- Na číselné ose určíme průnik definičního oboru a řešení předchozí nerovnice.
- Množina všech kořenů původní nerovnice $K = (2, 3)$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned}
x+5 &> 0 \quad x \in (-5, +\infty) \\
3-x &> 0 \quad x \in (-\infty, 3) \\
D &= (-5, 3) \\
\log_7(x+5) - \log_7(3-x) &> 1 \\
\log_7(x+5) - \log_7(3-x) &> \log_7 7 \\
\log_7 \frac{x+5}{3-x} &> \log_7 7 \quad /\text{porovnání argumentů} \\
\frac{x+5}{3-x} &> 7 \quad /-7 \\
\frac{x+5}{3-x} - 7 &> 0 \\
\frac{x+5-7(3-x)}{3-x} &> 0 \\
\frac{x+5-21+7x}{3-x} &> 0 \\
\frac{8x-16}{3-x} &> 0
\end{aligned}$$





$$K = (2, 3)$$

NAHORU

Násobek logaritmu

V dalších příkladech ukážeme, jak se řeší logaritmické nerovnice, kde se vyskytuje násobek nějakého logaritmu. V takových případech musíme násobek logaritmu převést do argumentu logaritmu podle poučky, že **násobek logaritmu je logaritmus mocniny**.

Příklad 7.7

Řešte nerovnici s neznámou $x \in R$:

$$2\log(x-1) \geq \tfrac{1}{2}(\log x^5 - \log x)$$

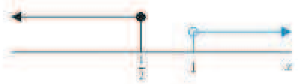
Řešení

- Výrazy v nerovnici jsou definovány, pokud jsou splněny podmínky $x-1 > 0,\ x^5 > 0$, a $x > 0$.
- Definiční obor nerovnice $D = (1, +\infty)$.
- Výraz na levé straně nerovnice upravíme podle věty o logaritmu mocniny: $L(x) = 2\log(x-1) = \log(x-1)^2 = \log(x^2-2x+1)$.
- Výraz v závorce na pravé straně nerovnice nejprve upravíme pomocí věty o logaritmu podílu následně aplikujeme větu o logaritmu mocniny: $P(x) = \frac{1}{2}(\log x^5 - \log x) = \frac{1}{2}\log\frac{x^5}{x} = \frac{1}{2}\log x^4 = \log(x^4)^{\frac{1}{2}} = \log x^2$.
- Nerovnici $\log(x^2-2x+1) \geq \log x^2$ řešíme porovnáním argumentů. Protože je základ logaritmu **větší než jedna, neotáčíme znak nerovnosti.**
- Získáme nerovnici $x^2-2x+1 \geq x^2$, která je ekvivalentní s nerovnicí $x \leq \frac{1}{2}$.
- Na číselné ose určíme průnik definičního oboru a řešení předchozí nerovnice.
- Množina všech kořenů původní nerovnice $K = \emptyset$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned} x-1 &> 0 \quad x \in (1,+\infty) \\ x^5 &> 0 \quad x \in (0,+\infty) \\ x &> 0 \quad x \in (0,+\infty) \\ D &= (1,+\infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\log(x-1) &\geq \frac{1}{2}(\log x^5 - \log x) \\ 2\log(x-1) &\geq \frac{1}{2}\log\frac{x^5}{x} \\ 2\log(x-1) &\geq \frac{1}{2}\log x^4 \\ \log(x-1)^2 &\geq \log(x^4)^{\frac{1}{2}} \\ \log(x^2-2x+1) &\geq \log x^2 \quad /\text{porovnání argumentů} \\ x^2-2x+1 &\geq x^2 \quad /-x^2 \\ -2x+1 &\geq 0 \quad /-1 \\ -2x &\geq -1 \quad /:(-2) \\ x &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$



$$K = \emptyset$$

Příklad 7.8

Řešte nerovnici s neznámou $x \in R$:

$$3\log_{\frac{1}{3}} 2 - \log_{\frac{1}{3}}(x-1) \leq \log_{\frac{1}{3}}(x+1) - \log_{\frac{1}{3}}(x-2)$$

Řešení

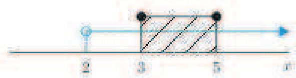
- Výrazy v nerovnici jsou definovány, pokud jsou splněny podmínky $x-1 > 0,\ x+1 > 0$ a $x-2 > 0$.
- Definiční obor nerovnice $D = (2, +\infty)$.

- Nejprve upravíme výraz $3\log_{\frac{1}{3}} 2$ pomocí věty o logaritmu mocniny:
  $3\log_{\frac{1}{3}} 2 = \log_{\frac{1}{3}} 2^3 = \log_{\frac{1}{3}} 8.$
- Abychom se vyvarovali následného řešení nerovnice se zlomky, upravíme nerovnici tak, aby se v ní vyskytovaly pouze součty logaritmů. Přičteme proto k výrazům na obou stranách nerovnice $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_{\frac{1}{3}}(x-2)$:
  $\log_{\frac{1}{3}} 8 + \log_{\frac{1}{3}}(x-2) \le \log_{\frac{1}{3}}(x+1) + \log_{\frac{1}{3}}(x-1).$
- Následně využijeme větu o logaritmu součinu:
  $\log_{\frac{1}{3}} 8(x-2) \le \log_{\frac{1}{3}}(x+1)(x-1).$
- Nerovnici $\log_{\frac{1}{3}} 8(x-2) \le \log_{\frac{1}{3}}(x+1)(x-1)$ vyřešíme porovnáním argumentů. Protože je základ logaritmu **menší než jedna, otáčíme znak nerovnosti.**
- Získáme nerovnici $8(x-2) \ge (x+1)(x-1),$ která je ekvivalentí s nerovnicí $x^2 - 8x + 15 \le 0$.
- Nerovnici převedeme na součinový tvar $(x-3)(x-5) \ge 0$ a vyřešíme s pomocí číselné osy. Řešením je interval $< 3, 5 >$.
- Na číselné ose určíme průnik definičního oboru a řešení předchozí nerovnice.
- Množina všech kořenů původní nerovnice $K = < 3, 5 >$.

Zápis řešení:

$$
\begin{aligned}
x-1 &> 0 \quad x \in (1, +\infty) \\
x+1 &> 0 \quad x \in (-1, +\infty) \\
x-2 &> 0 \quad x \in (2, +\infty) \\
D &= (2, +\infty)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3\log_{\frac{1}{3}} 2 - \log_{\frac{1}{3}}(x-1) &\le \log_{\frac{1}{3}}(x+1) - \log_{\frac{1}{3}}(x-2) \\
\log_{\frac{1}{3}} 8 - \log_{\frac{1}{3}}(x-1) &\le \log_{\frac{1}{3}}(x+1) - \log_{\frac{1}{3}}(x-2) \quad / + \log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_{\frac{1}{3}}(x-2) \\
\log_{\frac{1}{3}} 8 + \log_{\frac{1}{3}}(x-2) &\le \log_{\frac{1}{3}}(x+1) + \log_{\frac{1}{3}}(x-1) \\
\log_{\frac{1}{3}} 8(x-2) &\le \log_{\frac{1}{3}}(x+1)(x-1) \quad /\text{porovnání argumentů} \\
8(x-2) &\ge (x+1)(x-1) \\
8x-16 &\ge x^2-1 \quad / - x^2 + 1 \\
-x^2+8x-15 &\ge 0 \quad / \cdot (-1) \\
x^2-8x+15 &\le 0 \\
(x-3)(x-5) &\le 0
\end{aligned}
$$



$$K = \langle 3, 5 \rangle$$

NAHORU

7.4. Substituce

Některé logaritmické nerovnice se nám nepovede upravit na tvar, ve kterém lze porovnat argumenty. Takové příklady můžeme řešit pomocí **substituce**, kterou jsme zavedli v kapitole o exponenciálních rovnicích. Postup řešení i použité značení jsme již tedy vysvětlili dříve.

Substituce za logaritmus

Příklady, které jsou uvedeny v této kapitole, se dají vždy řešit vhodnou stubstitucí nové neznámé za logaritmus. V jednotlivých příkladech ukážeme, jak z řešení nerovnice s novou neznámou získáme původní řešení nerovnice.

Příklad 7.9

Řešte nerovnici s neznámou $x \in R$:

$$\log_5^2 x + \log_5 x \geq 2$$

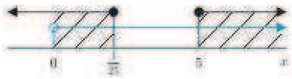
Řešení

- Výrazy v nerovnici jsou definovány, pokud je splněna podmínka $x > 0$.
- Definiční obor nerovnice $D = (0, +\infty)$.
- V nerovnici $\log_5^2 x + \log_5 x \geq 2$ nahradíme všechny výrazy $\log_5 x$ novou neznámou a.
- Nerovnici $a^2 + a \geq 2$ s neznámou $a \in R$ vyřešíme.
- Nerovnici převedeme na součinový tvar $(a+2)(a-1) \geq 0$ a vyřešíme s pomocí číselné osy. Řešením je sjednocení intervalů $(-\infty, -2 > \cup < 1, +\infty)$.
- Pro neznámou a tak dostáváme podmínky:
  $a \leq -2$ **nebo** $a \geq 1$.
- Zpětně nahradíme neznámou a výrazem $\log_5 x$.
- Pro neznámou x dostáváme podmínky:
  $\log_5 x \leq -2$ **nebo** $\log_5 x \geq 1$.
- Nerovnice vyřešíme porovnáním argumentů:
  $x \leq \frac{1}{25}$ **nebo** $x \geq 5$.
- Na číselné ose určíme průnik definičního oboru a řešení předchozích nerovnic.
- Množina všech kořenů původní nerovnice $K = (0, \frac{1}{25} > \cup < 5, +\infty)$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned} x &> 0 \quad x \in (0, +\infty) \\ D &= (0, +\infty) \\ \log_5^2 x + \log_5 x &\geq 2 \quad /\text{substituce } [S : \log_5 x = a] \\ a^2 + a &\geq 2 \quad / - 2 \\ a^2 + a - 2 &\geq 0 \\ (a+2)(a-1) &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \leq -2 \quad &\vee \quad a \geq 1 \quad /[S : a = \log_5 x] \\ \log_5 x \leq -2 \quad & \quad \log_5 x \geq 1 \\ \log_5 x \leq \log_5 \frac{1}{25} \quad & \quad \log_5 x \geq \log_5 5 \\ x \leq \frac{1}{25} \quad &\vee \quad x \geq 5 \end{aligned}$$



$$K = \left(0, \frac{1}{25}\right\rangle \cup \langle 5, +\infty)$$

NAHORU

Příklad 7.10

Řešte nerovnici s neznámou $x \in R$:

$$\frac{2+\log_{\frac{1}{2}} x}{\log_{\frac{1}{2}} x} < 3$$

Řešení

- Výrazy v nerovnici jsou definovány, pokud jsou splněny podmínky $x > 0$ a $\log_{\frac{1}{2}} x \neq 0$.
- Definiční obor nerovnice $D = (0, 1) \cup (1, +\infty)$.
- V nerovnici $\frac{2+\log_{\frac{1}{2}} x}{\log_{\frac{1}{2}} x} < 3$ nahradíme všechny výrazy $\log_{\frac{1}{2}} x$ novou neznámou a.
- Nerovnici $\frac{2+a}{a} < 3$ s neznámou $a \in R$ vyřešíme.
- Od obou stran nerovnice odečteme číslo 3, abychom porovnávali výraz na levé straně rovnice s nulou. Následně převedeme výraz na levé straně nerovnice na společného jmenovatele a získáme podílový tvar nerovnice:
  $\frac{2-2a}{a} < 0$, který vyřešíme s pomocí číselné osy.
- Řešením je sjednocení intervalů $(-\infty, 0 > \cup < 1, +\infty)$.
- Pro neznámou a tak dostáváme podmínky:
  $a < 0$ **nebo** $a > 1$.
- Zpětně nahradíme neznámou a výrazem $\log_{\frac{1}{2}} x$.
- Pro neznámou x dostáváme podmínky:
  $\log_{\frac{1}{2}} x < 0$ **nebo** $\log_{\frac{1}{2}} x > 1$.
- Nerovnice vyřešíme porovnáním argumentů:
  $x > 1$ **nebo** $x < \frac{1}{2}$.
- Na číselné ose určíme průnik definičního oboru a řešení předchozích nerovnic.
- Množina všech kořenů původní nerovnice $K = (0, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned} x &> 0 \quad x \in (0, +\infty) \\ \log_{\frac{1}{2}} x &\neq 0 \quad x \neq 1 \\ D &= (0,1) \cup (1, +\infty) \end{aligned}$$

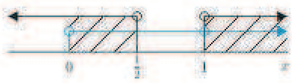
$$\begin{aligned} \frac{2 + \log_{\frac{1}{2}} x}{\log_{\frac{1}{2}} x} &< 3 \quad /\text{substituce } [S : \log_{\frac{1}{2}} x = a] \\ \frac{2+a}{a} &< 3 \quad / -3 \\ \frac{2+a}{a} - 3 &< 0 \\ \frac{2+a-3a}{a} &< 0 \\ \frac{2-2a}{a} &< 0 \end{aligned}$$

$$a < 0 \quad \vee \quad a > 1 \quad /[S : a = \log_{\frac{1}{2}} x]$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x < 0 \qquad \log_{\frac{1}{2}} x > 1$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} 1 \qquad \log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$$

$$x > 1 \quad \vee \quad x < \frac{1}{2}$$



$$K = \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$$

NAHORU

Příklad 7.11

Řešte nerovnici s neznámou $x \in R$:

$$\log^2_{\frac{1}{3}}(x+2) - 3\log_{\frac{1}{3}}(x+2) \leq 0$$

Řešení

- Výrazy v nerovnici jsou definovány, pokud je splněna podmínka $x + 2 > 0$.
- Definiční obor nerovnice $D = (-2, +\infty)$.
- V nerovnici $\log^2_{\frac{1}{3}}(x+2) - 3\log_{\frac{1}{3}}(x+2) \leq 0$ nahradíme všechny výrazy $\log_{\frac{1}{3}}(x+2)$ novou neznámou a.
- Nerovnici $a^2 - 3a \leq 0$ s neznámou $a \in R$ vyřešíme.
- Nerovnici převedeme na součinový tvar $a(a-3) \leq 0$ a vyřešíme s pomocí číselné osy. Řešením je interval $< 0, 3 >$.
- Pro neznámou a tak dostáváme podmínky: $a \geq 0$ **a zároveň** $a \leq 3$.
- Zpětně nahradíme neznámou a výrazem $\log_{\frac{1}{3}}(x+2)$.
- Pro neznámou x dostáváme podmínky: $\log_{\frac{1}{3}}(x+2) \geq 0$ **a zároveň** $\log_{\frac{1}{3}}(x+2) \leq 3$.
- Nerovnice vyřešíme porovnáním argumentů: $x \leq -1$ **a zároveň** $x \geq -\frac{53}{27}$.
- Na číselné ose určíme průnik definičního oboru a řešení předchozích nerovnic.
- Množina všech kořenů původní rovnice $K =< -\frac{53}{27}, -1 >$.

Zápis řešení:

$$
\begin{aligned}
x+2 &> 0 \quad x \in (-2,+\infty) \\
D &= (-2,+\infty) \\
\log^2_{\frac{1}{3}}(x+2) - 3\log_{\frac{1}{3}}(x+2) &\leq 0 \quad /\text{substituce } [S : \log_{\frac{1}{3}}(x+2) = a] \\
a^2 - 3a &\leq 0 \\
a(a-3) &\leq 0
\end{aligned}
$$

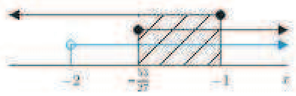
$$a \geq 0 \quad \wedge \quad a \leq 3 \quad /[S : a = \log_{\frac{1}{3}}(x+2)]$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+2) \geq 0 \qquad \log_{\frac{1}{3}}(x+2) \leq 3$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+2) \geq \log_{\frac{1}{3}} 1 \qquad \log_{\frac{1}{3}}(x+2) \leq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$$

$$x+2 \leq 1 \qquad x+2 \geq \frac{1}{27}$$

$$x \leq -1 \quad \wedge \quad x \geq -\frac{53}{27}$$



$$K = \left\langle -\frac{53}{27}, -1 \right\rangle$$

NAHORU

8. Soustavy rovnic

8.1. Soustava rovnic

Soustavou rovnic rozumíme několik rovnic, které mají platit zároveň. V naší práci budeme uvažovat pouze soustavy dvou rovnic, které budou obsahovat dvě neznámé
$x,\ y \in R$. Připomeneme si, co znamená vyřešit soustavu rovnic.

Vyřešit soustavu dvou rovnic s neznámými $x, y \in R$ znamená určit **všechny dvojice neznámých** x, y, pro které platí obě rovnice.

Domluvíme se, že dvojice neznámých budeme zapisovat do hranatých závorek, kde na první pozici bude hodnota neznámé x a na druhé pozici hodnota neznámé y. Řeší-li tedy soustavu rovnic čísla $x = 5$ a $y = -1$, potom množina kořenů
$K = \{[5, -1]\}$.

NAHORU

Postup při řešení soustavy rovnic

Jednotlivé rovnice budeme upravovat pomocí ekvivalentích úprav včetně těch, které jsme zavedli v této práci (porovnání exponentů, porovnání argumentů a logaritmování). Zbývá si připomenout metody, pomocí kterých ze dvou rovnic získáme jednu rovnici o jedné neznámé.

U soustav exponenciálních a logaritmických rovnic využijeme metodu dosazovací. Uvedeme zde postup, jak touto metodou vyřešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých v několika krocích:

1. Určíme podmínky, za kterých jsou všechny výrazy v rovnici definovány.
2. Z jedné rovnice ekvivalentními úpravami vyjádříme libovolnou neznámou.
3. Tuto neznámou dosadíme do druhé rovnice (vznikne jedna rovnice s jednou neznámou).
4. Pomocí ekvivalentních úprav vyřešíme tuto rovnici (získáme hodnotu jedné neznámé a ověříme zda splňuje podmínky řešitelnosti).
5. Dosadíme hodnotu této neznámé do jedné z rovnic, které obsahují obě neznámé (s výhodou lze využít rovnici, kterou jsme získali ve druhém kroku našeho postupu).
6. Pomocí ekvivalentních úprav vyřešíme tuto rovnici (získáme hodnotu druhé neznámé a ověříme, zda splňuje podmínky řešitelnosti).
7. Určíme množinu všech kořenů soustavy rovnic K.

NAHORU

8.2. Soustavy exponenciálních rovnic

Při řešení soustav exponenciálních rovnic nemusíme většinou určovat podmínky řešitelnosti. Zpravidla jsou rovnice definovány pro všechna reálná čísla. Řešení takových soustav rovnic ukážeme na následujících příkladech.

Příklad 8.1

Řešte soustavu rovnic s neznámými $x, y \in R$:

$$4^x = 1,6y$$

$$2^x = 0,4y$$

Řešení

- Výrazy v rovnici jsou definovány pro všechna $x, y \in R$.
- Z druhé rovnice $2^x = 0,4y$ vyjádříme neznámou y:
  $y = \frac{5}{2} \cdot 2^x$.
- Do první rovnice $4^x = 1,6y$ dosadíme za neznámou y výraz $\frac{5}{2} \cdot 2^x$:
  $4^x = 1,6 \cdot \frac{5}{2} \cdot 2^x$.
- Z předchozí rovnice určíme neznámou x (viz řešení **exponenciálních rovnic**):
  $x = 2$.
- Neznámou y určíme z rovnice $y = \frac{5}{2} \cdot 2^x$ dosazením $x = 2$:
  $y = 10$
- Množina kořenů soustavy rovnic $K = \{[2, 10]\}$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned} 4^x &= 1,6y \\ 2^x &= 0,4y \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 2^x &= 0,4y \quad / \cdot 10 \\ 10 \cdot 2^x &= 4y \quad / : 4 \\ \frac{5}{2} \cdot 2^x &= y \\ y &= \frac{5}{2} \cdot 2^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4^x &= 1,6y \\ 4^x &= 1,6 \cdot \frac{5}{2} \cdot 2^x \\ 4^x &= 4 \cdot 2^x \\ 2^{2x} &= 2^2 \cdot 2^x \\ 2^{2x} &= 2^{2+x} \quad /\text{porovnání exponentů} \\ 2x &= 2 + x \quad / - x \\ x &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y &= \frac{5}{2} \cdot 2^x \\ y &= \frac{5}{2} \cdot 2^2 \\ y &= \frac{5}{2} \cdot 4 \\ y &= 10 \end{aligned}$$

$$K = \{[2, 10]\}$$

NAHORU

Příklad 8.2

Řešte soustavu rovnic s neznámými $x, y \in R$:

$$2^{2x} - 3^{y} = 15$$

$$2^{x} - 3^{\frac{y}{2}} = 3$$

Řešení

- Výrazy v rovnici jsou definovány pro všechna $x, y \in R$.
- Z druhé rovnice $2^{x} - 3^{\frac{y}{2}} = 3$ vyjádříme výraz 2^{x}, který v následujícím kroku snadno dosadíme do první rovnice:
  $2^{x} = 3 + 3^{\frac{y}{2}}$.
- Do první rovnice $2^{2x} - 3^{y} = 15$ dosadíme za výraz 2^{x} výraz $3 + 3^{\frac{y}{2}}$:
  $(3 + 3^{\frac{y}{2}})^{2} - 3^{y} = 15$.
- Z předchozí rovnice určíme neznámou y (viz řešení **exponenciálních rovnic**):
  $y = 0$.
- Neznámou x určíme z rovnice $2^{x} = 3 + 3^{\frac{y}{2}}$ dosazením $y = 0$ (řešení exponenciální rovnice):
  $x = 2$
- Množina kořenů soustavy rovnic $K = \{[2, 0]\}$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned} 2^{2x} - 3^{y} &= 15 \\ 2^{x} - 3^{\frac{y}{2}} &= 3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 2^{x} - 3^{\frac{y}{2}} &= 3 \quad / + 3^{\frac{y}{2}} \\ 2^{x} &= 3 + 3^{\frac{y}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^{2x} - 3^{y} &= 15 \\ (3 + 3^{\frac{y}{2}})^{2} - 3^{y} &= 15 \\ 9 + 6 \cdot 3^{\frac{y}{2}} + 3^{y} - 3^{y} &= 15 \quad / - 9 \\ 6 \cdot 3^{\frac{y}{2}} &= 6 \quad / : 6 \\ 3^{\frac{y}{2}} &= 1 \\ 3^{\frac{y}{2}} &= 3^{0} \\ \frac{y}{2} &= 0 \quad / \cdot 2 \\ y &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2^{x} &= 3 + 3^{\frac{y}{2}} \\ 2^{x} &= 3 + 3^{\frac{0}{2}} \\ 2^{x} &= 3 + 3^{0} \\ 2^{x} &= 3 + 1 \\ 2^{x} &= 4 \\ 2^{x} &= 2^{2} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$K = \{[2, 0]\}$$

NAHORU

8.3. Soustavy logaritmických rovnic

Při řešení soustav logaritmických rovnic musíme nejprve určit podmínky řešitelnosti. Podmínky budeme ověřovat již během výpočtu, jak je ukázáno v následujícím příkladu.

Příklad 8.3

Řešte soustavu rovnic s neznámými $x, y \in R$:

$$\log x + \log y = 1$$

$$x - y = 3$$

Řešení

- Výrazy v rovnici jsou definovány za podmínek $x > 0,\ y > 0$.
- Z druhé rovnice $x - y = 3$ vyjádříme neznámou x:
  $x = 3 + y$.
- Do první rovnice $\log x + \log y = 1$ dosadíme za neznámou x výraz $3 + y$:
  $\log(3 + y) + \log y = 1$.
- Z předchozí rovnice vypočteme neznámou y (viz řešení **logaritmických rovnic**):
  $y_1 = 2,\ y_2 = -5$.
- Protože kořen $y_2 = -5$ nesplňuje podmínku $y > 0$, nemůže patřit do řešení soustavy rovnic.
- Neznámou x získáme z rovnice $x = 3 + y$ dosazením $y = 2$:
  $x = 5$
- Množina kořenů soustavy rovnic $K = \{[5, 2]\}$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned} x &> 0 \\ y &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log x + \log y &= 1 \\ x - y &= 3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x - y &= 3 \quad / + y \\ x &= 3 + y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log x + \log y &= 1 \\ \log(3 + y) + \log y &= 1 \\ \log(3 + y)y &= \log 10 \\ (3 + y)y &= 10 \\ y^2 + 3y &= 10 \quad / - 10 \\ y^2 + 3y - 10 &= 0 \\ (y - 2)(y + 5) &= 0 \\ y_1 = 2 \quad &\vee \quad y_2 = \cancel{-5} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= 3 + y \\ x &= 3 + 2 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

$$K = \{[5, 2]\}$$

NAHORU

Příklad 8.4

Řešte soustavu rovnic s neznámými $x, y \in R$:

$$\log_3 x + \log_3 y = 5$$

$$\frac{2\log_3 x}{\log_3 y} - \frac{3\log_3 y}{\log_3 x} = 1$$

Řešení

- Výrazy v rovnici jsou definovány za podmínek $x > 0,\ y > 0,\ x \neq 1,\ y \neq 1$.
- Z první rovnice $\log_3 x + \log_3 y = 5$ vyjádříme výraz $\log_3 x$, který v následujícím kroku snadno dosadíme do druhé rovnice:
  $\log_3 x = 5 - \log_3 y$.
- Do druhé rovnice dosadíme za výraz $\log_3 x$ výraz $(5 - \log_3 y)$:
  $\frac{2(5 - \log_3 y)}{\log_3 y} - \frac{3\log_3 y}{5 - \log_3 y} = 1.$
- Z předchozí rovnice vypočteme neznámou y (viz řešení **logaritmických rovnic**):
  $y = 9$.
- Neznámou x získáme z rovnice $\log_3 x = 5 - \log_3 y$ dosazením $y = 9$ (řešení logaritmické rovnice):
  $x = 27$
- Množina kořenů soustavy rovnic $K = \{[27, 9]\}$.

Zápis řešení:

$$\begin{aligned} x &> 0 & x &\neq 1 \\ y &> 0 & y &\neq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_3 x + \log_3 y &= 5 \\ \frac{2\log_3 x}{\log_3 y} - \frac{3\log_3 y}{\log_3 x} &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \log_3 x + \log_3 y &= 5 \quad / - \log_3 y \\ \log_3 x &= 5 - \log_3 y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{2\log_3 x}{\log_3 y} - \frac{3\log_3 y}{\log_3 x} &= 1 \\
\frac{2(5 - \log_3 y)}{\log_3 y} - \frac{3\log_3 y}{5 - \log_3 y} &= 1 \quad /\text{substituce } [S : \log_3 y = a] \\
\frac{2(5-a)}{a} - \frac{3a}{5-a} &= 1 \quad / \cdot a(5-a) \\
2(5-a)^2 - 3a^2 &= a(5-a) \\
2(25 - 10a + a^2) - 3a^2 &= 5a - a^2 \\
50 - 20a + 2a^2 - 3a^2 &= 5a - a^2 \quad / + a^2 \\
50 - 20a &= 5a \quad / - 50 - 5a \\
-25a &= -50 \quad / : (-25) \\
a &= 2 \quad /[S : a = \log_3 y] \\
\log_3 y &= 2 \\
\log_3 y &= \log_3 9 \\
y &= 9
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log_3 x &= 5 - \log_3 y \\
\log_3 x &= 5 - \log_3 9 \\
\log_3 x &= 5 - 2 \\
\log_3 x &= 3 \\
\log_3 x &= \log_3 27 \\
x &= 27
\end{aligned}$$

$$K = \{[27, 9]\}$$

NAHORU

Závěr

V první části diplomové práce jsem zhodnotil stávající webové stránky, které se věnují logaritmickým a exponenciálním rovnicím. Zjistil jsem, že jejich odborná i didaktická úroveň je převážně nízká a má smysl vytvářet další webové stránky, které se věnují tomuto tématu.

Při tvorbě vlastních stránek jsem se inspiroval výukovými weby vzniklými v předchozích letech na KDM MFF UK a také kvalitními zahraničními weby. Vytvořil jsem vlastní stránky, které vysvětlují dané téma a využívají dynamické prvky (hypertextové odkazy, postupné odkrývaní řešení příkladu, Java Applety a dynamické testy), které by měly pomoci studentům s pochopením látky.

Při psaní práce jsem zjistil, že pro toto téma neexistuje papírová učebnice, která by dané téma komplexně vysvětlovala a musel jsem proto zvolit vlastní způsob výkladu, který byl inspirován sbírkami příkladů a vlastní zkušeností při studiu tohoto tématu jak z pozice studenta, tak učitele.

Často jsem v práci narážel na problematiku středoškolské matematické terminologie. Zjistil jsem, že psát učebnici matematiky, která bude po formální stránce přesná a zároveň pochopitelná pro průměrného středoškoláka, není vůbec snadný úkol.

Nakládání s prací

Souhlasím s vystavením své práce na webových stránkách Katedry didaktiky matematiky MFF UK v Praze. Dále souhlasím s jejími pozdějšími úpravami za účelem jejího zapojení do struktury matematického portálu, který vznikne z této a podobných diplomových prací, který vytvoří a bude spravovat právě a jedině Katedra didaktiky matematiky MFF UK, či osoba jí pověřená.

Miroslav Řezáč

Seznam použité literatury

[1] O. Odvárko: *Matematika pro gymnázia: Funkce*, Prometheus, Praha, 2009.

[2] J. Polák: *Přehled středoškolské matematiky*, Prometheus, Praha, 2008.

[3] J. Charvát, J. Zouf, L. Boček: *Matematika pro gymnázia: Rovnice a nerovnice*, Prometheus, Praha, 2008.

[4] J. Petáková: *MATEMATIKA příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*, Prometheus, Praha, 2009.

[5] P. Hejkrlík: *Sbírka řešených příkladů: Rovnice a Nerovnice*, Nakladatelství SSŠP, s.r.o., Hlavní 101, 747 06 Opava 6, 2006.

[6] F. Janeček: *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: Výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy*, Prometheus, Praha, 2010.

[7] J. Kováčik: *Řešené příklady z matematiky pro střední školy*, ASPI, a.s., Praha, 2006.