UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

Pedagogická fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

2010 Dana OTRADOVCOVÁ

UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BUDOVÁNÍ ARITMETICKÉ TRIÁDY VE DVOU MATEMATICKO – DIDAKTICKÝCH PROSTŘEDÍCH: „SOUSEDÉ“ A „BAREVNÉ TROJICE“

Diplomová práce

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Darina Jirotková, Ph.D.

Autor diplomové práce: Dana Otradovcová

Studijní obor: Učitelství pro 1. stupeň ZŠ

Forma studia: prezenční

Diplomová práce dokončena: 2011

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury.

V Praze dne ……………………………………

Podpis: ………………………………………

Poděkování

Děkuji RNDr. Darině Jirotková, Ph.D. za odborné vedení mé diplomové práce, cenné rady a trpělivost, kterou se mnou měla.

Dále děkuji své rodině za trpělivost a podporu během celého studia.

Poděkování patří i Barboře Tiché, Veronice Tomanové, Evě Keyzlarové a Ireně Stachové za velkou podporu, kterou jsem v nich měla.

ANOTACE

Diplomová práce se věnuje budování matematického schématu aditivní triády u žáků 1. stupně ZŠ pomocí dvou matematicko-didaktických prostředí "Sousedé" a "Barevné trojice", která se vyskytují v učebnicích matematiky, jež vytvářejí prof. RNDr. Milan Hejný, CSc., RNDr. Darina Jirotková, Ph.D., PhDr. Jana Slezáková, Ph.D. a jejich kolegové a vydává je nakladatelství Fraus.

V textu se budu věnovat teoretickým poznatkům z dané oblasti matematiky a důvodům pro vznik nové koncepce vyučování matematiky po reformě českého školství.

Žákům budou předkládány k řešení matematické úlohy z výše jmenovaných dvou prostředí. Žáci se budou s podobnými úlohami setkávat poprvé. Bude pozorováno, jak si s danými úlohami poradí a zda budou schopni proniknout hlouběji do problému úloh a vymyslet zadání k úlohám či vytvořit vlastní úlohy. Dále se pak tato práce bude zabývat způsoby řešení podobných úloh studenty pedagogické fakulty UK a jejich poznámkami, které vzniknou při procesu řešení.

<u>Klíčová slova:</u> aditivní triáda, součet, rozdíl, “Sousedé“, „Barevné trojice“, nakladatelství Fraus

ANNOTATION

The thesis attends to the mathematical charts constructing of additive triad of pupils on 1st grade of the primary school by means of two mathematical - didactic settings „The Neighbours“ and „The Coloured Trio“. They occure in mathematical textbooks created by prof. RNDr. Milan Hejný, CSc., RNDr. Darina Jirotková, Ph.D., PhDr. Jana Slezáková, Ph.D. and their colleagues and which are published by Fraus.

In my thesis I shall attend to the theoretical pieces of knowledge in the given mathematical area as well as to the reasons for the creation of the new mathematical teaching concept after the czech educational reform.

Mathematical tasks from the two appointed settings will be handed in to the pupils to be solved. The pupils will encounter such tasks for the first time. It shall be observed how they are able to cope with the given tasks and if they will be able to infiltrate the problem of the tasks or to invent their own tasks. Further on the thesis shall attend to the means of solutions of similar tasks by the students of The Pedagogical Faculty of the Univerzita Karlova and to the analysis of their comments on the tasks.

Keywords: additive triad, summation, diference, „The Neighbours“, „The Coloured Trio“, publishing house Fraus

OBSAH:

1. Úvod

Matematika jako předmět na základní a střední škole patřil vždy k mým nejoblíbenějším. Neměla jsem v něm vážné problémy s učivem, počítání mě bavilo. Proto jsem neváhala a rozhodla se z matematiky maturovat.

Matematika mě provázela i při dalším studiu. Na Pedagogické fakultě Univerzity Karlovy v Praze jsem se jí zabývala v rámci několika předmětů, které zajišťovala Katedra matematiky a didaktiky matematiky. Při možnosti výběru jedné z nabízených homogenních variant jsem zvolila tu, kterou zajišťovala již zmíněná katedra.
V rámci homogenní varianty a dalších matematických předmětů (např. Metody řešení matematických úloh, Didaktika matematiky 1, 2, 3, ap.) jsem se seznámila s novým přístupem k matematice, s novými matematicko – didaktickými prostředími, které byly aplikovány v učebnicích Matematiky pro 1. st. ZŠ vydávané nakladatelstvím Fraus. Měla jsem to štěstí, že mi tato nová prostředí při přednáškách a seminářích představili samotní autoři (M. Hejný, D. Jirotková a J. Slezáková). S realizací některých prostředí přímo ve školní praxi jsem měla možnost se seznámit při své souvislé pedagogické praxi I. i II., kterou jsem absolvovala na Základní škole Dědina u paní učitelky Evy Bomerové. Ta se později stala také členem autorského týmu učebnice matematiky pro 4. ročník, kterou vydalo již zmíněné nakladatelství.

Nová prostředí i přístup k matematice zmiňovaných autorů se mi zamlouval. Rozdílnost tohoto přístupu v porovnání s přístupem tradičním spatřuji v mnoha směrech/oblastech, např. jiný způsob zavádění matematických pojmů, různá matematická prostředí, kladení podnětných otázek, které přimějí žáka přemýšlet, co možná nejdůslednější snaha o napojení na žákovu existující zkušenost z běžného života, popřípadě obohacování žákovy zkušenosti z běžného života, kterou lze pak rozvíjet prostřednictvím řešení úloh v matematické poznatky. Je zřejmé, že autorům nového přístupu k výuce matematiky nejde o mechanické počítání, o drilování a o pamětné uchopování matematických pravd, ale o důkladné porozumění matematickým pojmům a vztahům. Učitel dostává roli průvodce žákovou cestou za poznáním, klade podnětné otázky, formuluje vhodné úlohy a zásadně žákovi neprozrazuje, jak má postupovat. Žák úlohy řeší většinou metodou „pokus – omyl“ a teprve po proniknutí do problematiky si vytváří své vlastní strategie řešení.

Kvůli hlubokému zájmu o toto nové pojetí matematiky výše zmíněných autorů, jsem se rozhodla psát diplomovou práci na katedře Matematiky a didaktiky matematiky. Po konzultaci s PhDr. J. Slezákovou – Kratochvílovou jsem se rozhodla zabývat se dvěma matematicko – didaktickými prostředími, nazvanými „Sousedé“ a „Barevné trojice.“

Krátce po zadání diplomové práce jsem společně s několika kolegyněmi, jež měly zadanou diplomovou práci na stejné katedře, usilovala o získání grantu GAUK, což by nám umožnilo bližší kontakt s výzkumnou činností KMDM a prezentaci výsledků na různých fórech. Ačkoliv naše žádost byla ohodnocena velice kladně, grant jsme nezískaly.

Diplomová práce obsahuje teoretické shrnutí nového přístupu k vyučování matematice, popis dvou matematicko – didaktických prostředí a zamyšlení nad formulací zadání a vzhledu zadání úloh. Dále v diplomové práci najdete experimenty z prostředí „Sousedé“, pří kterých úlohy řešili nejenom žáci prvního stupně ZŠ, ale i studenti pedagogické fakulty. Je zde i experiment z prostředí „Barevných trojic“, kterého se zúčastnili žáci pátého ročníku.

2. Cíle diplomové práce

Prvním cílem mé diplomové práce je proniknout do problematiky dvou matematicko – didaktických prostředí natolik, že budu umět vytvořit kaskádu úloh v těchto prostředích.

Druhým cílem je vysledovat, jaké strategie řešení zadaných úloh a problémů řešitelé nejčastěji volí, a to zejména při prvním setkání s prostředími. Dílčím cílem je porovnat práci žáka v černobílém zadání úloh, předloženém na pracovních listech, a v barevném zadání z učebnic. Zajímá mě, do jaké míry hraje barva v prostředí „Barevné trojice" roli.

Mým třetím cílem je porovnat strategie řešitelů různého věku: žáci prvního stupně základní školy a studenti Pedagogické fakulty oboru Učitelství pro první stupeň ZŠ.

Dílčím cílem je zjistit, nakolik a zda vůbec dokáží studenti odhadnout, jak budou některé zadané úlohy řešit žáci.

Tyto cíle budu naplňovat realizací několika experimentů. Experimentálním nástrojem bude série úloh a dotazník pro studenty, subjekty experimentu budou žáci 1. st ZŠ a kolegové studenti učitelství pro 1. st. ZŠ.

3. Transformace školství po roce 1989

V tomto odstavci shrnu některé skutečnosti o transformaci školství po roce 1989, a to z toho důvodu, že v dalším odstavci budu vyjasňovat „nové pojetí“, které požadavky této reformy skutečně naplňuje.

Před rokem 1989 vytyčoval cíl i obsah vzdělávání stát podrobnými osnovami. Všichni učitelé učili podle stejných učebnic, stejným způsobem, stejným tempem. Učivo bylo rozpracováno i do časového harmonogramu. Po převratu v listopadu 1989 se začíná přemýšlet o potřebných legislativních změnách a svobodném školství. Začátkem 90. let dochází díky společenskému vlivu k pomalým změnám ve všech oblastech vzdělávacího systému.

Bylo realizováno několik studií navrhujících reformu školství. Nejvýznamnější byl projekt NEMES *Svoboda ve vzdělání a česká škola* a projekt pod vedením J. Kotáska *Budoucnost vzdělání a školství v obnovené demokratické společnosti a ve sjednocující se Evropě.* Zdůrazněna je v nich především vzájemná provázanost mezi vnitřní a vnější transformací českého školství a také změny v přístupu k vyučovacímu procesu i k osobnosti dítěte.

V roce 1995 byl formulován *Standard základního vzdělávání (pozn. dále jen Standard).* Ten měl napomoci k novému pojetí vzdělávání. Nově přinesl rámcový základ decentralizovaného vzdělávání a formuloval vzdělávací cíle. I poté však stále přetrvával přílišný objem a detailnost požadovaného učiva. *Standard* nakonec znamenal jen minimální změny.

V letech 1996-97 byly v návaznosti na *Standard* a jako náhrada za osnovy, podle kterých se učilo mnoho let, vytvořeny tři vzdělávací programy: Obecná škola, Základní škola, Národní škola. Nejčastěji školy začaly používat program Základní škola zpracovaný Výzkumným ústavem pedagogickým. Jako alternativní programy byla schválena Montessori škola a Waldorfská škola. (Spilková, 2005, s. 9 – 19)

Rozmezí mezi roky 1990 až 1997 bylo ovlivněno euforií, ve které proběhlo mnoho změn a byly to snahy o změnu českého školství jak shora, tak hlavně zdola.

Po roce 1997 se proces transformace zpomalil, a to díky hospodářské a politické stagnaci, a také kvůli opadnutí prvopočátečního nadšení způsobeného nedostatečnou legislativní podporou a apatií z nenaplnění zamýšlených cílů.

V průběhu roku 1998 byla zpracována studie *České vzdělání a Evropa*, jejímž cílem bylo zmapovat důsledky vstupu České republiky do Evropské unie ve vztahu ke vzdělávání. Byl předložen návrh nového pojetí kurikula – tzv. Bílá kniha), který se opírá o čtyři pilíře vývoje společnosti:

učit se poznávat,

učit se jednat,

učit se žít společně,

učit se být.

Tento Národní program rozvoje vzdělávání v ČR – tzv. Bílá kniha, vzdělávací politika pro Českou republiku, byla přijata roku 2001. Jedná se o dlouhodobé plány rozvoje školství. Byla též podkladem pro legislativu - Nový školský zákon. Jeho základní východiska byla:

cíle a obsahy vzdělávání tzv. informační společnosti,

příprava na život v Evropě,

individualizace vzdělávání,

celoživotní učení,

kvalita ve vzdělávání.

„Bílá kniha, dokument, který po deseti letech transformace poprvé pojmenovává principy proměny českého školství, obecné cíle vzdělávání a výchovy, zdůrazňuje důležitost vnitřní proměny školy, jejího klimatu, formuluje záměry v oblasti vzdělávání. Prosazuje individualitu žáka, koncept celoživotního učení, změny v pojetí vyučování, pedagogickou autonomii učitelů a škol. Poslední dva body dávají školám i učitelům větší svobodu, ale zároveň i zodpovědnost.“ (Tichá, 2009, s. 10)

Nejdůležitějším zlomem pak bylo vydání a uzákonění *Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání* (dále jen RVP). Jde o dokument, který formuluje postupy pro 3., 5. a 9. ročník na úrovni státu. RVP vznikal v letech 2001 - 2004, konkretizuje požadavky a očekávané výstupy z jednotlivých oblastí základního vzdělávání, vymezuje klíčové kompetence a jejich důležitou roli ve vyučovacím procesu. Z RVP vychází na jednotlivých školách školní vzdělávací program, závazný pro všechny školy v ČR od 1.9. 2007. (Kratochvílová, 2006, s. 5 – 8)

RVP je model formálního kurikula, ve kterém je kladen důraz na dítě a jeho rozvoj, odklání se od evropského pojetí kurikulárních dokumentů. Za vzor měl pragmatický americký kurikulární model. Klade se v něm důraz především na rozvoj klíčových kompetencí, využitelných i v běžném životě. Učitelé mají možnost využívat inovativní postupy a metody. (Kratochvílová, 2006, s. 10)

4. Nové pojetí výuky matematiky na prvním stupni základní školy

Díky tomu, že v pojetí českého školství proběhly výše zmiňované změny (transformace českého školství), se začaly vést diskuse o změnách ve výuce matematiky. Výzkum v didaktice matematiky se může ubírat třemi směry:

1. směrem orientovaným na učivo, učebnice, úlohy a pomůcky
2. směrem orientovaným na žáka
3. směrem orientovaným na učitele

Se zánikem osnov a pojmenováním a stanovením klíčových kompetencí jako hlavních výukových cílů, vznikl okruh didaktiků, který se zabýval možnostmi nového pojetí výuky matematiky na prvním stupni základních škol. Tito lidé se nejvíce zaměřují na směr orientovaný na žáka. (Hošpesová, 2007, s. 81)

Moje diplomová práce je založena na práci týmu tří vysokoškolských pedagogů prof. RNDr. Milana Hejného, CSc., RNDr. Dariny Jirotkové, Ph.D. a PhDr. Jany Slezákové, Ph.D. a jejich kolegů, kteří vytvořili novou, stále více se rozšiřující a dopodrobna rozpracovanou koncepci výuky matematiky, prozatím pro první stupeň základní školy.

Jako dědictví z dob minulých si my, učitelé, neseme jistou setrvačnost a menší ochotu ke změnám, které jsou v novém školním systému zapotřebí. V této době je zde příznivé prostředí pro realizaci změn, ke kterým, přestože probíhají pomalu, se hlásí čím dál více učitelů. Díky nové koncepci a novým učebnicím matematiky výše zmiňovaných vysokoškolských pedagogů je pro učitele vytvářeno stále lepší zázemí k jejich práci, k plnění cílů a hlavně provádění změn. Cílem každého pedagoga by se měl stát rozvoj intelektuálních a osobnostních schopností žáků. Oslabeno by mělo být paměťové učení.

Základní pilíře nového pojetí výuky matematiky na prvním stupni ZŠ podle autorů učebnic matematiky nakladatelství Fraus:

1. Hierarchie cílů – Výchovné cíle jsou důležitější než cíle poznatkové. Porozumění je důležitější než dovednost.

2. Klima výuky – Strach blokuje žákovo myšlení. Žák je mnohem úspěšnější v prostředí, ve kterém se cítí dobře a bezpečně. Vzájemná důvěra mezi dětmi, učitelem a žáky je důležitá pro podporu učitelovy i žákovy radosti z práce a pro vzájemnou komunikaci. Chyba není v takovémto prostředí jev nežádoucí, ale její analýza se stává nejúčinnějším prostředkem k nabývání znalostí.
3. Přiměřené možnosti pro každého žáka – Děti nastupují ke školní docházce vybaveny jinými schopnostmi, dovednostmi a znalostmi. Učitel musí zvládnout tuto různorodost a pokusit se rozvíjet všechny děti. Slabším žákům musí pomoci a nabídnout jim úlohy rozvíjející jejich intelekt a vědomosti a žákům s vyspělejší kulturou matematického myšlení nabídnout adekvátní úlohy a úkoly.
4. Poznatek získaný vlastní úvahou je kvalitnější než poznatek převzatý – Pokud učitel nabídne žákům možnosti k hledání samostatného řešení, vyžaduje to trpělivost a čas, výsledky jsou však trvalé a může se na nich stavět další pochopení a získávání vědomostí. Pokud učitel žákům nabídne postup, jak úlohy řešit, půjde sice cestou rychlejší. Žáci se však postup často „nabiflují“, ale úloze neporozumí. Získaný poznatek nemusí být v takovém případě trvalý.
5. Komunikace – Diskuze je efektivnější formou komunikace než klasické kladení otázek učitelem a žákovo následné odpovídání. Objevuje se při ní plno podnětů, názorů a představ, a to i chybných, které pomáhají všem zúčastněným vytvořit si vlastní plnohodnotný pohled na danou problematiku.

Tradiční vyučování před transformací českého školství bylo zaměřeno na jednostranné předávání poznatků směrem od učitele k žákovi. V předmětu matematika to tedy znamenalo hlavně nácvik algoritmu sčítání, odčítání, násobení a dělení. V novém pojetí výuky chce však pedagog přinést žákům mnohem více. Žák již nemusí čekat, až jej učitel seznámí s daným postupem řešení, ale může sám zkoumat danou situaci, hledat vhodná řešení problémů, získávat zkušenosti s organizací jevů, se zpracováním dat, s propojením různých myšlenek aritmetiky, geometrie i kombinatoriky. Většinu těchto schopností autoři nové koncepce rozvíjí pomocí různých prostředí, o některých dále podrobněji píši v této práci. Nová koncepce vyučování matematiky je založena na propojení předmětu s běžným životem a se životními zkušenostmi. Cílem je rozvíjet v žácích jejich intelektuální schopnosti a dovednosti a vychovat z nich přemýšlivé a zvídavé lidi, schopné argumentace. (Hejný a kol., 2010a, s. 6)

5. Popis matematicko – didaktických prostředí

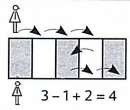
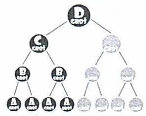
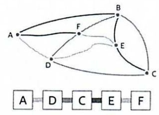
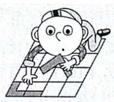
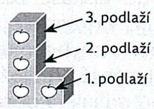
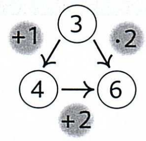
V učebnicích výše zmiňovaných autorů žáci poznávají matematické pojmy a vztahy v různých matematicko – didaktických prostředích, a to jak v aritmetických, tak i v geometrických.

Tato zavedená prostředí využívají životních zkušeností žáků a jejich představ o reálném životě. Jsou to například: jízda hromadnou dopravou, rodinné vztahy, deskové hry aj.

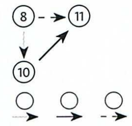
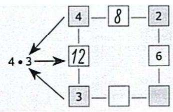
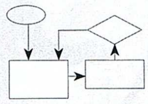
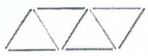
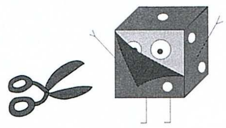
Jiná prostředí, která též využívají zkušenosti ze života, jsou uměle vytvořena. Jejich základní přehled, který přikládám, najdeme v příručce pro učitele matematiky pro 4. ročník ZŠ. (Hejný a kol., 2010a, s. 8, 9).

Díky tomu, že prostředí jsou provázána s žákovou zkušeností a poznatky nejsou předávány pouze jako „poučky“, žák lépe a snadněji porozumí předloženým problémům, úlohám.

Dvěma matematickým prostředím („Sousedé“, „Barevné trojice") se budu podrobněji věnovat v následujících odstavcích.

Ikona	Název prostředí	Čeho chceme dosáhnout	Ukázka, vysvětlení
	Krokování	Porozumění číslům vyjadřujícím změnu polohy nebo porovnávání poloh. Vstup k číslům záporným, později k práci se znaménky. Pomůcka pro řešení rovnic.	
	Autobus	Porozumění číslům vyjadřujícím změnu stavu. Orientace v souboru dat obsahujícím jak stavy, tak změny, ale i porovnání.	A B C D V 0 2 1 7 N 3 3 4 0 J 3 4 7
	Děda Lesoň	Práce s veličinou zapsanou ikonicky (nikoliv číslem). Náročnější myšlenky při poznávání rovnic.	
	Rodokmen	Relace a jejich skládání propojené s úlohami o věku. Schopnost přesného vyjadřování.	
	Biland	Pohádkové seznamování se s dvojkovou soustavou, jazykem, který používají počítače.	
	Výstaviště	Orientace v prostředí, které vzájemně propojuje geometrii a číselnou řadu. Rozvoj schopnosti vzájemně propojovat různé řešitelské strategie.	9 8 7 4 5 6 3 2 1
	Linky – cyklotrasy	Propojování algebraické a geometrické situace. Systematické prohledávání všech možností. Odhalování nových vztahů vyvozených ze vztahů známých.	
	Parkety	Získávání zkušeností s analýzou a syntézou skupiny rovinných tvarů, z nichž některé mohou být obohaceny o číselné údaje.	
	Geodeska	Hlubší poznávání „malých" mnohoúhelníků, hledání tvarů splňujících různé geometrické podmínky.	
	Krychlové stavby	Poznávání prostorové geometrie manipulativní činností. Tvorba a přeměna staveb podle daných podmínek. Zápis stavby i procesu jejího vytváření různými jazyky. Schopnost popsat 3D-situaci různými způsoby.	
	Hadi	Poznávání vazeb souborů čísel, která vystupují jak v roli vztahu, tak v roli operátora. Zobecňování konkrétních poznatků. Rozvíjení schopnosti řešit soustavu dvou rovnic metodou pokus-omyl.	5 → 7 ← 6
	Neposedové	Rozvíjení schopnosti tvořit narušenou číselnou strukturu v prostředí běžných číselných vztahů, v prostředí součtových trojúhelníků nebo hadů.	
	Šipkový diagram	Šipkový diagram je grafický zápis rovnice, který vede žáka k tomu, aby neznámé číslo (v horním levém kroužku) hledal experimentováním.	

8

Ikona	Název prostředí	Čeho chceme dosáhnout	Ukázka, vysvětlení
	Pavučiny	Prostředí hadů rozšířené o geometricky bohatší zápis doplněný navíc barvou. Poznávání číselných vztahů, které se v budoucnosti rozšíří na vztahy parametrické a později i na algebraické.	
	Násobilkové obdélníky	Procvičování násobilky v grafickém prostředí, jež v budoucnosti umožní po rozšíření odhalovat vztahy mezi čtyřmi základními operacemi.	
	Sousedé	Získávání vhledu do základní vazby aritmetiky vztahu mezi sčítáním, součinem, odčítáním a rozdílem.	1 | 2 | 2 | 4
	Barevné trojice	Rozvíjení řešitelských strategií aritmetických úloh obohacených o parametr barvy (od dramatizace k simulované dramatizaci).	11 = 2 + 5 + 4
	Házení kostkou	Získávání zkušenosti s náhodnými jevy, porozumění zákonitostem v oblasti pravděpodobnosti, práce se statistickými soubory.	
	Slovní úlohy	Schopnost pochopit slovní popis situace nebo procesu prostřednictvím dramatizace, manipulace, obrázku, grafu, tabulky nebo souboru číselných vztahů. Poznávání úloh s větším počtem řešení.	
	Hra Sova	Propojení oblasti logického myšlení a galerie hledaných objektů (rovinná nebo prostorová geometrie, čísla, objekty běžného života).	
	Vývojový diagram	Grafický záznam procesu. Příprava na porozumění práce počítače.	
	Tvary ze dřívek	Poznávání rovinné geometrie manipulativní činností. Tvorba a přeměna tvarů podle daných podmínek. První zkušenosti s obsahem, obvodem, jednoduchými zlomky a posloupnostmi.	
	Součtové trojúhelníky	Poznávání bohatšího souboru čísel, která vystupují jak v roli vztahu, tak v roli operátora. Rozvoj schopnosti řešit soustavu dvou rovnic metodou pokus–omyl. Objevování zákonitostí jako cesty k urychlení řešení úlohy.	1 2 0 2 3 2 2 5 4 9
	Sítě krychle	Využití životních zkušeností k poznávání pojmu síť krychle. Manipulativní propojování 2D- a 3D-geometrie.	
	Šipky – mříž	Jazyk šipek připravuje na pochopení souřadnicové soustavy. Šipka je znak statický, ale označuje pohyb, změnu. Šipka ukazuje na souvislosti geometrie a krokování.	K↓↓→→→L
AAB	Algebrogramy	Řešení algebrogramů odhaluje žákům některé hlubší souvislosti aritmetiky. Řeší je zkoušením.	AA = 30 + A A = 3

9

[1]

[1] U prostředí „Sousedé" upozorňuji na již zmíněný „překlep", který způsobil záměnu součtu na součin.

V prostředí „Sousedé“ a „Barevné trojice“ rozvíjí řešitelé především oblast aritmetiky. M. Hejný v kapitole Budování matematických schémat uvádí: „Aritmetický svět se začíná dítěti otevírat přes operace sčítání a odčítání. Naše pozornost bude orientována na procept a schémata, tedy nejen na operace, ale i, ba především, na výsledky těchto operací a propojení operací s výsledky.“ (Hejný, 2007, s. 111)
Také budu svou pozornost v prováděných experimentech orientovat tímto směrem.
Pojem „procept“ a „schéma“ objasním v další kapitole své diplomové práce.

Řešitelé úloh v těchto prostředích budují schéma aditivní triády.
„Pojem aditivní triády zavedli P. Černek a V. Repáš pod názvem sčítacia/odčítacia rodinka (Repáš a kol., 1997). Jako nástroj výzkumu použila aditivní triádu J. Slezáková-Kratochvílová (viz Kratochvílová, 1999). Termínem *aditivní triáda* rozumíme uspořádanou trojici čísel (A, B, C), z nichž třetí je součtem prvních dvou. Přitom nespecifikujeme příslušný číselný obor. Ten je určen věkem žáků, jejichž myšlenkové procesy analyzujeme.“ (Hejný, 2007, s. 111-112)
M. Hejný o aditivní triádě píše: „Představu, která o triádě vzniká ve vědomí žáka, budeme nazývat schéma triády. Je to komplexní představa, která v sobě zahrnuje jak nesémantické (pracující pouze s čísly), tak i sémantické (propojené se životními zkušenostmi žáka).
Žák, který má plně vytvořeno schéma triády (A, B, C), dokáže:

a) v jakémkoliv kontextu, sémantickém i nesémantickém, vzájemně nahradit dvojici čísel (A, B) číslem C, dvojici čísel (A, C) číslem B a dvojici čísel (B, C) číslem A,
b) s triádou pracovat jako s celkem, případně dokonce
c) pracovat s dvojicí nebo skupinou triád.“ (Hejný, 2007, s. 112)

Pokud má člověk dostatečně zažitý „bod“ a), je schopen používat substituci. Schopnost b) se vztahuje nejen k aditivní triádě, ale k většině matematických objektů. Počítání (pracování) s prvky vystřídá práce se skupinami prvků, např. představa čísla 2 vznikla jako název pro třídu všech představ typu „dvě ruce“, „dvě nohy“, dvě auta, … (Hejný, 2007, s.112)

„Schopnost c) obyčejně přesahuje oblast triád a vyžaduje vyšší úroveň matematické kultury. Například najít čísla *x*, *y,* známe – li jejich součet *s* i rozdíl *r,* je úloha o triádách (*x*, *y*, *s*) a (*x*, *y*, *r*).

Žák, který si schéma triády teprve buduje, má uvedené schopnosti rozvinuty jen částečně.“ (Hejný, 2007, s. 112)

6. Procept, koncept

V tomto odstavci vymezím tři základní pojmy didaktiky matematiky – koncept, proces a jejich „amalgám“ procept.

Aritmetiku lze vnímat jako prostředí ***procesů***. Skupina matematických procesů je velmi bohatá, například: sčítání 2+3, řešení slovní úlohy, sledování výkladu učitele, organizování nových poznatků, hledání zákonitostí, hledání chyb, formulování myšlenky, hledání argumentace pro podporu vlastního názoru, atd. Jde tedy o to, co probíhá v hlavě každého člověka, který nad něčím přemýšlí.

Koncept stejně jako proces má v kognitivní psychologii ústřední pozici. Konceptem rozumíme jistou představu uloženou ve vědomí člověka. Uspořádání teček na hrací kostce např. u čísla 5 je portrétem konceptu. Představa, kterou obrázek vyvolává ve vědomí člověka, je koncept. (http://www.dokumenty.webzdarma.cz)

„Pojem ***procept*** byl zaveden a přesně vymezen dvěma anglickými badateli v oblasti didaktiky matematiky D. Tall a E. Gray (1994). Píší toto:

> V této stati uvažujeme o dualitě mezi procesem a konceptem v matematice, zvláště o té, v níž se stejný znakový systém používá i jako proces (jakým je sčítání dvou čísel 3 + 2) i jako produkt tohoto procesu (součet 3 + 2). Dvojznačnost zápisu umožňuje myslícímu člověku pružně v myšlenkách přecházet od procesu, jímž nějakou úlohu řeší, ke konceptu, s nímž pracuje jako s částí širšího schématu. Znak, který přirozeně reprezentuje amalgam dvojznačnosti proces/koncept, nazýváme „procept“… (s. 116). … Toto vymezení rozšíříme takto: procept se skládá ze souboru elementárních proceptů, které mají stejný objekt. (s. 121).“ (podle Jirotková, 2010, s. 16,17)

Výše zmínění angličtí badatelé a matematici používali termín „procept“ jen v oblasti aritmetiky.

Velmi důležité pro mé zkoumání je následující, což uvádí M. Hejný ve své práci: (Hejný, 2007, s. 83) *„ …ke konceptu, s nímž se pracuje jako s částí širšího schématu“*. Těmito slovy autoři říkají, že k tomu, aby měl žák vytvořen procept spojů typu $a \pm b = c$, nestačí, aby uměl bezchybně a rychle počítat. Musí umět se spoji typu $a \pm b = c$ zacházet jako s prvky schémat.“ (Hejný, 2007, s. 83)

Termín ***schéma*** byl vytvořen k označení paměťové struktury zastřešující klastry (Soubory zatím nepropojených nebo jen málo vzájemně propojených informací, které náleží jednomu schématu.), které jsou potřebné k porozumění. V paměti člověka nejsou totiž fakta izolovaná, ale informace jsou seskupovány do smysluplných skupin. (Hejný, 2007, s 85)

„Na schéma hledíme jako na dynamickou organizaci různorodých prvků. Slovo organizace zdůrazňuje, že se nejedná jen o množinu prvků, ale i o soubor vazeb mezi prvky.“ Schémata, která jsou rozsáhlejší, vznikají spojením či propojením menších schémat. Proces propojování se nazývá amalgamace a jeho výsledek je tzv. amalgám. (Hejný, 2007, s 86)

7. Výskyt zkoumaných prostředí v učebnicích Matematiky

Jak již bylo řečeno, tato prostředí se nachází v učebnicích Matematiky od nakladatelství FRAUS, které vytvořil kolektiv výše zmiňovaných autorů.

V učebnicích pro jednotlivé ročníky jsou jednotlivá prostředí zastoupena následujícím způsobem:

(V tabulce jsou použity tyto značky: I/1 … 1. ročník, 1. díl uč.

I/2 … 1. ročník, 2. díl, atd.

ps. … pracovní sešit)

„Sousedé“	„Barevné trojic “
I/2 – s. 22, 23, 25, 28, 32, 36, 38, 41, 44, 49. 51, 53, 55, 57	I/2 – s. 15, 18, 19, 23, 27, 32, 36, 43, 50, 56, 63
II/1 – s. 17, 22, 27, 31, 40 II/ 2 – s. 11, 19, 32, 40, 60 II/3 – s. 11, 19, 32, 40	II/1 – s. 11, 22, 29, 38, 46, II/ 2 – s. 7, 15, 21, 28, 41 II/3 – s. 7, 15, 21, 28, 36, 42

<table>
<tr><td>„Sousedé“</td><td>„Barevné trojice“</td></tr>
<tr><td>III/uč. – s. 35, 39, 53, 56, 81, 101,
III/ps. 1 – s. 5, 27
III/ps. 2 – s.</td><td>II ps 1 – s. 5</td></tr>
<tr><td>IV/ps. 1 – s. 10, 27, 29, 36</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">K matematice pro 1. ročník ZŠ byly vytvořeny pracovní listy. I zde se vyskytují úlohy ze zkoumaných prostředí.</td></tr>
<tr><td colspan="2">130, 134, 142, 143, 148, 151, 153, 158, 163, 165, 177, 181, 182, 185, 187</td></tr>
</table>

Jak je patrné z tabulky, obě prostředí, jež jsou předmětem mé práce, jsou přítomna již ve druhém dílu učebnice pro první ročník. Zde je jejich četnost největší. Žáci se na nich učí sčítat a odčítat. Během řešení jim v hlavě proběhne velké množství úloh a nemusí při tom počítat „nudné sloupečky“.

V učebnicích pro druhou třídu jsou tato prostředí zastoupena v menší míře než v ročníku předcházejícím, ale i zde je poměrně velké množství úloh.

Ve třetím ročníku se vyskytuje již jen jedna úloha na „Barevné trojice“. Úloh v prostředí „Sousedé“ je také již méně než v předcházejícím ročníku. Úlohám do zadání přibyla další podmínka. Zadání zní: „Doplň tak, aby byl součet tří sousedních čísel ***s*** a součet všech čtyř čísel ***x***.“ „Sousedé“ mají rozměr obdélníku 1 x 4 čtverečky.

Ve čtvrtém ročníku najdeme jen 4 úlohy z prostředí „Sousedé“ a žádnou úlohu z prostředí „Barevných trojic“.

Dovolím si předpokládat, že v učebnicích pátého ročníku už se tyto úlohy nebudou vyskytovat vůbec. Je to tím, že tato prostředí již tolik neobohacují látku, která se zde probírá, např. rovnice. Ztížit úlohy pomocí zvětšení čísel není řešením.

Prostředí „Sousedé“ by se mohlo propojit na posloupnosti čísel, protože se v nich čísla opakují. Je zde rytmus s periodou závislou na uvažovaném počtu sousedů. Řada čísel, kde součet každý tří sousedních čísel je dán, má periodu tři, tzn, řada se opakuje po třech členech. Řešitelé by mohli např. zjišťovat, jaké číslo bude ve 30. čtverečku, jaké ve 100. čtverečku, nebo jaký bude součet prvních osmi čísel apod.

7.1 Popis aritmetických prostředí „Sousedé“ a „Barevné trojice“

V následujících dvou odstavcích popíši dvě aritmetická prostředí, která významně přispívají budování aditivní triády. Nejdříve se budu věnovat prostředí „Sousedé“ a pak „Barevné trojice“. V obou odstavcích prostředí popíši, uvedu ukázky základních úloh z učebnic Matematiky (Fraus) a popíši, jak jsem se s prostředím seznamovala já a „moji“ žáci.

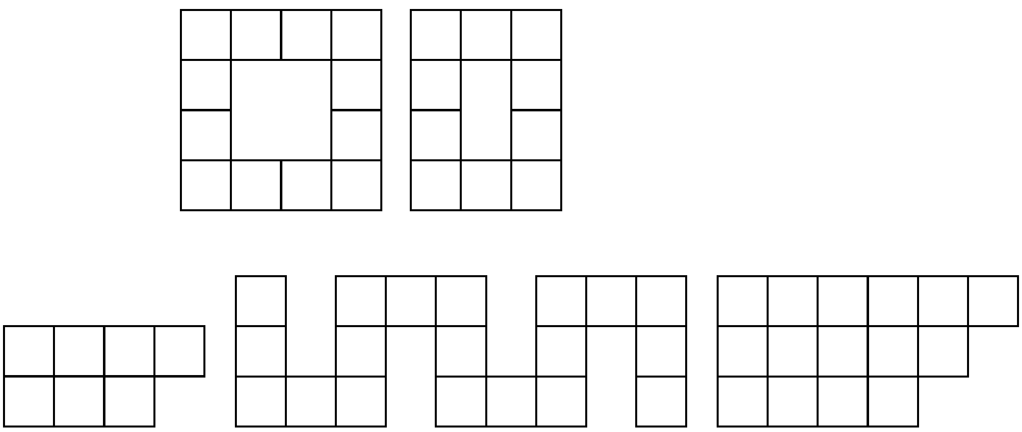
7.1.1 „Sousedé“

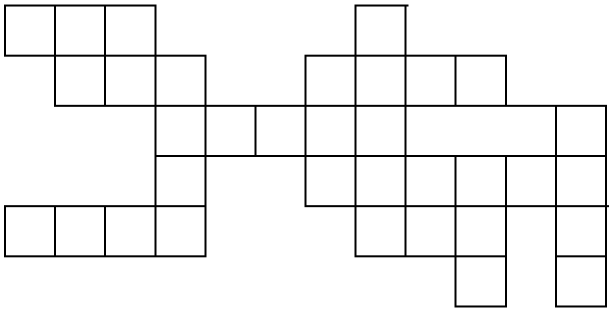
Matematicko – didaktické prostředí nazvané „Sousedé“ je aritmetické strukturální prostředí. Čísla zde nemají žádnou sémantiku a jde především o vazby ve struktuře přirozených, někdy i celých čísel. „Sousedy“ se nazývají trojice sousedních přirozených čísel, které jsou zapsány do tří čtvercových políček tvořících obdélník 3 × 1 nebo 1 × 3 Například:

1	0	2

Součet každých ***z*** sousedních políček (políček vedle sebe) ve svislém i vodorovném směru má stejnou hodnotu, která je známá. ***z*** je malé přirozené číslo, nejčastěji tři.

Úlohy se tvoří tak, že políčka jsou uspořádána do různých geometrických útvarů a o „Sousedech“, nebo o číslech v celém útvaru, nebo v jeho části, se vysloví nějaká podmínka. Nejmenším útvarem v úloze může být obdélník o velikosti 1 × 4. Útvary se mohou libovolně zvětšovat i tvarovat. Podmínka, kterou lze zadat je například: Součet každých tří „Sousedů“ je 4, nebo součet všech čísel v obrazci je např. 10, apod.





V prostředí „Sousedé“ se sice spojuje geometrie s aritmetikou, avšak geometrická část je obsažena jen v grafické prezentaci úlohy, což je v dosti malé míře. Geometrii zde reprezentuje v první řadě tvar políček, která jsou uspořádaná do geometrických útvarů a dále slovní spojení dvě, tři,…, ***z*** sousedních políček. Z aritmetiky je zde např. dopočítávání čísel do hodnoty daného součtu, či rozklad daného čísla na 3 sčítance tak, aby platily ještě další podmínky. Takto se o svém prostředí „Sousedé“ zmiňují autoři v příručce učitele. (Hejný, 2007c, s. 96)

Pomocí „Sousedů“ žák získává vhled „do základní vazby aritmetiky, a sice vztahu mezi sčítáním, součtem, odčítáním a rozdílem“. (Hejný, 2008d, s. 13)[2]

Řešitel úlohy v tomto prostředí má za úkol vyplnit okénka čísly podle uvedené podmínky: stanoveného součtu čísel daného počtu (***z***) políček, které jsou vedle sebe.

7.1.1.1 *Znění zadání úloh*

Autoři prostředí (M. Hejný, D. Jirotková, J. Slezáková – Kratochvílová) vytvořili následující zadání: **Doplň (tak), aby byl součet *z* sousedních čísel *x*.** (např. Doplň, aby byl součet tří sousedních čísle 7.“).

V zadání chybí informace, že součet každých ***z*** sousedních čísel má být ***x***. Autoři prostředí se o tomto nedostatku v zadání zmiňují teprve v příručce učitele pro 2. ročník základní školy: „V zadání chybí informace, že součet každých tří sousedních čísel (každé trojice) musí být 6. Tuto informaci doplní učitel. Do učebnice jsme ji nevkládali pro zjednodušení zadání.“ (Hejný, 2008d, s. 41)

Myslím si, že přidáním jednoho slova do zadání, by se znění nestalo složitějším. Vzhledem k tomu, že se ale jedná o použití obecného kvantifikátoru „každý“, může se

[2] *Pozn.: V 1. vydání příručky učitele pro 3. ročník základní školy je citovaná část také, ale slovo* ***součet*** *je chybně nahrazeno slovem* ***součin.*** *(„Získávání vhledu do základní vazby aritmetiky vztahu mezi sčítáním, součinem, odčítáním a rozdílem.“)*

věta komplikovat více, než přidáním jednoho jiného slova. Budu si muset svůj názor ověřit při práci se žáky.

Zadání úlohy by po doplnění chybějící informace znělo: **Doplň, aby byl součet každých *z* sousedních čísel *x*.**

Slovo „každé“ považuji v zadání úlohy za důležité, protože pokud učitel tuto informaci nedoplní, úloha je zadaná nepřesně a mohlo by dojít k chybnému řešení. Protože autoři v příručkách učitele pro 1. i 2. ročník základní školy zdůrazňují nutnost náležitě vysvětlit slovní spojení „(každých) ***z*** sousedních políček“ (např. každé 3 sousední políčka) zařazením přípravných cvičení, k chybám při řešení úloh způsobených chybějící informací v zadání by nemělo docházet.

7.1.1.2 ***Moje seznamování s prostředím „Sousedé“***

První úlohu ze „Sousedů“, se kterou jsem se setkala, nám předložil k zamyšlení a případnému řešení prof. M. Hejný na jedné z přednášek z Didaktiky matematiky. Na komentář, který jsme k úloze dostali, si ale již bohužel nevzpomínám.

Jelikož jsem se později s úlohou znovu střetla při čtení kapitoly „Budování matematických schémat“ (Hejný, 2007, s. 96), instrukce k řešení úlohy mohly být pravděpodobně obdobné těm, které jsou zde uvedeny.

„Do každého z deseti prázdných polí tabulky napište jedno číslo tak, aby součet tří čísel v každém obdélníku (vodorovném i svislém), který se skládá ze tří sousedních polí, byl 6. Dále zjistěte, kolik má úloha řešení, a svoje tvrzení dokažte.“ (Hejný, 2007, s. 95)

	2			
				1
1				
	3			

První moje metoda řešení byl „pokus – omyl“. Začala jsem u čísla 3 (nejvyššího doplněného). Do sousedních polí jsem doplnila čísla 1, 2, protože jejich součet je 3 a s uvedenou 3 dávají dohromady požadovaný součet 6. Další pole jsem doplňovala dopočítáváním do 6 (modrá čísla). Poté jsem se vrátila k levému krajnímu sloupci tabulky a opět dopočítávala (zelená čísla). Tabulka byla doplněná, ale…. Součet ve vodorovném pravém horním obdélníku neseděl.

1	**2**	**3**	**1**	**3**
4				**1**
1				**2**
1	**3**	**2**	**1**	**3**

Začala jsem tabulku doplňovat znovu. Postupovala jsem stejně, ale tentokrát jsem začala s jinými čísly (0, 3).

0	**2**	**4**	**0**	**3**
5				**1**
1				**2**
0	**3**	**3**	**0**	**3**

I v tomto řešení není součet vyznačených polí roven 6. Že by úloha neměla řešení? S touto možností jsem se nechtěla smířit. Po dalších dvou neúspěšných pokusech jsem „vzala na pomoc písmena“.

a	**2**			**3**
c				**1**
1				**2**
a	**3**	***b***	***a***	**3**

Dosadila jsem písmena a a b do prázdných políček kolem čísla 3. Říkala jsem si: $a + 3 + b = 6$

$$3 + b + ? = 6,\ ? = a\ (3 + b + a = 6)$$

$$b + a + 3 = 6$$

Dále jsem počítala s modrými čísly a doplňovala prázdná políčka. Opět následoval návrat k levému krajnímu sloupci tabulky a doplnění písmene c ($c = b + 2$),

$a + 1 + c = 6$

$1 + c + a = 6$

V tuto chvíli mi došlo, že úloha opravdu nemá řešení. Do posledních dvou prázdných políček je nutné doplnit a a b, protože víme, že $3 + a + b = 6$, $a + b = 3$. To by však znamenalo, že $2 + a + b$ se má rovnat také 6, tudíž $a + b = 4$, což je ve sporu s předešlým tvrzením.

Po tomto zjištění jsem neměla problémy při řešení dalších úloh z tohoto prostředí. Spočítala jsem všechny úlohy, které jsou uvedené v Matematice 1, 2 , 3 , 4 (M. Hejný a kol.) a na pracovních kartách (Michnová, strany jsou uvedeny v kapitole 7).

V „Sousedech“, které tvoří obdélník 1 x 4 čtverečky či 4 x 1 čtvereček, jsou krajní čísla stejná.

Např. Doplň, aby součet tří sousedních čísel ve čtvercích byl 10

2	5	3	2

Není to náhoda a tento „objev“ nazvali autoři učebnic ***„pravidlo čtveřice“.***

Proč jsem na to, že první úloha, kterou jsem řešila, nemá řešení, nepřišla hned? Asi to bylo jednak tím, že jsem se s prostředím teprve seznamovala, ale určitě také tím, že vnímám aritmetiku spíše v procesech, učila jsem se ji v algoritmech, jak co spočítat. Zde se ale vyžaduje spíše pohled konceptuální, tj. vidět □□ v např. 2□□3 jako jedno číslo – součet, potom je hned vidět, že úloha nemá řešení.

S úlohami jsem se nesetkávala jen v roli řešitele, ale i v roli tvůrce. Inspiraci pro nové úlohy jsem měla v učebnicích Matematiky. Připravila jsem pracovní listy pro žáky druhé třídy ***(viz příloha 1)***, kteří se přihlásili do matematického kroužku, a pro studentky Pedagogické fakulty ***(viz příloha 2)***, které společně se mnou navštěvovaly homogenní variantu z matematiky.

Pracovní listy byly sestavené ze cvičení, ve kterých se zvyšovala obtížnost úloh. V jednotlivých cvičeních nebyly úlohy seřazeny podle obtížnosti.

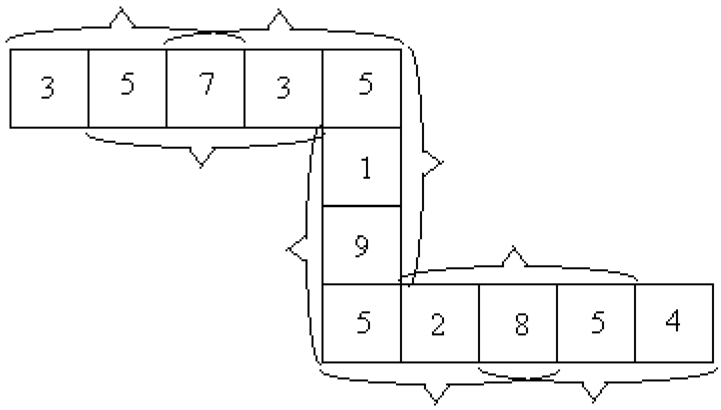
Prvních několik cvičení bylo zařazeno pro pochopení formulace: „Každá dvě, tři, … sousední políčka.

Při součtu každých tří sousedních políček jsem procvičovala „pravilo čtveřice“, při součtu čtyř čísel „pravidlo pětice“. Pokud by se sčítalo více čísel, platila by obdobná pravidla.
V poslední úloze na pracovních listech jsem „Sousedy“ brala již jako řadu opakujících se čísel a řešitelé zjišťovali, jaké číslo bude například ve dvacátém či stém políčku.
Na přidání další podmínky (př. Součet každých tří políček je ***s*** a součet čtyř políček je ***z.)*** jsem nepřišla. Při tvoření úloh jsem toto prostředí poznala ještě více.

7.1.1.3 *Seznamování žáků s prostředím „Sousedé“*

V této kapitole popíši, jak se žáci seznamují s prostředím „Sousedů“ v učebnicích již zmiňovaných autorů.

Při seznamování žáků první třídy se „Sousedy“ autoři učebnic nahrazují zpočátku arabská čísla „čísly tečkovými“. Později dochází ke kombinaci teček a čísel, a nakonec jsou tečky zcela nahrazeny čísly.
K lepšímu pochopení slovního spojení každé dvě, tři, … ***z*** sousedních čísel jsou nejdříve všechny čtverečky doplněny čísly a žáci zjišťují jejich součet. Určený počet čísel (čtverečků), které se mají sečíst, může být spojen „složenou závorkou“, aby se zdůraznilo, které čísla se sčítají.
Např.



Je nutné, aby žáci pochopili, co znamená součet ***z*** sousedních čísel. Pokud toto nebudou mít zvládnuté, s řešením úloh budou mít problémy a budou v nich chybovat. Je zapotřebí zařadit přípravná cvičení.
O potřebnosti dostatečného množství přípravných cvičení jsem se přesvědčila sama. Žáci mají problém pochopit a ohlídat si, se kterými ***z*** políčky pracují. Často některé

vynechávají. Při experimentech jsem se přípravnými cvičeními příliš nezabývala, a to mohla být také jedna z příčin, proč někteří řešitelé měli problémy.
Přípravné cvičení může vypadat takto: „Učitel nakreslí na tabuli obdélník se třemi ikonkami ☼ | ☺ | ✶ a požádá žáky, aby řekli, co sousedí se sluníčkem, co se smíškem, co s hvězdičkou. Nebo nakreslí obdélník s pěti písmeny M | A | R | I | E a požádá žáky, aby našli sousední dvojice.“ (Hejný a kol., 2007c, s. 96)
Žáci by postupně měli říkat „MA“, „AR“, „RI“, „IE“. Tato přípravná cvičení jsou určena pro pochopení informace „každá 2 sousední políčka“.
Obdobně by přípravná cvičení vypadala i pro „každá 3 sousední políčka“. Pokud zůstaneme u druhého cvičení, tak by si žáci postupně říkali: „MAR“, „ARI“, „RIE“.

Přemýšlela jsem o tom, jak ještě vylepšit přípravná cvičení. Pracovala jsem s „každými 3 sousedními políčky“. Předpokládám, že by mohlo být žákům bližší, kdyby trojice písmen tvořila smysluplná slova. Nepodařilo se mi však najít slovo, kde by všechna tři sousední písmena tvořila nová slova.

V následujících odstavci uvádím slova, která by se mohla použít: MOŘE (MOŘ, OŘE), BOJE (BOJ, OJE), NOSÁK (NOS, OSÁ – bez čárky OSA, SÁK), KOLENO (KOL, OLE, LEN, ENO), KLOKOČÍ (KLO, LOK, OKO, KOČ, OČÍ) či POKOLENÍ (POK, OKO, KOL, OLE, LEN, ENÍ).

Další možnost, kterou autoři učebnic navrhují k upevnění pochopení „ součet každých *z* políček je: „Lze vyrobit šablonu, kartičku s obdélníkovým otvorem přesně na tři čtverečky. Při řešení si žák kartičku položí na obrázek tak, aby viděl tři sousední čtverečky, a příslušná čísla sečte.“ (Hejný a kol., 2007c, s. 99)

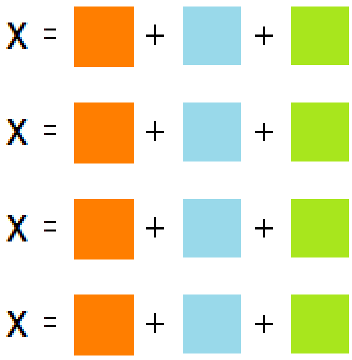
Pro to, aby žáci dobře pochopili zadání úloh, může být zapojena dramatizace. Autoři v příručce učitele uvádí: „Osm žáků se postaví do řady, učitel na jednoho z nich ukáže a ten řekne: *Toto jsou mí sousedé.* Chytí za ruku pravého a levého souseda. Učitel vydá povel: *Trojice, jeden krok vpřed!* Trojice postoupí o jeden krok vpřed. To se několikrát opakuje.“ (Hejný a kol., 2007c, s. 102)

Dramatizaci jsem použila v kroužku matematiky, který jsem vedla, při homogenní variantě. Připravené úlohy k dramatizaci a přepis hlasového záznamu z natočeného videa jsem vložila do ***přílohy 3***. V dramatizaci jsem udělala chybu:

Spolužačky z VŠ, které držely čísla, jež se měla sečíst, nevystupovaly o krok dopředu, ale pouze jsem je jmenovala či na ně ukazovala.

7.1.2 Barevné trojice

Matematicko – didaktické prostředí je opět aritmetické nesémantické prostředí, v němž barva hraje roli. „Barevné trojice“ se vybírají z dvanácti čísel, z nichž čtyři jsou umístěna v malém červeném kruhu, čtyři v malém modrém a čtyři v malém zeleném kruhu. Součástí zadání jsou také „čtyři úlohy na sčítání“, které mají tuto podobu:



. ***x*** je kladné číslo.

Řešitel úlohy v tomto prostředí hledá čísla třech různých barev (čísla v malých barevných kruzích), jejichž součet je zadané číslo ***x*.** Každé číslo v kroužku je možné použít právě jednou.

V prostředí „Barevné trojice“ rozvíjí žáci řešitelské strategie aritmetických úloh obohacených o parametr barvy. Úlohy jsou pro žáky prvních a druhých tříd složité, a tak je možné zpočátku využít dramatizaci úloh. (Hejný, 2008d, s. 13)

7.1.2.1 *Znění zadání úloh*

Autorovo zadání úloh v tomto prostředí se vyvíjelo. V druhém díle Matematiky 1 pro 1. ročník základní školy zní: „Spoj 3 čísla a vytvoř ***x***.“ (př. Spoj 3 čísla a vytvoř 6.).

V Matematikách 2 pro 2. ročník základní školy se zadání mění: „Spoj tři čísla tak, aby vyšlo *x*.“ (př. Spoj tři čísla tak, aby vyšlo 10.). Toto zadání zůstává i v Matematikách 3 pro 3. ročník základní školy.

Ke změně zadání mohlo dojít, protože jej autoři chtěli zpřesnit. Ani „nové“ zadání není dle mého názoru přesné a učitel jej musí doplnit. V zadání chybí informace o tom, že spojovaná tři čísla mají být jedno v červeném, druhé v modrém a třetí v zeleném kroužku (různobarevná) a že jejich součet má být *x* (číslo ze zadání). To je popsáno v příručce učitele pro 1. i 2. ročník základní školy a je to uvedeno i jako

vyřešená úloha při prvním setkání se s tímto prostředím v učebnici. Výstižnější zadání úloh může být následující: Spoj tři čísla různých barev tak, aby jejich součet byl *x*.
Někdo by mohl namítat, že je v zadání mnoho slov a že žáci, kteří se teprve učí číst, budou mít s přečtením zadání problémy a stejně vyčkají instrukcí učitele. I zmiňovaní autoři mohli mít tuto skutečnost na zřeteli, a proto úlohy z prostředí „Barevných trojic“ doplnili čtyřmi úlohami na sčítání, které jsou znázorněny výše. Tím se zadání zpřesnilo, aniž by do něj přibyla slova.

V druhém díle Matematiky 1 pro 1. ročník základní školy na straně 15 a 18 úlohy na sčítání chybí. Zde je opravdu na učiteli, aby zadání úloh doplnil a náležitě vysvětlil.

7.1.2.2 ***Nahrazení parametru barvy geometrickým tvarem***

Na pracovních kartách (Michnová, 2007), které jsou černobílé, byl parametr barvy nahrazen geometrickým tvarem. Čtyři čísla jsou umístěna v malých trojúhelnících, čtyři v malých kruzích a čtyři v nevelikých čtvercích. Instrukce k úlohám se nemění: „Spoj tři čísla a vytvoř ***x***. „Úlohy na sčítání“ mají následující podobu:

X = △ + ○ + □

X = △ + ○ + □

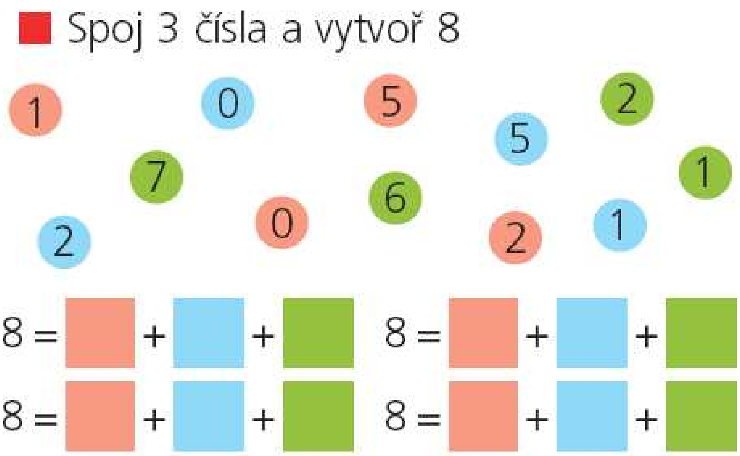
X = △ + ○ + □

X = △ + ○ + □

V takto zadaných úlohách dochází k propojení aritmetiky s geometrií, neboť učitelé i žáci mohou mluvit o trojúhelníku, kruhu a čtverci.

Při experimentech (předkládání úloh řešiteli) jsem většinou volila tento způsob zadání. Bylo to z finančních důvodů, jelikož pořizování barevných kopií zadání je poměrně nákladné. Barevné úlohy mi však přijdou přehlednější a bezchybné. V černobílém zadání s geometrickými tvary (pozn. dále jen černobílé zadání) spatřuji „chybu“, na kterou mě přivedl rozhovor s Mgr. M. Tichou, Csc., jež jsem měla na předměty Didaktika matematiky s praxí II., III. Rozhovor na stejné téma jsem vedla ještě s paní učitelkou E. Bomerovou, u které jsem absolvovala souvislou praxi I., II. Až po tomto druhém rozhoru jsem se tím začala více zabývat.

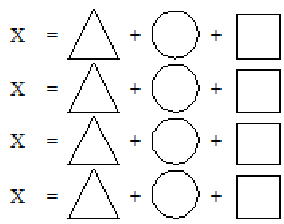
Jak již víme, v **barevném zadání** jsou čísla umístěna v malých červených, modrých či zelených kruzích a v „úlohách na sčítání“ jsou malé čtverce, které mají již zmíněné barvy.



Pokud bych nyní pominula zadání: Spoj 3 čísla a vytvoř ***x*,** navádí mě barevné zadání k tomuto: Vezmi číslo v modrém kruhu a přesuň ho do modrého čtverce. Vezmi číslo v červeném kruhu a přesuň jej do červeného čtverce atd. Barva je jen ukazatelem, kam čísla patří. Nechápu ji jako neznámou.

V černobílém zadání jsou čísla umístěna do trojúhelníků, kruhů a čtverců a stejné geometrické tvary jsou i v „úlohách na sčítání“. Geometrické tvary ve mně evokují neznámou. V „úlohách na sčítání“ vidím soustavu čtyř lineárních rovnic:

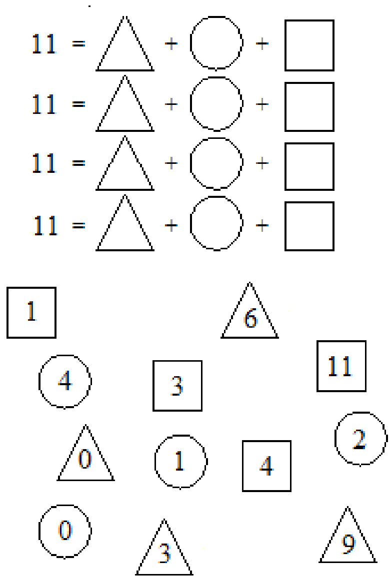
$x = a + b + c$
$x = a + b + c$
$x = a + b + c$
$x = a + b + c$



Všechna čísla umístěná v trojúhelnících, kruzích či čtvercích ovšem nejsou stejná, což znamená, že neznámé (a, b, c) se rovnají různým číslům, což není správné. Černobílé zadání může budovat chybnou představu rovnic.

Ve třídě, kde jsem absolvovala souvislou praxi, jsem žákům zadala k řešiní úlohu v černobílé zadání. Zadání úlohy (Hejný, 2007b, s. 63) (obr. 1) dostala do ruky i p. uč. Bomerová. V rozhoru, který jsme spolu vedly o této úloze, se zmínila, že její první myšlenka byla: „Proč jim dává řešit čtyři totožné úlohy?“ Po důkladnějším prohlédnutí úlohy jí došlo, oč v úloze jde.

O úloze jsem mluvila i s kolegyní jmenované paní učitelky. I ona měla po prvním shlédnutí pocit, že v zadání úlohy je „chyba“.



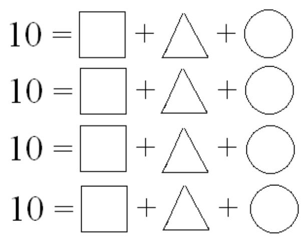
obr. 1

Ovlivněná rozhovory jsem se rozhodla touto „chybou“ více zabývat. P. uč. Bomerová, která učí také na Pedagogické fakultě UK v Praze, mi nabídla, že si o tom mohu promluvit se studenty prvního ročníku Učitelství pro 1. stupeň ZŠ na jednom z jejích seminářů.

Metoda rozhovoru nebyla šťastně zvolená. Nezajistila jsem si žádný způsob zaznamenání – audio ani video. Zapisovat jej nebylo možné, při vedení rozhovoru jsem to nestíhala. Protože rozhovor nebyl prováděn s jedním člověkem, ale rovnou se skupinou lidí, jednotlivci ve skupině byli ovlivňováni tím, co již slyšeli od jiných.

Průběh rozhovoru:

Připravila jsem si ukázky úloh z prostředí „Barevných trojic“ – barevné i černobílé zadaní. Nejdříve jsem studentům ukázala „úlohy na sčítání“ z černobílého zadání bez slovní části: Spoj 3 čísla tak, aby vyšlo 10. (obr. 2) a zeptala se, co si myslí, že to je.

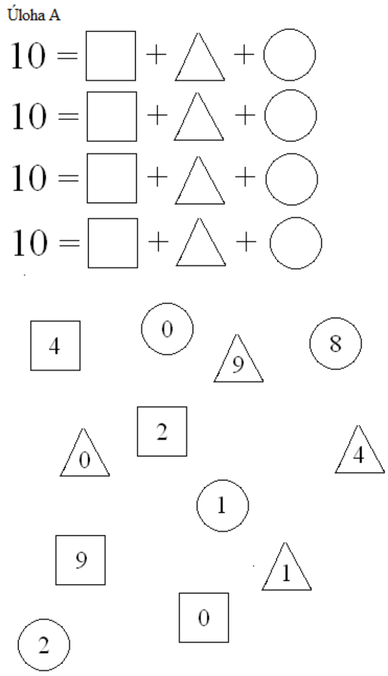


obr. 2

Poté jsem jim ukázala celou úlohu bez slovního zadání a ptala se, na jejich názor. Dále jsem jim ukázala i celé barevné zadání úlohy bez slovní části a ptala se, zda jsou úlohy podobné či jiné, v čem vidí výhody jednotlivých zadání. Na závěr jsem jim položila otázku, jaké si myslí, že je slovní zadání úloh.

Z rozhovoru vyplynulo, že k mé tezi o chybném budování představy rovnice se přiklání jen malá skupina lidí. Tito lidé však o dané situaci přimýšleli a s E. Bomerovou o tom diskutovali i po skončení semináře.

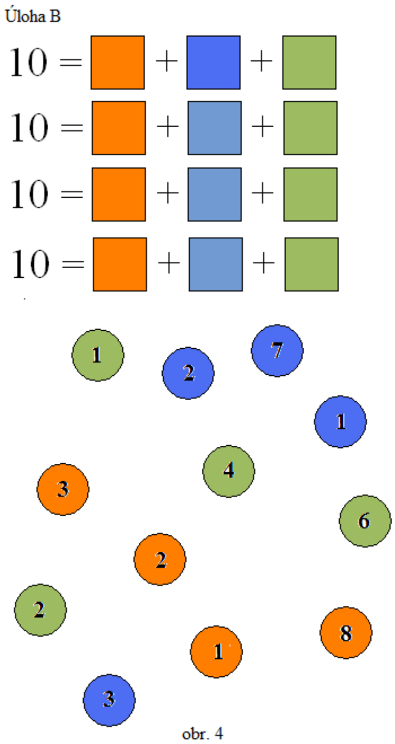
S E. Bomerovou jsem probírala vhodnější metodu pro můj průzkum. Vytvořila jsem dotazník se čtyřmi otázkami ***(viz příloha 4)***, který jsem zadala v jiné skupině studentů prvního ročníku výše zmiňovaného oboru. E. Bomerová jej zadala studentům 3., 4. a 5. ročníku stejného oboru, kteří v „její“ 5. třídě navštěvovali praxi z Didaktiky matematiky, a vyplněné dotazníky mi předala.



obr. 3

Také mi doporučila dotazník doplnit o informaci, kterou známkou z matematiky byl dotazovaný jedinec v předešlém studiu hodnocen. Instrukce k napsání známky byla zadávána ústně. Známka v dotaznících často ujasnila chyby, které dotazovaný napsal (např. chybné použití matematických termínů.)

Dotazník vyplňovalo 17 lidí z prvního ročníku a 15 lidí ze čtvrtého ročníku, jeden člověk z třetího a jeden z pátého ročníku.



obr. 4

Při vyplňování dotazníku jsem respondentům ukazovala ukázky úloh ve stejném pořadí jako při výše zmiňovaném rozhovoru. Pro lepší přehlednost je zde ještě jednou shrnu.

Dotazovaným jsem ukázala první ukázku (obr. 2) a oni zodpověděli první otázku dotazníku (Napište, co vás napadlo po zhlédnutí první otázky. *(Oč jde.)*)

Poté, co jedinci vyplňující dotazník shlédli druhou ukázku (obr. 3) (Hejný, 2008a, s. 22), odpovídali na otázku se stejným číslem (Co si myslíte o úloze po zhlédnutí druhé ukázky.).

Při odpovídání na třetí (Srovnejte úlohu A a úlohu B.) a čtvrtou (Zformulujte zadání k daným úlohám.) otázku, měli dotazovaní jedinci před sebou úlohu A (obr. 3) i úlohu B (obr. 4) (Hejný, 2008a, s. 11)

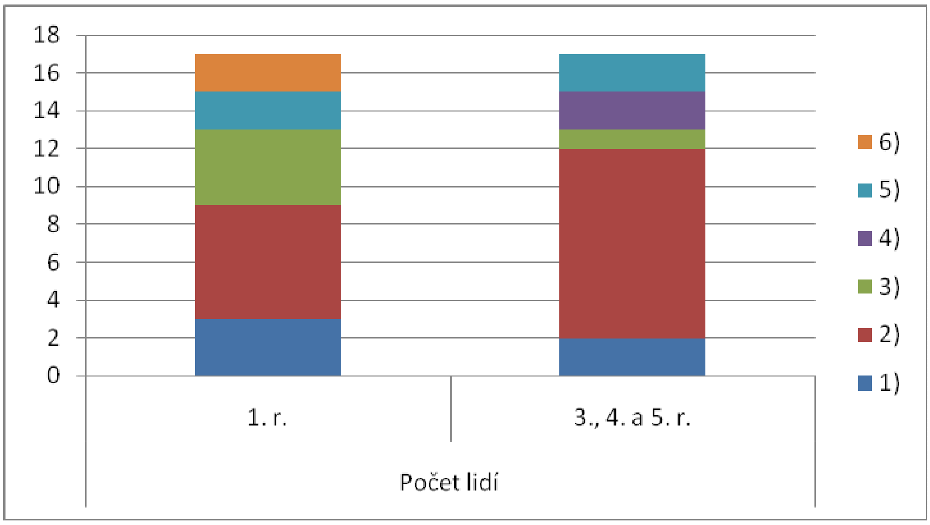
Myslím, že podrobné zkoumání dotazníků by vydalo materiály k napsání samostatné diplomové práce. V odpovědích studentů se vyskytlo i množství chyb, např. na první otázku jeden z dotazovaných odpověděl: „OBSAH nebo OBVOD je celkem „10“ ze všech těles.“ Hodnotil se známkou 4 -, což dosti vysvětluje. ***(viz příloha 5).***

Vyhodnocováním dotazníků jsem se chtěla přesvědčit, zda více lidí sdílí můj názor o „chybě“.

Z odpovědí na jednotlivé otázky jsem vytvořila kategorie podle toho, co dotazovaní napsali. Z roztříděných odpovědí jsem vytvořila tabulky a grafy pro lepší přehlednost.

Otázka 1: Napište, co vás napadlo po zhlédnutí první ukázky. ***(Oč jde.)***

Vytvořené kategorie	Počet lidí 1. r.	Počet lidí 3., 4. a 5. r.
1) Geometrie - sčítání obvodů či obsahů daných útvarů nebo počtů stran a vrcholů	3	2
2) Aritmetika - doplňování čísel do útvarů, aby se součet rovnal 10.	6	10
3) Popis toho, co vidí	4	1
4)Zmínka o rovnici	0	2
5)Potvrzují můj názor	2	2
6) Ostatní	2	0
Součet	17	17



Z odpovědí na první otázku jsem vytvořila šest skupin, které jsou zmiňované v tabulce. Nejvíce dotazovaných ze všech ročníků odpovědělo, že úlohy spadají do oblasti aritmetiky. Řešitelé mají doplňovat čísla do útvarů tak, aby se součet rovnal deseti.

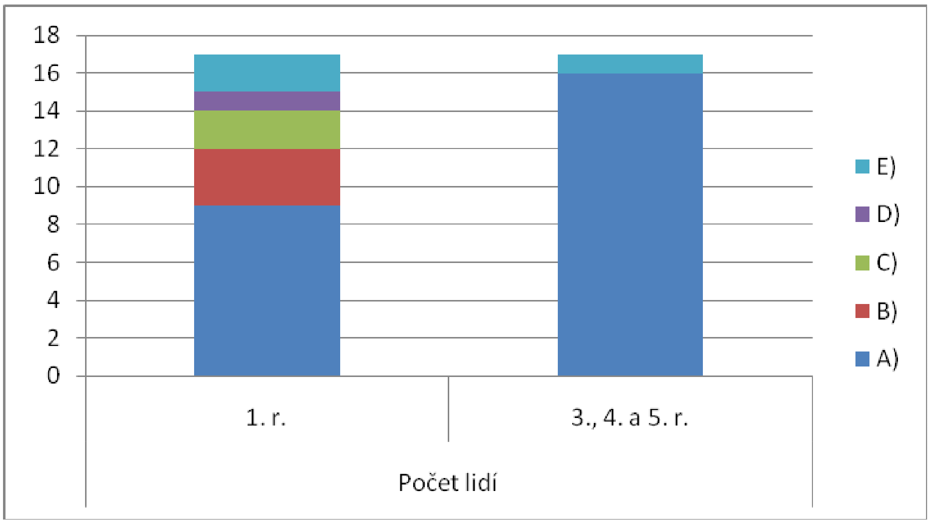
Do třetí skupiny, kdy dotazování pouze popsali, co vidí, spadá více studentů z prvního ročníku než studentů z dalších ročníků.

Do čtvrté skupiny, kdy respondenti napsali zmínku o rovnicích, nepatří žádní studenti z prvního ročníku.

Do skupiny, kterou jsem nazvala „Potvrzují můj názor“, spadá pouze malá část studentů. *Vyplývá to z toho, že většina studentů nesdílí můj názor o možnosti, že by v černobílém zadání mohlo dojít k chybnému budování představy rovnic.*

Otázka 2: Co si myslíte o úloze po zhlédnutí druhé ukázky.

	Počet lidí	
Vytvořené kategorie	**1. r.**	**3., 4. a 5. r.**
A) Čísla z obrazců se doplňují do "úloh na sčítání" tak, aby byl součet 10.	9	16
B) Přetrvávající názor, že jde o sčítání obsahů, obvodů, stran nebo úhlů	3	0
C) Nejistota v tom, oč v úloze jde. (V první otázce sdíleli můj názor.)	2	0
D) Spojování tří útvarů tak, aby součet dvou z nich byl číslo ve třetím obrazci.	1	0
E) Ostatní	2	1
Součet	17	17

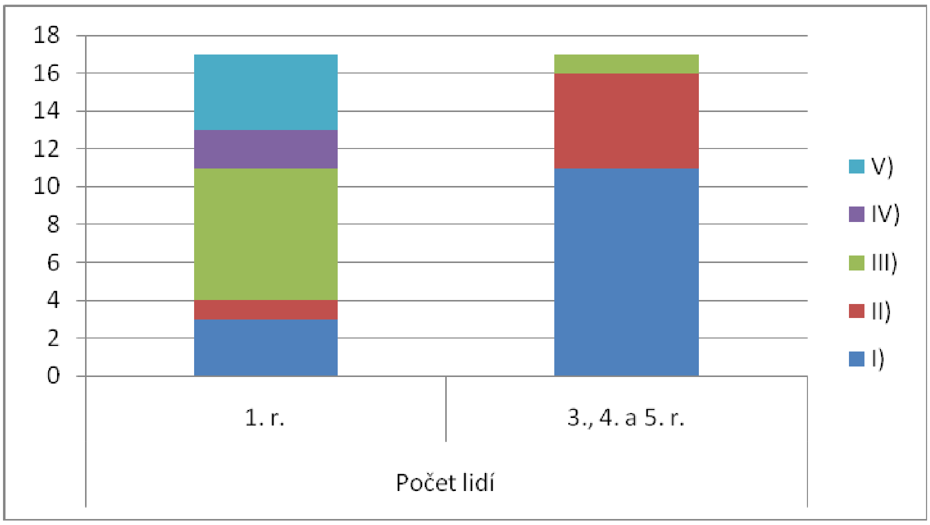


Z odpovědí na druhou otázku jsem vytvořila pět skupin. Tři z nich se vyskytují pouze v odpovědích studentů z prvního ročníku. Do skupiny, ve které se studenti domnívají, že čísla se doplňují do „úloh na sčítání“, aby byl součet 10, přibyli další lidé. Po shlédnutí této ukázky je polovina lidí, která se shodovala s mým názorem, nejistá v tom, oč v úloze jde. Druhá polovina se připojila k názoru většiny.

Jeden student ve své odpovědi zmínil, že jde o spojování tří útvarů tak, aby součet dvou z nich byl číslo ve třetím obrazci. Tato odpověď není přesná, ale poprvé se v ní zmiňuje „spojování“.

Otázka 3: Srovnejte úlohu A a úlohu B

Vytvořené kategorie	Počet lidí 1. r.	Počet lidí 3., 4. a 5. r.
I) Úlohy jsou stejné. Pro žáky či studenty bude přehlednější barevné zadání (úloha B).	3	11
II) Úlohy jsou stejné, ale pro žáky či studenty bud přehlednější černobílá úloha (úloha A).	1	5
III) Pouze popsány rozdíly - barvy X geometrické tvary, součet čísel má být 10	7	1
IV) Úlohy nejsou stejné.	2	0
V) Ostatní	4	0
Součet	17	17



Odpovědi na tuto „otázku“ jsem shrnula také do pěti skupin. Názory studentů z prvního ročníku mají v každé skupině nějakého zástupce. Názory studentů z ostatních ročníků spadají pouze do tří skupin. Jak je patrné z grafu odpovědi studentů 1. r. a ostatních ročníků se značně liší. V první ročníků nejvíce studentů patří do třetí skupiny. Pouze popsali rozdíly – barva X geometrický tvar. Součet čísel má být 10.

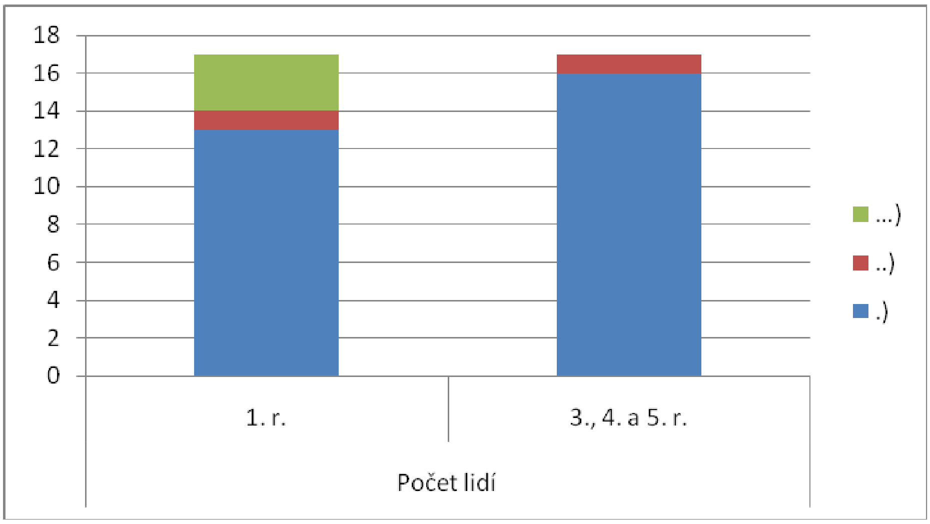
V ostatních ročnících patří nejvíce odpovědí studentů do první skupiny. Jejich názor je takový, že úlohy jsou stejné. Myslí si, že pro řešitele bude přehlednější barevné zadání.

Z tabulky a grafu je patrné, že více studentů si myslí, že pro řešitele bude jednodušší zabývat se úlohou s barevným zadáním než s černobílým.

Mezi studenty prvního ročníku byli i zástupci, kteří si mysleli, že úlohy nejsou stejné.

Otázka 4: Zformulujte zadání k daným úlohám

Vytvořené kategorie	Počet lidí 1. r.	Počet lidí 3., 4. a 5. r.
.) Dosaď, doplň, vypočítej. Součet tří čísel odlišených barvou či geometrickým útvarem je 10.	13	16
..) Spoj tři čísla odlišená barvou či geometrickým útvarem, aby byl jejich součet 10.	1	1
...) Ostatní	3	0
Součet	17	17



Zadání, která studenti vymysleli, jsem rozdělila do třech skupin. Nejvíce studentů spadá do první skupiny. Zadání by mělo následující znění: Dosaď tak, aby součet tří čísel odlišených barvou či geometrickými tvary byl roven danému součtu.
Někteří studenti se shodli ve formulaci zadání (Spoj tři čísla odlišená barvou čí geometrickým útvarem, aby součtem bylo dané číslo) s tvůrci prostředí.

Většina studentů, kteří vyplňovali dotazník, se neshoduje s mým názorem, že by černobílé zadání mohlo budovat chybnou představu rovnic.
I přes toto zjištění jsem sdělila svůj názor o „chybě“ doktorce Jirotkové. Ani ona se však s mým názorem neshoduje. Myslí si, že jsem o celé věci přemýšlela proto, že se na pracovních kartách dostaly „úlohy na sčítání“ před soupis všech čísel. V učenicích jsou

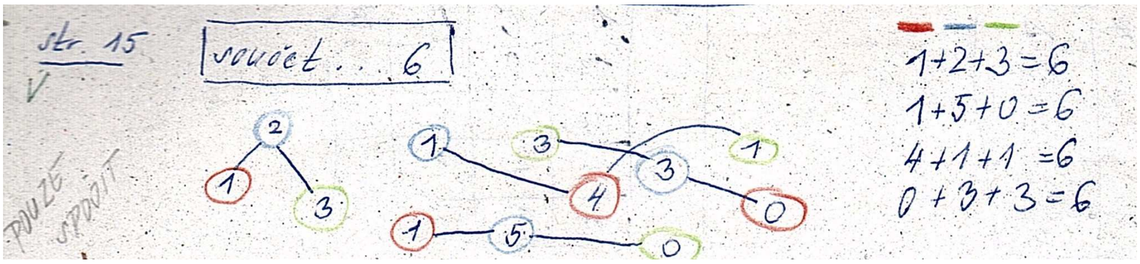
tyto úlohy vždy za zadanými čísly. Čísla by se měla nejdříve spojit a pak zapsat do součtu spíše pro kontrolu. Žáci, kteří se s prostředím teprve seznamují, by měla mít čísla vystřižená, aby s nimi mohli manipulovat.

Při řešení jsem čísla vždy dosazovala rovnou do „úloh na sčítání“. Možná i pro to, jsem se domnělou chybou začala zabývat.

7.1.2.3 ***Moje seznamování s prostředím „Barevné trojice“***

S prostředím „Barevných trojic“ jsem se seznámila až po zadání mé diplomové práce. Vyhledala jsem si úlohy z tohoto prostředí v učebnici matematiky pro 1. st. ZŠ, nakladatelství Fraus a začala je postupně řešit.

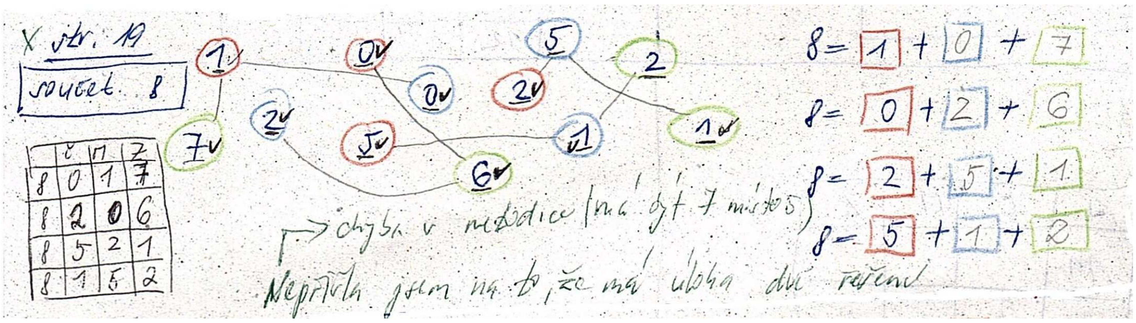
První metoda řešení byl „pokus – omyl“. Čísla jsem spojovala (viz obr. 1). (Hejný a kol., 2007b, s. 15)



obr. 1[3]

Druhou mojí řešitelskou strategií bylo: Vypsání všech čísel do čtverečků té barvy, v níž bylo největší číslo, protože k němu byla většinou již jen jedna varianta zbývajících čísel, Tímto způsobem jsem postupovala dále, až jsem se dostala ke správnému řešení (viz obr. 2). (Hejný a kol., 2007b, s. 19)

Z dalších mých setkání s úlohami tohoto typu se ukázalo, že tato strategie nemusí být vždy úspěšná.



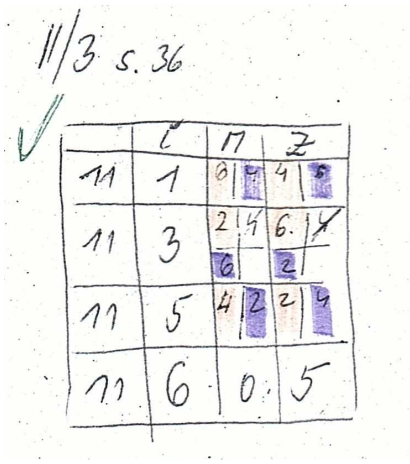
obr. 2[4]

[3] Slovní spojení „POUZE SPOJIT“ znamená, že v učebnici nebyly uvedeny „úlohy na sčítání.“

[4] Po vyřešení úlohy jsem se vždy dívala do příručky učitele pro ověření, že je úloha správně. Dozvěděla jsem se, že má úloha dvě řešení, protože jsou modrá a červená čísla stejná. Na to jsem nepřišla. Hned jsem si to chtěla ověřit, a tak jsem vytvořila tabulku (v levém spodním rohu obrázku) a zapsala druhé řešení. Po opětovné kontrole s příručkou jsem si všimla chyby. V řešení b) by mělo být místo: 1m + 0č + 5z (Zde je součet 6, ne 8.), 1m + 0č + 7z.

Po té, co jsem zjistila, že výše zmíněná strategie nemusí fungovat vždy a že úlohy mohou mít i více řešení jsem hledala strategii novou.

Hledala jsem trojici čísel, která jde spojit pouze jedním způsobem. Po doplnění těchto čísel do „úloh na sčítání“ jsem úlohu bez problému vyřešila (viz obr. 3). (Hejný a kol., 2008c, s. 36)



obr. 3

Poslední zmíněnou řešitelskou strategii jsem hledala při řešení úloh z pracovních karet. (Michnová) Na nich jsou úlohy s více řešeními častější než v učebnici Matematiky 1 z nakladatelství Fraus. V učebnicích pro vyšší ročníky se úlohy s více řešeními začínají také objevovat.

Prostředí „Barevných trojic“ jsem více poznávala při vytváření vlastních úloh. Zadání úloh jsem si uspořádávala do tabulek.

součet	č	m	z
10	0	1	9
10	1	8	1
10	6	2	2
10	3	4	3

součet	č	m	z
12	6	5	1
12	7	3	2
12	4	8	0
12	11	0	1

součet	č	m	z
19	18	0	1
19	14	3	2
19	4	7	8
19	5	4	10

součet	č	m	
25	1	0	24
25	2	5	18
25	3	6	16
25	4	7	14

součet	č	m	z
9	0	9	0
9	1	0	8
9	6	2	1
9	3	3	3

součet	č	m	z
14	7	1	6
14	5	4	5
14	3	7	4
14	6	6	2

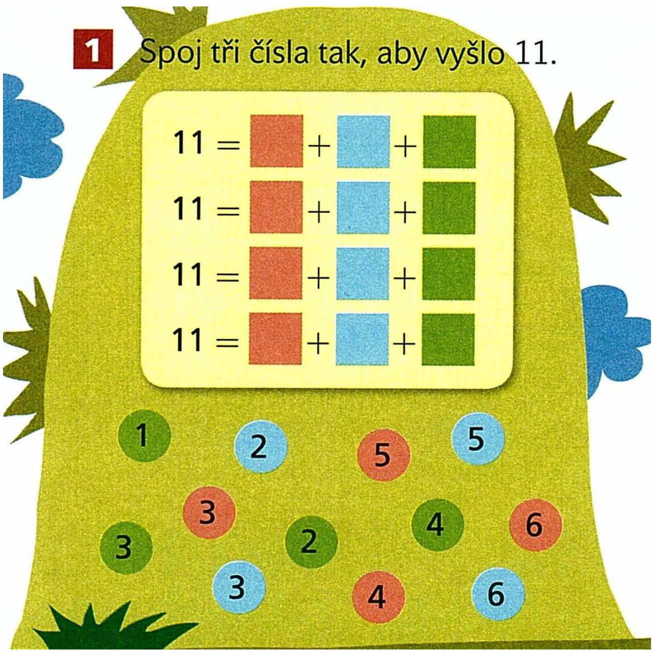
Dvě řešení mají úlohy, které mají ve dvou barvách stejná čísla, jak jsem se dozvěděla v příručce učitele.

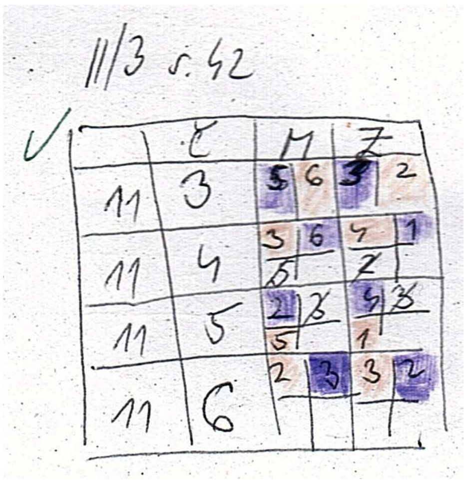
Jedna úloha se dvěma řešeními.

součet	č	m	z
9	0	8	1
9	2	7	0
9	5	2	2
9	1	3	5

součet	č	m	z
9	1	8	0
9	0	7	2
9	2	2	5
9	5	3	1

V úlohách s více řešeními se nemusí ve dvou barvách opakovat stejná čísla. Součet čísel dvou barev musí být takový, aby se třetí barvou dával zadaný součet. Jako příklad uvádím úlohu z učebnice pro 2. ročník ZŠ (Hejný a kol., 2008c, s. 42) a její řešení.





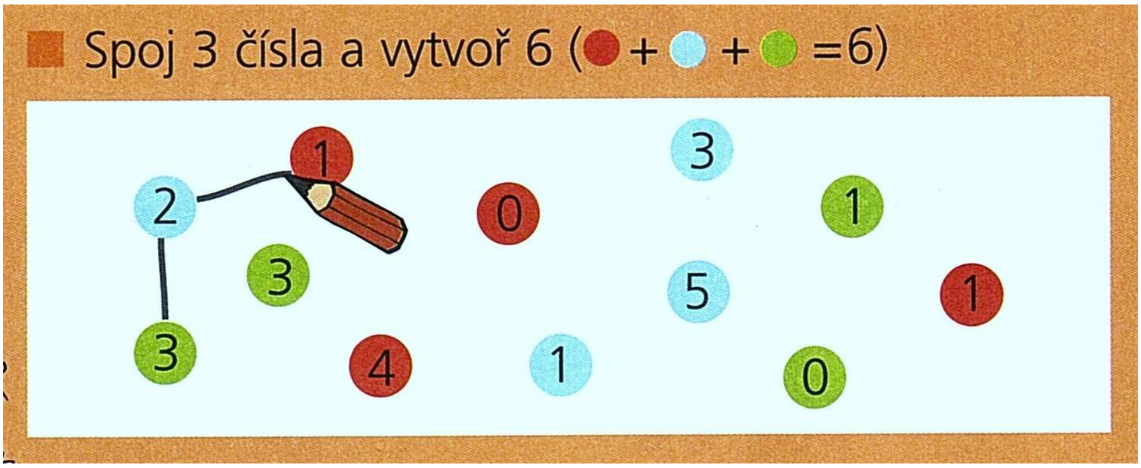
7.1.2.4 ***Seznamování žáků s prostředím „Barevné trojice“***

Úlohy v tomto prostředí jsou pro žáky náročné, protože musí splnit dvě podmínky: 1) V každé trojici se vyskytují tři různé barvy.

2) Součet čísel v trojici musí dát požadované číslo.

Autoři učebnic doporučují žáky seznámit s úlohou prostřednictvím hry, manipulace s čísly napsaných na kartičkách. Na dvanáct kartiček (čtyři červené, čtyři modré, čtyři zelené) napíšeme čísla z řešené úlohy. Rozdáme je žákům. Ti nejdříve tvoří libovolné trojice splňující první podmínku. Čísla ve vzniklé trojici sčítají. Poté je řečena druhá podmínka, že součet každých tří čísel na různobarevných kartičkách je zadané číslo. Pro jednodušší hledání sčítanců odpovídajícím zadanému součtu můžeme hru hrát nejdříve se šesti, pak s devíti a nakonec s dvanácti čísly. Je důležité, aby úloha měla pouze jedno řešení.

Takto vypadá první úloha z tohoto prostředí v učebnici matematiky pro 1. ročník ZŠ, 2. díl (Hejný a kol., 2007b, s. 15):



Protože mně samotné při řešení úloh spojování čísel nevyhovuje, zajímalo mě, jak to vnímají žáci. Zeptala jsem se na to p. uč. B. Tiché, která učí na ZŠ Londýnská a má s tímto prostředím zkušenost v praxi. K první úloze, ve které jsou i „úlohy na sčítání“ (učebnice pro 1. ročník, 2. díl, s. 19) mi napsala:

„Měla jsem 16 dětí a jen 2 to začaly psát rovnou. Ale pak to stejně spojily čárou, protože to bylo v zadání.

Tak třem čtvrtinám to jde bez potíží, zbytek se s tím trochu pere, ale zvládne to.“

Jelikož jsem se na to ptala jen jedné paní učitelky, nemůžu udělat žádný závěr, ale dovolím si vyslovit domněnku, že žákům spojování čísel nevadí, vyhovuje jim.

Výše zmiňovaná paní učitelka mi také říkala, že pro žáky, kteří mají problém s určováním barev, je zelená a modrá barva těžko rozlišitelná. Myslím, že o tomto se zmiňovala i jedna moje spolužačka z VŠ na homogenní variantě. (To bylo o zelené a červené – jsou asi 4 procenta barvoslepých lidí, kteří tyto dvě barvy nerozlišují.)
Toto sdělení mi přišlo zajímavé, ale více jsem se jím nezabývala.

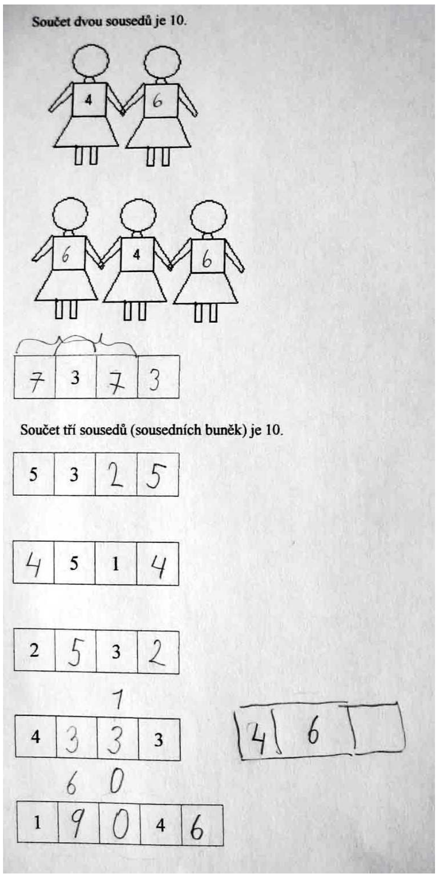
8. Experimenty

8.1 Experimenty z prostředí „Sousedé“

8.1.1 První experiment z prostředí „Sousedé“

První „experiment“ v prostředí „Sousedé“ jsem prováděla s žákyní druhé třídy. Budu ji nazývat Katka. Experiment se odehrával v bytě babičky žákyně a nikdo další kromě nás dvou nebyl přítomen a nijak neovlivňoval jeho průběh. Nahrávala jsem jej na diktafon a později jsem zvukový záznam, který nebyl příliš kvalitní, zaznamenala do písemné podoby. S písemným přepisem bylo při analýze jednodušší pracovat.

Předem jsem si připravila pracovní list. Jeho ukázka i s řešením žákyně je uvedena na obrázku.



Katka se s úlohami z prostředí „Sousedé“ setkala poprvé. Nepoužila jsem žádná přípravná cvičení na pochopení spojení „každá dvě či tři sousední políčka“. Se kterými čísly má počítat jsem jí, když nevěděla, ukazovala.

Mým cílem bylo zjistit, jakým způsobem bude řešit úlohy v tomto prostředí a zda přijde na to, že poslední dvě úlohy nemají řešení.

Katka měla problém pochopit, s jakými čísly počítá. Zadání „Součet tří sousedů je 10“ jí kvůli absenci přípravných cvičení příliš nenapověděl. Po té, co jsem jí vysvětlila, se kterými políčky s čísly a prázdnými políčky počítá, dokázala úlohu vyřešit. Na to, že poslední dvě úlohy nemají řešení, nepřišla. Snažila jsem se, aby objevila „pravidlo čtveřice“. Navedla jsem ji, aby pozorovala první a poslední číslo ve vyřešených úlohách. Má pomoc v objevování byla tak trošku násilná. Vlastně jsem jí to prozradila. V písemném přepise rozhovoru je to taktéž patrné.

Po té, co jsem jí otevřeně přiznala, že předposlední úloha nemá řešení, mě překvapilo její sdělení, že se s žádnou úlohou, která by neměla řešení, nikdy nesetkala.

Katka při výpočtech používala prsty a při pamětném počítání byla nejistá. Po odpovědi na mě vždy pohlédla a očekávala, zda jí řešení schválím. *Myslím, že pokud by počítala tzv. „sloupečky“, prsty by nepotřebovala.* Tuto domněnku jsem si neověřila.

Teprve při přepisu rozhovoru jsem zjistila, že jsem Kartce nedávala velký prostor na přemýšlení, stále jsem něco říkala, na něco se ptala. Katka pouze odpovídala na mé otázky a jen občas se na něco zeptala.

Nyní vím, že jako experimentátor jsem udělala chybu. Nezajistila jsem, abych pronikla do myšlení žákyně, ale spíše jsem ji vedla tak, aby odpověděla to, co očekávám. Když jsem si uvědomila svou chybu, rozhodla jsem se další experiment v prostředí sousedé provést jinak. K dalším experimentům jsem si připravila pracovní listy s úlohami a k jednotlivým úlohám také arch s otázkami. Řešitelé počítali úlohy sami, otázky nenapomáhali k objevení řešení.

Záznam rozhovoru

Da: „Katko, tady jsou takové postavičky, takoví sousedé. *(Ukazuji na postavičky na papíře.)* A tvým úkolem je doplnit do nich čísla tak, aby součet dvou sousedů byl 10. …
Když tady máš 4 *(ukazuji)*, tak co musíš doplnit sem *(ukazuji na druhou postavičku)*, aby byl součet deset?“

K: **„**Šest?“

Da: **„**Ano. Super.“

(K. zapisuje)

A tady *(Ukazuji na druhé sousedy.)* budeš dělat to samé. Akorát teď jsou tady ti sousedi tři. A tvým úkolem zase bude doplnit čísla tak, aby v těchto dvou sousedech *(Ukazuji.)* byl součet deset a v těchto taky. *(Ukazuji.)*
Tak co doplníš do těch rámečků?“

K: **„**Šest? Taky.“

Da: *(Kývám.)*
(K. píše 6.)
…
„Tak to je správně. V těchto *(Ukazuji na první dva sousedy.)* je součet 10. A teď ještě, aby byl součet 10 v těch druhých.“
K: „Taky šest.“
Da: „Ano, správně.“
(K. píše.)
„Tady *(Ukazuji na pás rámečků/čtverečků.)* už mě nebavilo kreslit panáčky, a tak jsem nakreslila jen rámečky. A teď zase potřebuji, aby v těchto dvou, v těchto dvou a v těchto dvou *(Vždy ukazuji.)* sousedech byl součet deset.“
K: *(Nepochopila.)* „A když tady v tom bude to číslo od tohohle tady, tak tady v tom bude jaký to?“ *(Bohužel nevím, kam ukazovala.)*
Da: „Je potřeba, aby čísla v prvním a ve druhém čtverečku, tady, *(Ukazuji.)* daly součet deset. Pak zase od té trojky, tyhle dva *(Ukazuji.)*, daly součet deset. A pak v těchto, aby byl součet deset *(Ukazuji.).*
…
K: „Pět.“
…
Da: „Ještě jednou. Potřebuji, aby tyhle dva dávaly dohromady deset *(Píši složenou závorku na první dva čtverečky.)* a tyhle dávaly dohromady deset *(Píši složenou závorku nad druhý a třetí čtvereček.)* a *(nedořeknu).“*
K: „Sedm?“
Da: *(Kývám.)* „Hm.“
…
„A teď zase, aby tyhle dva daly dohromady deset.“ *(Ukazuji na druhý a třetí čtvereček.)*
K: „Taky sedum.“
Da: „Ano.“
…
„A teď ještě, aby poslední dva daly dohromady deset.“
K: „Tři.“
Da: „Správně.“
…
„Teď byli ti sousedi dva. V těch dalších, co budeš řešit, tak budou tři, tři čtverečky. A ty mají dát součet deset. Takže tyhle ty tři, a pak tyhle tři. *(Ukazuji.)*
K: „Dva:“
Da: „Proč dva?“
K: „Protože pět a ještě tři *(Ukazuje si na prstech.)*
…
Da: „To je kolik?“
K: „Osm.“
Da: *(Souhlasně kývám.)*
K: „A pak už jenom dva.“
Da: „Správně. Super. A teď, aby i ty další tři dávali deset.“
K: „Pět.“
Da: „Ty jo, ty jsi šikovný počtář.“
…
„V úloze pod tím je to samé. Tyhle tři mají dávat deset a tyhle tři taky.“ *(Ukazuji.)*
K: „Čtyři.“
Da: „Hm. A proč čtyři. Odůvodníš mi to?“
K: „Protože pět a jedna je šest *(Ukazuje si na prstech.)* a už jenom čtyři.“
Da: „Správně.“
K: „A tady taky čtyři.“ *(Zapisuje.)*
…
Da: „A v tom dalším je to úplně stejné.“
K: „Tady ty tři a tady ty tři.“ *(Ukazuje. Ujišťuje se.)*
Da: „Ano.“
K: „Pět.“ *(Před tím si ukázala na prstech 2 a 3.)*

Da: *(Kývám.)*
K: „Dva." *(Ukazovala si také na prstech.)*
Da: „Správně."
…
„Zase je to stejné."
K: „ Tři?" *(Ptá se na doplnění druhého čtverečku, ale dovnitř číslo nepíše.)*
Da: „Tak to zkus. Napiš si to tam a uvidíme, jestli to vyjde. *(Píše.)*
…
A co bude v tom dalším, aby ty tři dávaly dohromady deset?"
…
K: „Tři?"
Da: *(Kývám.)* „A vychází to i vedle, v dalších třech sousedech?"
…
K: „Ne."
Da: „Tak to asi nebude správně?"
K: „Čtyři?"*(Dívá se na mě, zda souhlasím.)*
Da: *(Nedávám nic najevo.)* **„**Tak si to napiš někam pod to nebo vedle a zkus to."
K: (*Neví, kam si má poznačit.)* „Pod tenhle rámeček?
Da: *(Nereaguji, zamyslela jsem se.)*
…(K. přemýšlí.)
K: „Šest?"
Da: „Tak si to někam napiš. *(K. píše 6 pod druhý čtvereček.)* Tak. A zkus to.
…
Když bude tady šest *(Ukazuji.)*, tak co musí být v tom dalším?"
K: „Taky šest." *(Nic nepíše.)*
Da: „Kdybys sem dal šestku *(Ukazuji na napsanou šestku.)*, tak by to bylo, čtyři a šest je…?"
K: *(Ukazuje si na prstech.)* **„**Deset."
Da: „Ano. A pak si říkala, že tady by měl být taky šestka *(Ukazuji na třetí čtvereček.)* a to už by bylo ...?
K: „Šestnáct."
Da: „Tak to není správně. … Jak to teda bude?"
K: „Tady bude šestka." *(Ukazuje na druhý čtvereček.)*
Da: „Tu už tam máš napsanou. A co bude v tom dalším?
…
Ty jsi říkala …. Čtyřku tu máš. Tady, že dáš šestku. *(Ukazuji.)*
K: „Jedna."
Da: „Čtyři a šest je kolik? *(Ukazuje na prstech.)* Před chvilkou jsi mi to říkala."
K: „Deset."
Da: ***(Kývám.)*** **„**A potřebujeme, aby součet těch tří čtverečků byl deset. Tak co doplníme do třetího? … Když nám ty dva dávají dohromady deset?"
…
K: „Nula. Mám ji tam napsat?" *(Ukazuje na třetí čtvereček.)*
Da: „To je jedno. Buď to přepiš, a nebo to napiš pod to. *(Napsala pod rámečky.)*
…
A teď zkontroluj ty další tři. Vychází tam taky součet deset? Když tam bude šestka, nula a tři?"
…
K: *(Pomáhá si prsty.)***„**Ne."
Da: „Tak to asi taky nebude správně. Co s tím uděláme:"
…
K: „Nevím."
Da: „Zkus to ještě. Asi tam budou jiná čísla."
…
K: „Tady jednička." *(Ukazuje na třetí čtvereček.)*
Da: „Tak to napiš vedle nebo …. *(K. neví. Přemýšlí.)*
…
Zkus to. Jenom počítej. Když to bereš od konce. Takže máš tři. Kdybys tam dala jedničku, tak by to bylo kolik?"
K: „Čtyři."

Da: „A kolik by muselo být tady *(Ukazuji na druhý čtvereček.)*, aby byl součet deset?“
K: „Šest.“
Da: „Tak jo, napiš to tam, třeba nad to.
…*(K. je zmatená. Neví.)*
(Ukazuji.) „Tady jsi říkala, že by byla jednička *(K. píše nad třetí čtvereček jedničku.)* a tady jsme řekli, že by byla?“
K: „Šestka.“
Da: „Tu máme napsanou pod tím. … Ale teď to vezmi zase z druhé strany. Vychází to?
(Máme to dosti nepřehledně napsané, a tak K. neví, co počítá.)
Když je tam čtyři a šest, to je?“
K: „Deset.“
Da: „…a jedna?“
K: „Jedenáct.“
Da: „Tak to zase nevychází. Jak je to možný?
…
Nenapadá tě, čím by to mohlo být, že to nevychází?
…
K: „Ne.“
Da: „To nevadí.
…
Zkus vyřešit úlohu pod tím. V ní je tedy pět čtverečků a zase každé tři mají dávat dohromady deset“
…
K: „Devět.“
Da: „Ano, devět. A co by bylo v tom třetím?“
K: „Jedna.“
Da: „Pozor. Mají dávat dohromady deset. A ty jsi říkala jedna a devět … a to je dohromady kolik?“
K: „Deset.“
Da: „Hm. Takže tady muší být?“ *(Ukazuji na třetí rámeček.)*
K: „Nula?“
Da: „Ano, dobře. Ale teď pozor. Kolik to vychází v další trojici? Devět a nula je?“
K: „Deset.“
Da: „…a čtyři je …“
K: „Třináct.“
Da: „A čtyři je třináct. Takže to nevychází …, zase, …viď? To je nějaký zapeklitý.“ *(K. začíná být zklamaná, že to nevychází.)*
K., počkej, to vůbec nevadí, že nám to nevychází. Třeba na to přijdeme později. Pojď, vrátíme se k těm předcházejícím. Úplně zapomeň na ten poslední řádek. Jaká jsou tady čísla? *(Ukazuji na třetí úlohu od konce.)* Přečti je?“
K: „Dva, pět, tři, dva.“
Da: „Opakují se tam nějaká čísla?“
K: „Dvojky:“
Da: „A kde ty dvojky jsou?“
K: „Na začátku a na konci.“
Da: „Aha. A teď se podívej na ten další.“ *(Ukazuji na druhý od konce.)*
K: „Čtyři.“ *(Řekla potichu a dále si říká pro sebe.)*
Da: „Opakují se tam nějaká čísla?“
K: „Ne.“
Da: *(Odpověď nekomentuji.)* „A teď se ještě podívej na tyhle. *(Ukazuji na sousedy čtvrté od konce.)* Neopakují se tam nějaká čísla?“
K: „Čtyřky.“
Da: „Čtyřky. Aha. … A teď si přišla na prima věc. Tady jsi říkala, že se opakují čtyřky, *(Ukazuji na čtvrté čtverečky od konce.)* Tady, že se opakují dvojky. *(Ukazuji na třetí od konce.)* A co tady? *(Ukazuji na druhý od konce.)*
K: „Tady ne.“
Da: „Tam se to neopakuje, viď?“
…

A co myslíš, když tady se to opakuje, tady se to opakuje, tady se to opakuje. *(Ukazuji na předchozí úlohy.)* Nemyslíš, že proto, že tady se to neopakuji, nám to nejde doplnit?

K: „Nevím."

Da: „Tak se na to zkusíme ještě podívat, jestli na to přijdeme, proč nám to nejde. Když tady máme čtyřku, tak tyhle dva *(Ukazuji na druhé dva čtverečky.)* musí dát kolik, aby s tou čtyřkou to bylo deset."

K: „Deset?"

Da: „Ano, deset. Když tady je čtyřka, tak tyhle dva dohromady musí dávat kolik?

… *(K. nereaguje.)*

Když tyhle tři *(Ukazuji na první tři čtverečky.)* mají dávat dohromady deset a čtyřku už tam máme. Tak kolik tyhle dva musí dávat dohromady.

K: „Tři." *(Kouká na to, co tam napsala.)*

Da: „Jeden má tři …

K: „Druhej …"

…

Da: „Nakreslím to jinak. Tady to máš takhle s těmi trojkami. *(Ukazuji na předtištěné. K. kývá.)* Kdybych to nakreslila takhle *(Kreslím obrázek vedle.)*, tak kolik musí dát tenhle velký rámeček, když v prvním je čtyřka? Prosím, napiš jí tam. *(K. píše.)* …Čtyřka. A kolik musí být v tom velkém, aby …"

K: „Šest."

Da: „Ano. Tak ji tam napiš."

K: „Tři a tři."

Da: „A teď…"

K: „Mám tam napsat šest?"

Da: „Ano, napiš ji tam. *(Píše šestku do rámečku, který jsem nakreslila.)* No, ale teď tady máme trojku *(Ukazuji na trojku v předtištěném rámečku.)* a ta by s tou šestkou *(Ukazuji na šestku v nakreslených sousedech.)* měla dávat dohromady taky deset."

K: *(Ukazuje na prstech tři a šest.)* „To nejde."

Da: „Aha. A co by muselo být v tom velkém rámečku, aby to dávalo s trojkou deset."

K: *(Ukazuje si na prstech.)*"Sedm".

Da: „Ano." *(Teď už jsem čekala, že mi K. řekne, proč to nevychází, ale K. neříkala nic.)* „Proč nám to teda nejde vypočítat?

K: „Nevím." *(Na Katce bylo vidět, že je unavená.)*

Da: „Prozradím ti to tajemství. Tahle úloha nemá řešení. Setkala ses někdy s úlohou, která by neměla řešení?"

K: „Ne."

Da: „Takže všechny úlohy, které jsi zatím počítala, měly řešení?"

K: „Jo, všechny jsem vypočetla."

Da: „Tak vidíš. Ukázala jsem ti něco nového. Že jsou i úlohy, které vyřešit nejdou. A nechceš se ještě jednou podívat na tu poslední úlohu?" *(Doufala jsem, že v ní mi K. zdůvodní, proč to nejde.)*

K: (Kývá.)

Da: „Tak se podívej, co jsi tam doplnila. Jedna, devět a nula je?"

K: „Deset."

Da: „Takže tady nám to podmínku splňuje. A co ty další tři?"

K: „Tam ne."

Da: „A ty poslední tři.?"

K: *(Ukazuje na prstec*h.) „Ty jsou deset."

Da: „Takže nám nevychází jen ty druhý tři sousedi. Jak to? Čím to je?

(Mám pocit, že už K. nepřemýšlí. Je unavená. Již počítáme přes 20 minut. Ukončuji to.)

Už toho necháme. Je prima, že nám vychází alespoň ti první tři sousedi a poslední tři sousedi. A tady v těch třech *(Ukazuji na druhý, třetí a čtvrtý rámeček.)* to musí být nějak jinak. Ale možná, že je to úplně stejný případ jako ta úloha před tím a nemá řešení. Ale vždycky, když si budeš myslet, že úloha nemá řešení, tak budeš muset přijít na to, proč řešení nemá.

Katko, udělala jsi velký kus práce a moc jsi mi pomohla, protože tohle je takový můj domácí úkol. Děkuju. Jsi šikula.

(K. se ptala, do jaké školy ještě chodím, že píšu úkoly.)

8.1.2 Experiment se studenty Pedagogické fakulty UK

Další experimenty v prostředí „Sousedé“ jsem prováděla v rámci předmětů homogenní varianty z matematiky na ZŠ Jindřišská. Vytvořila jsem pracovní list s úlohami a arch s otázkami k úlohám pro své spolužačky ***(viz příloha 2),*** studentky pedagogické fakulty. Chtěla jsem zjistit: zda úlohy z tohoto prostředí správně vyřeší; nespokojí se s jedním řešením u úloh, které mají více řešení; objeví úlohy, které nemají řešení a budou schopné to zdůvodnit; odhadnou, jak by si s některými úlohami poradili žáci prvního stupně ZŠ, a zhodnotí obtížnost určitých úloh pro zmiňované žáky.

Pracovní list s úlohami z prostředí „Sousedé“ jsem připravila i pro žáky 2. ročníku, kteří navštěvovali kroužek matematiky, jež jsme v rámci homogenní varianty vedli. I k tomuto pracovnímu listu náležel arch s otázkami ***(viz příloha 1)***. V tomto případě jej však nevyplňovali řešitelé úloh (žáci), ale studentky, které žáky při řešení pozorovali a když bylo potřeba, tak jim pomohly. K materiálům z matematického kroužku se dostanu později, ale v následujících odstavcích týkajících se vyhodnocení získaných materiálů od studentek se o nich také zmíním.

Průběh experimentu a vyhodnocení pracovního listu a dotazníků pro studentky pedagogické fakulty

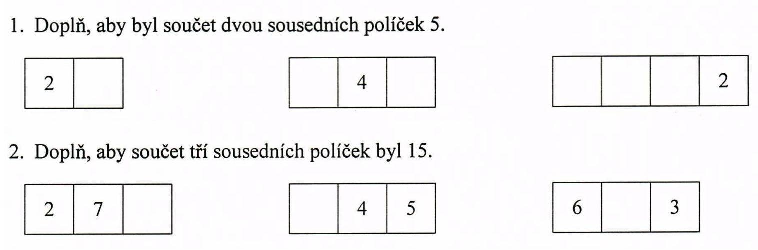
V následujících odstavcích popíši, jak experiment probíhal. Do textu budu vkládat také své interpretace situací, komentáře či vysvětlení. Tyto vstupy odliším graficky, budu je psát kurzívou.

Patnáct studentek řešilo úlohy z pracovního listu samostatně. K formulaci zadání úloh a ke způsobu řešení nedostaly žádné instrukce. Prostředí „Sousedů“ jim mohlo být představeno na některém z předmětů zajišťovaném katedrou Matematiky a didaktiky matematiky, ale seznámení bylo jen okrajové.

Dostaly pouze tyto instrukce:

1) Vyřeš cvičení z pracovního listu.
2) Podívej se na arch s otázkami. Pokud ke cvičení nějaké budou, odpověz na ně. Na další otázky se nedívej a vrať se zpět k řešení následujícího cvičení.

Při doplňování prvních dvou cvičení,


1. Doplň, aby byl součet dvou sousedních políček 5.

2				4						2

2. Doplň, aby součet tří sousedních políček byl 15.

2	7				4	5		6		3

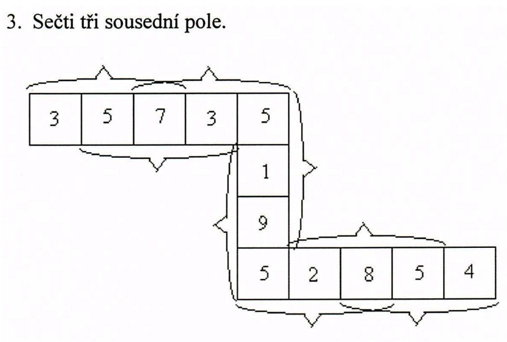
neměly téměř žádné problémy. Chápaly slovní spojení „součet dvou (tří) sousedních polí je známé číslo“. Pouze tři studentky ve druhé nebo třetí úloze ze cvičení 1 čísla opravovala. Trvalo jim déle, než si uvědomily, která dvě čísla ve čtverečcích mají dávat požadovaný součet. K těmto dvěma cvičením nebyly žádné otázky.

V dalších úlohám pro mě už nebylo důležité jen řešení, ale i komentáře, které byly zapsané v archu s otázkami, v dotazníku.

Pracovní list a dotazník od každé studentky jsem označila vždy stejným číslem. Rozhodla jsem se, že odpovědi, které spolužáci napsali, shrnu do přehledné tabulky. Nejdříve jsem vytvořila pro každou studentku samostatnou tabulku, do níž jsem zaznamenávala její odpovědi k jednotlivým cvičením. Protože bylo však složité z těchto záznamů vyhodnotit odpovědi k jednotlivým cvičením, vytvořila jsem tabulky ke každému cvičení, odpovědi jednotlivých studentek jsem uváděla pod jejich číslem.

V následujících odstavcích objasním, jak vypadala další cvičení, na jaké otázky studentky odpovídaly, a pokusím se z nich vytvořit závěry, které z toho plynou.

<u>Cvičení 3</u>



- Doplnila jsi u posledních sousedů automaticky 15?
  ANO NE
- Jak myslíš, že by úlohu řešily děti?

U posledních sousedů doplnily automaticky číslo 15 jen dvě studentky. Potom, co jim vyšel několikrát stejný součet, doplňovali další součty již bez počítání. Ostatní poctivě sčítaly a doplnily součet 17. K této otázce tabulku se cvičením pro její jasnost nepřikládám.

Odpovědi studentek na druhou otázku je možno si přečíst v tabulce. Jde o přesný přepis toho, co napsaly.

1. Automaticky by doplnily všude 15, když by jim to párkrát vyšlo.
2. Myslely by si, že mám v zadání chybu.
3. mechanicky by to celé počítaly

4. Napsaly by 15 – automaticky
5. kdo by si to chtěl zjednodušit a myslel by, že je to všechno stejné, by 15 napsal; kdo OPRAVDU počítá ne
6. Chytré děti by napsaly 15 a někteří si to pak opravily. Slabší by počítaly buď až do konce, nebo by doplnily 15 bez opravy.
7. počítaly by každý příklad zvlášť
8. Myslím, že ani ony by to neriskly. Tedy že by to raději poctivě přepočítaly.
9. Ze začátku by každou trojici spočítal, když by př. u třetího zjistili, že je součet pořád 15, automaticky by doplňovali dál.
10. asi by to tam většina dala rovnou (15)
11. myslím, že by to normálně počítali
12. Asi by doplnily automaticky 15 a nepřepočítávaly by to, ale také asi dle zkušeností.
13. Myslím, že většina by doplnila automaticky 15.
14. stejně tak, lenost vítězí, hloupější děti možná ne.
15. Spočítaly by asi každou úlohu (trojici) zvlášť.

Studentky 1 – 13 počítaly poctivě součty všech trojic. Je zajímavé, že šest z nich předpokládají, že žáci by tak neučinili. Pět studentek odhaduje, že by si žáci počínali jako ony, a poctivě počítali až do konce. Dvě studentky si myslely, že ten, kdo by si chtěl úlohu zjednodušit, by napsal 15, ostatní by poctivě počítali.

Studentky 14 a 15 doplnily součet poslední trojice chybně. Z tabulky je patrné, že jedna z nich předpokládá, že by si žáci počínali stejně. Druhá si myslí, že by žáci spočítali všechny „sousedy“.

Z patnácti studentek si skoro polovina myslí, že by žáci doplnili poslední součet chybně. Jejich domněnka není správná. Žáci dostali řešit stejnou úlohu a všichni ji poctivě počítali (více v následující kapitole).

<u>Cvičení 4</u>

4. Doplň, aby součet tří sousedních políček byl 8.

4	1		

	5	2	

		4	3

3		1	

	2		5

2			2

- Jak myslíš, že by byly tyto úlohy obtížné pro děti? – Přiřaď k úlohám čísla podle obtížnosti (1…nejlehčí, vyšší číslo… těžší). Pokud si ti zdají úlohy stejně těžké, přiřaď jim stejné číslo.

- Spokojila ses u **poslední úlohy** s jedním řešením?
  ANO NE

- Pokud ne, hledala jsi další řešení hned (při prvním zabývání se úlohou)?

- Kolik řešení jsi našla?

- Jak myslíš, že by si s touto (poslední) úlohou poradily děti?

Odpovědi na otázku o obtížnosti úloh pro žáky byly značně odlišné. Odpověděly na ni všechny studentky kromě jedné.

Následně jsem se rozhodla vypočítat aritmetický průměr čísel, která byla úlohám přidělena, a vytvořit jednu „známku“ (zaokrouhluji na dvě desetinná místa). Úlohy ke „známkám“ náleží dle polohy v zadání cvičení.

19 : 14 = 1, 36	21 : 14 = 1, 5	31 : 14 = 2,21
40 : 14 = 2, 86	44 : 14 = 3, 14	61 : 14 = 4, 36

Při tvorbě čtvrtého cvičení jsem se domnívala, že obtížnost úloh stupňuji. Sama bych ohodnotila úlohy v prvním řádku známkami 1, 2, 3 a ve druhém řádků 4, 5, 6.

Průměrné „známky“ v tabulce se shodují s mým názorem. Kdybych však zkoumala podrobněji získané odpovědi, domnívám se, že ne všechny studenty by byly stejného názoru.

Shodneme se však na jednom: první úloha připadala všem nejlehčí a poslední nejtěžší. *Dovolím si tvrdit, že je to pravdivý závěr.*

S jedním řešením této („poslední“) úlohy $\boxed{2}\boxed{}\boxed{}\boxed{2}$ se spokojilo 13 studentek, z nich dvě však napsaly, že věděly, že má úloha více řešení. Jedna studentka došla k závěru, že úloha nemá řešení. Dvě studentky se nespokojily s jedním řešením a už při prvním setkání s úlohou hledaly další. Dvě studentky se rozhodly k hledání dalších řešení po přečtení této otázky: Spokojila ses u poslední úlohy s jedním řešením?

Podle mě má úloha sedm řešení v množině přirozených čísel. Do prázdných políček můžeme doplnit dvojice těchto čísel, jejich součet je šest: (0, 6), (6, 0), (5, 1), (1, 5), (4, 2), (2, 4), (3, 3).

Studentka 2 se ztotožnila s mým názorem a našla všech sedm řešení. Studentka 3 našla dvě řešení (5, 1), (1, 5). Studentka 4 našla čtyři řešení, pořadí nestejných čísel neměnila. Studentka 5 našla pět řešení. Vynechala kombinaci čísel (6, 0), (0, 6).

Studentka 13, která předem věděla, že úloha má více řešení, napsala: „Nehledala jsem, ale hned u promýšlení jsem věděla, že tam může být více dvojic, má tři řešení (nebo 5, jak se to vezme).“ *Mohu se jen domnívat, že studentka měla na mysli změnu pořadí čísel. Pokud by tomu tak bylo, došla k chybnému závěru, že má úloha tři nebo pět řešení.*

Na otázku: Jak myslíš, že by si s touto (poslední) úlohou poradily děti?, odpovídaly studentky následovně. Jde o přesný přepis jejich záznamů.

1. Zkoušeli by různá čísla nebo by je to zaskočilo a nechali být, že neví.
2. Hledaly by jen jedno řešení.
3. Mechanicky počítaly podle řady *pozn. Myslím, že jde o odpověď na poslední, desátou úlohu.*
4. Myslím, že většině by 1 řešení stačilo.
5. Udělaly by 1 řešení a šly dál
6. S doplněním čísel by si nebyl problém. Hůře by bylo s vymýšlením 30. a 40. čísla. *pozn. Myslím, že jde o odpověď na poslední, desátou úlohu.*
7. napsali by pouze jedno řešení – pokus X omyl
8. Pokud by měly více úloh, pravděpodobně by se spokojily jen s jedním řešením.
9. našli by jen jedno řešení
10. no, asi stejně jako já (nic moc ☺) pozn. Tato studentka napsala, že úloha nemá řešení.
11. no, pokud by nevěděli, že to má více řešení, našli by pokusem a omylem jen 1
12. Po prvním řešení by skončily.
13. -
14. metoda pokus – omyl, když to nevyjde celé znova. Když ano, jiné řešení hledat nebudou.
15. Stejně jako já. Nehledaly by jiné řešení.

Z tabulky je patrné, že na zmíněnou otázku odpovídalo 14 studentek. Dvě z nich však formulaci „s touto (poslední) úlohou“ pochopily tak, že se otázka týká desátého cvičení. Dvanáct respondentek nejčastěji odpovědělo, a to devětkrát, že by žáci vypočítali jedno řešení a pokračovali k další úloze. Někteří žáci u úlohy s více řešeními se nespokojili s jedním a hledali další řešení. Nemohu napsat, že studentky měli či neměli pravdu. Záleží na člověku. U úloh s více řešeními se některé studentky nespokojily s jedním řešením a stejně tak je to u žáků, někteří hledali další řešení, někteří nikoliv.

Cvičeni 5

5. Doplň, aby byl součet tří sousedních políček 11.

2		7				

			5	2		

8			8			

7		3				8

7							2

- Kolik jsi u **třetí úlohy** našla řešení?
- Považuješ za jiné řešení, když čísla v políčkách pouze přehodíš?
  ANO NE
- Došlo ti hned, že **čtvrtá úloha** nemá řešení?
  ANO NE
- Pokud ne, jak dlouho ses ji pokoušela řešit?
- Odhadni, jak dlouho ses zabývala **pátou úlohou**?

První a druhou úlohu ze cvičení pět vyřešily všechny studentky. Úlohy nejsou obtížené, protože jsou známá dvě čísla z jedné trojice. Třetí číslo se pouze dopočítá.

Třetí úloha má více řešení. *Myslela jsem si, že když se řešitelé v předcházejícím cvičení dozvědí o úloze s více řešeními, v dalších úlohách o této skutečnosti budou více přemýšlet a případně se nespokojí s jedním řešením.*

Můj předpoklad se nepotvrdil. Jedenáct studentek našlo pouze jedno řešení. Čtyři studentky hledaly další možnosti. Tři z nich objevovaly další řešení již u úlohy z předcházejícího cvičení.

Třetí úloha má v množině přirozených čísel čtyři řešení. Všechny našla studentka 2. Studentka 4 našla dvě řešení, protože nepovažuje za různá řešení, když se čísla ve čtverečcích pouze přehodí. Studentka 5 našla tři řešení. U jedné z číselných možností nepřehodila pořadí. Studentka 6 našla pouze jedno správné řešení. Další řešení, které uváděla: (1, 1), (2, 0), (3, - 1), nedávají s číslem osm součet jedenáct. Byla však první, která uvažovala o řešení v množině přirozených čísel.

Jak jsem se již zmínila, já považuji za jiná řešení i případ, kdy se doplňovaná čísla ve čtverečcích přehodí. Sedm studentek má stejný názor. Osm studentek záměnu pořadí jako další řešení neuznává.

Čtvrtá úloha v tomto cvičení nemá řešení, není dodrženo „pravidlo čtveřice".

Domnívala jsem se, že studentky, které objevily zmiňované pravidlo, nebudou do úlohy vyplňovat všechna čísla a napíší, že nemá řešení.

Na otázku: Došlo ti hned, že čtvrtá úloha nemá řešení?, odpovědělo 10 studentek „ano" a pět „ne".

Ze zmiňovaných deseti studentek jen tři nedoplnily všechna čísla. Zbývajících sedm doplnilo všechna čísla. Šest z nich si uvědomilo, že úloha nemá řešení kvůli osmičce v posledním čtverečku. Je to patrné z toho, že doplňovaná čísla se opakují (7, 1, 3, 7, 1. 3) a zároveň je poznamenáno, že úloha nevychází kvůli poslednímu číslu v úloze.

Jedna studentka nedoplňovala stejná čísla a označila čtvereček před osmičkou křížkem.

Dovolím si tvrdit, že tato studentka zatím neobjevila „pravidlo čtveřice" a rozhodla se, že úloha nemá řešení jen z toho důvodu, že jí nevyházel součet.

Ze studentek, které odpověděly na výše zmiňovanou otázku „ne", doplňovaly tři z nich opakující se čísla. *Myslím, že si již začaly uvědomovat „pravidlo čtveřice"*. Dvě z nich doplnily i jiná čísla. *Domnívám se, že také ony napsaly, že úloha nemá řešení proto, že jim nevycházel součet.*

„Pravidlo čtveřice" podle mě zatím objevilo 12 studentek. Zda je tomu opravdu tak, se přesvědčím nejenom v poslední úloze z pátého cvičení, ale i v dalších úlohách.

Odpovědi na otázku týkající se doby, kterou studentky strávili nad čtvrtou úlohu, se mi nezdály důležité. Proto je zde nezmiňuji.

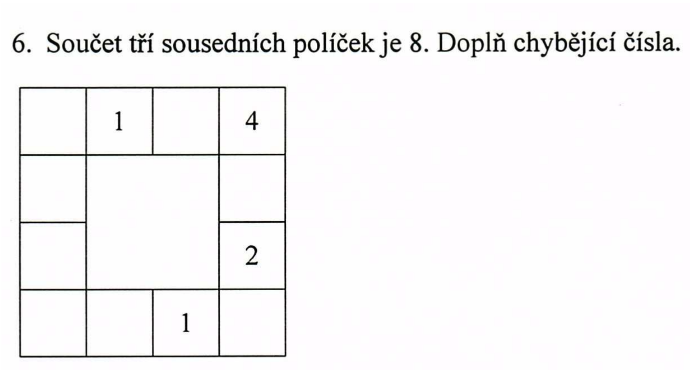
Teď si uvědomuji, že by se více hodila otázka: Vysvětli, proč úloha nemá řešení?

Otázku: „Odhadni, jak dlouho ses zabývala **pátou úlohou**?“, jsem studentkám položila, protože odpovědi na ni mi mohou ukázat, zda po vyřešení 5 cvičení studentky již objevili „pravidlo čtveřice“. V případě, kdy doba řešení úlohy je krátký časový úsek, domnívám se, že zmiňované pravidlo bylo objeveno.

Domnívám se, že na stále se opakující čísla přišlo 12 studentek. Jejich odpovědi byly následující: 1 min; 20 s; 1 min; 10 s; stejně jako předchozí; chvilku, odhadla jsem hned, kam zapsat 2 z konce (jak se opakuje); cca 1 min; nejdřív jsem chtěla napsat jakákoli čísla, ale pak jsem si všimla 2, a hned jsem to opravila (napsala jsem špatně jen 2 čísla za 7); 2 min; 10 s; chvilku, je stejná jako první; minutu.

Tři studentky podle mě pravidlo stále ještě neobjevily. Jejich odpovědi byly: 5 minut; cca 5 - 10 min, 4 min.

Cvičení 6



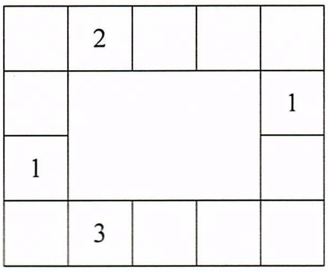
K této úloze jsem nepoložila žádnou otázku, ale při prohlížení studentských řešení jsem si uvědomila, že by bylo zajímavé shrnout, kolik kdo našel řešení a jestli respondenti také uvažovali „sousedy přes roh“. Svoje poznámky jsem shrnula do tabulky níže. Podobné poznámky jsou zvýrazněny stejnou barvou.

1. pouze jedno řešení (2 2), neuvažování sousedních políček přes „rohy“
2. pouze jedno řešení (2 2), ve kterém je opravená chyba, neuvažovaní sousedních políček přes „rohy“
3. pouze jedno řešení (3 1), ve kterém je chyba, pokud beru číslo, které není v závorce *(Myslím, že řešitel uvažoval i sousední políčka přes „rohy“)*
4. pouze jedno řešení (3 1), neuvažování sousedních políček přes „rohy“
5. dvě řešení (1 3, 3 1), při řešení neuvažování sousedních políček přes „rohy“, ale je o tom zmínka („tak NE “)
6. jedno správné řešení (3 1), ale přesto poznámka „nejde“ *(Myslím, že řešitel uvažoval sousední políčka přes „rohy“, a proto napsal zmiňovanou poznámku.)*

7. pouze jedno řešení (3 1), neuvažování sousedních políček přes „rohy“
8. jedno správné řešení (2 2), ale u úlohy je škrtnutý otazník a v políčkách škrtání *(Myslím, že řešitel uvažoval zpočátku i sousední políčka přes „rohy“, ale když nevycházelo, tak vyřešil bez této podmínky, která ovšem není nikde napsaná.)*
9. nejdříve řešení úlohy i se sousedními políčky přes „rohy“ → závěr, že to nejde neuvažování sousedních políček přes „rohy“ → jedno řešení (2 2) Studenka píše: „Nevěděla jsem, že si nepočítá přes roh.“
10. pouze jedno řešení (3 1), neuvažování sousedních políček přes „rohy“
11. pouze jedno řešení (3 1), neuvažování sousedních políček přes „rohy“, zvýraznění trojic čísel, která dávají požadovaný součet
12. uvažování i sousedních políček přes „rohy“ → Studenka napsala:„Chyba! Už jsem opravila Nelze.“ Pokud by neuvažovala „rohy“, tak jedno správně řešení (2 2)
13. uvažování i sousedních políček přes „rohy“ → Studenka napsala:„nemá řešení → počítala jsem přes roh“ pokud by neuvažovala „rohy“, tak jedno správně řešení (2 2)
14. uvažování sousedních políček přes „rohy“, není správné řešení ani poznámka, že úloha nemá řešení
15. pouze jedno řešení (3 1), neuvažování sousedních políček přes „rohy“

Cvičení 7

7. Doplň tak, aby byl součet tří sousedních políček 6. *(Úloha od profesora Hejného.)*



- Přišla jsi na to, že úloha nemá řešení?
  ANO NE
- Odhadni, jak dlouho ses úlohou zabývala?
- Které číslo by se muselo změnit, aby úloha řešení měla?

Na první otázku odpověděly všechny studentky „ano“.

Z odpovědí na druhou otázku opět zjišťuji, kdo již má opravdu zažité „pravidlo čtveřice“. Osm studentek napsalo, že se úlohou zabývaly kratší dobu než 4 minuty. *U nich předpokládám, že zmiňované pravidlo mají opravdu zažité.* Tyto studenky vyřešily za krátký čas i pátou úlohu ve cvičení 5.

U studenky číslo pět jsem z odpovědi týkající se pátého cvičení předpokládala, že objevila „pravidlo čtveřice“. Z odpovědi k tomuto cvičení musím svůj předpoklad změnit. Nemá zažité toto pravidlo. Její odpověď byla: „Déle než předchozí, zkoušela jsem různé možnosti.“

Myslím, že u studentky číslo 6 naopak došlo k objevení pravidla. Úlohou se zabývala po kratší dobu než poslední úlohou v pátém cvičení. Patří do skupiny osmi výše zmiňovaných studentek.

U studenky číslo 7 jsem se také domnívala, že pravidlo objevila. V pátém cvičení odpovídala: „Chvilku, odhadla jsem hned, kam zapsat 2 z konce (jak se opakuje).“ V tomto cvičení odpovídala: „Zkusila jsem dva pokusy.“ *Předpokládám, že když studentka stále „zkouší“, pravidlo nemá zažité.*

U studentky číslo 8 jsem také svůj předpoklad změnila. Myslela jsem, že má pravidlo zažité, protože se však touto úlohou zabývala „Dlouho … cca 6 – 7 min, myslím, že k objevení pravidla ještě nedošlo.

Studentka číslo 9 zkusila tři varianty s čísly 1, 2, 3. *Neobjevila „pravidlo čtveřice.“*

U studenky čísle 13 jsem se také domnívala, že pravidlo bylo objeveno. Z odpovědi v tomto cvičení: „Dlouho, nejdéle ze všech úloh. Zkoušela jsem, zda to nejde nějak zpřeházet, aby to vyšlo ☺.“, *svůj názor měním.*

U studenky číslo 15 předpokládám objevení pravidla.

U pátého cvičení jsem se domnívala, že „pravidlo čtveřice“ objevilo 12 studentek. Nyní si myslím, že pět z nich na pravidlo dosud nepřišlo. U dvou studentek si naopak myslím, že pravidlo bylo objeveno.

Zda studentky objevily „pravidlo čtveřice“, si mohu dále ověřit v odpovědích na třetí otázku: „Které číslo by se muselo změnit, aby úloha měla řešení.“ Pokud odpověděly tak, že by změnily číslo za správné, mají „pravidlo čtveřice“ skutečně zažité.

Na otázku odpovědělo správně sedm respondentek, tři respondentky by číslo změnily nesprávně a pět respondentek nevědělo, jak by úlohu změnily, aby měla řešení.

Z odpovědí na druhou otázku jsem předpokládala, že pravidlo objevilo devět studentek. Moje domněnka se však opět nepotvrdila a byla jsem tak nucena ji přehodnotit.. Po prostudování odpovědí si nyní myslím, že pravidlo zná šest studentek. U nich jsem objevení předpokládala již v předešlých úlohách. Tři studenky jej objevili. A u třech studentek (číslo 10, 11, 14) měním opět svůj názor, pravidlo ještě neobjevily.

Cvičení 8¨

8. Doplň, aby součet čtyř sousedních políček byl 20.

4		5	6												

					3	4	5								

		3											8		7

- Měla jsi problémy s řešením úloh?
  ANO NE

- Jak si postupovala při řešení **poslední úlohy**? (Postup napiš v tom případě, že není patrný z řešení.)

V této úloze dávají každá čtyři čísla daný součet. Zde platí „pravidlo pětice“. S řešením úloh neměly problémy všechny studentky kromě jedné.

Odpovědi na druhou otázku jsem shrnula do následující tabulky. U některých jsem dopsala do závorky svou poznámku.

1. „Začala jsem od konce 8 + 7 = 15 => do 20 zbývá 5, a to je 2 + 3 → 3 napíšu před 7, aby mi to vyšlo vepředu“
2. „1. číslo jsem doplnila do každého 4. políčka … Neustále jsem opakovala daná 4 čísla.“
3. - (pozn. znázornění čtveřic, 3 na 3. místě, doplnění, dopočítaní 2)
4. Odpočítala jsem si pozici „3“. Ob 3 políčka a dopočítala 2. Pak už jen dopsala.
5. „zprava doleva“ (Pozn. Řešitel zkusil obě varianty: mezi 8 a 7 trojku i dvojku, a tak přišel na řešení úlohy.)
6. „Řekla jsem si, že 3 musí být před 8 nebo mezi 8 a 7. A pak jsem obojí zkusila.“
7. „Doplnila jsem 3 tam, kde mají být (vždy 4.), poté jsem okolo nich napsala 7 a 8. A nakonec vypočítala a doplnila 2.“
8. „Zkusila jsem doplnit od konce nejdříve 3 a pak 2. Tedy 2 8 3 7. Psala jsem slabě, abych mohla v případě nezdaru pořadí obrátit.“
9. „Oddělovala jsem si 4 políčka a podle toho pak zapsala 3.“
10. „Napřed jsem si doplnila všude 7 a 8, potom jsem zjistila, kam patří 3 a doplnila, nakonec doplnila 2“
11. „Začala jsem na konci 8 – 7 → ve sloupci byla 3 a do 20 scházelo 2, tak jsem doplnila mezi 8 – 7 3 vedle 8 2 a pak to jen opisovala než jsem měla zaplněný celý řádek“.
12. „Napoprvé jsem tipla 3 (vzadu), pak už se to doplnilo a vyšlo ☺!“
13. „Napsala jsem si nejdříve 3 mezi 8 a 7, potom dopsala před 8 dvojku a pak dovyplnila celou řadu“.
14. „Odpočítala jsem si odzadu skupinky po čtyřech. Kolikátá v té čtveřici je „3“? – po čtyřech“.
15. „Nejdříve jsem doplnila trojku a dopočítala 2 (tu jsem napsala mezi 8 a 7). To

mi ale nevyšlo, tak jsme prohodila 2 a 3 a už to bylo dobrý.“

Každá studenka popsala svůj postup trochu jinak. *Myslím, že mohu říct, že každá studenka si uvědomuje, že čísla se v úlohách nějakým způsobem opakují. V tabulce vyznačím žlutě ty, u kterých se domnívám, že je „pravidle čtveřice“ (v tomto případě „pravidlo pětice“) objeveno.*

U studentek číslo 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 13, 15 jsem si myslela, že mají zažitá výše zmiňovaná pravidla. Z této úlohy se mi to potvrzuje u studentek 1, 2, 3, 4, 9, 13. Studentky 6, 8, 15 vědí, že se čísla opakují, ale dle popisu si nejsou jisté jak.

Podle toho, jak studentky popsaly svůj postup,se domnívám, že o pravidle ví nově ještě studenky číslo 7, 10, 11, 14.

Předpokládám, že po vyřešení úloh z osmého cvičení zná pravidlo 10 studentek.

<u>Cvičení 9</u>

9. Doplň, aby byl součet <u>tří sousedních</u> políček roven 14.

7		8													

- Byl tvůj závěr, že úloha nemá řešení?
  ANO NE

- Upřesnila jsi, v jakém oboru čísel nemá řešení?

Tato úloha nemá řešení v oboru přirozených čísle. Osm studentek se domnívá, že úloha nemá řešení (Obor čísel ovšem doplnila jen jedna studentka.). Zbývající studenkty našly řešení v oboru celých čísel.

Protože jsem předpokládala, že studentky se nebudou zamýšlet nad oborem čísel, ve kterých tato úloha nemá respektive má řešení, položila jsem tuto otázku: „Upřesnila jsi, v jakém oboru čísel nemá řešení?“

Odpovědi byly následující: 1. v oboru přir. čísel, 2. hned ne, 3. Přirozených, 4. Nemá řešení v oboru kladných čísel, 5. ANO – kladná, 6. Ne, 7. Ano, pokud nám doplňovat pouze kladná čísla, 8. Ne, 9. muselo by tam být -, protože 7 + 8 = 15, 10. ne, 11. v přirozených číslech, 12. Nemá řešení v Z+, 13. ne ☺, 14. ne, ale v N nemá, v Z má, 15. Ne

Sedm studentek o oboru čísel, ve kterém úloha nemá řešení, neuvažovalo. *Mohlo to být tím, že toto byla první úloha, která měla řešení v množině celých čísel. Ostatní úlohy se řešily v množině přirozených čísel.*

Cvičení 10

10. Součet tří sousedních políček je 9. Doplň chybějící čísla.

	1	5													

Které číslo by bylo ve třicátém políčku?

Měla by úloha řešení, kdyby v prvním poli bylo číslo 3 a ve čtyřicátém políčku bylo číslo 5?

- Pokud z tvého řešení není patrný postup, popiš jej.

- V které třídě myslíš, že by se tato úloha mohla zadat?

U tohoto cvičení nejdříve zmíním řešení úlohy a až poté napíši, jak si s úlohou poradily studentky. Řešení uvádím proto, že otázkami na čísla v *x- tém* políčku se tato úloha z prostředí „Sousedé“ posouvá jinam, rozvoj aritmetické triády je odsunut do pozadí.

Řešení úlohy

3	1	5	3	1	5	3	1	5	3	1	5	3	1	5	3

Číslo pět je ve čtverečcích číslo 3, 6, 9, …. Jsou to políčka s čísly, která jsou násobkem čísla tří. Další čísla jsou na poličkách, která jsou o jednu nebo o dvě větší než násobky tří.

Závěr:

číslo pět je ve čtverečcích … $3k$

číslo tři je ve čtverečcích … $3k + 1$

číslo jedna je ve čtverečcích … $3k + 2$

k je elementem množiny přirozených čísel

Ve třicátém čtverečku je číslo 5.

Kdyby ve čtyřicátém čtverečku bylo číslo 5, úloha by neměla řečení, jelikož ve čtyřicátém čtverečku je číslo 3 (3. 13 + 1).

V tabulce jsou shrnuty odpovědi, které se týkají zjišťování čísel na určitém políčku. Do závorek jsem opět uvedla své poznámky. Žlutě označené jsou odpovědi studentek, které došly ke správnému závěru.

1. „5 je na 15. místě => i na 30. 5 je na 3k místě ➝ 40 není násobek 3“
2. - (Pozn. Řešitel si vypsal, ve kterých políčkách je číslo 3 – 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28 (3); 29 (1), 30 (5) Úloha vyřešena jen z poloviny správně – první část dobře, druhá špatně.)
3. – (Pozn. Z řešení úlohy nejsem schopná vyčíst, jaký byl řešitelský postup. První část je dobře, druhá špatně.)
4. „3. políčko je „5“ a to je to samé jako 30. políčko“
5. „(a) určila jsem si, která čísla vždycky sedí na nějakém „hezkém“ násobku (b) 5 je na násobku 3, takže na 40. nebude (pak obr. = zk.)“
6. „Počítala jsem a ukazovala si 1. č. = 3, 2. č. = 1, 3 č. = 5 , 4. č. = zase trojka => mohla bych tedy začít od začátku = ukazovat si v tabulce čísla 3, 1, 5 a říkat si kolikátá budou v pořadí“
7. „30 : 4 = 7 zb. 2 ➝ 2. v pořadí => 1“
8. „Přiznávám, že jsem byla líná přemýšlet nad pravidelností a protože 30. místo je celkem blízko, zapsala jsem si posloupnost všech třiceti čísel.“
9. „Po řadě jsem si počítala desítky – když jsem došla na konec řady, tak jsem jen přeskočila 3, protože byla na začátku i na konci.“
10. „mechanicky doplněné 3 1 5“ (Pozn. Na druhou otázky byla nejdříve odpověď:“Jo, řada by byla potom 3 5 1.“ Je škrtnutá.)
11. „5 je na 3 místě ➝ 30 je násobek 3, takže na 30. místě bude 5 na 40 být nemůže, proto 5 bude na 39 místě“
12. „Doplnila jsem na začátek 3, pak už se to opakovalo.“ (Pozn. Myslím, že řešitel počítal políčka, až zjistil, jaké číslo v daném políčku je.)
13. „13. políčko je v hadu, takže jsem ho vyplnila podle předepsané řady 40. políčko = 10. políčko ➝ podle hada opět poznám 10 políčko“ (Pozn. Proč 13. políčko? Myslím, že jde jen o přepsání, protože ve 13. políčku je číslo 3 a řešitel na otázku odpovídá 5.)
14. „- 30 : 4 = 7 zbytek 2! => 1(2. v pořadí)“
15. „u první otázky jsem si to 13 políčko odpočítala“ (Pozn. Řešitel napsal: „➝ úloha by neměla řešení. 5 by musela být na 48. nebo 51. místě.“ Proč uvažuje tato čísla, když číslo 5 je i na 42. a 45. místě?)

Na otázku: „V které třídě myslíš, že by se tato úloha mohla zadat?“, studentky odpovídaly různě. Osm z nich by úlohu zařadilo do třetího ročníku ZŠ, pět studentek by ji předložilo žákům až ve čtvrtém ročníku, jedna dokonce až v ročníku šestém. Jedna ze studentek na otázku neodpověděla.

Uvádím několik zajímavých odpovědí:

č. 1.: „ve třetí, když se předtím už s tím setkají“

č. 7.: „Její první část již na konci 1. třídy, řešení dalších řad asi v 3.“

č. 12.: „3. třída, podle toho, jak se s dětmi pracuje“

Můj názor se shoduje s těmito studentkami. Myslím, že úloha by mohla být zadána žákům na konci druhé třídy či ve třídě třetí. Můj názor podporuje i skutečnost, že se podobnou úlohou zabývali žáci druhé třídy na kroužku matematiky na homogenní variantě a byli schopní ji řešit, i když ne vždy došly ke správnému závěru.

Reflexe „experimentu" z prostředí „Sousedů" se studenkami homogenní varianty

Vzhledem k tomu, že jsem ze zdravotních důvodů nebyla přítomna „experimentu", nemohu hodnotit jeho průběh. Moje reflexe tedy vychází pouze z vyřešených úloh a dotazníků. Studentky neměly problém pochopit, se kterými třemi sousedními čísly se počítá. S řešením úloh si poradily, ale také se stalo, že úloha byla vyřešena chybně či došly ke špatnému závěru. Mohlo to být způsobeno tím, že se dlouho zabývaly stejným typem úloh.

Jak jsem se již zmínila výše, některé studentky objevily „pravidlo čtveřice". Ostatní si určitě alespoň všimly, že se čísla v zadané úloze určitým způsobem pravidelně opakují.

U úloh, které měly více řešení, se jen některé studentky zabývaly jejich hledáním.

Dovolím si tvrdit, že velká část studentek nahlíží na úlohy z prostředí „Sousedé" procesuálně. Můj názor potvrzuje skutečnost, že ne vždy studentky došly k závěru, že úloha nemá řešení.

8.1.3 Experiment se žáky 1. st. ZŠ

Popis experimentu

Experimenty v prostředí „Sousedé“ jsem realizovala při homogenní variantě na ZŠ Jindřišská v rámci matematického kroužku, který žáci druhé třídy navštěvovali pravidelně každý týden v odpoledních hodinách. Během kroužku, jehož náplň se týkala prostředí „Sousedů“ a který jsem vedla, bylo přítomno 11 žáků a výjimečně byl přítomen i jeden žák čtvrté třídy.

V průběhu experimentu mi se záznamy pomáhaly ostatní studentky homogenní varianty. S každým žákem pracovala vždy jedna z nich. Byla žákovi rádcem a pomocníkem. Studentky dostaly záznamový arch ***(viz příloha 1)***, do kterého zapisovaly odpovědi na mé otázky či vpisovaly další své poznámky a postřehy.

V úvodu kroužku jsem žáky seznámila s prostředím pomocí dramatizace. Přepis hlasového záznamu z úvodu je v ***příloze 3.***

Potom jsem žákům rozdala první část pracovního listu se čtyřmi cvičeními. Druhá část pracovního listu byla rozstřihaná na jednotlivá cvičení. Žáci je dostávali postupně. Chtěla jsem tímto zabránit zbytečnému stresování především citlivějších žáků z množství úloh, které jim ještě zbývá do konce vyřešit. Pracovní list je ***v příloze 1***.

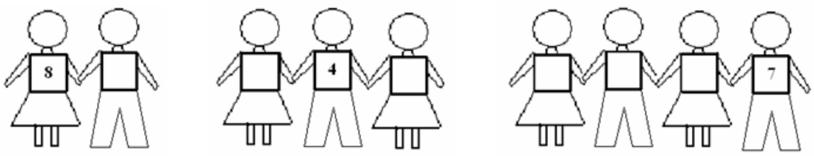
Žáci se úlohami zabývali po celou dobu kroužku. Ne všichni stihli vyřešit všechna cvičení. Ale to ani nebylo mým cílem.

Dvěma žákům (bratrům), kteří v matematické oblasti vynikali, byly zadány ještě dvě úlohy z prostředí „Barevné trojice“.

Vyhodnocení řešení jednotlivých úloh z experimentu

<u>Cvičení 1</u>

1. Doplň, aby součet dvou sousedních postaviček byl 15.



Studentky měly pozorovat, v jakém pořadí žáci doplňovali čísla a zda měli nějaké problémy.

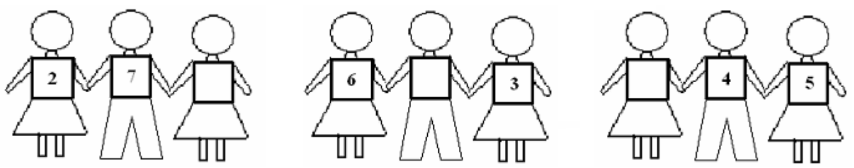
Předpokládala jsem, že žáci budou doplňovat čísla u druhých sousedů zleva doprava, u třetích zprava do leva.

Všech jedenáct žáků doplňovalo čísla v mnou předpokládaném pořadí. Někteří měli problémy se sčítáním. Více žákům dělalo problémy pochopit spojení „dvě sousední postavičky“, také je mohla mást formulace „součet postaviček“. U druhé úlohy někteří žáci doplňovali čísla tak, aby součet všech tří čísel byl požadovaným součtem.

Odpovědi a postřehy studentek jsem shrnula do tabulky ***v příloze 6***. (Týká se všech cvičení.)

Cvičení 2

2. Doplň, aby byl součet tří sousedních postaviček 13.



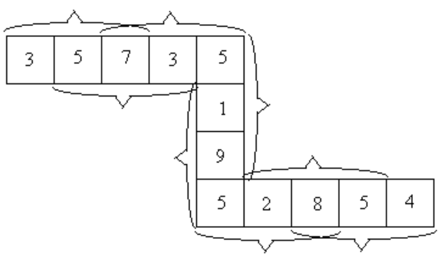
U tohoto cvičení měli studentky sledovat pořadí řešení úloh, dále dobu trvání potřebnou k vyřešení, případně si poznamenat, u které úlohy se žák zdržel.

Předpokládala jsem, že žáci budou úlohy řešit v daném pořadí, i když druhou úlohu považuji za obtížnější.

Předpoklad se mi potvrdil. Žáci řešili úlohy v daném pořadí. Devět žáků se nezdrželo u žádné z úloh, úlohy řešili přibližně stejně dlouho. Dva žáci se zdrželi u úlohy číslo dvě. *Myslím, že tato skutečnost jen potvrzuje mé vnímání této úlohy jako obtížnější než další dvě. Uvědomuji si, že závěry z takto malého počtu řešitelů nejsou příliš vypovídající, ale i přesto si troufám odhadovat, že i při větším počtu řešících žáků bych došla ke shodnému závěru.*

Cvičení 3

3. Sečti tři sousední pole.



U tohoto cvičení mě zajímalo, jestli žáci poctivě sčítali všechny „Sousedy“, a tak doplnili správně součet poslední trojice, který se liší od ostatních součtů.

Tuto úlohu vyřešili správně všichni (včetně poslední trojice), a to tím způsobem, že poctivě sčítali čísla v každých třech sousedních čtverečcích.

Studentka. která sledovala přítomného čtvrťáka,poznamenala: "Sčítal poctivě všechny „Sousedy“, ale poslední nevypočítal správně.“ *Nejsem si jistá, zda to tak opravdu bylo, protože první součet, který u posledních sousedů napsal, byl 15. Až poté jej opravil na 17. Myslím, že součet 15 doplnil automaticky, protože mu „to už tolikrát vyšlo“.*

Dva žáci měli problém orientovat se podle svorek. Jeden z nich chtěl dokonce počítat „přes roh“.

Tato úloha byla přítomna i v pracovním listu určeném pro studentky. Osm z nich předpokládalo, že žáci nebudou poctivě počítat a automaticky doplní součty bez kontroly (více viz strany 56, 57). To se nepotvrdilo.

<u>Cvičení 4</u>

4. Doplň, aby součet tří sousedních políček byl 9.

A)

		4	3

D)

3		5	

B)

	5	1	

E)

	2		1

C)

1	7		

F)

6			5

Zde bylo pozorováno, v jakém pořadí žáci doplňovali čísla do čtverečků. *Předpokládané pořadí u první úlohy bylo zprava doleva, u druhé úlohy zleva doprava, u třetí zleva doprava, u čtvrté taktéž, u páté zprava doleva a u šesté zleva doprava.*

Dále bylo pozorováno, zda byly úlohy řešené v daném pořadí, zda se u některé úlohy žák zdržel, případně u které a proč, a jak dlouho se žáci zabývali řešením úlohy F, která nemá řešení, a k jakému závěru došli.

Pouze jeden žák doplňoval čísla v předpokládaném pořadí, jeden žák doplňoval čísla v opačném pořadí. Ostatní doplňovali čísla u některých úloh v předpokládaném pořadí, u některých opačně. Úlohy B a E byly nejčastěji řešeny opačně.

Pořadí doplňování čísel jsem pozorovala, protože jsem chtěla zjistit, zda se žáci na úlohu dokážou dívat jako na celek a poté se rozhodnout, z jaké strany bude výhodnější začít úlohu řešit. Většina z nich úlohy, které bylo vhodnější řešit zprava doleva, řešili opačně. *Předpokládám, že to mohlo být způsobeno hlavně tím, že jsou navyklí číst zleva doprava.*

Pořadí, v jakém byly úlohy ve cvičení řešeny, jsem pozorovala proto, že úlohy nejsou seřazeny podle obtížnosti (podle mě). Seřazení úloh podle obtížnosti od nejlehčí po nejtěžší by vypadalo takto: C, D, B, A, E, F.

Osm žáků řešilo úlohy postupně. *Myslím, že je to tím, že jsou tak zvyklí ze školy. Ještě si neosvojili řešitelskou strategii: nejdříve si úlohy prohlédnout a začít řešit od lehčích k těžším. Je možné, že se jim úlohy zdály stejně obtížné.*

U zbylých tří nebyla tato otázka zodpovězena.

V následujícím odstavci popíši, jak si jednotliví žáci poradili s úlohu F. (více ***v příloze 6***.

Žákyně 1 se úlohou zabývala delší dobu. Studentka poznamenala, že se úlohy zalekla. Úlohu nevyřešila a nedošla k žádnému závěru.

Žákyně 2 řešila úlohu pět minut, během kterých vyzkoušela tři pokusy. Došla k závěru, že to nejde. Na zdůvodnění proč, bohužel již nezbyl čas.

Žák 3 se úlohou zabýval asi pouze minutu. Také on došel k závěru, že to nejde vyřešit, ale nezdůvodnil to. Stál si však za tím, že úloha nejde.

Žákyně 4 řešila úlohu asi tři minuty. Došla k závěru, že to nejde, ale ani ona to nezdůvodnila. Úlohu poté opustila, protože byla „v koncích“.

Žák 5 o úloze řekl, že je těžká. Přesto přišel na „pravidlo čtveřice“. Změnil poslední číslo na šest a našel dvě řešení.

Žák 6 u úlohy F zkouší více možností. Na závěr přepisuje první číslo na pětku a úlohu dopočítává. Objevil „pravidlo čtveřice“.

Žáci 5 a 6 jsou již dříve zmiňovaní bratři, kteří byli v matematické oblasti velmi šikovní.

Žákyně 7 se úlohou zabývá asi 14 minut. Na závěr škrtla pětku na konci a napsala místo ní šestku. Studentka ji k objevu „pravidla čtveřice“ navedla. (Záznam rozhovoru je v již zmiňované příloze.) Při řešení ani jednou neřekla, že to nejde, že úloha nemá řešení.

Žákyně 8 se úlohou zabývala asi 4 minuty. Došla k závěru, že to nejde, protože $6 + 5 = 11$ a ne 9. Spolužačka poté zformulovala zadání „výzvy“. Žákyně následně změnila poslední číslo na trojku, protože $3 + 6 = 9$. Závěr není správný, ale je vidět, že o úloze přemýšlela.

Žák 9 po třech minutách řekl, že úloha nejde vyřešit. Proč to nejde, však nezdůvodnil. Při hledání řešení doplňovaná čísla obměňoval a prohazoval. Poté, co se studentka zeptala: „Jde to nějak změnit, aby to šlo“, řekl: „Ne“. *Myslím, že kdyby se mu podobná úloha zadala s odstupem času, došel by k jinému závěru.*

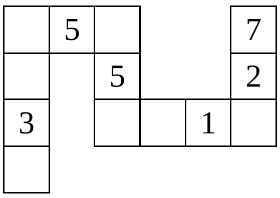
Žákyně 10 řešila úlohu 5 minut a došla k závěru, že ji neumí vyřešit. Zkoušela několik možností. Po té, co studentka položila otázku „výzvy“, hned odpověděla, že by místo pětky dala šestku. Žákyně objevila „pravidlo čtveřice“.

Žák 11 (čtvrťák) řešil úlohu asi 4 minuty. Vyzkoušel několik možností.

Všichni žáci, kteří objevili „pravidlo čtveřice“, jej pravděpodobně objevili pouze pro tento konkrétní případ (izolovaný model). V případě, že by pravidlo použili i později v jiném kontextu, mohlo by se již mluvit přinejmenším o generickém modelu. Pokud by žáci byli schopní použít jej v různých dalších úlohách, dalo by se již hovořit o abstraktním poznatku.

Cvičení 5

5. Doplň tak, aby součet tří sousedních políček byl 12.



Cvičení pět již nebylo součástí pracovního listu. Počínaje touto úlohou dostali žáci další zadání až po vyřešení úlohy předchozí. Jak jsem již uvedla výše, bylo to proto, aby žák nebyl stresovaný tím, že mu zbývá vyřešit ještě tolik úloh. Žákyně 2 tuto a další úlohy již neřešila.

U této úlohy jsem sledovala, zda je žák druhé třídy schopen podívat se na úlohu jako celek (koncept) a začít úlohu řešit z nejvýhodnějšího místa, tedy strategií od konce, zprava doleva. Studentky dále sledovaly, jak dlouho žákovi trvalo, než začal úlohu řešit. Studentky měly popsat, které problémy eventuálně nastaly.

Žáků, kteří začali úlohu řešit hned, bylo 6. U dalších dvou je poznamenáno jen, že neměli s úlohou problémy. Zbylí dva žáci začali úlohu řešit asi po minutovém přemýšlení.

Sedm žáků začalo úlohu při prvním pokusu řešit odpředu. Dva žáci řešili úlohu při prvním pokusu odzadu, což bylo výhodnější. U jednoho žáka není poznamenáno, odkud začal úlohu řešit.

Myslím si, že žáci druhé třídy ještě nejsou ve většině případů schopni brát úlohu jako celek a zhodnotit tak, z jaké strany je nejvýhodnější začít úlohu řešit. Úlohu berou stejně jako asi všechny školské aritmetické úlohy výhradně procesuálně.

Jaké měli žáci při řešení komplikace?

Žákyně 1 zkoušela několik pokusů, ale ani když začala čísla doplňovat odzadu, nedošla ke správnému řešení. Dělala numerické chyby.

Žák 3 neměl s úlohou vážnější problémy, ale kvůli únavě ze stále se opakujících cvičení ji nedořešil bezchybně.

Žákyně 4 začala čísla doplňovat výhodně odzadu. I přesto měla s úlohou problémy, protože chtěla počítat i „přes roh“.

Žák 5 byl na první pokus, kdy začal čísla doplňovat odpředu, neúspěšný. Při druhém pokusu začal čísla doplňovat z druhé strany a úlohu vyřešil správně.

Žák 6 začal čísla doplňovat odpředu. Protože náhodně vybral správná čísla, úlohu dořešil.

Žákyně 7 začala čísla doplňovat odpředu. Bylo pro ni náročné počítat s přechodem přes desítku. Studentka poznamenala, že byla již unavená. Když ji na konci přestaly součty vycházet, byla bezradná a nevěděla, jak dál.

Žákyně 8 měla problémy se v úloze zorientovat. První neúspěšný pokus začal doplňováním čísel odpředu. Při druhém pokusu „odzadu“ došla ke správnému řešení.

Žák 9 neměl s úlohou problémy.

Žák 10 měl dva neúspěšné pokusy, když začal čísla doplňovat odpředu. Poté co mu studentka poradila, zda by úlohu nešlo začít řešit jiným způsobem, úlohu odzadu vyřešil.

Žák 11, čtvrťák, řešil úlohu odpředu. Dělal numerické chyby a chtěl, aby součet vycházel i „přes roh“. Po opravě a ujasnění, která políčka mají dávat požadovaný součet, úlohu vyřešil.

Cvičení 6

6. Doplň tak, aby součet tří sousedních políček byl 10.

	3		6
			2
	1		

U šesté úlohy bylo zjišťováno, jak dlouho trvalo, než žáci začali úlohu řešit, které číslo bylo doplněno jako první, v jakém pořadí byla čísla doplňována, zda žáci objevili, že má úloha více řešení a jak dlouho se žáci úlohou zabývali.

Tuto úlohu řešilo už jen osm žáků.

Nad úlohou se žádný žák dlouho nezamýšlel a nejdéle do minuty začali všichni hledat řešení.

Kde a v jakém pořadí jednotliví žáci čísla doplňovali, jsem shrnula to tabulky (viz **příloha 3**). Žlutě zvýrazněná jsou čísla, která byla v zadání úlohy. Číslice psané kurzívou udávají pořadí doplňovaných čísel.

Jeden žák začal doplňovat čísla od levého horního rohu. Protože doplnil číslo 6, které tam mělo být, s řešením úlohy neměl problémy. Čtyři žáci začali úlohu řešit na horní straně čtverce mezi danými čísly 3 a 6. To bylo výhodné a tak i oni úlohu vyřešili.

Jeden žák začal doplňovat čísla na pravé straně čtverce pod číslem 2. I tento začátek se ukázal jako výhodný. Další dva žáci začali doplňovat čísla na spodní straně čtverce.

Žák 11 měl dva neúspěšné pokusy. V tabulce je uvedeno pořadí doplňování čísel v prvním nezdárném pokusu. Úlohu vyřešil až na potřetí, kdy začal s doplňováním na pravé straně čtverce pod číslem 2.

1.

1.	**3**	*2.*	**6**
8.			**2**
7.			*3.*
6.	**1**	*5.*	*4.*

7.

2.	**3**	*1.*	**6**
3.			**2**
4.			*8.*
5.	**1**	*6.*	*7.*

3.

5.	**3**	*4.*	**6**
6.			**2**
7.			*3.*
8.	**1**	*1.*	*2.*

4.

2.	**3**	*1.*	**6**
3.			**2**
4.			*8.*
5.	**1**	*6.*	*7.*

5.

2.	**3**	*1.*	**6**
3.			**2**
4.			*8.*
5.	**1**	*6.*	*7.*

8.

7.	**3**	*8.*	**6**
6.			**2**
5.			*1.*
4.	**1**	*3.*	*2.*

9.

5.	**3**	*1.*	**6**
			2
			2.
6.	**1**	*3.*	*4.*

11.

5.	**3**	*6.*	**6**
4.			**2**
3.			
1.	**1**	*2.*	

Pět žáků nepřišlo na to, že úloha má více řešení. Dva žáci našli dvě řešení (3, 1) a (2, 2). Jeden žák objevil ještě jedno další, a to (1, 3). Řešení bylo celkem pět, chybějícími jsou tyto (0, 4) a (4, 0). *Myslím, že kdyby žáci dostali úlohu samotnou, neřešili před ní již šest úloh, hledalo by další řešení více žáků. Uvědomuji si, že jsem svoji domněnku měla ověřit.*

Otázku o době zabývání se úlohu nezaznamenaly všechny studentky. Časové rozmezí se pohybovalo od dvou do osmi minut.

„Pravidlo čtveřice“ v této úloze mohla použít první žákyně, která do levého horního rohu doplnila 6. Studentka k tomu napsala: „Zda to bylo vědomě či náhodně, bohužel nevím.“ *Jelikož během předcházejících úloh jsem nenašla ani náznak objevení pravidla, domnívám se, že šlo opravdu o náhodu.*

Cvičení 7

7. Doplň tak, aby součet tří sousedních políček byl 15.

2		4							

K této úloze mohli studentky připojit „výzvu“: Uměl/a bys přidat další políčka a doplnit je? Jaké číslo by bylo ve 20., …, 100. políčku?

Také měly sledovat, zda žák začal úlohu řešit hned. *Myslím, že žádný žák už by neměl příliš dlouho přemýšlet. Podobné úlohy už řešil před tím. Neměl by mít problém s „každými třemi sousedními políčky“.*

Dále měly sledovat, v jakém pořadí žák čísla doplňoval. *Předpokládala jsem, že všichni žáci budou doplňovat čísla zleva doprava.*

Tuto úlohu řešilo osm žáků. Všichni žáci začali úlohu řešit hned po přečtení zadání a doplňovali čísla tak, jak jsem předpokládala.

Výše zmiňovaná výzva byla zadána jen několika žákům.

Žákyně 1 uměla přidat a doplnit další políčka. Správně vyřešila, že ve dvacátém políčku bude číslo 9. Přidělala jen pět políček, takže celkově jich bylo patnáct. Z toho vyplývá, že číslo ve dvacátém čtverečku vypočítala z hlavy.

Žák 5 uměl také přidat a doplnit další čtverečky. K zadání však přidal pouze jedno políčko. Jaká čísla budou v dalších políčkách, počítal zpaměti, či si je psal na zvláštní papír. Studentka zaznamenala tento rozhovor:

Ž: „Takhle to je stejný.“ *(ale přesto počítá)*

…

Ž: „Na 20. bude 2 *(což není pravda),* jde to za sebou. Na 10. je 2, takže na 20 bude taky 2.“

Studentka zřejmě navedla, že to tak není. Měl říkat číslo, které je v 11., 12, …, 20 políčku. Zjistil, že je to jinak.

Došel k závěru, že se tam opakují stejná čísla (2, 9, 4) a další tam být nemohou.

Na 10. políčku je dvojka, na 20. devítka, na 30. čtyřka. Došel ke správnému řešení.

Dovolím si tvrdit, že žák objevil „pravidlo čtveřice“. Přišel na to, že se čísla opakují.

Žák 6 také přidával další políčka. Přidělal si 7 buněk a začal dopisovat čísla. Nenavázal však na již doplněná čísla, a proto začal chybně dosazovat 9, 1, 5, 9, 1, 5, 9.

Studentka zřejmě upozornila, že někteří „Sousedé“ nedávají požadovaný součet.

Po té objevil, že se čísla v řadě opakují (2, 9, 4). Na prstech počítal a říkal si 2, 9, 4. Zjistil, že na 10. políčku bude číslo 2. Nakreslil si a doplnil dalších třicet pět políček. V 95. políčku bude číslo 4. Přišel na to tak, že od desátého políčka odečetl 5 políček a předpokládal, že to je to samé, jako když od stého políčka odečte 5 políček. Toto zjištění není správné. V devadesátém pátém čtverečku je číslo 9.

Žákyně 8 uměla doplnit přidaná políčka. Přečetla si čísla, co již napsala. Dopočítala a správně určila číslo na 20. políčku. Dál si říkala: „Na 21. by byla 4, …. Pak si zapsala číselnou řadu. Správně určila čísla na 30. a 40. políčku.

Žák 9 poté, co mu studentka položila otázku, zda by uměl přidat další políčka a zjistit, jaká do nich patří čísla, si přečetl již doplněná čísla nahlas. Přišel na pravidelné opakování čísel. (Do této doby sčítal „Sousedy“ mechanicky.) Číslo ve 20. buňce zjišťoval tak, že si říkal trojice, až k němu došel. Žádný čtvereček s číslem k předtištěné úloze nepřipsal.

Žák 11 byl schopen přidat buňky a doplnit čísla. Na otázku „Jaké číslo by bylo v 20. políčku?“, řekl, že neví, že by si to musel napsat (vypsat řadu).

Je zajímavé, že někteří žáci druhé třídy udělali lepší závěr než žák čtvrté třídy. Od studentky vím, že „čtvrťák“ byl v matematické oblasti hodně slabý.

Dovolím si tvrdit, že všichni žáci, kteří přišli na to, že se čísla v „Sousedech“ opakují, objevili, či k tomu nemají daleko, „pravidlo čtveřice“ jako generický model či jako abstraktní poznatek.

Reflexe experimentu Sousedé

Myslím si, že úlohy jsem zvolila vhodně. Dramatizace, která řešení předcházela, nebyla však podle mého mínění dostatečná pro efektivní řešení. Někteří žáci měli problém pochopit, že „součet tří sousedních čísel“ znamená každých tří.

Kdybych připravovala znovu podobný pracovní list i záznamový arch pro pozorovatele, nedávala bych ke sledování tolik věcí najednou, protože ne vždy studentky stihaly odpovídat i zaznamenávat všechny mnou požadované údaje.

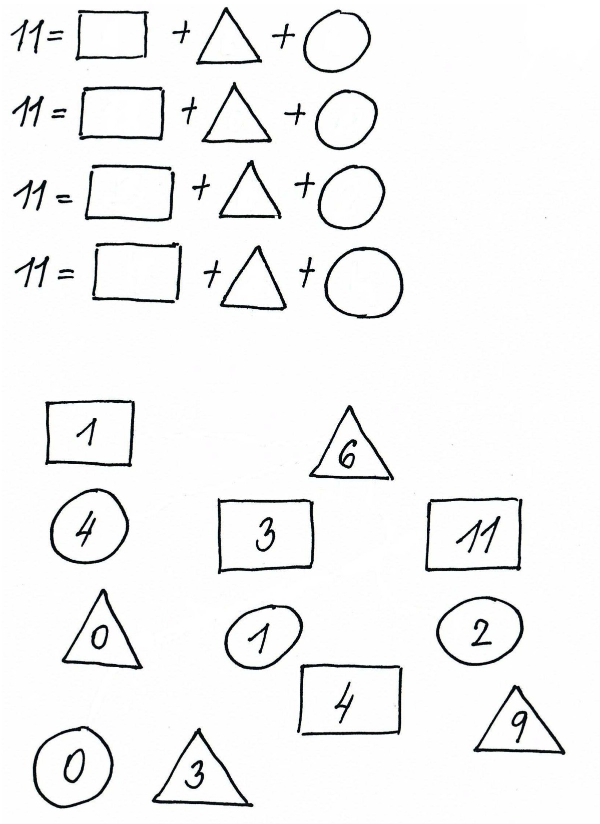
Velice oceňuji možnost využití ostatních studentek (spolužaček) při experimentu. Díky jejich pomoci mám k dispozici detailní záznamy řešitelských postupů jednotlivých žáků.

8.2 Experiment v prostředí „Barevné trojice“

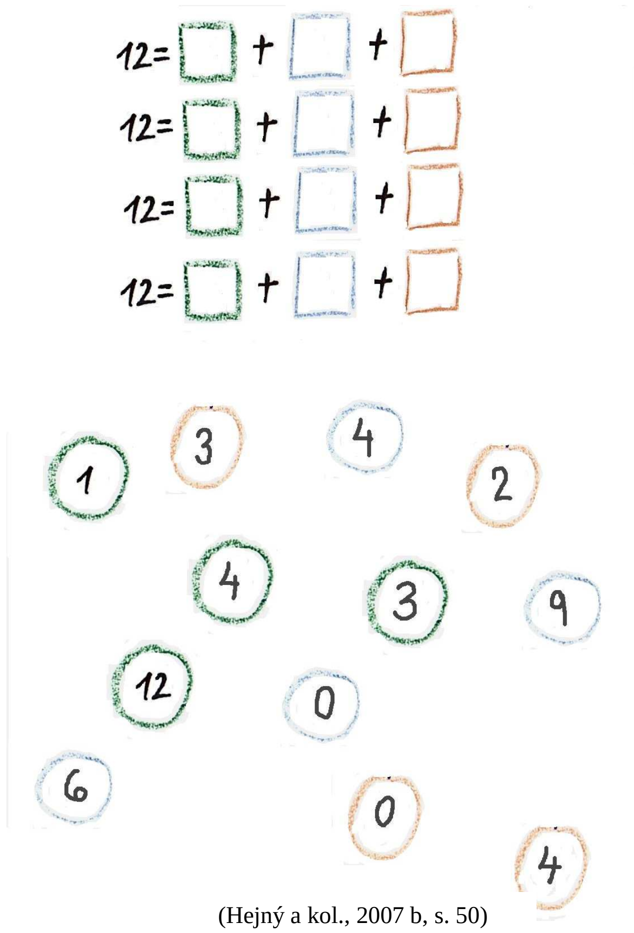
Popis experimentu

Tento experiment jsem uskutečnila dne 27. 11. 2008 v páté třídě na ZŠ Dědina v rámci mé souvislé praxe. Ve třídě bylo přítomno 20 žáků, celý experiment trval jednu vyučovací hodinu, kterou jsem sama vedla. Třídní učitelka E. Bomerová byla v roli pozorovatele.

Úlohy, které jsem použila, byly vybrány z učebnice matematiky z nakladatelství Fraus (Hejný a kol., 2007). Úlohy jsem nekopírovala, ale přepsala jsem je na papír. Vypadaly takto:



(Hejný a kol., 2007 b, s. 63)



(Hejný a kol., 2007 b, s. 50)

Žáci se s tímto prostředím setkali poprvé.

Scénář experimentu jsem měla naplánovaný v následujících krocích:

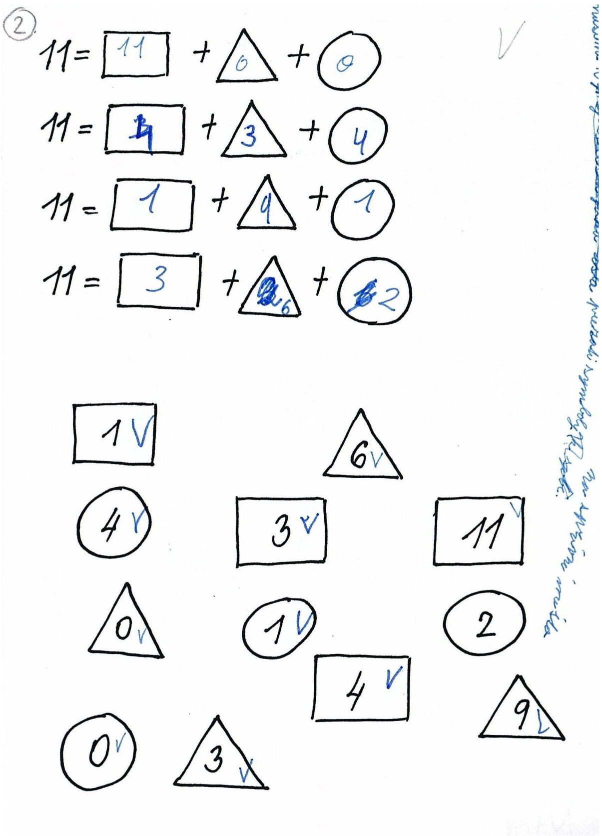
1) Říct žákům název prostředí, ze kterého budou řešit úlohy. Sdělit jím, k čemu vyřešené úlohy použiji a poděkovat jim za pomoc.
2) Rozdat žákům barevnou i černobílou úlohu bez zadání.
3) Po vyřešení úloh (Pokud zjistí, co mají dělat.) popsat, jak úlohu řešili a zformulovat zadání k daným úlohám.
4) Napsat, která úloha se jim řešila lépe, zda „barevná“ či „černobílá“.

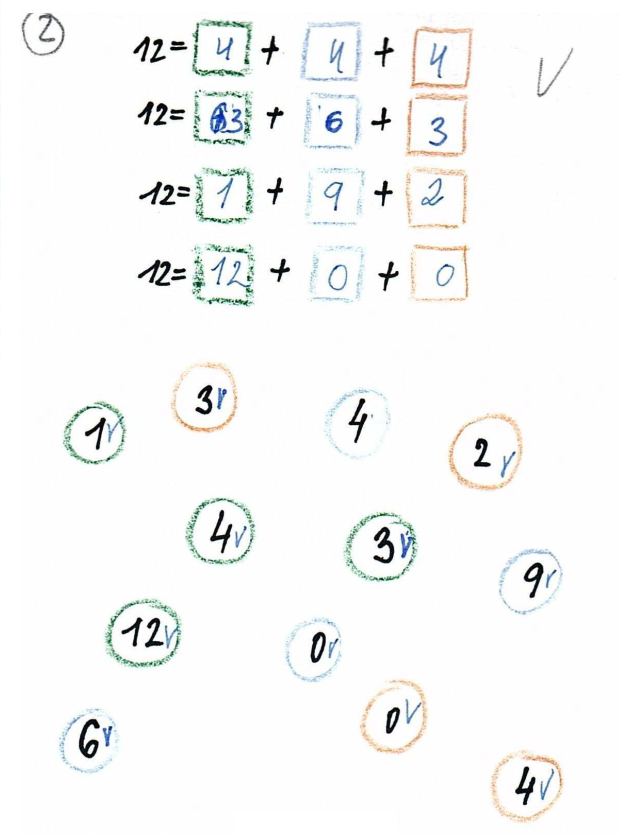
Získané materiály

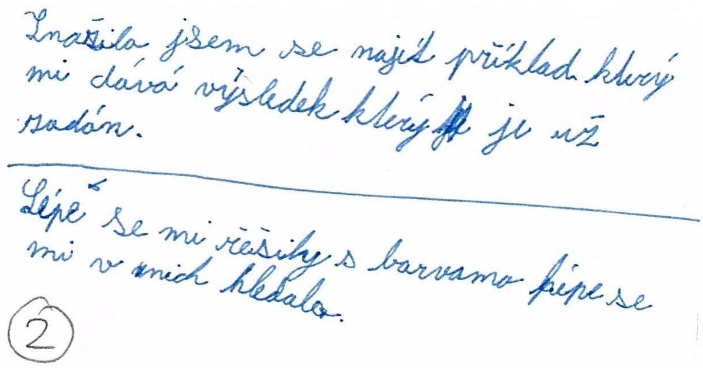
Při experimentu jsem získala od všech žáků vyřešené úlohy („barevné“ i „černobílé“) bez zadání a od většiny i „černobílou“ úlohu se zadáním.
Odpovědi na otázky byly napsány buď na papír se zadanými úlohami, nebo na čistý arch, který jsem žákům dala.
Vymyšlené úlohy žáci psali na list se zadanými úlohami na druhou (prázdnou) stranu.

Žáci měli zmiňované materiály podepsat. Pro vyhodnocení experimentu jsem si všechny materiály od jednoho žáka označila vždy stejným číslem, pod kterým také vystupují v následujících odstavcích.

Ilustrace

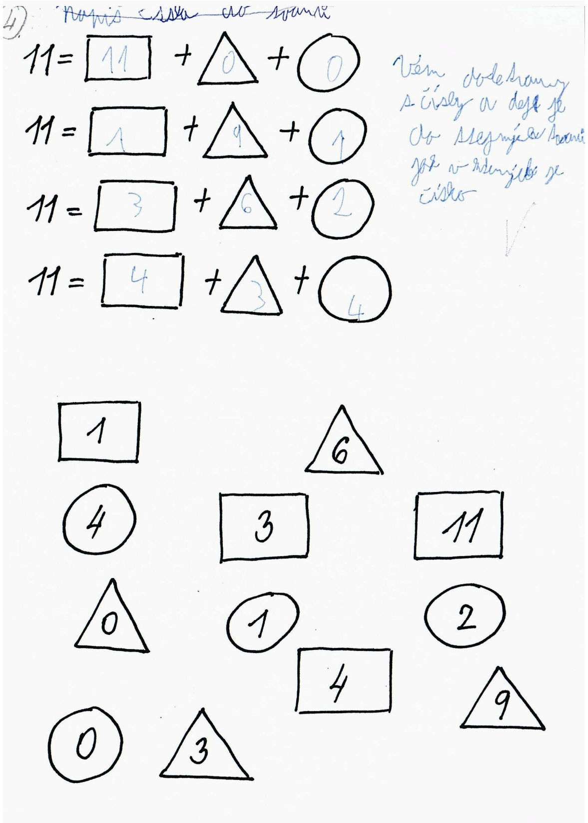


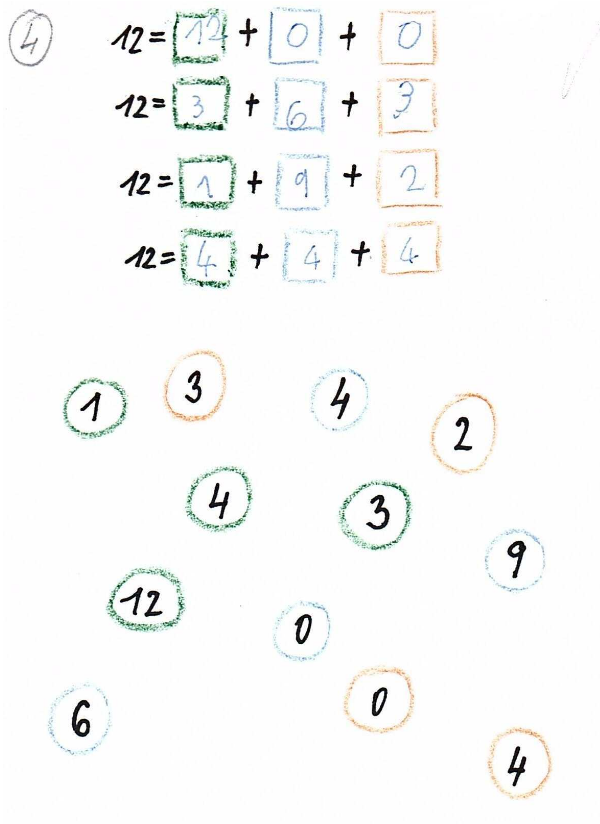


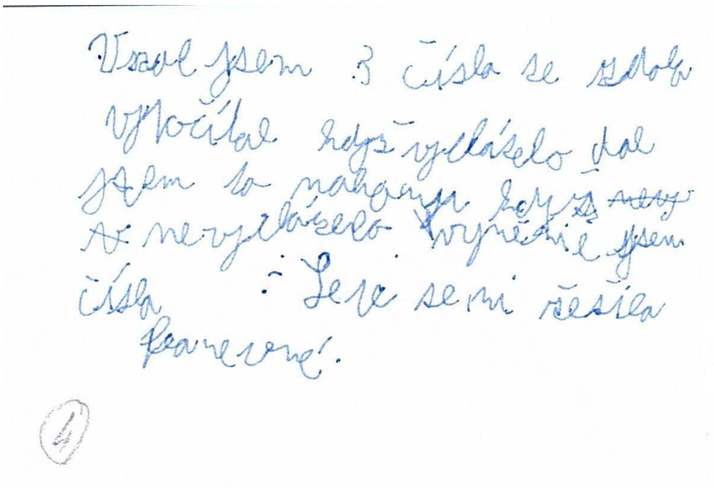

Znažila jsem se najít příklad který mi dává výsledek který ~~ji~~ je už zadán.

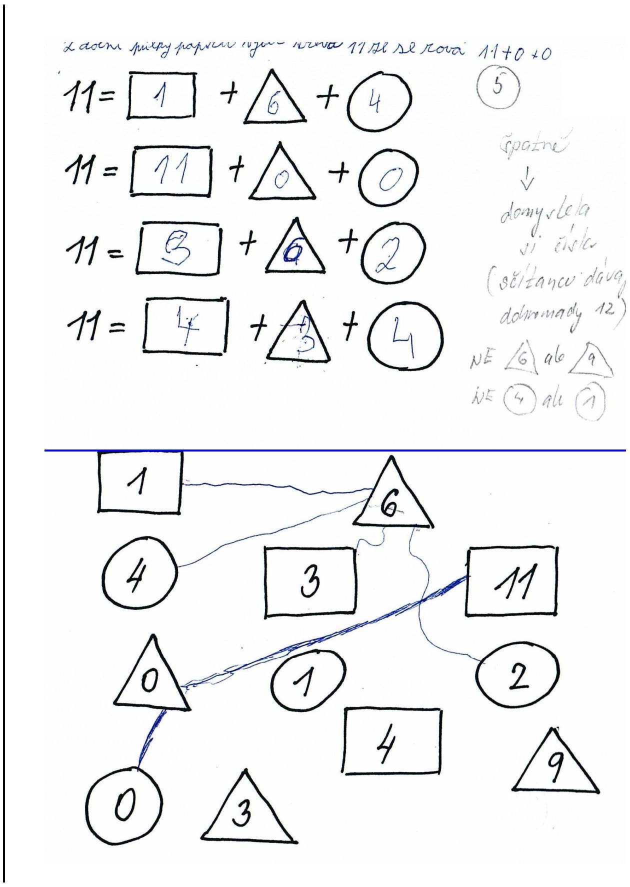
Lépe se mi řešily s barvamo lépe se mi v nich hledalo.

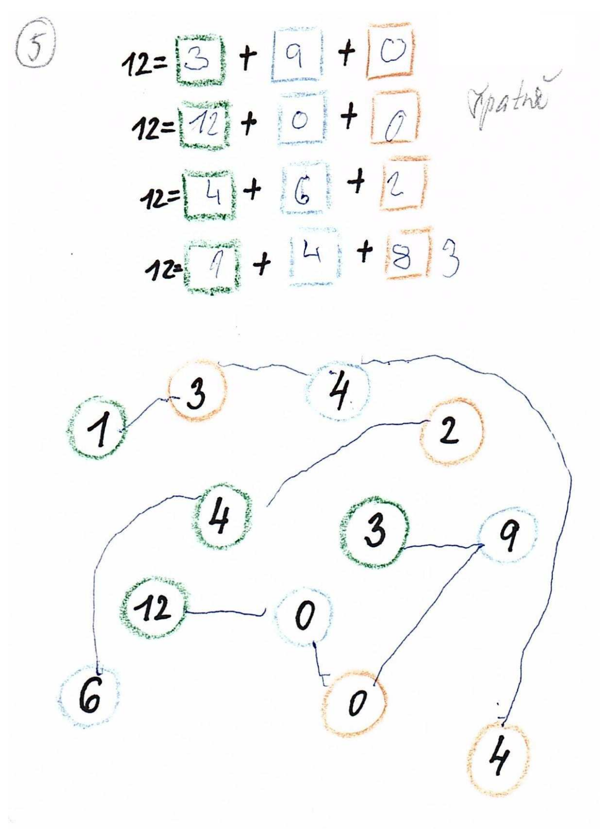
2

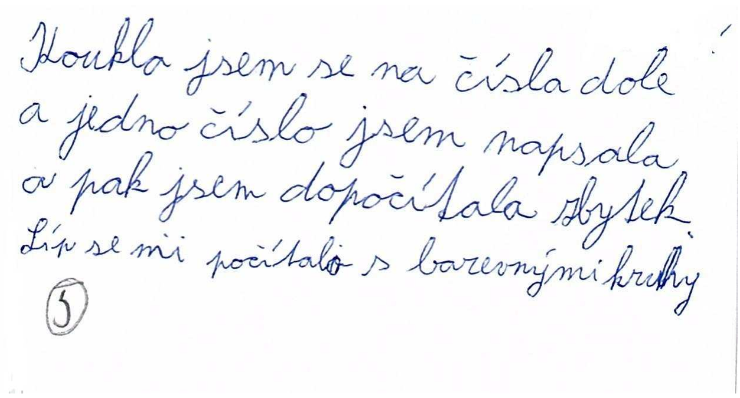

11 = 11 + 0 + 0
11 = 1 + 9 + 1
11 = 3 + 6 + 2
11 = 4 + 3 + 4


12 = 12 + 0 + 0
12 = 3 + 6 + 3
12 = 1 + 9 + 2
12 = 4 + 4 + 4









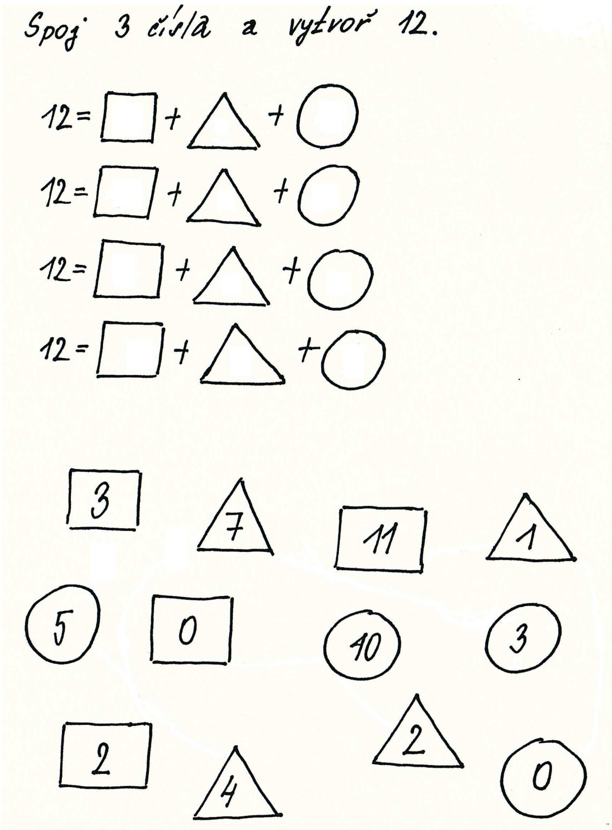
Výše jsem vložila ukázky materiálů od tří žáků (žákyně 2, žáka 4 a žákyně 5). Očíslování žáků je v kroužku.

První dva žáci vyřešili úlohy správně. V pravém horním rohu jsem udělala „fajfku“. Žákyně s číslem 5 má obě úlohy s chybou. Do pravého horního rohu jsem vepsala své poznámky.

Průběh a vyhodnocení experimentu

V tomto odstavci popíši, jak experiment probíhal, a do textu budu vkládat mé interpretace situací, komentáře či vysvětlení. Tyto moje vstupy budu odlišovat graficky, budu je psát kurzívou.

Někteří žáci byli s prací brzy hotovi, tak jsem jim zadala ještě jednu černobílou úlohu, tentokrát s tímto zadáním.



(Hejný a kol., 2007, s. 56

Po vyřešení této úlohy „rychlými“ žáky jsem zadala další úkol: Vytvoř vlastní úlohu v tomto prostředí.

I když jsem měla experiment naplánovaný a celkem důkladně promyšlený, při zadávání jsem zapomněla říct výše zmiňovaný bod 3. V průběhu experimentu jsem ho doplnila.

Zamýšlela jsem se nad tím, proč se mi to stalo, i když jsem měla vše dobře připraveno. S odstupem času si to vysvětluji jako svou začátečnickou nezkušenost. I když jsem měla jisté zkušenosti s vedením experimentu z homogenní varianty, zde jsem byla v nové roli, či spíše dvojroli – učitel-experimentátor a musela jsem se soustředit na mnoho věcí najednou.

Při hodnocení žákovských řešení jsem pozorovala několik jevů: pochopení úlohy, správnost řešení i s ohledem na zadání (barevné či černobílé), řešitelské strategie i jak žáci svou řešitelskou strategii popsali, schopnost žáků zformulovat zadání k úlohám a vymyslet vlastní úlohu z tohoto prostředí, způsob označení čísel, které již byla použita.

Bylo zřejmé, že všichni žáci pochopili, jak mají úlohu řešit i bez slovního zadání. *Dovolím si proto tvrdit, že pokud jsou v zadání „úlohy na sčítání“, slovní zadání není důležité. Hlavní zdroj informací pro žáky, ale i pro mnohé dospělé, je vizualizace a teprve tehdy, když tato selhává, začnou hledat informace v textu.*

Dále jsem pozorovala, zda jsou úlohy správně vyřešeny. Úlohy považuji za stejně obtížné.

„Černobílou“ úlohu vyřešilo správně 17 žáků (3 chybně) a „barevnou“ úlohu 14 žáků (6 s chybou). Z toho 4 žáci vyřešili správně „černobílou úlohu“, ale „barevnou“ měli s chybou. 1 žák to měl naopak („černobílou“ správně, „barevnou“ chybně). 2 žáci nevyřešili správně ani jednu úlohu.

Z toho, že „černobílou“ úlohu vyřešilo bezchybně více žáků než „barevnou“, bych mohla usuzovat, že „černobílá“ úloha je pro žáky lehčí. Protože mě však nenapadlo říct řešitelům, aby označili číslem úlohu, kterou počítali jako první, může zmíněná skutečnost znamenat i to, že více žáků řešilo „černobílou“ úlohu jako druhou. Do úlohy již měli větší vhled. Možná, že by bylo zajímavé zkoumat, jaké zadání by příště preferovali a které zadání úlohy je pro žáky z nějakého důvodu příznivější – zda respektování barev, nebo tvarů. Musím připustit, že z takto malého vzorku nemohu dělat závěry.

Také jsem pozorovala, zda žáci vyřešili úlohu na poprvé (bez škrtání a přepisování) či v úloze provedli nějakou opravu. Čtyři žáci vyřešili úlohy bezchybně na první pokus. Tři žáci opravovali čísla v obou úlohách. Ostatní jednu z úloh vyřešili bez oprav, druhou s opravami.

Z tohoto je patrné, že většina žáků řešila úlohy metodou pokus – omyl, což se dalo očekávat, neboť se s těmito úlohami setkali poprvé, a tudíž pro ně byly úlohami implicitními. Pokud nepřišli na správné řešení, dál se jím zabývali.

V dalším odstavci se budu zabývat tím, jak žáci popsali svůj řešitelský postup a jaké vymysleli zadání k „černobílé“ úloze[5]. Jak už jsem se zmínila, otázku na řešitelský postup a formulaci zadání jsem položila až v průběhu experimentu, takže ne všichni žáci se nad tím zamýšleli.

Řešitelské strategie

Popsané řešitelské postupy jsem shrnula do tabulky. Žákům jsem přiřadila čísla. Pokud byl jejich postup při řešení stejný, či jsem ho shledala podobným, jsou čísla žáků v obdélníčku téže barvy. Z tabulky vyplývá, že bylo možné sledovat tři žákovské řešitelské strategie:

1) Sedm žáků řešilo úlohy metodou **pokus - omyl**, tipovali čísla a počítali, zda jim „to“ vyjde.

2) Čtyři žáci postupovali tak, že si vypsali čísla do jednoho tvaru (jedné barvy) a poté zjišťovali další dvě čísla, která by se hodila k číslu napsanému do „úloh na sčítání“.

Např. Žák 1 napsal: „První jsem si do všech příkladů vypsala obdélníky. Potom si náhodně vyberu druhé číslo, aby obě čísla dávala dohromady menší nebo stejné. A nakonec jsem si dopočítala, jaké musí být poslední číslo.“ Tato strategie by se dala nazvat **organizovaný pokus-omyl**. Nejprve si žáci zorganizovali čísla jedné barvy (nebo jednoho tvaru) do sloupečku a pak k nim pokusem-omylem přiřazovali další.

Žákyně 3 napsala: „1. Nejdříve jsem si dopsala do obdélníků čísla. 2. Zkoušela jsem dávat do trojúhelníků a kruhů, aby mi vyšel správný výsledek.“

3) Tuto strategii lze nazvat **strategie výběru největšího čísla**. Žák 14: „Nejdříve jsem si spočítal ty nejlehčí příklady jako 11 = 11 + 0 + 0, aby se mi vyřadila nějaká čísla. Pak tipuju.“

Konstatuji, že tato strategie je shodná s „mojí“ řešitelskou strategií „vybrat největší číslo“ a hledat k němu další dva sčítance.

Pět žáků na tuto otázku neodpovědělo.

Domnívám se, že je pro žáky velmi obtížné popisovat své myšlenkové procesy, zejména když o nich s nimi nikdo nediskutuje. Neznají slova a obraty, kterými by je uchopili. Věřím, že častá třídní diskuse o různých postupech řešení je to, co zvyšuje dovednost popisovat mentální procesy.

[5] Žákům jsem řekla, že mají zadání zformulovat pouze u černobílé úlohy.

Zbývající tři žáci neodpovídali na otázku, jak úlohy řešili, ale jak postupovali při vytváření vlastní úlohy v tomto prostředí. Bylo to způsobeno tím, že jsem se na řešitelský postup zeptala až posléze, co jsem je vyzvala, aby zkusili vymyslet vlastní úlohy.

žák	
1.	První jsem si do všech příkladů vypsala obdélníky. Potom si náhodně vyberu druhé číslo, aby obě čísla dávala dohromady menší nebo stejné. A nakonec jsem si dopočítala, jaké musí být poslední číslo.
2.	Snažila jsem se najít příklad, který mi dává výsledek, který je už zadán.
3.	1) Nejdříve jsem si dopsala do obdélníků čísla. 2) Zkoušela jsem dávat do trojúhelníků a kruhů, aby mi vyšel správný výsledek.
4.	Vzal jsem 3 čísla ze zdola. Vypočítal. Když vycházelo, dal jsem to nahoru. Když nevycházelo, vyměnil jsem čísla.
5.	Koukla jsem se na čísla dole a jedno číslo jsem napsala, a pak jsem dopočítala zbytek.
6.	Tipoval jsem a dopočítal jsem.
7.	Tipoval jsem si čísla, a pak jsem je doplňoval. Nakonec jsem je dopočítal
8.	**Jak vytvářela úlohy**: Nejdříve jsem si napsala ty 13 a to =, pak ty obdélníky a + potom kosočtverce a zase +, a pak trojúhelníky, a pak jsem si tam doplňovala ty čísla. Potom jsem to opsala dolů a vygumovala ty čísla, co jsem si doplnila nahoře.
9.	**Jak vytvářela úlohy:** Nejdříve jsem si vymyslela číslo (9, 6). Pak jsem si napsala geometrické tvary. Do nich jsem napsala čísla, aby to vycházelo. Když mi to vycházelo, přepsala jsem úlohu.
10.	-
11.	Tyto úlohy jsem řešila takhle. Nejdříve jsem se podívala na čísla a výsledky. No a potom jsem rovnou psala výsledky.
12.	–
13.	**Jak vytvářel úlohy:** Já jsem vytvořil obdélníky, trojúhelník a kolečka. Potom jsem si napsal výsledky do sešitu a vytvořil jsem geometrické útvary s čísly.

14.	Nejdříve jsem si spočítal ty nejlehčí příklady jako 11 = 11 + 0 + 0, aby se mi vyřadila nějaké čísla. Pak tipuju.
15.	Nejdříve jsem napsala čísla do čtverečků, a potom jsem počítala, jaké číslo by se tam hodilo.
16.	-
17.	Střílím. Vezmu si jedno číslo, pak druhé a zkusím dosadit třetí.
18.	-
19.	-
20.	Zkoušela jsem, která čísla se tam hodí.

Vlastní tvorba úloh

Samotná tvorba úloh či formulace zadání je dobrým nástrojem na prohloubení porozumění danému problému, či nástrojem diagnostiky hloubky žákova porozumění.

V tabulce, do které jsem uspořádala zadání úloh, které zformulovali žáci, můžeme pozorovat, že vymyšlené zadání je ve většině případů spíše „popis“, jak má být úloha řešena.

Myslím, že je to způsobeno tím, že žáci nemají zkušenosti s úkolem tohoto typu.

žák	
1.	Útvary s čísly doplňte do horních příkladů, aby byly správně.
2.	Musíme přeřadit symboly na správná místa
3.	Musíme přiřadit správné tvary na správná místa.
4.	Vezmi dole tvary s čísly a dej je do stejných tvarů, jako ve kterých je číslo.
5.	Z dolní půlky papíru vyber třeba 11, že se rovná 11 + 0 + 0
6.	Trojúhelník přiložíme k trojúhelníku atd. Příklad musí dávat smysl.
7.	Doplňování čtverců, trojúhelníků a kruhů.
8.	-
9.	Bude se doplňovat čtverec do čtverce, kruh do kruhu atd., aby to dohromady dalo 11
10.	Vymyslet příklad
11.	V kruhu, v čtverci a trojúhelníku máš čísla, která použiješ v nedoplněném kruhu a v čtverci a v trojúhelníku.

12.	Do těch prázdných políček napište čísla, která jsou dole, a musíte udržet správné tvary.
13.	Vymyslete příklad, jehož součet by byl 11.
14.	Napiš čísla ze spodních obrázků do horních tak, aby byl součet vždy 11.
15.	Do čtverečků, trojúhelníkům a kruhů se dají čísla dole, ale aby to vycházelo.
16.	To, co je dole se dá nahoru do těch příkladů.
17.	Dosadit čísla ze stejného tvaru, aby výsledek byl správný.
18.	-
19.	-
20.	Čísla, která jsou v trojúhelníku, kruhu a obdélníku se nahoru doplňují.

Někteří studenti Pedagogické fakulty UK v Praze, kteří vyplňovali dotazník (viz **příloha 1**), zformulovali dle očekávání výstižnější zadání úloh. *Zajisté je to tím, že mají v matematice více vědomostí a zkušeností.*

Příklady studentského znění zadání:

„Dosaď do rovnic čísla tak, aby platila rovnost. Každý útvar můžeš použít jen jednou.“

„Doplňte do rovnic čísla podle barev/tvarů tak, aby byl výsledek správný.

„Doplňte čísla, která z příkladu vypadla.“

„Do prázdných políček napiš čísla, aby byl součet 10.“

„Přiřaďte podle společných znaků (barev ne obrazců) čísla do úloh, aby platila rovnost.“

„Doplň čísla pod úlohou do příkladů 10 = □ + △ +❍, povinností je dodržovat tvary a čísla.“

Posouzení obtížnosti „barevné“ a „černobílé“ varianty

Z odpovědí žáků na otázku, která úloha se jím řešila lépe, zda „barevná“ nebo „černobílá“, vyplynulo:

- Třem z nich se zdála jednodušší „černobílá“ varianta. Odpovídali, že pro ně byla lehčí, nebo že se v ní lépe hledalo.

Žákyně 3. odpověděla: „Lépe se mi řešily geometrické tvary, protože jsem lépe viděla, který je který.“

- Pěti žákům se zdála lepší barevná varianta. Uváděli, že se jim v ní lépe hledalo či že si nemuseli dávat pozor na tvary.

- Dva žáci nepreferovali žádné ze zadání

- Jedenáct žáků na otázku neodpovědělo. *Myslím, že to bylo způsobeno tím, že tuto otázku vyslechli na začátku experimentu a zapomněli na ni, neměli ji nikde napsanou.*

žák	
1.	Lépe se mi řešily příklady s geometrickými tvary, protože se mi to lépe hledalo.
2.	Lépe se mi řešily s barvami. Lépe se mi v nich hledalo.
3.	Lépe se mi řešily geometrické tvary, protože jsem lépe viděla, který je který.
4.	Lépe se mi řešila barevná.
5.	Líp se mi počítalo s barevnými kruhy.
6.	-
7.	-
8.	-
9.	Žádná se mi neřešila lépe.
10.	-
11.	Všechny úlohy se mi řešily dobře.
12.	-
13.	-
14.	Lépe se mi řešila barevná úloha, protože se nemusím dívat na tvary.
15.	-
16.	Lépe se mi dělaly barevné trojice.
17.	Líp se mi dělaly geometrické tvary, protože byly lehčí.
18.	-
19.	-
20.	-

Způsob záznamu „použitých“ čísel

Dále jsem v odevzdaných úlohách sledovala způsob, jakým si žáci zaznamenávali, že s danými čísly již počítali, napsali je do „úloh na sčítání“. Většina žáků čísla poté, co je dosadila, škrtala. Někteří si je „fajfkovali“ či kroužkovali. Tři žáci čísla spojovali. Jeden žáka v „černobílé“ úloze použil k označení „fajfky“, hvězdičky a vlnovky, podle toho, ve kterém geometrické útvaru čísla byla. Jeden žákovský řešitel neměl potřebu si použitá čísla nějakým způsobem označit.

Řešení úlohy se zadáním

17 žáků řešilo i úlohu se zadáním. Jen jeden z nich ji nevyřešil. 16 žáků si označovalo použitá čísla stejně jako v předchozích dvou úlohách. Jeden řešitel čísla dle zadání spojoval. Z tohoto vyplývá, že žáci zůstali u svého způsobu řešení, i když v zadání bylo napsáno „spoj“.

11 žáků vyřešilo úlohu bez oprav. Zbylá skupina čísla přepisovala a opravovala.

Úlohy vymyšlené žáky

I když se žáci setkali s úlohami z prostředí „Barevných trojic“ poprvé, byli schopni po vyřešení dvou (tří) úloh vymyslet vlastní úlohu. Všichni žáci použili „černobílé“ zadání (geometrické útvary). Všechny úlohy jsem si prošla a zjistila, že ne všechny mají řešení. Než jsem začala úlohu řešit, spočítala jsem si nejdříve, jaký by měl být součet všech dvanácti čísel. Pokud se toto číslo nerovnalo zadanému součtu vynásobenému čtyřmi, úlohu jsem ani nezačínala řešit. Bylo hned patrné, že nemá řešení.

Z 30 úloh od 17 tvůrců má řešení 22 úloh. Nebylo pravidlem, že pokud jeden tvůrce vymyslel více úloh, že měly všechny řešení. Sedm žáků vymyslelo více než jednu úlohu a všechny úlohy měly řešení. Je zajímavé, že jeden z těchto sedmi žáků při řešení úloh bez zadání nevyřešil ani jednu správně, ale vymyslel řešitelné úlohy. Pět žáků vymyslelo dvě úlohy, z toho jedna měla řešení a druhá ne. Jeden žák vymyslel obě úlohy tak, že neměly řešení. Čtyři žáci vymysleli jen jednu úlohu, z toho dvě úlohy měly řešení, zbylé nešly vyřešit.

Většina žáků nechala stejné geometrické útvary jako v úlohách, které dostali k výpočtu. Pouze ve třech úlohách došlo ke změně tvarů. V jedné úloze byly kruhy vyměněny za kosočtverce, v druhé kruhy za kosočtverce a trojúhelníky za obdélníky a ve třetí trojúhelníky za obdélníky.

V úlohách, ve kterých nedošlo ke změně, pouze 4 žáci změnili pořadí útvarů. Jinak pořadí nechávali stejné, jako v zadaných úlohách. Zajímavé také bylo pozorovat, kolik žáků v „úlohách na sčítání“ zapomnělo mezi útvary napsat znaménko plus. Vyskytlo se to jen ve čtyřech případech. Některé z vymyšlených úloh najdete v ***příloze 7.***

Reflexe experimentu

Pro experiment jsem zvolila úlohy z druhého dílu učebnice Matematika pro 1. ročník ZŠ z nakladatelství Fraus. Úlohy byly pro žáky páté třídy z důvodu použití malých čísel jednoduché, ale i přes to mohli mít problémy s řešením, protože se s úlohami z tohoto prostředí setkali poprvé. I bez předloženého zadání všichni žáci pochopili, jak mají úlohu řešit.

V páté třídě většina žáků čísla nespojovala, ale označovala si jiným způsobem, která z nich již použila. *Nicméně nemohu tvrdit, že by takto žáci postupovali, i v případě, kdy by dostali úlohu se slovním zadáním.*

Znění zadání, které žáci vymysleli, nepovažuji ani tak za zadání, jako spíše za instrukce, jak úlohu řešit.

Po experimentu jsem usoudila, že by bylo vhodné, kdyby žáci k úlohám dostali i papír s otázkami, na které mají odpovídat. Jelikož jsem jim otázky říkala ústně a na jednu z nich jsem dokonce sama zapomněla a zadávala ji až v průběhu vyučovací hodiny, někteří žáci zapomněli tuto otázku zodpovědět.

Při experimentu jsem nejdříve neměla v plánu zadat žákům úkol, aby vymysleli vlastní úlohu. Jsem ráda, že jsem tento úkol připojila a získala tak žákovské úkoly z tohoto prostředí.

Kromě toho, že jsem jednu otázku pokládala až v průběhu experimentu a nenapadla mě možnost napsat všechny otázky na tabuli, jsem byla s průběhem experimentu spokojená.

9. Závěr

První cílem diplomové práce bylo proniknout do problematiky dvou matematicko – didaktických prostředí „Sousedé“ a „Barevné trojice“ a vytvořit vlastní úlohy v těchto prostředích.

V prostředí „Sousedé“ se mi tento cíl podařilo naplnit. Umím vytvořit úlohy v tomto prostředí pro žáky prvního stupně. Vím, jak platí „pravidlo čtveřice“ v případě, že daný součet dávají dohromady každá tři sousední políčka. Pokud se počet políček dávající daný součet zvětší, platí „pravidlo pětice“, ….

V prostředí „Barevných trojic“ jsem tento cíl splnila jen z části. Jsem schopná vymyslet vlastní úlohy s jedním řešením. Do problematiky úloh s více řešeními jsem zatím pronikla jen okrajově.

Domnívám se, že druhý cíl diplomové práce jsem naplnila. V experimentech jsem řešitelům předkládala úlohy z prostředí, se kterými se setkávali poprvé. Řešitelé byli schopni si s úlohami poradit. Někteří, především studenti Pedagogické fakulty UK, pronikli hlouběji do problematiky.

V prostředí „Barevných trojic“ jsem se zajímala, jakou roli v zadání hraje barva. Některým řešitelům se lépe počítaly barevně zadané úlohy, některým černobíle zadané úlohy. Pro mě samotnou je přehlednější barevné zadání i proto, že v něm nespatřuji výše rozebranou „chybu“.

Třetí cíl diplomové práce jsem naplnila jen z části. Zadávala jsem úlohy nejenom žákům prvního stupně, ale i studentkám Pedagogické fakulty UK v Praze. U některých úloh jsem srovnala způsoby řešení těchto dvou skupin či se zabývala tím, zda studentky byly schopny předpokládat, jak si s úlohou poradí žáci. Myslím, že by se danou problematikou dalo zabývat více do hloubky a provést podrobnější analýzu.

Materiály k vypracování diplomové práce jsem získávala během čtvrtého a pátého ročníku studia. Nasbírala jsem jich dostatek. Jejich zpracování mi zabralo více času a uvědomuji si, že by mohlo být provedeno podrobněji.

10. Literatura

- HEJNÝ, M.; JIROTKOVÁ, D.; SLEZÁKOVÁ – KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika 1.* 1. díl učebnice pro základní školy, Plzeň : Fraus, 2007a. ISBN 978-80-7238-626-0.
- HEJNÝ, M.; JIROTKOVÁ, D.; SLEZÁKOVÁ – KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika 1.* 2. díl učebnice pro základní školy, Plzeň : Fraus, 2007b. ISBN 978-80-7238-627-7.
- HEJNÝ, M.; JIROTKOVÁ, D.; SLEZÁKOVÁ – KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika 1.* příručka učitele pro 1. ročník základní školy, Plzeň : Fraus, 2007c. ISBN 978-80-7238-628-4.
- HEJNÝ, M.; JIROTKOVÁ, D.; SLEZÁKOVÁ – KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika 2.* 1. díl učebnice pro základní školy, Plzeň : Fraus, 2008a. ISBN 978-80-7238-768-7
- HEJNÝ, M.; JIROTKOVÁ, D.; SLEZÁKOVÁ – KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika 2.* 2. díl učebnice pro základní školy, Plzeň : Fraus, 2008b. ISBN 978-80-7238-769-4
- HEJNÝ, M.; JIROTKOVÁ, D.; SLEZÁKOVÁ – KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika 2.* 3. díl učebnice pro základní školy, Plzeň : Fraus, 2008c. ISBN 978-80-7238-770-0
- HEJNÝ, M., a kol. *Matematika 2.* příručka učitele pro 2. ročník základní školy, Plzeň : Fraus, 2008d. ISBN 978-80-7238-771-7
- HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., MICHNOVÁ, J., SLEZÁKOVÁ – KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika 3,* učebnice pro 3. ročník základní školy, Plzeň : Fraus, 2009a, ISBN 978 – 80 – 7238 – 824 – 0
- HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., MICHNOVÁ, J., SLEZÁKOVÁ – KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika 3,* pracovní sešit 1 pro 3. ročník základní školy, Plzeň : Fraus, 2009b, ISBN 978 – 80 – 7238 – 825 – 7
- HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., MICHNOVÁ, J., SLEZÁKOVÁ – KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika 3,* pracovní sešit 2 pro 3. ročník základní školy, Plzeň : Fraus, 2009c, ISBN 978 – 80 – 7238 – 826 – 4

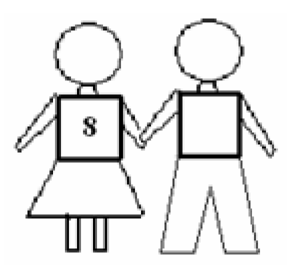
- HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ, D., MICHNOVÁ, J., SLEZÁKOVÁ – KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika 3* příručka učitele pro 3. ročník základní školy, Plzeň : Fraus, 2009d, ISBN 978 – 80 – 7238 – 827 – 1
- HEJNÝ, M. a kol., *Matematika 4* příručka učitele pro 4. ročník základní školy, Plzeň : Fraus, 2010a, ISBN 978 – 80 – 7238 – 943
- HEJNÝ, M., JIROTKOVÁ,D., BOMEROVÁ, E. *Matematika 4* učebnice pro 4. ročník základní školy, Plzeň : Fraus, 2010b, ISBN 978 – 80 – 7238 – 940 - 7
- HEJNÝ, M. a kol., *Matematika 4* pracovní sešit 1 pro 4. ročník základní školy, Plzeň : Fraus, 2010c, ISBN 978 – 80 – 7238 – 941 - 4
- HEJNÝ, M. a kol., *Matematika 4* pracovní sešit 2 pro 4. ročník základní školy, Plzeň : Fraus, 2010d, ISBN 978 – 80 – 7238 – 942 - 1
- HEJNÝ, M., *Budování matematických schémat* In HOŠPESOVÁ, A., STEHLÍKOVÁ, N., TICHÁ, M., *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice*, České Budějovice: Jihočeská Univerzita v Českých Budějovicich, 2007, ISBN 978-80-7394-052-2
- KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Teorie a praxe projektové výuky*. Brno : Masarykova univerzita, 2006. ISBN 80-210-4142-0
- MICHNOVÁ, J. *Pracovní karty pro Matematiku 1. ročníku základní školy*. Plzeň : Fraus, 2007
- SPILKOVÁ, V., *Proměny primárního vzdělávání v ČR*. Praha : Portál, 2005. ISBN 80-7178-942-9
- TICHÁ, B. *Individuální projekt v primární škole.* Praha : Pedagogická fakulta UK v Praze, 2009. Diplomová práce
- Dostupné na Webová stránka – Milan Hejný ‹http://www.dokumenty.webzdarma.cz›

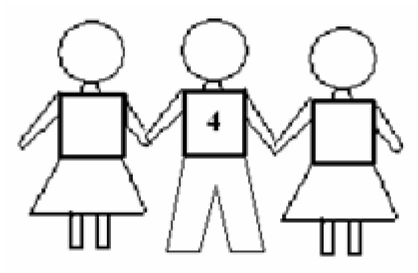
11. Přílohy

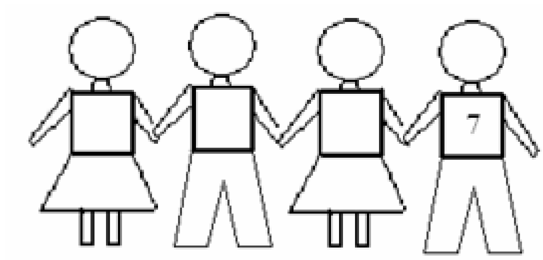
Příloha 1

Jméno:____________________

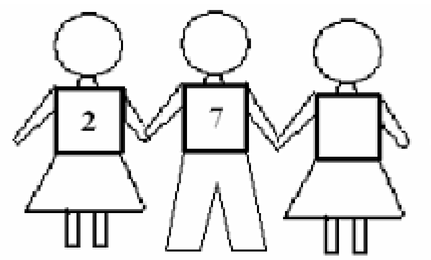
1. Doplň, aby součet dvou sousedních postaviček byl 15.

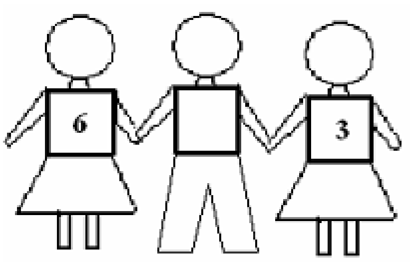


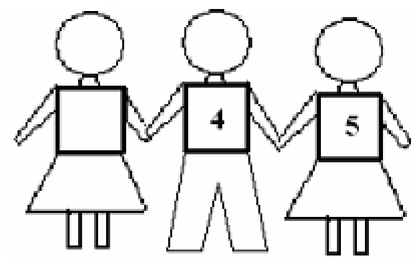




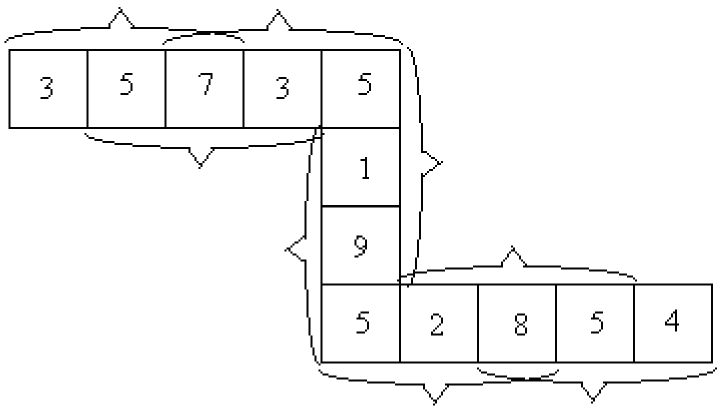
2. Doplň, aby byl součet tří sousedních postaviček 13.







3. Sečti tři sousední pole.



4. Doplň, aby součet tří sousedních políček byl 9.

A)

		4	3

B)

	5	1	

C)

1	7		

D)

3		5	

E)

	2		1

F)

6			5

Jméno:____________________

5. Doplň tak, aby součet tří sousedních políček byl 12.

	5				7
		5			2
3				1	

Jméno:____________________

6. Doplň tak, aby součet tří sousedních políček byl 10.

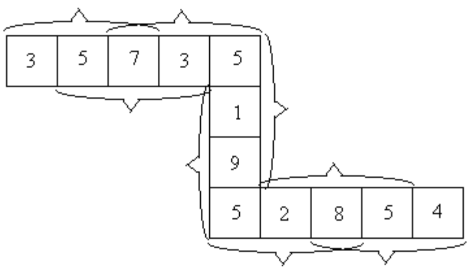
	3		6
			2
	1		

Jméno:____________________

7. Doplň tak, aby součet tří sousedních políček byl 15.

2		4							

Jméno žáka: Tvoje jméno:

Řešení	**Co sledovat.**	**Další poznámky**
Cv. 1 Součet dvou sousedních políček je 15. **8** *7* *11* **4** *11* *8* *7* *8* **7**	▪ Pořadí, ve kterém dítě doplňovalo čísla. _ **4** _ _ _ _ **7** ▪ Mělo dítě nějaký problém? A N ▪ V případě, že ano, tak jaký?	
Cv. 2 Součet tří sousedních políček je 13. **2** **7** *4* **6** *4* **3** *4* **4** **5**	▪ Řešil/a úlohy v daném pořadí? A N ▪ Trvalo mu/ji řešení přibližně stejně dlouho? A N ▪ Pokud ne, kde se zdržel (a proč)?	
Cv. 3 Sečti tři sousední pole. 	▪ Sčítal/a poctivě všechna pole.? A N ▪ Vypočítal správně poslední sousedy? A N	

Jméno žáka: Tvoje jméno:

<u>Cv. 5</u>

Součet tří sousedních políček je 12.

3	**5**	*4*			**7**
6		**5**			**2**
3		*3*	*8*	**1**	*3*
3					

- Jak dlouho trvalo, než začal/a úlohu řešit?
- Kde začal/a řešit úlohu? (označ křížkem)
- V jakém pořadí psal/a čísla?

	5				**7**
		5			**2**
3				**1**	

- Měl/a s řešením problémy? A N
- V případě, že ano, tak jaké?

<u>Cv. 6</u>

Součet tří sousedních políček je 10.

6	**3**	*1*	**6**
*			**2**
•			*2*
6	**1**	*3*	*6*

Úloha má více řešení

*	0 1 2 3 4
•	4 3 2 1 0

- Jak dlouho trvalo, než začal/a úlohu řešit?
- Kde začal/a řešit úlohu? (označ křížkem)
- V jakém pořadí doplňoval/a čísla?

	3		**6**
			2
	1		

- Přišel/a na to, že má úloha více řešení?
  A N
- Kolik řešení našel/a?
- Jak dlouho se přibližně úlohou zabýval/a?

Cv. 7 Součet tří sousedních políček je 15. **2** | *9* | **4** | *2* | *9* | *4* | *2* | *9* | *4* | *2* Ve 20. políčku: 9 Ve 30. políčku: 4 Ve 40. políčku: 2 V 100. políčku: 2	▪ Jak dlouho trvalo, než začal/a úlohu řešit? ▪ V jakém pořadí doplňoval/a čísla? **2** | | **4** | | | | | | | **Výzva:** ***Uměl/a bys přidat další políčka a doplnit je?*** ***Jaké číslo by bylo ve 20., …100. políčku?*** ▪ Jak postupoval/a?

Příloha 2

1. Doplň, aby byl součet dvou sousedních políček 5.

2	

	4	

			2

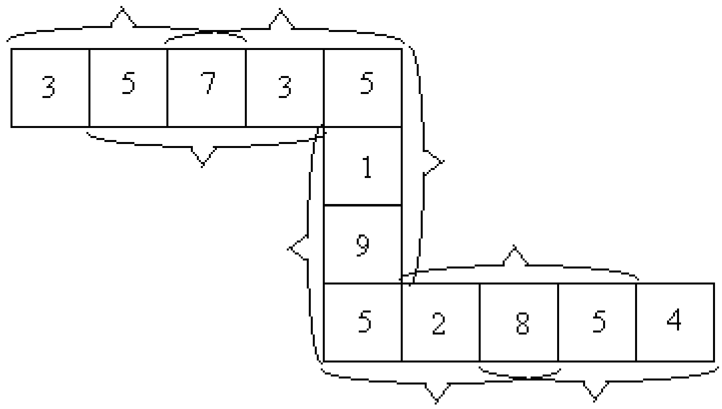
2. Doplň, aby součet tří sousedních políček byl 15.

2	7	

	4	5

6		3

3. Sečti tři sousední pole.



4. Doplň, aby součet tří sousedních políček byl 8.

4	1		

	5	2	

		4	3

3		1	

	2		5

2			2

5. Doplň, aby byl součet tří sousedních políček 11.

2		7				

			5	2		

8			8			

7		3				8

7							2

6. Součet tří sousedních políček je 8. Doplň chybějící čísla.

	1		4
			2
		1	

7. Doplň tak, aby byl součet tří sousedních políček 6. *(Úloha od profesora Hejného.)*

	2			
				1
1				
	3			

8. Doplň, aby součet čtyř sousedních políček byl 20.

4		5	6												

					3	4	5								

		3											8		7

9. Doplň, aby byl součet tří sousedních políček roven 14.

7		8													

10. Součet tří sousedních políček je 9. Doplň chybějící čísla.

	1	5													

Které číslo by bylo ve třicátém políčku?

Měla by úloha řešení, kdyby v prvním poli bylo číslo 3 a ve čtyřicátém políčku bylo číslo 5?

Otázky ke cvičením

Cvičení 3

- Doplnila jsi u posledních sousedů automaticky 15?
  ANO NE

- Jak myslíš, že by úlohu řešily děti?

Cvičení 4

- Jak myslíš, že by byly tyto úlohy obtížné pro děti? – Přiřaď k úlohám čísla podle obtížnosti (1…nejlehčí, vyšší číslo… těžší). Pokud si ti zdají úlohy stejně těžké, přiřaď jim stejné číslo.

- Spokojila ses u **poslední úlohy** s jedním řešením?
  ANO NE

- Pokud ne, hledala jsi další řešení hned (při prvním zabývání se úlohou)?

- Kolik řešení jsi našla?

- Jak myslíš, že by si s touto (poslední) úlohou poradily děti?

Cvičeni 5

- Kolik jsi u **třetí úlohy** našla řešení?

- Považuješ za jiné řešení, když čísla v políčkách pouze přehodíš?
  ANO NE

- Došlo ti hned, že **čtvrtá úloha** nemá řešení?
  ANO NE

- Pokud ne, jak dlouho ses ji pokoušela řešit?

- Odhadni, jak dlouho ses zabývala **pátou úlohou**?

Cvičení 7

- Přišla jsi na to, že úloha nemá řešení?
  ANO NE

- Odhadni, jak dlouho ses úlohou zabývala?

- Které číslo by se muselo změnit, aby úloha řešení měla?

Cvičení 8

- Měla jsi problémy s řešením úloh?
  ANO NE

- Jak si postupovala při řešení **poslední úlohy**? (Postup napiš v tom případě, že není patrný z řešení.)

Cvičení 9

- Byl tvůj závěr, že úloha nemá řešení?
  ANO NE

- Upřesnila jsi, v jakém oboru čísel nemá řešení?

Cvičení 10 (týká se otázek)

- Pokud z tvého řešení není patrný postup, popiš jej.

- V které třídě myslíš, že by se tato úloha mohla zadat?

Příloha 3

Na úvod hodiny jsem měla připravené následující úlohy:

1. Doplň čísla, aby součet každých dvou sousedních čtverečků byl 8.

5		
Iva	Dáša	Sylva

2. Doplň čísla, aby součet každých dvou sousedních čtverečků byl 7.

		3	
Iva	Dáša	Sylva	Martina

3. Doplň čísla, aby součet každých tří sousedních čtverečků byl 10.

3		5

(Tuto úlohu jsem vypustila. Nechtěla jsem odebírat jeden čtvereček, „spolužačku držící papír s číslem“, když jsem ji ve druhé úloze přidala. Také jsem chtěla úvodní část zkrátit, protože žáci nebyli klidní, hlučeli a měla jsem pocit, že jsem je příliš nezaujala.)

4. Doplň čísla, aby součet každých tří sousedních buněk byl 10.

2	5		

5. Stejné zadání jako u čtvrté úlohy.

3		5	

Hlasový záznam

Nejprve jsem se s žáky pozdravila: „Tak se ztište. Dobrý den, já vás tady vítám. Dneska povedu kroužek já a seznámím vás…*(Ve třídě začal někdo dělat zvuky. Spolužačka Klárka napomenula)* … s takovýma zajímavýma úlohama. A abyste pochopili, jak se … jak budete počítat, tak si to ukážeme názorně. *(Poslední slabiku jsem „spolkla.“)* Takovou hru.“

T[6]: „Ne.“

Da[7]: „Holky tady držej čísla *(ukazuji)* a vaším úkolem bude na prstech mi ukázat …číslo … ale kterým se dozvíte … tak … ukázat mi číslo na prstech, aby součet Ivy a Dáši dával dohromady osm. Jaký tady chybí číslo?“ *(Ukazuji na prázdný papír.)*

[6] „T“ znamená, že mluví někdo ze žáků.

T: „Trojka"

Da: „Na prstech. Nevykřikuj, jenom na prstech."

(Koukám na ruce žáků. Žáci ukazují 3.) „Ehm."

T: „To je lehký, jako …"

Da: „Tak schválně, jestli je to správně. *(Dáša odkrývá číslo.)*

T: „To je fakt ale lehký."

Da: „A teď tady *(Ukazuji zřejmě na právě otočené číslo na prázdný papír.)*, aby byl taky součet osm. Tak jaký musí mít Sylva číslo?"

T: „To je ale strašně lehký."

Da: „Někdo neukazuje, ale ….

T: „To je ale strašně lehký."

(Už téměř všichni ukazují pět prstů.)

Da: „Takže, všichni ukazují myslím, že pět…. Tak schválně, jestli je to správně.

(Sylva otáčí číslo.)

Tak jo. Teď si udělám jiný. Teď budou čtyři vedle sebe."

T: „Jo, já ještě." „ Já chci."

Da: „Sylva bude mít 3."

T: „Já budu mít pětku." „Já ho viděl" *(Zřejmě bylo vidět číslo, když jsem jej spolužačkám podávala.)* „Já…"

Da: „Tak zase součet … součet holek, které jsou vedle sebe …musí… dvou… musí bejt sedm. Tak jaké bude číslo u Dáši?"

T: „Ale já to vidím přesto to."

Da: „Ukažte mi to na prstech."

T: „Já vidím přesto… to číslo. Viděl jsem…."

Da: „Tak, jaké bude mít číslo Dáša?"¨

Iva: „Tak na to nekoukej."

T: „Čtyřku."

(Žáci ukazují čtyři prsty.)

Da: „Ehm…. Tak schválně, má čtyřku?"

(Dáša odkrývá.)

T: „Yes."

Da: „Ehm. A jaký bude číslo u Ivy, aby bylo součet Ivy a Dáši …"

T: „To bylo sedum?"

Da: Ehm.

T: „Vždyť to je támhle ta trojka." „To je lehký." „Já vim."

[7] Da znamená, že hovořím.

(Ukazují číslo tři.)

Da: „Ehm. Takže trojka. Super. Ukazujou." … A Martina bude mít? *(Ukazují číslo čtyři.)* Ehm. Tamhle někdo ukazuje špatně. *(Opravil se.)* Ehm. Tak super, schválně, jestli je to dobře. Tak jo."

T: „Yes." „Já to mám všechno dobře."

Da: „Ehm. Tak …a ještě teď zkusíme… teď to změníme. Teď necháme takhle čtyři…, ale už nebudete sčítat…

T: „ …, ale odčítat."

Da: …dvě sousedy, ale tři."

T: „Proč ne všechny? Třeba by, sousedy čísla …"

(Žáci začínají hlučet. Baví se mezi sebou. Vstávají. Spolužačka Klárka klukům vepředu říká, aby si sedli, že přes ně holky nevidí.)

Da: „Ty čísla musím najít."

T: „ A budeme dělat i něco jiného?"

Někdo ze spolužáků: „Jo, budeme."

(Žáci jsou neklidní. „Otrávení." Trvá mi poměrně dlouho, než vytvořím další úlohu.)

Da: Tak a schválně. Teď … holky mají číslo 2 a 5. Jaký by měla mít Sylva …číslo, aby byl součet deset? …"

T: „Oou." „Kvi, vi, vi." (Žáci vydávají různé zvuky.)

Da: „Aby číslo Ivy, Dáši a Sylvy dávaly dohromady deset."

(Ukazuji. Žáci dělají hluk.)

Da: „Ehm, správně ukazujou."

(Ukazují tři.)

Da: „ No, a jaké by bylo číslo u Marti, aby…"

T: „Aby to bylo…"

Da: „…aby zase tyhle tři *(Ukazuji.)* dávaly deset."

(Někdo ukazuje dvě. Chlapec vepředu ukazuje 5. Čekám, aby si promysleli.)

T: „Pět."

Da: „Tak jo. Tak já poprosím Nikolase, aby tady vybral *(Pokládám papíry s čísly na lavici.)* ty správný čísla a donesl je holkám. …"

T: „Já chci." „Já chci."

(Mezi žáky je opět hluk.)

Da: „Tak Honzíku… Součet tří musí bejt deset."

(Honzík přemýšlí.)

T: „Já už vím, … Já už vím, co tam mělo být."

Da: „Ehm. A co má Marťa mít za číslo?"

(Honza donesl čísla holkám. Nejdříve Sylvě a pak Martině. Žáci ukazují.)

Da: „Ehm. Souhlasíte s tím všichni?"

T: „Ne.“

Da: „Ne?“

(Žáci začínají čím dál více hlučet.)

T: „Dvanáct.“

Da: „Co dvanáct?“ *(Spolužačky se koukají na svá čísla.)*

T: „Aha, pět a tři je osm.“

Da: „Pět a tři je osm a 2 je?“

T: „Deset.“

Da: „Tak jo, teď jsem Vám představila takový prostředí, ve kterým budete počítat. Teď si sedněte každý do lavice. Jak jsme pracovali minule a předminule.“

(Ve třídě je ruch, dohadování.)

Da: „Honzíku, sedni se třeba tam k holkám.

(Honza rychle odchází pryč.)

Da: „Tak máte všichni svého kamaráda?

…

Tak máte všichni dvojici?“

(Rámus. Žáci i spolužáci si usedají. Rozdávám pracovní listy).

Výše zmíněný rozhovor a dění ve třídě trvalo něco přes pět minut.

Příloha 4

☐ žák/yně ZŠ	třída ☐	☐ student/ka Pedagogické fakulty UK	ročník ☐	☐ učitel/ka matematiky	stupeň ☐

1. Napište, co vás napadlo po zhlédnutí první ukázky. *(Oč jde.)*

2. Co si myslíte o úloze po zhlédnutí druhé ukázky.

3. Srovnejte úlohu A a úlohu B.

4. Zformulujte zadání k daným úlohám.

Příloha 5

Známka 4-

☐ žák/yně ZŠ — třída ☐

☒ student/ka Pedagogické fakulty UK — ročník 1

☐ učitel/ka matematiky — stupeň ☐

1. Napište, co vás napadlo po zhlédnutí první ukázky. *(Oč jde.)*

a) OBSAH nebo OBVOD je celem „10" ze všech těles

2. Co si myslíte o úloze po zhlédnutí druhé ukázky.

△ OBSAH nebo OBVOD jednotlivých částí těles pokaždé dá △ □ a ○ dohromady „10"

3. Srovnejte úlohu A a úlohu B.

3) je to vybarvené

4. Zformulujte zadání k daným úlohám.

Třem tělesům dej dohromady OBSAH nebo OBVOD „10"

Příloha 6

<table>
<tr><th>Řešení</th><th>Co sledovat.</th><th>Další poznámky</th></tr>
<tr>
<td>Cv. 1

Součet dvou sousedních políček je 15.
<table><tr><td>8</td><td>7</td></tr></table>
<table><tr><td>11</td><td>4</td><td>11</td></tr></table>
<table><tr><td>8</td><td>7</td><td>8</td><td>7</td></tr></table>
</td>
<td>▪ Pořadí, ve kterém dítě doplňovalo čísla.
(předpokládané pořadí)
<table><tr><td>1.</td><td>4</td><td>2.</td></tr></table>
<table><tr><td>3.</td><td>2.</td><td>1.</td><td>7</td></tr></table>
▪ Mělo dítě nějaký problém?
A N
▪ V případě, že ano, tak jaký?
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Co sledovat		Další poznámky
1.	Žákyně doplňovala čísla v předpokládaném pořadí. Měla problém se sčítáním, nechápala, který příklad počítá	Problém byl už s úlohou 8 + 7. Rozložení čísla 7 na 2 a 5 (8 + 2 + 5). „Pomocnice“ ji k tomu musela hodně přivést.
2.	Žákyně doplňovala čísla v předpokládaném pořadí. Neměla problém. Šlo jí to a kreslí si. *(Ozdobný podpis. Smajlík u cvičení.)*	Také číslo 7 rozkládala, ale docela zvláště:“8 a 2 je 10, 2 si pamatuju… ááá…2 a 5 …7?!“ *(záznam spolužačky)* U druhé úlohy udělala nejdřív součet (15) všech tří. ~~Po té~~ poté opravila a sčítala čísla pouze ve dvou sousedních buňkách. Mezi postavičkami jsou ještě čísla 10 a 9. Nevím, co znamenají a spolužačka k nim nic nepoznamenala. U třetí úlohy je spolužačka položila otázku: „Jak jsi na to přišla?: Ž: „Je to tady. První dvě postavičky.“ Poznámky spolužačky: „Opsala to z prvního obrázku.“
3.	Žák doplňoval čísla v předpokládaném pořadí. S úlohami neměl problémy.	Dopočítával do desíti.
4.	Žákyně doplňovala čísla v předpokládaném pořadí. S úlohami měla problémy. „ U 2 úlohy měla problém vůbec pochopit, co se po ní chce. Nechápala 2 sousedy, když vidí 3 pole.“ *(záznam spolužačky.)*	-
5.	Žák doplňoval čísla v předpokládaném pořadí. S úlohami neměl problémy.	„Řeší 1. druhý, ale píše na 1.“ *(Záznam spolužačky.)* Nevím, zda to chápu dobře. Žák si řešil nejdříve druhou úlohu, ale pak vyřešil a zapsal první úlohu. Ve druhé úloze má doplněná čísla chybně. Místo čísla 11 doplnil 9. Myslím, že jde jen o numerickou chybu a ne o sčítání všech tří čísel. Součet všech tří čísel je 22. Třetí úloha je doplněna správně.
6.	Žák doplňoval čísla v předpokládaném pořadí. S úlohami zřejmě neměl problémy. *(Spolužačka nepoznamenala.)*	-
7.	Žákyně doplňovala čísla v předpokládaném pořadí. Neměla problém, ale přesto spolužačka poznamenala: „Musí si uvědomit, co znamená slovo sousední. Chvíli přemýšlí u 3. části, pak se ptá, zda může řešit odzadu, pak už nemá	„4 + 7, znovu si přečte zadání → už vyplňuje“*(Záznam spolužáčky)* Této poznámce nerozumím. Neví, proč sčítala 4 + 7.

	problém."	
8.	Žákyně doplňovala čísla v předpokládaném pořadí. S řešením neměla problém.	Cvičení řešila asi 9 minut. Přijde mi to docela dlouhý čas.
9.	Žák doplňoval čísla v předpokládaném pořadí. Měl s řešením úloh problém. V druhé úloze chtěl nejdříve doplnit čísla tak, aby součet tří sousedů dával 15. Ve třetí úloze doplnil první číslo (8) bez problémů. Pak chtěl dosadit 10 + 5 do prvních dvou polí.	Spolužačka zřejmě pomohla. Čísla jsou správně doplněna, ale v pracovním listě je patrné gumování Je patrné, že nepochopil zadání (součet každých dvou sousedních políček).
10.	Žákyně doplňovala čísla v předpokládaném pořadí. S řešením neměla problém.	„Když je uprostřed 4, budou na obou str. stejná č.. Jak to dělá?"*(Záznam spolužačky)* Žákyně si všimla, že v druhé úloze jsou v sousedních políčkách stejná čísla.
11.[8]	U druhé úlohy spolužačka zaznamenala, že doplňoval čísla současně. Myslím, že můžu napsat, že žák doplňoval čísla v předpokládaném pořadí. Obě čísla na jednou zapsat nelze.	„ 8 a kolik je 15.?" *(Záznam spolužáčky)* Žák čtvrté třídy použil dopočítání do 15.

[8] žák 4. ročníku

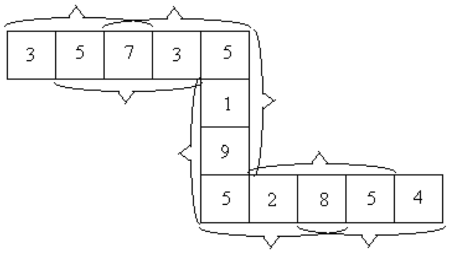
Cv. 2 Součet tří sousedních políček je 13. | **2** | **7** | *4* | | **6** | *4* | **3** | | *4* | **4** | **5** |	▪ Řešil/a úlohy v daném pořadí? A N ▪ Trvalo mu/ji řešení přibližně stejně dlouho? A N ▪ Pokud ne, kde se zdržel (a proč)?	

Co sledovat		**Další poznámky**
1.	Úlohy řešila přibližně stejně dlouho a v daném pořadí.	Úlohy řešila rychle.
2.	Úlohy řešila přibližně stejně dlouho a v daném pořadí. „Všude jsem doplnila 4.“	Po vyřešení úlohy si nakreslila smajlíka.
3.	Úlohy řešil přibližně stejně dlouho a v daném pořadí.	
4.	Úlohy řešila v daném pořadí. Druhá úloha jí trvala déle než první a třetí.	Na první okamžitě přišla. „2) Nemohla přijít, co bude uprostřed. Zřejmě zkoušela dosadit různá čísla, dokud nevyjde.“ *(Záznam spolužáčky)* Třetí také vyřešila hned.
5.	Řešil úlohy přibližně stejně dlouho a v daném pořadí.	-
6.	Řešil úlohy přibližně stejně dlouho a v daném pořadí.	-
7.	Úlohy řešila přibližně stejně dlouho a v daném pořadí.	Počítá: „ 2 a 7 je 9 a 4 je 13.“ U všech si říká nahlas. *(Záznam spolužáčky)*
8.	Úlohy řešila přibližně stejně dlouho a v daném pořadí.	Počítala asi minutu.
9.	Řešil úlohy v daném pořadí, ale nestejně dlouhou dobu.	U první úlohy doplnil nejdříve pětku. Pak vygumoval a napsal 6. (2 + 7 + 6 = 15) Součet měl být třináct. Asi si to špatně spočítal. Druhou úlohu měl nejrychleji. Největší problém dělala chybně vyřešená první úloha.
10.	Úlohy řešila přibližně stejně dlouho a v daném pořadí.	-
11.[9]	Úlohy řešil přibližně stejně dlouho a v daném pořadí.	-

[9] žák 4. ročníku

Cv. 3

Sečti tři sousední pole.



- Sčítal/a poctivě všechna pole.?
A N

- Vypočítal správně poslední sousedy?
A N

Co sledovat		Další poznámky
1.	Sčítala poctivě všechny „Sousedy“, a proto i poslední měla správně vypočtené.	-
2.	Sčítala poctivě všechny „Sousedy“. Poslední vypočítala správně.	Měla problém orientovat se podle svorek, která tři čísla má sečíst. Ž[10]: „Zase 15.“ S[11]: *(u posledních „Sousedů)* „Není to taky 15?“ Ž: „Ne, 17.“ „Tady jsem se zasekla.“ *(Nakreslila si smajlíka s rovným ústy.)* Spolužačka poznamenala, že jí to šlo dobře.
3.	Sčítal poctivě všechna tři sousední pole. Poslední „Sousedy“ spočítal správně.	„Hned u prvních udělal numerickou chybu. Opravil se.“ *(Záznam spolužačky)*
4.	Sčítala poctivě všechny „Sousedy“. Poslední vypočítala správně.	Počítala velmi pomalu. Nejistá.
5.	Sčítal poctivě všechna tři sousední pole. Poslední „Sousedy“ spočítal správně.	Počítal postupně podle svorek. „Proč? K čemu to bude? To už nebude nic jiného než patnáct. Ne? To je divné.“ (Předpokládám, že výše zmíněné říkal žák, ale z poznámek to není stoprocentně jisté.)
6.	Sčítal poctivě všechna tři sousední pole. Poslední „Sousedy“ spočítal správně.	-
7.	Sčítala poctivě všechny „Sousedy“. Poslední vypočítala správně.	-
8.	Sčítala poctivě všechny „Sousedy“. Poslední vypočítala správně.	Úlohu řešila asi tři minuty. Ž: „Konečně jiné číslo.“ (*Po vypočtení posledních tří sousedních polí.)*
9.	Sčítal poctivě všechny „Sousedy.“ Poslední vypočítal správně.	Žák nebyl schopen sledovat svorky a součty zapisovat na správné místo. „Chtěl mermo mocí sčítat roh. Nakonec spočítal 9.“ *(To je správně.) (Záznam spolužačky.)* Součet buněk v druhém rohu napsal přesně doprostředka svorky. Výsledek, který zde měl být, napsal před to. Součet posledních „Sousedů“ napsal nahoru místo ke správné svorce.
10.	Sčítala poctivě všechny „Sousedy“. Poslední vypočítala správně.	Ž: *(Při třetí patnáctce)* „Tam jsou samé patnáctky.“
11.[12]	Sčítal poctivě všechny „Sousedy, ale poslední nevypočítal	Spolužačka vyplnila, že sčítal poctivě všechny „Sousedy“.

[10] žákyně

[11] spolužačka

[12] žák 4. ročníku

	správně.	Nevím, zda to tak bylo. U posledních napsal součet 15. Nevím, zda ho spolužačka upozornila, že to má špatně, či si to uvědomil sám.

Cv. 4

Součet tří sousedních políček je 9.

A)	*3*	*2*	**4**	**3**	D)	**3**	*1*	**5**	*3*
B)	*3*	**5**	**1**	*3*	E)	*1*	**2**	*6*	**1**
C)	**1**	**7**	*1*	*1*	F)	**6**			**5**

Úloha F) nemá řešení

Změna čísla

5			5		6			6

Řešení

5	0 1 2 3 4	4 3 2 1 0	5		6	0 1 2 3	3 2 1 0	6

- Pořadí, ve kterém dítě doplňovalo čísla

(předpokládané pořadí)

A)	2.	1.	4	3	D)	3	1.	5	2.
B)	1.	5	1	2.	E)	2.	2	1.	1
C)	1	7	1.	2.	F)	6	1.	2.	5

- Řešil/a úlohy v daném pořadí?

  A N

- Zdržel se u nějaké z úloh A) – E)?
  A N

- Pokud ano, tak u které (proč)?

- Jak dlouho řešil/a úlohu **F)?**

- K jakému došel závěru?

- Zdůvodnění proč nemá řešení:

Výzva (*Pokud je závěr, že úloha nemá řešení a toto tvrzení je odůvodněné.*):

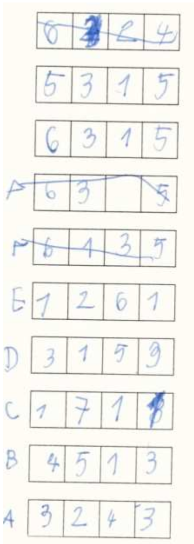
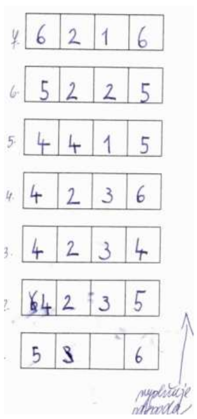
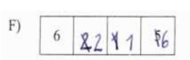
Změň jedno z čísel tak, aby úloha měla řešení a vyřeš ji. Dokázal/a bys najít řešení, kdybys změnila druhé číslo?

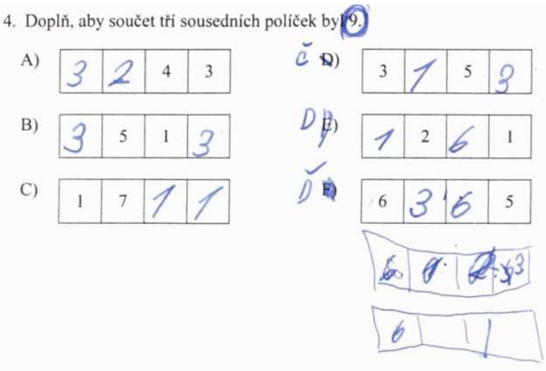
Jak postupoval/a?

Při diskuzi se spolužačkami a dr. Jirotkovou jsme se dohodli na vhodnější formulaci: Pokud Ti řešení stále nejde nalézt, zkus zadání upravit tak, aby ti vyřešit šlo.

<table>
<tr><th colspan="2">Co sledovat</th><th>Další poznámky</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Žákyně doplňovala čísla ve zvláštním pořadí. Doplnila nejdříve pouze jedny „Sousedy“. Ke druhým se ~~po té~~ poté vracela.
<table>
<tr><td>A)</td><td>7.</td><td>1.</td><td>4</td><td>3</td><td>D)</td><td>3</td><td>4.</td><td>5</td><td>6.</td></tr>
<tr><td>B)</td><td>2.</td><td>5</td><td>1</td><td>8.</td><td>E)</td><td>10.</td><td>2</td><td>5.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>C)</td><td>1</td><td>7</td><td>3.</td><td>9.</td><td>F)</td><td>6</td><td></td><td></td><td>5</td></tr>
</table>
(Červená čísla znamenají pořadí doplňování čísel.)</td>
<td>Úlohy řešila rychle až na F.
Spolužačka poznamenala, že se úlohy zalekla. (Pokud jsem sdělení dobře rozluštila.)
Úlohu F nevyřešila. Nedošla k žádnému závěru.</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>U úloh A a C doplňovala čísla v předpokládaném pořadí. Úlohu B a E řešila v opačném pořadí. (U ostatních úloh není pořadí zaznamenáno.)
Úlohy neřešila v daném pořadí (A, B, C, E, D).
Ž: „Přeskočila jsem.“ (Poznamenala, když si všimla, že na D zapomněla.)
Zdržela se u úlohy E.
Úlohu F řešila 5 min., během kterých zkusila tři pokusy. Došla</td>
<td>V úloze A se při doplňování prvního čísla spletla. Opravila si to.
Ž: „Taky 3.“ (Poznamenala po vyřešení úlohy B).)
Úlohu E nejdříve vyřešila chybně.
<table><tr><td>E)</td><td>7</td><td>2</td><td>6</td><td>1</td></tr></table>
Myslím, že k chybě došlo proto, že čísla</td></tr>
</table>

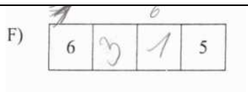
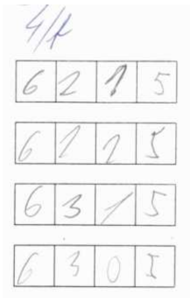
<table>
<tr><td></td><td>k závěru, že to nejde. Na zdůvodnění nezbyl čas.</td><td>nevyplňovala v předpokládaném pořadí.
Našla chybu a číslo 7 opravila na číslo 1.
Úloha D činila žákyni také problémy.
Úlohu řešila takto:
D) <table><tr><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>0</td></tr></table>Modře označená čísla dávají součet 9. Nevycházelo to. Opravila to takto
D) <table><tr><td>3</td><td>1</td><td>5</td><td>0</td></tr></table>, což také není správně.
Na potřetí úlohu bezchybně vyřešila.
Nakreslila si ke cvičení smajlíka, který se „kření.“</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Do úlohy A, C, D doplňoval čísla v předpokládaném pořadí. B a E v opačném. U úlohy F není pořadí poznamenáno.
Úlohy ve cvičení řešil v daném pořadí.
U žádné úlohy se nezdržel.
Úlohou F se zabýval asi pouze jednu minutu. Došel k závěru, že to nejde. Tento závěr nezdůvodnil.</td><td>„Dělá numerické chyby. Někdy je opraví, někdy ne. V matematice si moc nevěří, ale to, že to nejde, spočítal a zatím si stojí.“ (Záznam spolužačky)
U úlohy F spolužačka obloučkem naznačila, která sousední pole patří k sobě. Také je zakroužkovaný součet 9.</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Kromě úlohy B a F, u které není pořadí zaznamenáno, doplňovala čísla v předpokládaném pořadí.
Úlohy řešila v daném pořadí.
Zdržela se u úlohy B.
Úlohu F řešila si tři minuty. Došla k závěru, že to nejde, ale nezdůvodnila to.
„Pak jsme úlohu opustili, protože byla v koncích.“ (poznámka spolužačky)</td><td>(doslovný přepis poznámek spolužačky)
A) Opsala od sousedky Kiki. Stále příliš nerozumí zadání.
B) pomocí doplnění svorek začíná rozumět.
C – E) rychlost se zvyšuje
F) Doplní 2 a říká, že to nějak nevyjde. Zkouší hledat varianty, aby mělo řešení.
Nic neudělá bez kontroly pohledem k sousedce.
Nechápe, proč nejde, tak jsem se snažila úlohu upravit, aby šlo → byla natolik bezradná, že jsem úlohu raději opustila, že se k ní kdyžtak vrátíme → už se nestihlo</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>Žák čísla doplňoval v předpokládaném pořadí, vyjma úlohy A. U F není pořadí poznamenáno.
Úlohy byly řešeny v daném pořadí.
Zdržel se u úlohy A. Vracel se k ní a opravil. Tento problém byl způsoben tím, že začal vyplňovat nejdříve první buňku.
V úloze E udělal také chybu, ale hned si to uvědomil a opravil.</td><td>(doslovný přepis poznámek)
čte zadání 2x
při B se vrací k opravě A
tady musí být takové číslo, aby to dávalo … (K této poznámce je vedena šipka od úlohy D. Předpokládám, že to mohl říkat žák.)
F: to je těžké
tyhle čísla musí dávat dohromady tahle
6 a 1 = 7 (Za tím jsou ještě poznamenány čísla 8, 9, 10. Nenapadá mě, co znamenají.)
To je divný, to nejde
6→musí být 1 a 2 a to pak nejde s 5
→tady by musela být taky 6
(Předpokládám, že spolužačka zaznamenávala, co říkal žák.)
Žák úloh F upravil. Dal do první a poslední buňky číslo 6 a našel dvě řešení, (1, 2) a (2, 1).</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>Žák doplňoval čísla tak, že součet čísel ze všech čtyř čtverečků dával dohromady daný součet.</td><td>U úlohy F poznamenal:“Tady je 11. to musí být na mínus.“</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>V takto řešených úlohách doplňoval čísla v předpokládaném pořadí.
Po upozornění na špatný způsob řešení, počítá úlohy znova. Úlohu A vyřešil správně, v B chybně vyplňuje jedno číslo (místo 3 píše 4). Úloha C je vyřešená správně po opravě. Úlohy D a E jsou bezchybně.
.Úlohu F zkouší. Nejdříve dosazuje čísla 1, 3. Nevychází, a proto pokus škrtá. ~~Po té~~ poté doplní číslo 3, druhé již nedoplňuje a taky přeškrtává. V dalším pokusu doplní čísla 3, 1, což není také správně. V dalším pokusu píše místo 6 číslo pět a doplňuje úlohu
Nad tímto řešením je ještě jeden pokus, který je opět škrtnutý.

<table><tr><td>5</td><td>3</td><td>1</td><td>5</td></tr></table></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>7.</td>
<td>Žákyně doplňoval čísla v předpokládaném pořadí, pouze u E začala dosazovat opačně.
Úlohy řešila postupně od A do F. Zdržela ji úlohy E, protože nejdříve počítala od prvního políčka, ale každé tři sousední políčka s takto doplněnými čísly nedávali daný součet.
Chybné řešení škrtla a úlohu vyřešila, čísla doplnila v předpokládaném pořadí.
Úlohou F se zabývala asi 14 minut. Došla k závěru, že škrtne 5 na konci a dá tam 6.
Ani jednou neřekla, že to nejde, že úloha nemá řešení.

</td>
<td>K úloze F (přesný přepis záznamu spolužačky):
Ž: „Tady nevím, jaká čísla doplnit?“
S: „Jak to?“
Ž: „Když to vyplním od začátku, tak to jde až sem (k č. 5) a pak už to nejde.
S: „A dalo by se změnit zadaná čísla, aby to vyšlo?“
Ž: Obrátí 6 a 5, pak to zkusí tak, jak jsou, neví.
S: „Kdybys měla některé ze zadaných čísle nahradit za jiné, aby to vyšlo, co bys s tím udělala?“
Ž: zkusí 4 za 6 a 5 opíše, nevyjde to
S: „Co bys musela doplnit, aby to vyšlo?“
Ž: napíše řádek 3.
S: „Kdybys měla nechat jedno ze zadaných čísel a jedno změnit, aby to vyšlo?“
Ž: zapíše v ř. 4 nakonec 6 a na začátek 4 → nevyjde to
=> zkusí v řádku 5. napsat nakonec 5 a na začátek rovnou napíše 4 → nevyjde to
S: zasáhnu, říkám, že 5 na konci je v kleci a dopředu nic jiného vyplněného nemá, pak už to odzadu dopočítá s 5 i s 6, nakonec opraví zadání v úloze F</td>
</tr>
<tr>
<td>8.</td>
<td>Žákyně doplňovala čísla v úlohách v předpokládaném pořadí kromě B, kde pořadí bylo opačné. U úlohy F není pořadí zmíněno.</td>
<td>Úlohy A – E řešila asi tři minuty. Úlohou F se zabývala o minutu déle, a to 4 minuty.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>Úlohy řešila v daném pořadí a u žádné se nezdržela. Přepsala písmena u úloh D, E, F na Č, D, Ď, aby bylo podle abecedy a žádné písmeno nebylo vynecháno.
Úlohu F se pokoušela řešit, ale došla k závěru, že to nejde, protože 6 + 5 = 11 a ne 9.
Spolužačka nějakým způsobem zformulovala zadání „výzvy“. ~~Po té~~ poté změnila číslo na 3, protože 3 + 6 = 9.

</td><td></td></tr>
<tr><td>9.</td><td>Žák doplňoval čísla v opačném pořadí jen v úlohách B a E. V ostatních doplňoval čísla v předpokládaném pořadí.</td><td>Úloha C: Do posledního pole doplnil nejdříve 8, pak 2 a ~~po té~~ poté teprve správně 1.
Úlohu E počítal od 1. políčka. Číslo v třetím políčku zjišťoval tak, že dosazoval postupně čísla od ~~10 až~~10, až mu to vyšlo.
Úloha F:
Ž: „To nejde.“ (po 3 minutách)
Při hledání řešení pořád obměňoval a prohazoval dosazená čísla 2 a 1.
Nenašel odůvodnění, proč úloha nemá řešení.
S: „Jde to nějak změnit, aby to šlo?“
Ž: „Ne.“</td></tr>
<tr><td>10.</td><td>Žákyně doplňoval čísla do úloh v předpokládaném pořadí. Úlohy řešila v daném pořadí a u žádné se nezdržela. Úlohu F řešila 5 minut a došla k závěru, že ji neumí splnit.</td><td>Úlohu F řešila následovně:
6 + 2 + 1 = 9
5 + 1 + 2 = ne 9, ale 8
Ž: „Tak to nevychází.“
6 + 3 + 0 = 9
5 + 0 + 3 = 8

5 + 4 + 0 = 9
6 + 0 + 4 = 10
Je vidět, že se snaží najít řešení.
(zápis spolužačky) Splnila u F půl úlohy. Zeptala jsem se, jestli by změnila nějaké ze zadaných čísel a ona hned řekla, že by místo 5 dala 6.</td></tr>
<tr><td>11.[13]</td><td>Žák doplňoval čísla do úloh C a D v předpokládaném pořadí. V ostatních je začal doplňovat obráceně. U F není pořadí poznamenáno.
Úlohy řešil v daném pořadí. Problémy mu činily úlohy A a E, u kterých se zdržel. Úlohu F řešil asi 4 minuty.</td><td>V úloze A se spletl a počítal se čtyřmi políčky.
A)<table><tr><td>1</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td></tr></table></td></tr>
</table>

[13] Žák 4. ročníku

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
</td>
<td>
<table><tr><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td></tr></table>
S: „Proč je to takhle?“ (Ptala se na poslední možnost.)
Ž: „Protože mi to vychází u 2 3 4 3, tak to jenom prohodím.“
Úloha E:
Úlohu nejdříve vyřešil chybně
E) <table><tr><td>6</td><td>2</td><td>6</td><td>1</td></tr></table>
, protože si řekl: „2 a kolik je 9? – Šest. (Udělal numerickou chybu.) ~~Po té~~ poté počítal: 2 + 1 = 3, 3 a kolik je 9 – Šest.
Úlohu F se pokoušel vyřešit. Vyzkoušel několik číselných kombinací, ale bez úspěchu.
</td>
</tr>
</table>

Cv. 5

Součet tří sousedních políček je 12.

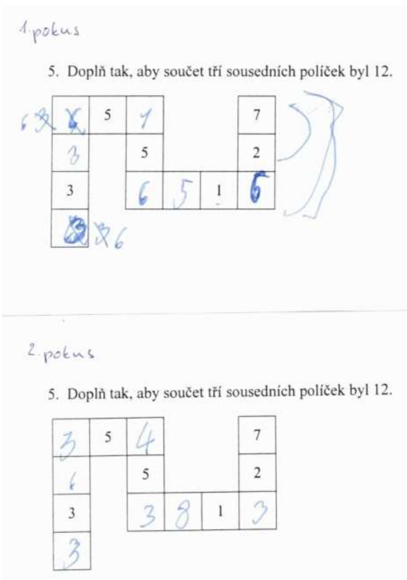
3	**5**	*4*			**7**
6		**5**			**2**
3		*3*	*8*	**1**	*3*
3					

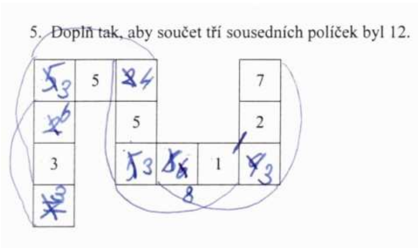
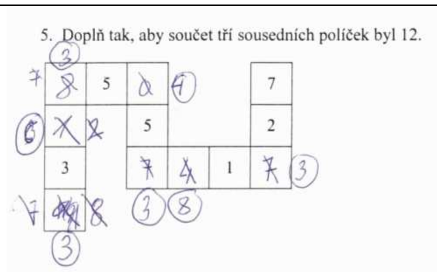
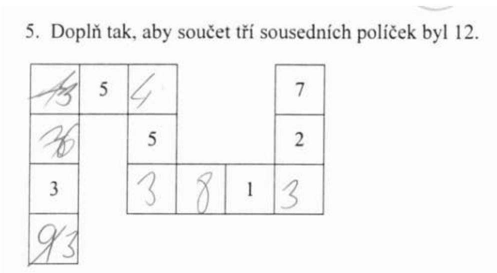
- Jak dlouho trvalo, než začal/a úlohu řešit?
- Kde začal/a řešit úlohu? (označ křížkem)
- V jakém pořadí psal/a čísla?

(Předpokládané a dle mého názoru nejvhodnější pořadí.)

5.	**5**	*4.*			**7**
6.		**5**			**2**
3		*3.*	*2.*	**1**	*1.*
7.					

- Měl/a s řešením problémy? A N
- V případě, že ano, tak jaké?

Co sledovat		**Další poznámky**
1.	Žákyně začala úlohu řešit hned a zabývala se jí 12 minut. Při prvním řešení začala doplňovat čísla od začátku, což je nevýhodné. Součty nevycházeli u každých tří sousedních polí. S řešením měla problémy.	Úlohu se pokoušela vyřešit, udělala více pokusů. Ani při pokusu, kdy začala čísla doplňovat od konce, úlohu nevyřešila. Dělala numerické chyby.
2.	Další úlohy už nestihla vyřešit.	-
3.	Žák neměl s řešením problémy, ale kvůli únavě ji nevyřešil správně.	„Už ho trochu unavuje, že je to stále to samé. Příliš se mu nechce.“ *(Záznam spolužačky)* Do čtvrté rohové buňky od začátku napsal podle spolužačky trochu bezmyšlenkovitě číslo 3.
4.	Žákyně začala úlohu řešit téměř okamžitě. Čísla začala doplňovat odzadu v předpokládaném pořadí. S úlohou měl trochu problém. Chtěla počítat přes roh a musela se znova zorientovat, když přes roh počítat neměla.	-
5.	Žák začal hned po přečtení zadání uvažovat. S řešením úlohy měl problém, protože začal čísla doplňovat odpředu. Součet v posledních buňkách nevycházel. Při novém, druhém pokusu začal již odzadu a úlohu vyřešil.  	Než začal s druhým pokusem, tak si ukazoval (perem naznačoval), které tři buňky bude sčítat. Potom naznačení škrtl a začal úlohu řešit na nový papír.
6.	Žák začal úlohu řešit hned. Čísla začal doplňovat odpředu.	-

	S úlohou neměl problémy, protože dosadil (ze začátku náhodně) správná čísla.	
7.	Úlohu začala řešit po té, co asi půl minuty přemýšlela. Čísla doplňovala odpředu. S úlohou měla problémy. „- už byla unavená → bylo to náročné sčítání, přechod přes 10 řešila rozkladem např. 6 + 4 = 10 a plus ještě 2 = 12 => 4 + 2 = 6 - když ji to na konce nevyšlo, nevěděla, jak to opravit“ *(přesný přepis záznamu spolužačky)*	
8.	Než začala žákyně úlohu řešit, uběhla asi minuta. S vyřešením úlohy měla problém. „Nevěděla, co přesně má počítat, kde má začít, které číslo zvolit.“ *(přesný přepis záznamu spolužačky)* Při prvním, neúspěšném pokusu začala čísla doplňovat od začátku. Při druhém pokusu začala od konce a úlohu vyřešila. 	Úlohou se zabývala asi 10 minut.
9.	Žák neměl s řešením úlohy problémy. Čísla začal doplňovat odzadu. Na číslo v šestém doplňovaném políčku, kam patří číslo 6, přišel dosazování a zkoušením čísel 4, 5, 6.	-
10.	Úlohu začala řešit hned. V prvním neúspěšném pokusu začala čísla doplňovat odpředu (8, 1, 8, …). V druhém pokusu doplnila čísla 7, 2. 7, 0, 7, 4, 7 ze stejné strany. Opět nevyšlo. Ž: „Zase celé znovu.“ S: „Tak zkus, zda by nešlo nějak jinak.“ Žákyně začala čísla doplňovat odzadu a úlohu vyřešila (zakroužkovaná čísla).	
11.[14]	Žák začal úlohu řešit hned. Čísla začal doplňovat zepředu. Úloha mu činila problémy, ale nakonec došel ke správnému řešení. 	Při prvním pokusu doplnil do prvního políčka 9 a pokračoval. Ž: „To nejde.“ V druhém pokusu začal doplňovat čísla 3, 3. Počítal 3 + 3 + 3 = 12 S: „Opravdu?“ Ž: „Ne, devět.“ I třetí pokus začal odpředu. Doplnil čísla 3, 6, 1. Domnívala se, že součet 12 musí vycházet i přes roh, ale 1 + 6 + 3 mu nevycházelo. Opravil.

[14] Žák 4. ročníku

Cv. 6

Součet tří sousedních políček je 10.

6	**3**	*1*	**6**
*			**2**
•			*2*
6	**1**	*3*	*6*

Úloha má více řešení

*	0 1 2 3 4
•	4 3 2 1 0

- Jak dlouho trvalo, než začal/a úlohu řešit?
- Kde začal/a řešit úlohu? (označ křížkem)
- V jakém pořadí doplňoval/a čísla?

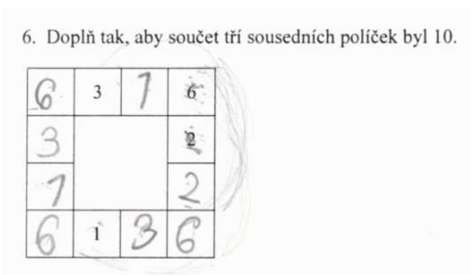
	3		**6**
			2
	1		

- Přišel/a na to, že má úloha více řešení?
  A N
- Kolik řešení našel/a?
- Jak dlouho se přibližně úlohou zabýval/a?

Co sledovat		**Další poznámky**
1.	S řešením úlohy začala asi po minutě. První číslo doplnila do levého horního rohu. Doplnila 6. Zda to bylo vědomě či náhodně, bohužel nevím. Přišla na to, že má úloha více řešení a našla tři řešení. Na pracovním listě má řešení (3, 1). Spolužačka do dotazníku vepsala ještě varianty (2, 2) a (1, 3). Žákyně se úlohou zabývala asi 4 minuty.	-
2.	-	-
3.	Žák začal úlohu řešit od třetího políčka zleva na spodní straně čtverce. Políčka doplňoval v následujícím pořadí:	„Když zjistil, že N. *(jeden ze spolužáků)* je pomalejší, hned měl více elánu. Po malých neúspěších ztrácí chuť. Zjistil, že začal špatně. Po 5. políčku postupuje bez přemýšlení. A vychází mu to.“

5.	**3**	*4.*	**6**
6.			**2**
7.			*3.*
8.	**1**	*1.*	*2.*

Nepřišel na to, že má úloha více řešení. Úlohou se zabýval si 7 minut.



4.	Úlohu začala řešit v pravém horním „rohu“ a čísla doplňovala v následujícím pořadí:	Třetí doplňované číslo jen tipla a náhodou jí to na konci vyšlo.

2.	**3**	*1.*	**6**
3.			**2**
4.			*8.*

5.	**1**	6.	7.

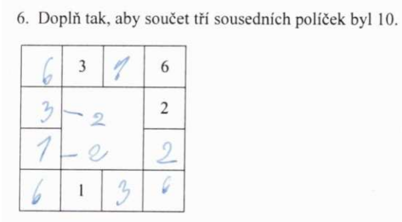
Žákyně nepřišla na to, že má úloha více řešení. Našla pouze jedno. Úlohou se zabývala 2 minuty. Spolužačka poznamenala, že velmi pomalu sčítá.

5. Žák řeší úlohu hned po přečtení zadání. Úlohu začal řešit na horní straně čtverce. První vyplnil druhou buňku od pravého „rohu“. | -

Čísla do buněk doplňoval v následujícím pořadí:

2.	**3**	1.	**6**
3.			**2**
4.			8.
5.	**1**	6.	7.

Objevil, že úloha má více řešení a našel dvě (3, 1) a (2, 2)



6. Žák čísla do čtverečků doplňoval ve stejném pořadí jako jeho spolužák s č. 5 (předcházející), začal ve stejné buňce. | -

Přišel na to, že úloha má více řešení a našel dvě (3, 1) a (2, 2).

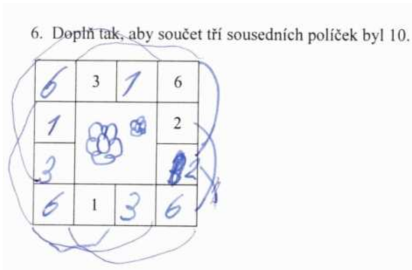
7. Tuto a další úlohu už nestihla řešit. | -

8. Žákyně se úlohou začala zabývat hned a měla ji během dvou minut vyřešenou. | -

Čísla doplňovala v následujícím pořadí:

7.	**3**	8.	**6**
6.			**2**
5.			1.
4.	**1**	3.	2.

Nepřišla na to, že má úloha více řešení.



9. Žák začal čísla do čtverečků doplňovat v následujícím pořadí:

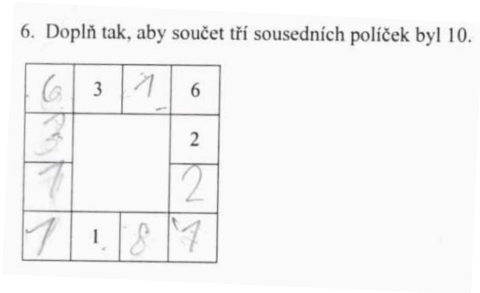
5.	**3**	1.	**6**
			2
			2.
6.	**1**	3.	4.

V třetím a čtvrtém doplňovaném políčku chtěl v řešení úlohy pokračovat a tak si tipnul a dosadil čísla 8 a 1.

Nepřišel na to, že úloha má více řešení. Úlohou se zabýval asi 8

Do buněk na levé straně čtverce doplnil nejdříve čísla 6, 2, 1, 1 (směr ze shora dolů). Druhá, konečná, ne však správná možnost byla 6, 3, 1. 1

minut, neobjevil správné řešení, ztrácí zájem.



10. Tuto a další úlohu už nestihla řešit. -

11.[15] Žák začal úlohu řešit hned. V prvním neúspěšném pokusu začal čísla doplňovat v tomto pořadí: -

5.	**3**	*6.*	**6**
4.			**2**
3.			
1.	**1**	*2.*	

V druhém, opět nesprávném řešení, vyplňoval buňky takto:

5.	**3**	*4.*	**6**
6.			**2**
7.			*3.*
8.	**1**	*1.*	*2.*

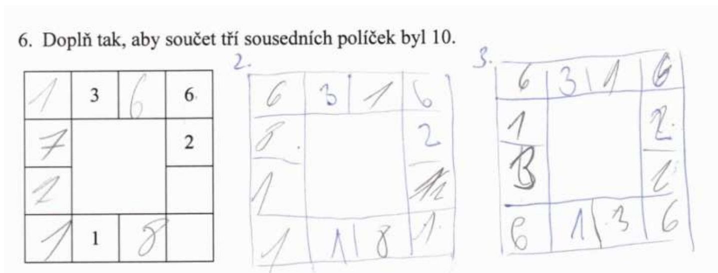
Spolužačka mu poradila, že je lepší začít tam, kde je více čísel u sebe.

7.	**3**	*8.*	**6**
6.			**2**
5.			*1.*
4.	**1**	*3.*	*2.*

V pátém vyplňovaném čtverečku musel číslo tipnout, protože v „Sousedech“ znal jen jedno číslo.

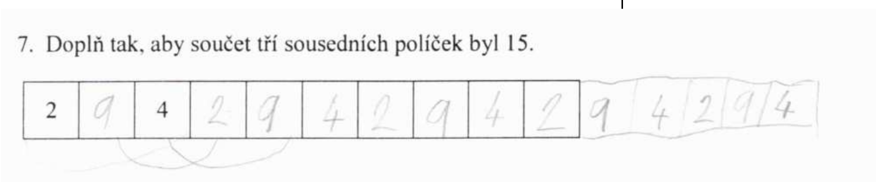
S: „Proč tam je 3 + 1?“

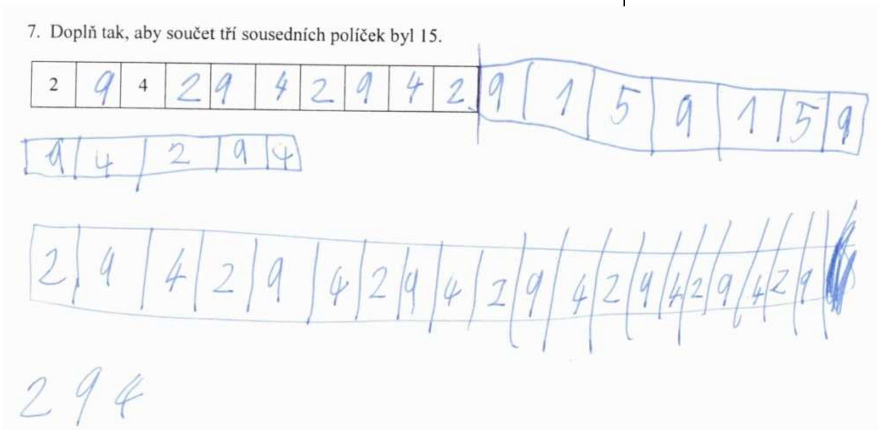
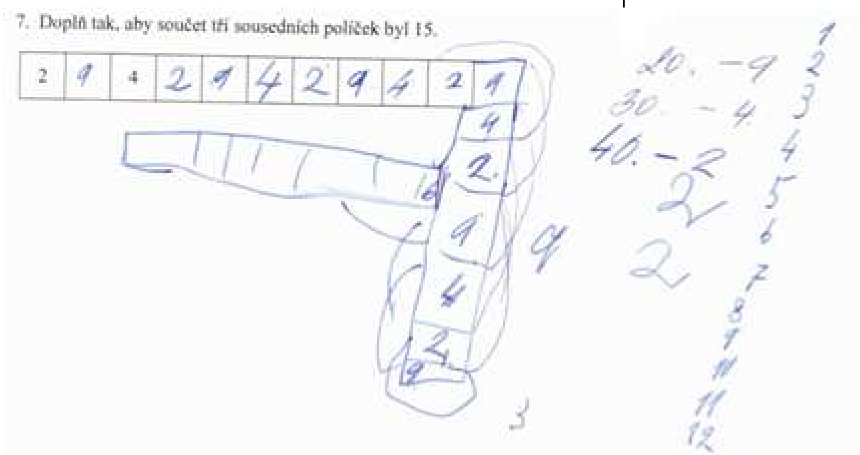
Ž: „Protože to musí být celkem čtyři.“ Myslím, že žák si začal všímat pravidelného střídání čísel.



15 Žák 4. ročníku

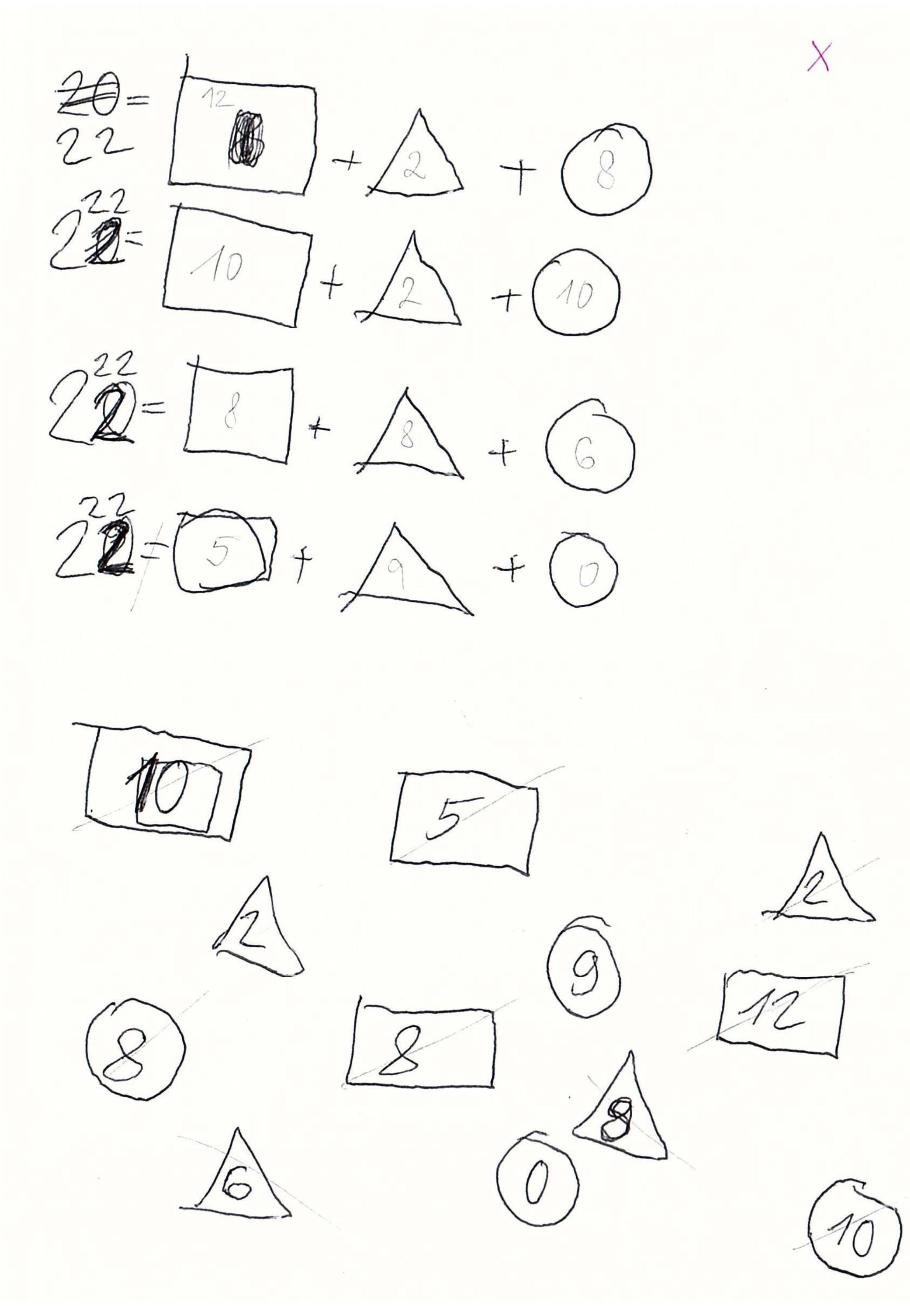
Cv. 7 Součet tří sousedních políček je 15. | **2** | *9* | **4** | *2* | *9* | *4* | *2* | *9* | *4* | *2* | Ve 20. políčku: 9 Ve 30. políčku: 4 Ve 40. políčku: 2 Ve 100. políčku: 2	▪ Jak dlouho trvalo, než začal/a úlohu řešit? ▪ V jakém pořadí doplňoval/a čísla? Předpokládám, že budou čísla dosazovat postupně od začátku. | 2 | . | 4 | | | | | | | | **Výzva:** ***Uměl/a bys přidat další políčka a doplnit je?*** ***Jaké číslo by bylo ve 20., …100. políčku?*** ▪ Jak postupoval/a?

Co sledovat		Další poznámky
1.	Žákyně začala úlohu řešit hned. Doplňoval čísla postupně od začátku. První tři „Sousedy“ si naznačila obloučkem. Uměla přidat další políčka a doplnit do nich čísla. Správně vyřešila, že ve dvacátém políčku bude číslo 9. Přidělala jen 5 políček, takže celkově jich bylo 15. Číslo ve dvacáté buňce musela vypočítat z hlavy. 	-
2.	-	-
3.	Žák doplňuje čísla v předpokládaném pořadí.	„Při zadání se ujišťuje, zda je tato úloha opravdu poslední.“ *(Záznam spolužačky.)* Na řešení výzvy už nezbyl čas.
4.	Žákyně začala čísla doplňovat v předpokládaném pořadí, ale vepsala čísla pouze do dvou čtverečků. Zbytek už nestihla dořešit, ale podle spolužačky pochopila princip, jak by doplnila ostatní buňky.	-
5.	Žák úlohu začíná řešit hned po přečtení zadání. Čísla od buněk doplňuje za sebou, jak jsem předpokládala. Uměl přidat a doplnit další buňky s čísly. K zadání však přidal jen jednu buňku. Jaké číslo bude ve 20. a dalším políčku počítal zpaměti či si psal čísla na zvláštní papír.	Ž: „Takhle to je stejný.“ *(ale přesto počítá)* … Ž: „Na 20. bude 2 *(, což není pravda)*, jde to za sebou. Na 10. je 2, takže na 20 bude taky 2.“ Spolužačka zřejmě navedla, že to tak není. Měl říkat číslo, které je v 11., 12, …, 20 políčku. Zjistil, že je to jinak. Došel k závěru, že se tam opakují stejná čísla (2, 9, 4) a další tam být nemohou. Na 10. políčku je dvojka, na 20. devítka, na 30. čtyřka. Došel ke správnému řešení.
6.	Než začal žák úlohu řešit, uběhla jen chvilka. Čísla doplňoval postupně dle předpokládaného pořadí. Předtištěné buňky vyplnil správně. Přidělal si dalších 7 buněk a začal doplňovat čísly. Nenavázal však na již doplněná čísla, a proto začal chybně dosazovat 9, 1, 5, 9, 1, 5, 9. Spolužačka zřejmě upozornila, že někteří „Sousedé“ nedávají požadovaný součet. Po té objevil, že se čísla v řadě opakují (2, 9, 4). Na prstech počítá a říká si 2, 9, 4. Zjišťuje, že na 10. políčku bude	

	číslo 2. Nakreslí si a doplní dalších třicet pět políček. V 95. políčku bude číslo 4. (?Odečetl od 10. políčka 5 políček.?)  	
7.	-	-
8.	Úlohu začala žákyně řešit hned. Čísla doplňovala postupně a v předpokládaném pořadí. Uměla doplnit přidaná políčka. Přečetla si čísla, co již napsala. Dopočítala a správně určila číslo na 20. políčku. Dál si říkala: „Na 21. by byla 4, …. Pak si zapsala číselnou řadu. Správně určila čísla na 30. a 40. políčku.  	Úlohou se zabývala 13. minut.
9.	Žák doplňoval čísla v předpokládaném pořadí. Po té, co mu spolužačka položila otázku, zda by uměl přidat další políčka a zjistit, jaká do nich patří čísla, se přečetl již doplněná čísla nahlas. Přišel na pravidelné opakování čísel. (Do této doby sčítal „Sousedy“ mechanicky.) Číslo ve 20. buňce zjišťoval tak, že si říkal trojice, až k němu došel. Žádný čtvereček s číslem k předtištěné úloze nepřipsal.	
10.	-	-
11.[16]	Žák úlohu začal řešit hned. Čísla doplňoval postupně v předpokládaném pořadí. Byl schopen přidat buňky a doplnit čísla. Na otázku „Jaké číslo by bylo v 20. políčku?“, řekl, že neví, že by si to musel napsat (vypsat řadu).	-

[16] Žák 4. ročníku

Příloha 7



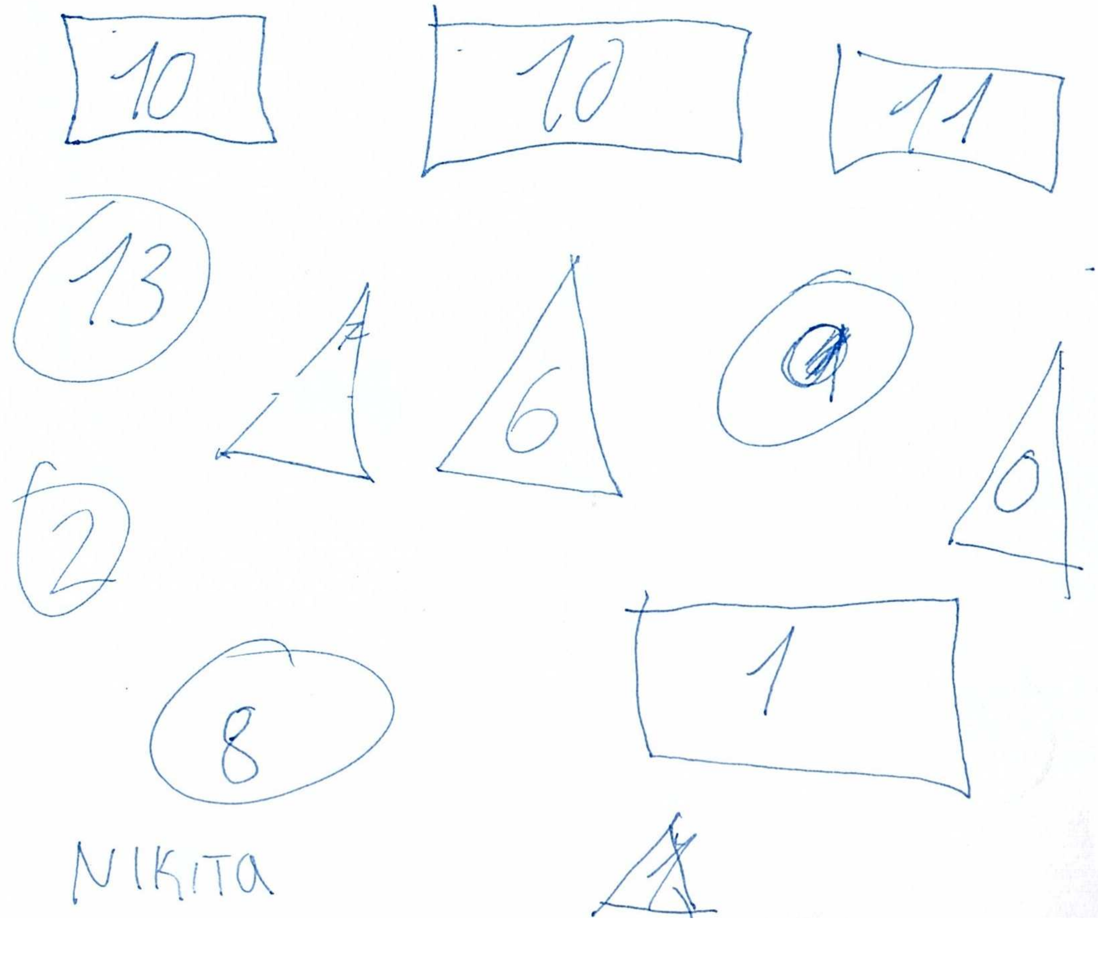
X

$20 = \square + \triangle + \bigcirc$

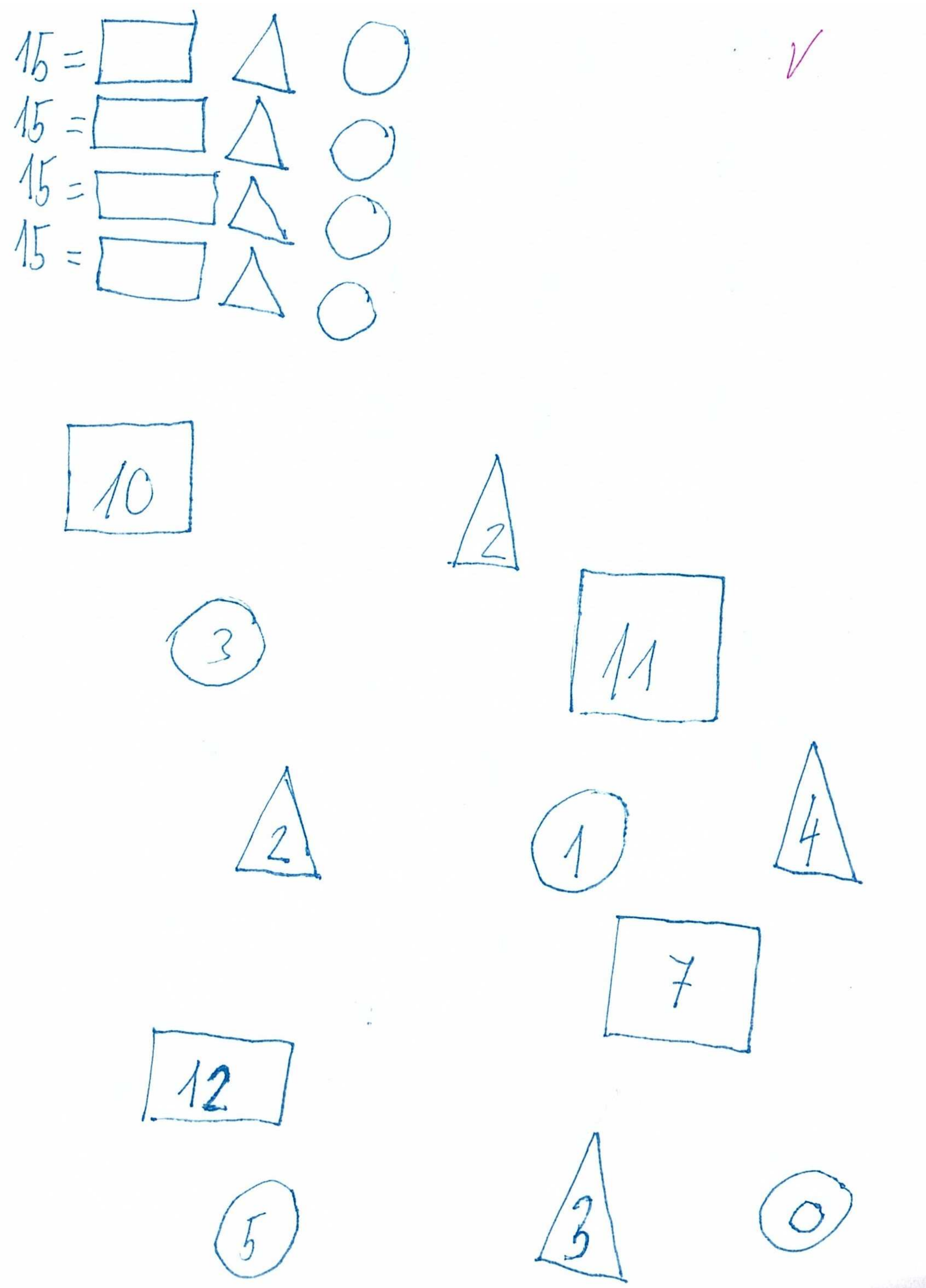
$20 = \square + \triangle + \bigcirc$

$20 = \square + \triangle + \bigcirc$

$20 = \square + \triangle + \bigcirc$



NIKITA


15 =
15 =
15 =
15 =
10
2
3
11
2
1
4
7
12
5
3
0

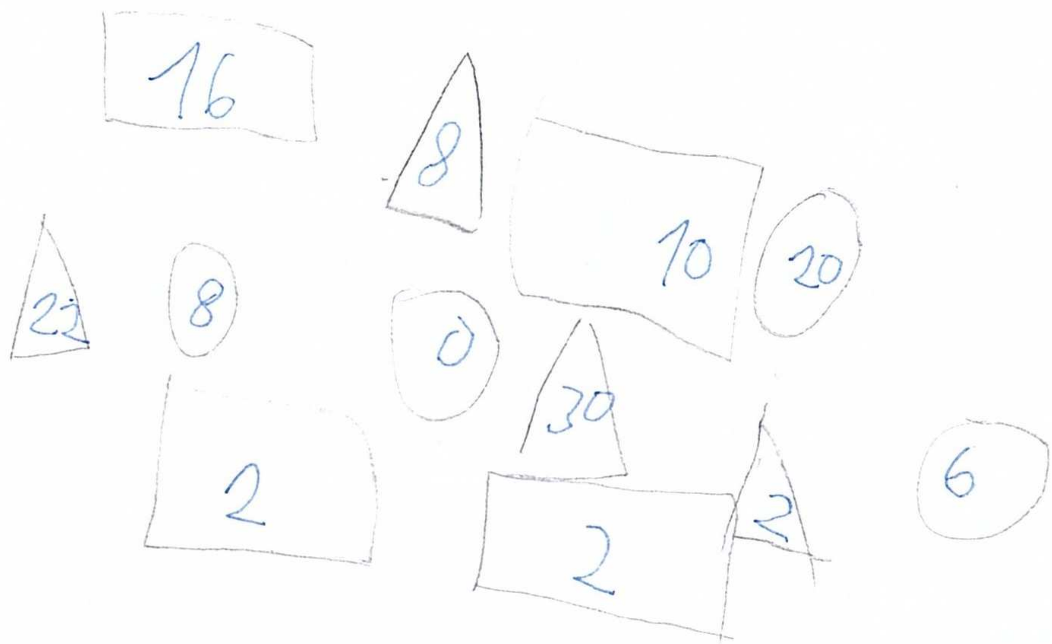
F

32 = □ + △ + ○

32 = □ + △ + ○

32 = □ + △ + ○

32 = □ + △ + ○



$15 = \triangle + \bigcirc + \square$

$15 = \triangle + \bigcirc + \square$

$15 = \triangle + \bigcirc + \square$

$15 = \triangle + \bigcirc + \square$

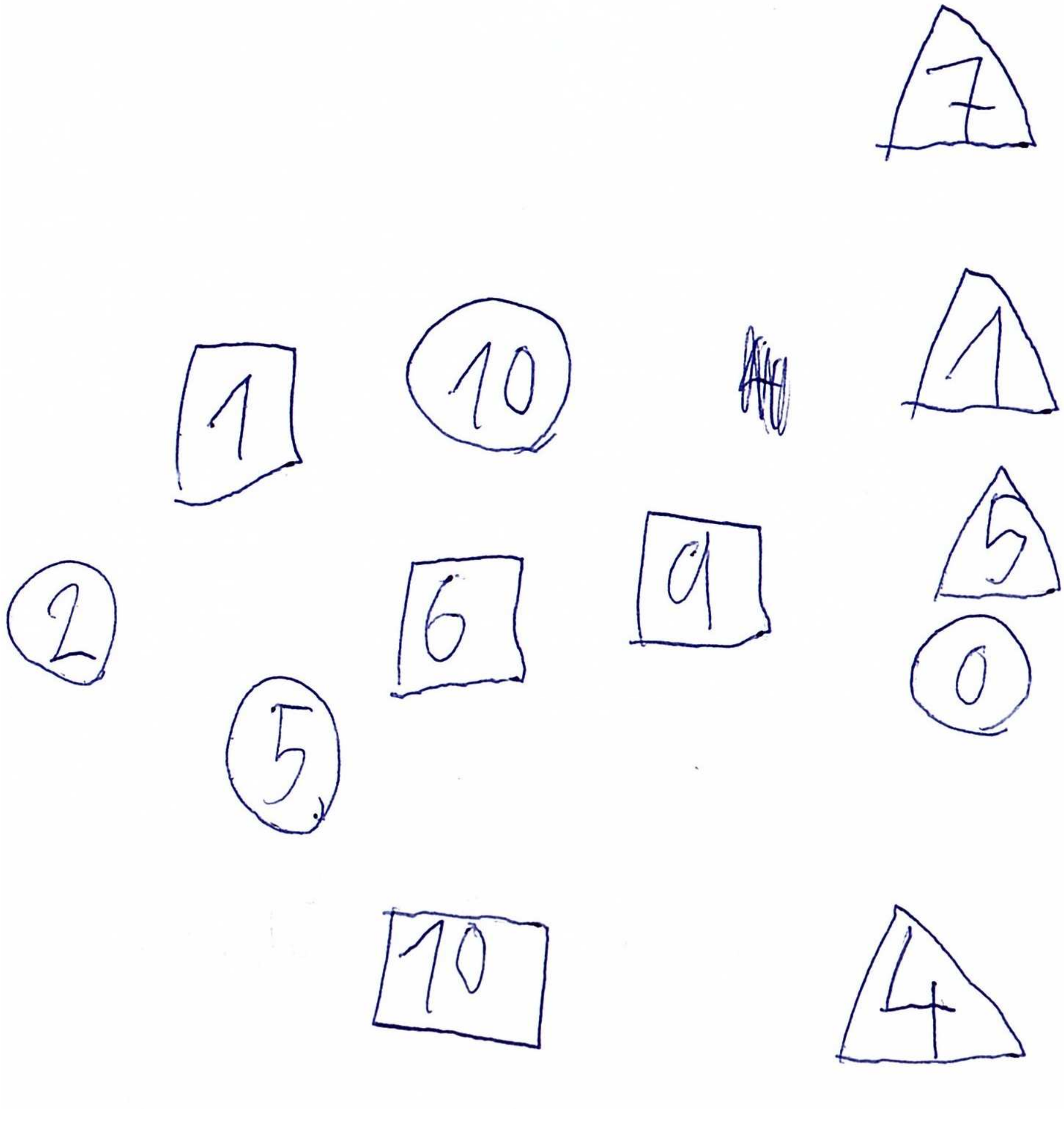
$\triangle 5$ $\quad$ $\bigcirc 3$ $\quad$ $\bigcirc 10$

$\square 8$ $\quad$ $\bigcirc 12$

$\square 11$ $\quad$ $\bigcirc 4$ $\quad$ $\square 0$

$\triangle 1$ $\quad$ $\triangle 0$ $\quad$ $\triangle 3$ $\quad$ $\square 3$

15 = □ + △ + ○
15 = □ + △ + ○
15 = □ + △ + ○
15 = □ + △ + ○



$18 = \square + \triangle + \bigcirc$ V

$18 = \square + \triangle + \bigcirc$

$18 = \square + \triangle + \bigcirc$

$18 = \square + \triangle + \bigcirc$

$\boxed{18}$ $\boxed{9}$ 8

11 7 $\boxed{12}$

1 0 4

$\boxed{0}$ 2 0

13 = [9] + [8] + [1]

13 = [ ] + [ ] + [ ]

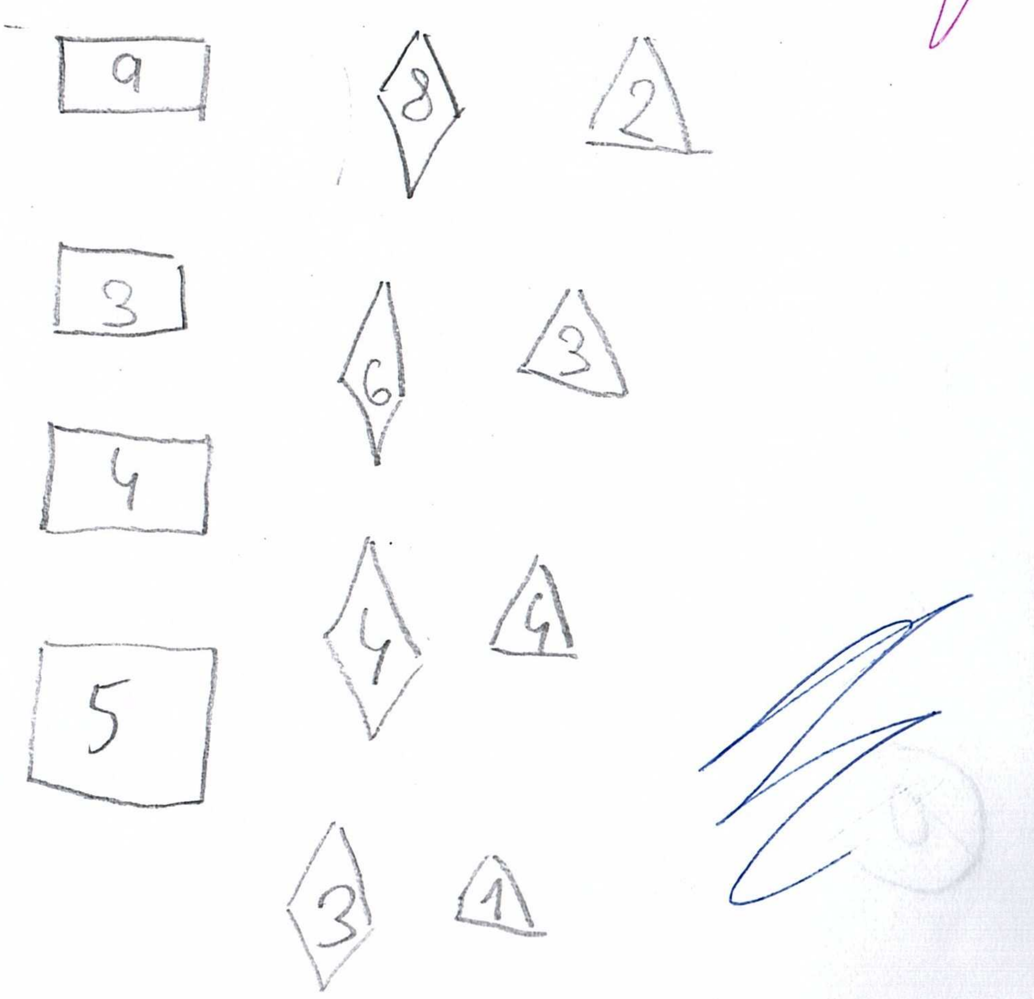
13 = [ ] + [ ] + [ ]

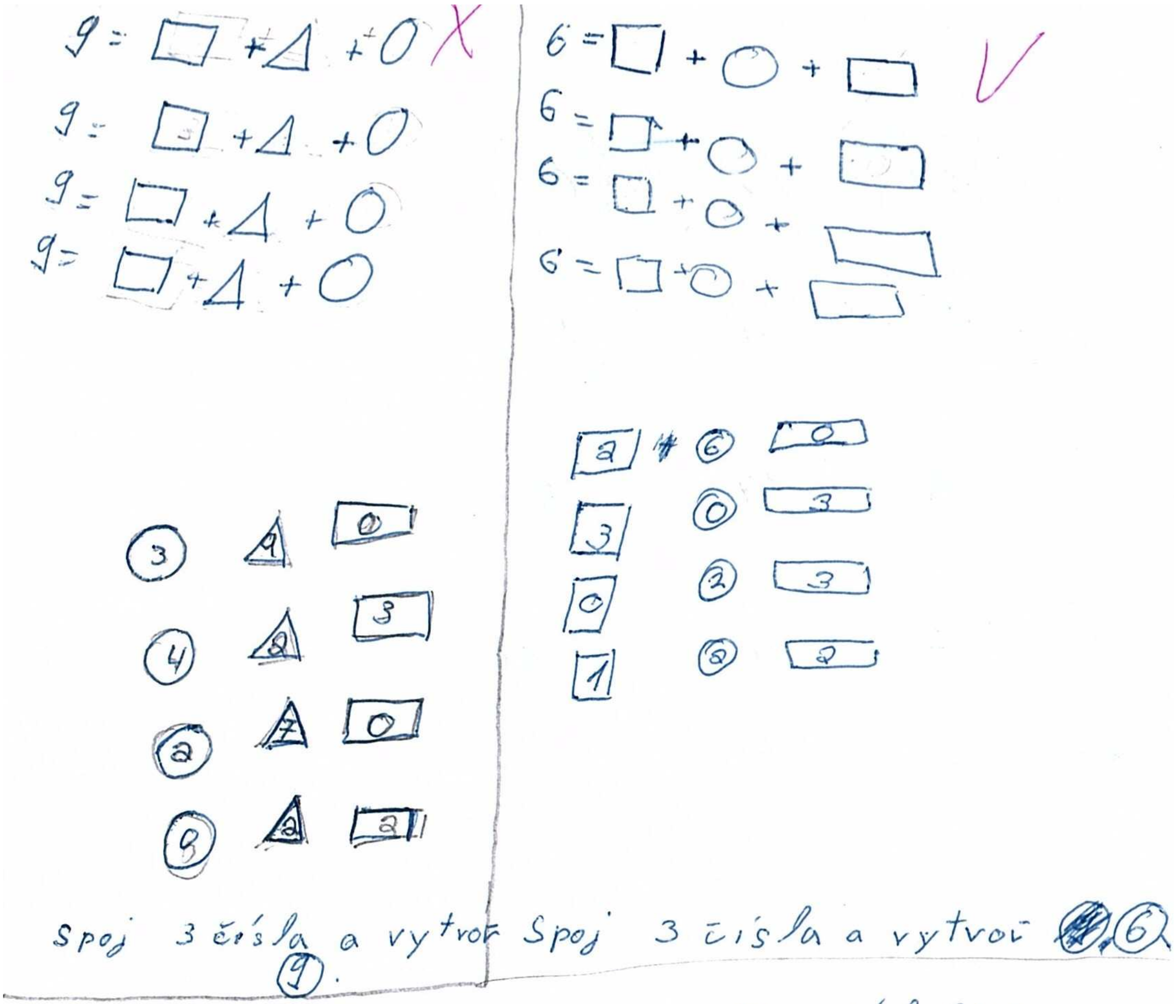
13 = [ ] + [ ] + [ ]

Nejdřív jsem si napsala ty 13 a to = pak ty obdélníky a + potom kosočtverce a zase + a pak trojúhel a pak jsem jsi tam doplňovala tři čísla. Potom jsem to opsala dolů a vygumovala tři čísla co jsem si doplnila nahoře.

Vítara

Spoj tři čísla a vytvoř dvanáctku.





Nejdříve jsem si vymyslela číslo (9, 6).
Pak jsem si napsala geometrické tvary.
Do nich jsem napsala čísla aby to vycházelo.
Když mi to vycházelo přepsala jsem úlohu.

Spoj 3 a vytvoř 18 Adam

18 = □ + ◇ + □

18 = □ + ◇ + □

18 = □ + ◇ + □

18 = □ + ◇ + □

10

5

9

6

11

8

7

1

2

7

4

0

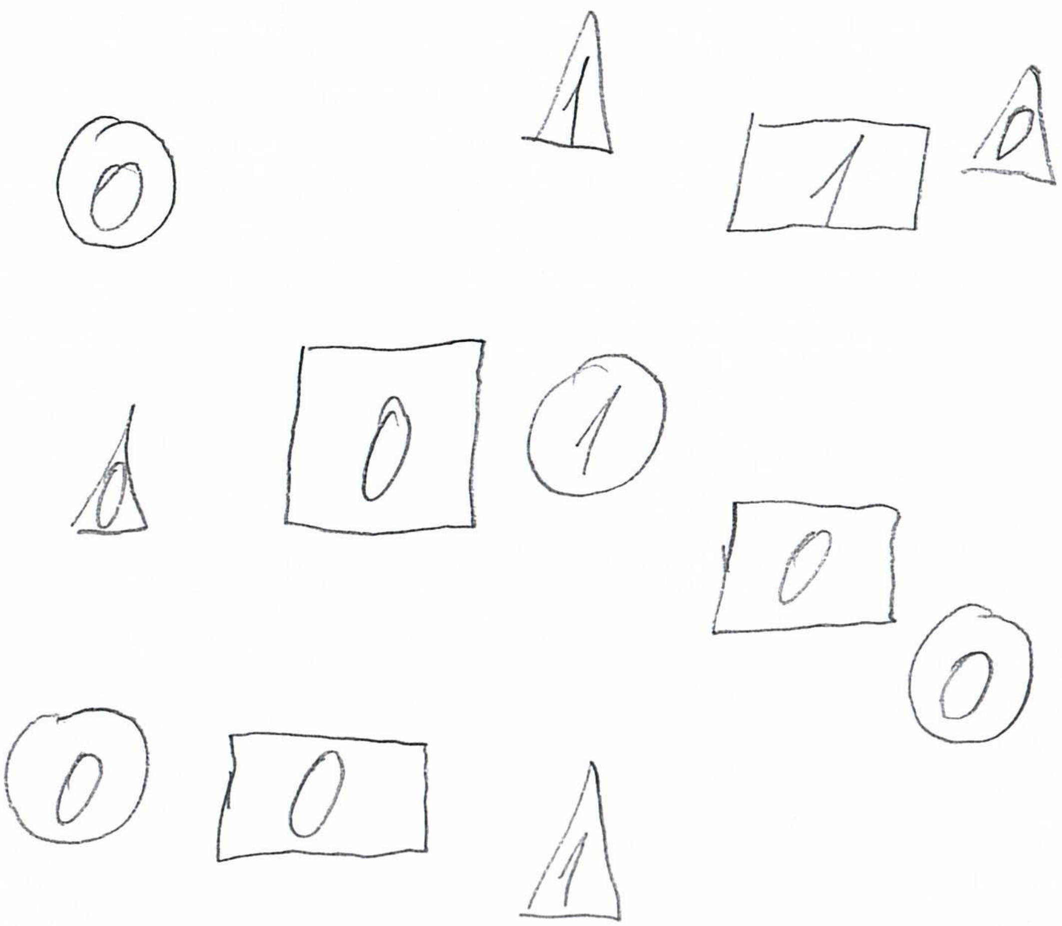
Miša

1 = △ + ○ + □

1 = △ + ○ + □

1 = △ + ○ + □

1 = △ + ○ + □



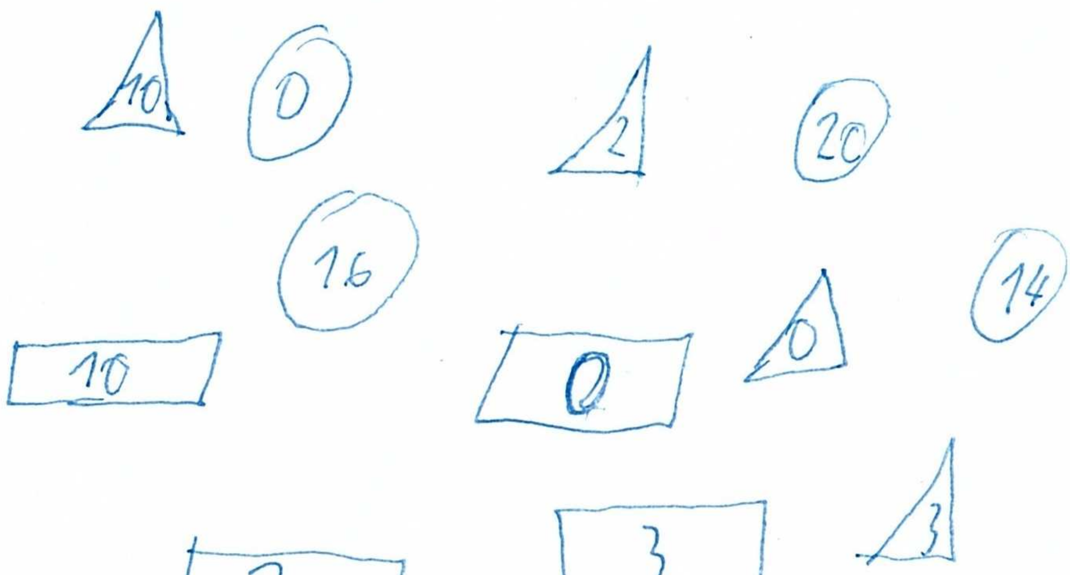
Spoj 3 čísla a vytvoř 20

20 = □ + △ + ○

20 = □ + △ + ○

20 = □ + △ + ○

20 = □ + △ + ○



$12 = \boxed{11} + \triangle\, 1 + 0$

$12 = \boxed{0} + \triangle\, 2 + 10$

$12 = \boxed{2} + \triangle\, 4 + 3$

$12 = \cancel{\boxed{2}} + \cancel{\triangle\, 4} + \cancel{3}$

5 4 6

$\boxed{3}$ $\triangle\, 7$ $\cancel{\boxed{11}}$ $\triangle\, 1$

5 $\boxed{0}$ 10 3

$\boxed{2}$ $\triangle\, 4$ $\triangle\, 2$ 0

$13 = \square + \triangle + \bigcirc$

$13 = \square + \triangle + \bigcirc$

$13 = \square + \triangle + \bigcirc$

$13 = \square + \triangle + \bigcirc$