Posudek oponenta na disertační práci Mgr. Martina Koce
Sigma-porous sets and the differentiation theory

Předložená práce sestává z předmluvy a pěti kapitol. Každá kapitola odpovídá jedné vědecké práci autora. Dvě z nich (kapitoly číslo 3 a 5) napsal Mgr. Koc společně s prof. Zajíčkem. Kromě poslední práce byly všechny již publikovány.

1. Upper porous sets which are not-σ-lower porous. Hlavním výsledkem první kapitoly práce je následující věta.

Věta. *Nechť (X, ρ) je neprázdný topologicky úplný metrický prostor bez izolovaných bodů. Potom existuje uzavřená (g_1)-shell pórovitá množina $F \subset X$, která není σ-(g_2)-zdola pórovitá.*

Funkce g_1 a g_2 splňují jisté přirozené předpoklady a slouží jako jakási škála, vzhledem ke které se měří velikost pórů uvažované množiny. Výsledek v jistém smyslu krajním způsobem ukazuje rozdílnost mezi pórovitostí zdola a pórovitostí shora, protože shell pórovitost klade velmi silné požadavky na „tvar“ pórů.

Myšlenka důkazu je standardní a opírá se o Baireovu větu. Provedená konstrukce však vyžaduje jistou technickou zručnost. Výsledek doplňuje řadu předchozích výsledků obdobného typu.

2. Upper porosity with respect to measures. V této práci Mgr. Koc studuje několik pojmů měrové pórovitosti, kde póry dané množiny nemusí být s množinou disjunktní, ale jejich průnik s ní musí být malý vzhledem k dané míře. Hlavní výsledek ukazuje ekvivalenci několika takových pojmů. Výsledky se opírají o pěknou dekompoziční větu, která říká, že množina je σ-μ-(g)-shora pórovitá, právě když se dá rozložit na σ-(g)-shora pórovitou množinu a μ-nulovou množinu.

3. On Kantorovich's result on the symmetry of Dini derivatives. Je-li $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ reálná funkce, potom symbol A_f označuje množinu bodů, ve kterých je funkce f lipschitzovská zleva ale ne zprava. V této kapitole je hlavním výsledkem následující věta.

Věta. *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$ a $A \subset (a,b)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) *Existuje spojitá funkce $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ splňující $A \subset A_f$.*
(ii) *Existuje funkce $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ splňující $A \subset A_f$.*
(iii) *Existuje posloupnost $(A_n)_{n=1}^\infty$ silně zprava pórovitých množin taková, že $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ a $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$.*

Výsledek navazuje na předchozí práce Kantoroviche [3], Thomsona [4] a Zajíčka [5]. Zajímavá je i část věnovaná monotónním sjednocením P-pórovitých množin a P-reducibilním množinám, kde P je abstraktní pórovitost. Kapitola obsahuje také zajímavé otevřené problémy.

4. On relations among metric derived numbers. V této kapitole je hlavním výsledkem následující věta, která navazuje na výsledky v [2].

Věta. *Nechť X je metrický prostor a $f\colon \mathbb{R} \to X$ je spojitá funkce. Potom množina bodů, kde dolní derivované číslo zprava je různé od dolního derivovaného čísla zleva, je první kategorie v $\mathbb{R}$.*

5. A joint generalization of two extension theorems. Poslední kapitola se týká rozšiřování diferencovatelných funkcí z uzavřených množin. Jde patrně o nejnáročnější část práce. Je zde dokázána následující věta, která zobecňuje výsledek z [1] a také Whitneyho větu o rozšiřování diferencovatelných funkcí.

Věta. *Nechť $F \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná uzavřená množina, $f\colon F \to \mathbb{R}$, $L\colon F \to \mathbb{R}^n$ je derivace f a L je třídy B_1 na F. Potom existuje funkce $\bar{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ taková, že*

(i) *$\bar{f}$ je diferencovatelná na $\mathbb{R}^n$,*
(ii) *$\bar{f}(x) = f(x)$ a $(\bar{f})'(x) = L(x)$ pro každé $x \in F$,*
(iii) *jestliže $a \in F$, L je spojitá v a a $L(a)$ je striktní derivace f v a, potom $(\bar{f})'$ je spojitá v a,*
(iv) *$\bar{f}$ je třídy $\mathcal{C}^\infty$ na $\mathbb{R}^n \setminus F$.*

Práce je velmi pěkně zpracovaná a dobře se čte. Důkazy jsou vedeny pečlivě a podrobně. Nalezl jsem pouze několik málo překlepů a drobných nedůsledností.

Mgr. Koc prokázal dobré porozumění studované problematice a také dovednost potřebnou pro sepsání technicky náročnějších důkazů. Práci Mgr. Martina Koce jednoznačně doporučuji k obhajobě.

LITERATURA

[1] V. Aversa, M. Laczkovich, and D. Preiss. Extension of differentiable functions. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 26(3):597–609, 1985.
[2] J. Duda and O. Maleva. Metric derived numbers and continuous metric differentiability via homeomorphisms. In *Banach spaces and their applications in analysis*, pages 307–330. Walter de Gruyter, Berlin, 2007.
[3] L. V. Kantorovich. Sur les nombres derivés des fonctions continues. *Rec. Math.*, 39:153–170, 1932.
[4] B. S. Thomson. *Real functions*, volume 1170 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
[5] L. Zajíček. On Dini derivates of continuous and monotone functions. *Real Anal. Exchange*, 7(2):233–238, 1981/82.

Doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D.